

Leçons de mathématiques à l'IRCAM
(pour musiciens et autres non-mathématiciens)
notes provisoires et inachevées

Yves André¹

16 décembre 2008

¹École Normale Supérieure, Département de mathématiques, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France.

Table des matières

0	Introduction	7
1	Topos de Grothendieck.	9
1.1	Topologie	9
1.1.1	Ce que c'est.	10
1.1.2	Voisinages.	11
1.1.3	Intérieur et frontière.	12
1.1.4	De l'espace topologique au treillis de ses ouverts.	13
1.1.5	Applications continues.	13
1.2	L'idée de surface de Riemann. Sites.	14
1.2.1	« Ambiguïtés ».	14
1.2.2	Revêtements à plusieurs feuillets.	14
1.2.3	Du treillis des ouverts aux sites de Grothendieck.	15
1.3	Du local au global. Faisceaux.	15
1.3.1	Données locales (préfaisceaux).	16
1.3.2	Recollement de données locales compatibles (faisceaux).	16
1.3.3	Théorie des obstructions et cohomologie des faisceaux.	17
1.4	Faisceaux sur un site. Topos de Grothendieck.	17
1.5	Interlude : catégories, foncteurs, adjonction.	18
1.5.1	Catégories.	18
1.5.2	Foncteurs.	19
1.5.3	Foncteurs adjoints.	19
1.5.4	Application : morphismes de topos et points d'un topos.	20
1.6	Topos et logique intuitionniste.	21
1.6.1	Les topos entre géométrie et logique.	21
1.6.2	Règles du calcul propositionnel : formulaire.	21
1.6.3	Logique intuitionniste et algèbres de Heyting.	22
2	Algèbres d'opérateurs.	23
2.1	Petite boîte à outils d'algèbre linéaire.	24
2.1.1	Espaces vectoriels.	25
2.1.2	Applications linéaires.	25
2.1.3	Bases, dimension, matrices.	26
2.1.4	Importance des problèmes linéaires.	26
2.1.5	Algèbres.	27
2.2	Espaces et fonctions. Vers la géométrie non commutative.	28
2.2.1	« Grandeur ».	28
2.2.2	« Localité ».	29
2.2.3	« Topographie ».	29

2.2.4	Le point de vue fonctionnel sur les espaces. Les points et leur ombre.	29
2.2.5	Comment le non commutatif s'introduit aussi subrepticement que naturellement dans le point de vue fonctionnel sur les espaces, en reléguant les points dans l'ombre. L'idée de géométrie non commutative.	30
2.3	Espaces de Hilbert et analyse fonctionnelle.	31
2.3.1	Espaces euclidiens.	31
2.3.2	Espaces de Hilbert.	33
2.3.3	Opérateurs sur un espace de Hilbert et algèbres stellaires.	34
2.4	Spectres.	34
2.4.1	De Newton à Gelfand.	34
2.4.2	Retour au point de vue fonctionnel. Les théorèmes de Gelfand et de Riesz.	35
2.5	Algèbres de von Neumann, facteurs et poids.	36
2.5.1	Ce que c'est.	36
2.5.2	Facteurs de type <i>II</i> et géométrie en dimension continue.	37
2.5.3	Facteurs de type <i>III</i> et dynamique.	38
2.5.4	Classification des facteurs moyennables.	38
2.5.5	Prolongements.	39
2.6	Coda : logique des interactions.	39
3	Idées galoisiennes.	41
3.1	Théorie de Galois des équations algébriques.	42
3.1.1	Résolubilité par radicaux.	42
3.1.2	Le groupe de Galois.	43
3.1.3	La correspondance de Galois.	44
3.2	Portée et enjeux de la « théorie de l'ambiguïté ».	45
3.2.1	Émergence d'un corps de concepts d'un type nouveau.	45
3.2.2	Fécondité du principe de correspondance galoisienne.	45
3.2.3	Thématisation des obstructions.	46
3.2.4	Changement de paradigme dans la conception des problèmes mathématiques.	47
3.3	Revêtements, groupes fondamentaux, dessins d'enfants.	47
3.3.1	La « montée vers l'absolu ». Le groupe $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$	47
3.3.2	Théorie de Galois des revêtements.	48
3.3.3	Une vision géométrique, voire graphique, de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$	49
3.4	Ambiguïtés galoisiennes en analyse.	49
3.5	Groupes de Galois motiviques et nombres transcendants.	50
3.6	Coda : un groupe de Galois « cosmique » ?	51
4	Représentations linéaires.	53
4.1	Linéarité. Linéarisation.	54
4.1.1	Bref retour à l'algèbre linéaire.	54
4.1.2	Linéarisation.	54
4.2	Le concept mathématique de représentation.	55
4.2.1	Objets généraux/objets particuliers.	56
4.2.2	Mode intrinsèque/mode extrinsèque.	57
4.2.3	Présentations.	57
4.2.4	Représentations.	58

4.2.5	Représentations linéaires.	59
4.3	Représentations linéaires des groupes.	60
4.3.1	Caractères : la théorie de Frobenius.	60
4.3.2	Représentations linéaires des groupes compacts et analyse harmonique. L'apport de Weyl.	61
4.3.3	Problème de Tannaka.	62
4.3.4	Représentations linéaires et mécanique quantique.	63
4.3.5	Représentations linéaires en dimension infinie. La théorie de von Neumann et l'école de Gelfand.	63
4.4	Représentations linéaires et problèmes de classification.	64
4.4.1	Classification des groupes finis simples.	64
4.4.2	Classification des groupes de Lie simples.	65
4.4.3	Classification des représentations linéaires et indécidabilité.	66
5	Singularités.	69
5.1	Généricité, lissité, singularités	69
5.1.1	Notion de singularité	69
5.1.2	Enjeux	70
5.1.3	Comment les singularités apparaissent	70
5.2	Points critiques	72
5.2.1	Linéarisation des champs de vecteurs	72
5.2.2	Points critiques	72
5.2.3	Points critiques génériques	73
5.2.4	Théorie de Morse	73
5.3	Généricité et stabilité	74
5.3.1	La dialectique générique/singulier selon Poincaré.	74
5.3.2	L'exemple des draperies	74
5.3.3	Singularités stables	76
5.4	Déploiements et catastrophes	76
5.4.1	Comment les singularités se déploient	76
5.4.2	Singularités simples	77
5.4.3	Géométrie symplectique et catastrophes	78
5.5	Le contexte analytique (<i>i.e.</i> « plus-que-lisse »).	78
5.5.1	Principe du prolongement analytique	78
5.5.2	Comment les singularités disparaissent	79
5.5.3	Le rôle des groupes platoniciens	80
6	Dualité.	81
6.1	Dualité linéaire	81
6.1.1	Débuts et vicissitudes de la géométrie projective	81
6.1.2	Dualité en géométrie projective	83
6.1.3	Formes linéaires et dualité	84
6.2	Dualités catégoriques	84
6.2.1	Exemple primordial : espaces vectoriels de dimension finie	84
6.2.2	Exemples	85
6.2.3	Produit tensoriel et dualité	85
6.3	Dualités analytiques	85
6.3.1	Dualité linéaire topologique	85
6.3.2	Distributions	86
6.3.3	Transformée de Fourier. Dualité onde-corpuscule	86

6.3.4	Transformée de Legendre. Mécanique lagrangienne et mécanique hamiltonienne	87
6.4	Dualités géométriques (homologiques)	87
6.4.1	Dualité de Poincaré	87
6.4.2	Dualité de De Rham-Hodge	88
6.4.3	Dualité de Maxwell	89
7	« Des infinis subtils ».	91
8	De l'art des conjectures.	93
8.1	L'arbuste	93
8.2	Le tricotin	95
8.3	Brouillards et analogies	96
8.4	Points de vue féconds	97
8.5	Conjectures	98
8.6	Conclusion	99

Chapitre 0

Introduction (provisoire).

L'objectif de chacune de ces leçons est de rendre compréhensible un concept central, une idée-force, de la mathématique contemporaine à des non-spécialistes (et d'abord à des musiciens) en tentant de les mener au cœur de la pensée mathématique active.

Il ne s'agira donc pas d'un cours au sens usuel : il n'y aura ni parcours univoque et graduel, ni visée de transmission/appropriation d'un savoir-faire mathématique particulier.

Il ne s'agira pas davantage d'une « entreprise scientifico-caritative », comme disait G. Châtelet, et nous éviterons les facilités de « la panoplie puérile charriée par le big-bang (qui ne cesse de commencer), le chaos (qui neutralise tout), la catastrophe (qui n'effraie plus grand monde), le fractal (qui fascine surtout les esprits un peu simples) »¹ - ainsi que les apories des théorèmes de Gödel (pour compléter la liste des thèmes-bateaux de la vulgarisation mathématique).

On saisira mieux la singularité de ce projet si l'on imagine ce que serait son symétrique : rendre « compréhensibles » des œuvres de la musique la plus contemporaine à des non-connaisseurs (par exemple mathématiciens), non par le biais d'un cours intensif de solfège, mais par une confrontation, préparée, aux œuvres elles-mêmes. L'analogie laisse penser que la compréhension passe par une phase de « choc » qu'il s'agit de dépasser ; elle suggère aussi à l'auditeur (lecteur) de ne pas chercher à s'appropriier le contenu des séances de cette école sur le mode des dictées musicales, mais à construire sa propre écoute².

Voici les quelques principes que nous suivrons au cours de cette entreprise.

1) Tout d'abord l'*absence de prérequis* mathématiques de la part du public (ce qui ne revient pas du tout à nier le rôle de la culture mathématique de chacun dans l'appropriation des exposés³). En revanche, nous supposerons acquis un intérêt a priori pour la pensée mathématique en général et ses liens avec d'autres modes de penser.

¹Gilles Châtelet, *les enjeux du mobile*, Seuil 1993, introduction.

²l'analogie rappelle aussi la bravade de G. Gould, prétendant que le piano pouvait s'enseigner en guère plus d'une heure. Toutefois, le parallèle tourne court : d'une part, il n'a jamais, semble-t-il, tenté l'expérience ; d'autre part, il ne s'agit pas ici, on l'a dit, de transmettre un savoir-faire.

³nous pouvons recommander, à cet égard, le livre "Mathematics, Form and Function" de S. MacLane, qui présente une sorte de catalogue raisonné, commenté et mis en perspective, des notions et résultats de base des mathématiques. Ce livre limpide et extrêmement soigné permet d'acquérir rapidement un solide bagage mathématique. Il ne s'y agit pas, toutefois, de rendre compte des enjeux et mouvements de pensée de la mathématique contemporaine.

Par ailleurs, durant ces exposés de trois heures chacun, nous demanderons beaucoup aux capacités de concentration et de synthèse du public (qui, après tout, est sans doute habitué à se concentrer totalement pendant les cinq heures d'écoute d'un Parsifal, sans perdre le fil des leitmotive). L'une des difficultés principales nous semble résider précisément dans la multiplicité des thèmes en jeu : autant d'idées à tisser qui ont une longue histoire chacune.

2) Le ou les concepts fondamentaux qui feront l'objet de chaque séance seront non seulement situés, mais aussi effectivement *présentés*. Il ne s'agira pas de les enrober d'un discours décoratif et métaphorique, mais d'aller « à la chose même ». On essaiera en contrepartie de réduire les détails techniques au minimum compatible avec cette exigence.

3) Les concepts fondamentaux qui seront présentés seront choisis sur le critère qu'ils condensent des points de vue mathématiques sur des *notions communes* - i. e. n'appartenant pas en propre à la mathématique - telles qu'espace, symétries, singularités etc... Chacun pourra alors confronter ces points de vue mathématiques aux points de vue qui lui sont plus familiers - musicaux, architecturaux, picturaux, ou philosophiques - sur ces notions communes, et disposer ainsi d'un point d'ancrage sûr.

4) On veillera à ce que les concepts présentés (principaux ou auxiliaires) réapparaissent au fil des séances sous diverses perspectives, de manière à favoriser une compréhension rétrospective.

Chapitre 1

Espace I. Topos de Grothendieck

« C'est le thème du topos qui est ce « lit » où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures « discontinues » ou « discrètes ». Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une « essence » commune à des situations des plus éloignées les unes des autres. »
A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, p. 59.

Les deux premières leçons évoquent deux points de vue mathématiques les plus avancés et les plus profonds sur la notion commune d'*espace* : la géométrie des topos initiée par Alexander Grothendieck¹, et la géométrie non commutative initiée par Alain Connes².

Dans les deux cas, on verra l'espace se métamorphoser et les points disparaître.

Nous commençons par la théorie des topos, qui peut être vue comme une vaste extension de la topologie générale. D'inspiration algèbro-géométrique, elle intègre et fusionne l'idée de surface de Riemann et celle de faisceau.

La « morale » de l'histoire se trouve aux paragraphes 4 et 6.1.

1.1 Topologie

Ce que l'on appelle aujourd'hui *topologie générale* est l'étude mathématique *qualitative* des « lieux » et des « rapports spaciaux » : elle théorise les notions de proximité, frontière, localité, continuité etc... et leurs liens mutuels.

¹en partie inspirée par la théorie des faisceaux de Leray et Cartan.

²en partie inspirée par la mécanique quantique.

On peut sans doute faire remonter le projet de la topologie (analysis situs, en latin) à Leibniz, mais c'est Riemann qui en jeta les bases dans sa célèbre dissertation, et la topologie générale fut ensuite axiomatisée par Hausdorff (1914).

Topologie désigne à la fois un chapitre des mathématiques et un objet mathématique dont s'occupe cette discipline.

1.1.1 Ce que c'est.

Lisons donc la définition d'une topologie dans le « texte canonique » : Bourbaki, *Topologie générale*, chapitre 1³.

« DÉFINITION 1. On appelle *structure topologique* (ou plus brièvement *topologie*) sur un ensemble X une structure constituée par la donnée d'un ensemble \mathfrak{D} de parties de X possédant les propriétés suivantes :

(O_I) Toute réunion d'ensembles de \mathfrak{D} est un ensemble de \mathfrak{D} .

(O_{II}) Toute intersection finie d'ensembles de \mathfrak{D} est un ensemble de \mathfrak{D} .

Les ensembles de \mathfrak{D} sont appelés *ensembles ouverts*.

DÉFINITION 2. On appelle *espace topologique* un ensemble muni d'une structure topologique.

Les éléments d'un espace topologique sont appelés *points*. [...] L'axiome (O_I) implique en particulier que la réunion de la partie vide de \mathfrak{D} , c'est-à-dire *l'ensemble vide*, appartient à \mathfrak{D} . L'axiome (O_{II}) implique en particulier que l'intersection de la partie vide de \mathfrak{D} , c'est-à-dire de *l'ensemble X* , appartient à \mathfrak{D} . »⁴.

Écoutons à présent le commentaire du poète mathématicien J. Roubaud⁵ :

« J'ai lu et relu d'innombrables fois ces définitions, toute cette première page et les pages suivantes, sans rien comprendre, littéralement sans rien comprendre. Mais je n'ai pris que peu à peu conscience du fait que la difficulté essentielle venait non d'une extrême impénétrabilité du sujet (ce n'est certes pas le cas) ni d'une incapacité congénitale de ma part à le comprendre (heureusement), mais de ce que je ne savais pas lire.

[...] Le mode de lecture romanesque, l'extrême rapidité qui m'était coutumière depuis l'enfance pour la dévoration des romans, ne pouvait à l'évidence pas me servir dans ces circonstances nouvelles.

[...] Restait la poésie. [...] (à la différence de ce qui se passait pour la prose) je relisais la poésie sans cesse jusqu'au point d'une réappréhension de tous ses éléments au présent, dans la simultanéité du temps intérieur. [...] Je me mis donc, et sans réfléchir, à lire les paragraphes du chapitre 1 du livre de Topologie comme s'il s'agissait d'une séquence de poèmes. »

Qu'est-ce donc que comprendre une notion mathématique ?

³Hermann, 1971.

⁴ce commentaire de Bourbaki sur la définition 1, qui semble de prime abord assez obscur, explique que, comme conséquence des axiomes, dans tout espace topologique X , le tout X et la partie vide \emptyset sont des ouverts : pour Bourbaki (bon barbier selon Ockham), une réunion vide de parties (de X) est la partie vide, une intersection vide de parties est la partie pleine. Cela se justifie pleinement du point de vue « catégorique », mais guère du point de vue pédagogique, et bien d'autres exposés préfèrent être clairs et pêcher par redondance en ajoutant aux axiomes (O_I) et (O_{II}) l'axiome suivant lequel X et \emptyset sont des ouverts.

⁵« Mathématique : (récit) », Seuil 1997, p. 159-160.

C'est plus subtil, semble-t-il, que comprendre une démonstration. Comprendre littéralement - connaître la signification des termes employés dans la définition formelle - n'est clairement pas suffisant : Il faut un complément heuristique. Il ne suffit pas de savoir lire. Il faut disposer d'exemples significatifs pour donner corps à la définition, et éventuellement de contre-exemples pour la baliser. Il faut par ailleurs saisir la motivation et surtout l'usage de cette notion, ce qui relève tant de la connaissance de l'histoire de la discipline que de la pratique. Enfin et surtout, il faut voir « fonctionner » la définition dans divers contextes.

L'exemple de base d'un espace topologique est bien entendu la droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie dont les ouverts sont les réunions (éventuellement infinies) d'intervalles privés de leurs extrémités.

Plus généralement, l'espace \mathbb{R}^n à n dimensions muni de la topologie dont les ouverts sont les réunions de boules ouvertes⁶.

1.1.2 Voisinages.

Un *voisinage* d'un point $x \in X$ est une partie de X contenant un ouvert contenant x .

Si cette notion dérive de celle d'ouvert, on récupère, réciproquement, la notion d'ouvert à partir de celle de voisinage : un ouvert est une partie de X qui est voisinage de chacun de ses points. Ces notions sont ainsi logiquement équivalentes et il est donc possible de définir, de manière équivalente, une topologie par une axiomatique des voisinages. Cette axiomatique consiste en fait à dire que l'ensemble $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages d'un point quelconque $x \in X$ forme un *filtre*, à savoir :

(V_I) Toute partie de X qui contient un élément de $\mathfrak{V}(x)$ (c'est-à-dire un voisinage de x) est un élément de $\mathfrak{V}(x)$.

(V_{II}) Toute intersection finie de parties de X qui sont des éléments de $\mathfrak{V}(x)$ est un élément de $\mathfrak{V}(x)$.

(V_{III}) Le vide n'est pas un élément de $\mathfrak{V}(x)$ (en effet x appartient à chacun de ses voisinages).

Revenons au problème de la compréhension des notions mathématiques. Il s'agit de ce que j'en ai dit qu'il s'agit d'un processus progressif - qui peut passer par le malentendu. Il est en tout cas fort utile de se forger une représentation (même fantaisiste) donnant un contenu intuitif à la présentation formelle - sans jamais toutefois confondre celle-ci avec celle-là.

Écoutons par exemple le commentaire de Roubaud à propos du filtre des voisinages⁷ :

« C'est ici que le mot *filtre*, et l'image qu'aussitôt il évoque vient s'interposer entre la topologie telle qu'elle est [...] et le souvenir que j'en ai gardé.

Cela veut dire qu'il ne m'était pas possible alors, qu'il ne m'est pas possible encore aujourd'hui de ne pas voir ces filtres, et surtout de ne pas les voir comme liés, et même surimprimés à une représentation mentale de ces objets exaspérants qu'étaient les cafés-filtres des cafés.

[...] Je pense tout particulièrement à la lenteur générale de l'écoulement de leur contenu, cette soupe brunâtre qualifiée sans honte de café, qui m'amenait

⁶la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'ensemble des points à distance strictement inférieure à r de x .

⁷*op. cit.* pp. 164-165, 199.

à les saisir, en dépit de toutes mes expériences antérieures, avant l'achèvement du trajet de haut en bas du liquide et par conséquent à me brûler les doigts ; puis à me brûler la langue en essayant de m'en débarrasser trop tôt en les buvant. Je les vois et je vois aussitôt quelque chose comme une icône d'espace topologique, une sorte de grande prairie de « points », chacun placé au-dessous d'une tasse-filtre, son « filtre de voisinages ».

[...] Cette image donnait à l'idée de point une tout autre représentation que celle de la géométrie élémentaire scolaire et elle s'est pour moi entièrement substituée à la première.

Et je ne vous parlerai pas des divins et singuliers ultrafiltres.

[...] Si je m'y attarde un peu, le paysage glisse vers autre chose, vers un support de narration ; il devient un paysage « carrollien », où une licorne vient boire dans les tasses avec une unique paille au-dessus de son unique corne. Elle en fausse la topologie, bien sûr. [...] Tel est le scénario irrémédiablement frivole, mathématiquement irresponsable, dont j'accompagne en pensée l'idée de topologie. [...] On ne commande pas aisément ce qui peuple notre espace intérieur, et ses lointains. »

1.1.3 Intérieur et frontière.

L'intérieur d'une partie A de X est l'ensemble des points de A dont A est un voisinage. On le note $\overset{o}{A}$.

C'est encore une notion logiquement équivalente à celle d'ouvert : une partie est ouverte si et seulement si elle est son propre intérieur. On peut donc définir une topologie par une axiomatique des intérieurs⁸ :

$$\overset{o}{X} = X, \overset{o}{A} \subset A, (A \cup B) = \overset{o}{A} \cup \overset{o}{B}, \overset{oo}{A} = \overset{o}{A}.$$

La frontière d'une partie A de X est l'ensemble des points de X qui ne sont ni à l'intérieur de A , ni à l'intérieur du complémentaire de A .

Voici la vision « éthologique » de l'intérieur et de la frontière (d'un territoire) que propose le mathématicien R. Thom⁹, fondateur d'une théorie topologique de la morphogenèse :

« Si l'on examine les emplois actuels du mot *lieu* en français, on observera qu'un lieu demande toujours un habitant qui en fait sa résidence. [...] De là l'hypothèse que le mot *topos* implique un être humain ou un animal qui séjourne (normalement) en ce lieu.

[...] On peut partir de l'hypothèse (simpliste) qu'Aristote, s'imaginant un être vivant, le dotera d'un territoire. [...] Mais ce domaine aura, dans la pratique, des bornes que l'individu préférera ne pas franchir. De là la notion [...] de limites : les *eschata*.

[...] En fait, selon la conception ici proposée, la théorie des lieux serait liée à un problème central de l'éthologie actuelle : comment un animal (ou un humain) se repère-t-il au sein de son territoire ? »

⁸C'est cette axiomatique qui est utilisée, par exemple, par A. Badiou, « Logiques des Mondes », Seuil 2006, ch. VI.

Ici, comme dans toute la suite, on utilise les symboles « ensemblistes » usuels : \cap pour l'intersection de deux ou plusieurs parties d'un ensemble, \cup pour leur réunion, $X \setminus A$ pour le complémentaire de la partie A dans l'ensemble X , $A \subset X$ pour indiquer que A est une partie de X , $x \in X$ pour indiquer que x est un élément de X (ou, en langage géométrique, que x est un point de l'espace X).

⁹ « Aristote topologue », Revue de Synthèse (1999), 39-48.

1.1.4 De l'espace topologique au treillis de ses ouverts.

Bien que moins « intuitive » que la notion de voisinage, la notion d'ouvert s'avère souvent techniquement plus utile.

L'ensemble \mathfrak{D} des ouverts d'un espace topologique X est muni d'une structure de *treillis* : c'est un ensemble (partiellement) ordonné¹⁰ (par l'inclusion \subset), muni de deux lois de composition associatives \cap et \cup (en général : la borne inférieure et la borne supérieure ; ici, l'intersection et la réunion) qui vérifient la propriété suivante :

$$\text{pour tous } U, V \in \mathfrak{D}, U \cap (U \cup V) = U \cup (U \cap V) = U.$$

En associant à l'espace topologique (X, \mathfrak{D}) le treillis des ouverts \mathfrak{D} , il semble donc qu'on oublie les points de X . Or il n'en est rien : sous une condition extrêmement faible de séparation des points - la *sobriété*, toujours vérifiée en pratique - on ne perd rien : *on peut reconstruire l'ensemble X à partir du treillis \mathfrak{D} .*

L'idée est simple : on identifie un point $x \in X$ au filtre de ses voisinages ouverts.

1.1.5 Applications continues.

Une application¹¹ $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est dite *continue* si l'image *inverse* par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X ; autrement dit, si pour tout ouvert V de Y , l'ensemble U des points de X que f envoie dans V est un ouvert de X .

Une telle application f induit donc une application f^* , dans l'autre sens, entre le treillis des ouverts de Y et celui des ouverts de X .

Exemple. Lorsque l'espace but Y est \mathbb{R} ou \mathbb{C} muni de sa topologie naturelle¹², on dit que f est une fonction¹³ continue (à valeurs réelles ou complexes). L'algèbre $C(X, \mathfrak{D})$ que forment ces fonctions jouera un rôle-clé au chapitre suivant.

Terminons ce paragraphe en concluant que la topologie générale a réussi à *formaliser les notions de voisinage, frontière, continuité* (et bien d'autres : limites, connexité, compacité etc...) *de manière purement qualitative, sans faire appel à la notion de distance ou de mesure.*

¹⁰un ordre \leq sur un ensemble X est une relation binaire $x \leq y$ entre des éléments de X qui vérifie les conditions suivantes : $x \leq x$, $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$, $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

¹¹c'est-à-dire une règle qui associe à tout élément de X un élément de Y . On la note souvent $x \mapsto f(x)$, x désignant un élément quelconque de X .

¹²rappelons que les nombres complexes s'écrivent sous la forme $z = x + \sqrt{-1}y$ où x et y sont des nombres réels, et $\sqrt{-1}$ est le nombre « imaginaire » racine carrée de -1 . Ainsi, \mathbb{C} s'identifie canoniquement à \mathbb{R}^2 (en décomposant tout nombre complexe z en sa partie réelle x et sa partie imaginaire y), ce qui donne la topologie sur \mathbb{C} .

Rappelons par ailleurs que le conjugué de z , noté \bar{z} , est le nombre complexe $x - \sqrt{-1}y$; le module de z , noté $|z|$, est la racine carrée de $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

¹³une *fonction* f sur un ensemble X est une règle qui associe à tout élément de X (ou parfois, selon le contexte, seulement à certains d'entre eux) un nombre réel ou complexe.

1.2 L'idée de surface de Riemann. Sites.

1.2.1 « Ambiguïtés ».

Tout polynôme, tel que x^2 ou bien $x^3 + x$ définit une fonction continue d'une variable, réelle ou complexe :

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^3 + x.$$

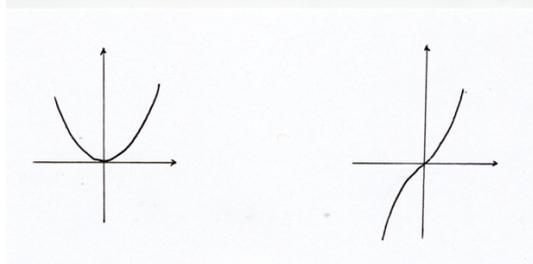


FIG. 1.1 – Fig 1.1

La situation est plus délicate pour une fonction algébrique telle que \sqrt{x} ou bien $\sqrt{x^3 + x}$. Elle définit bien une fonction (continue) d'une variable réelle positive. En revanche, elle n'est pas bien définie en tant que fonction d'une variable complexe : si l'on part d'un point x non nul, et qu'on tourne autour de 0, cette fonction variera continûment, mais en revenant à x au bout d'un tour, la valeur ne sera pas la valeur initiale, mais son opposé : $-\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x^3 + x}$. On n'obtiendra la valeur initiale qu'au bout d'un second tour.

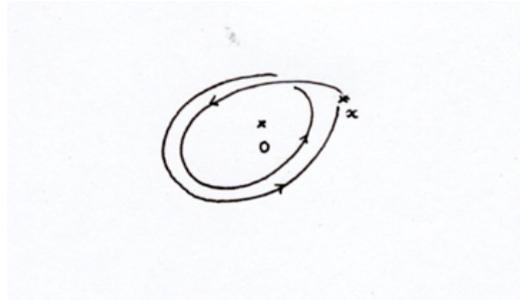


FIG. 1.2 – Fig 1.2

Il y a donc une ambiguïté (dans notre exemple : un signe) qui empêche de considérer une fonction algébrique comme une fonction (d'une variable complexe) bien définie.

1.2.2 Revêtements à plusieurs feuillets.

C'est Riemann qui a trouvé comment lever l'ambiguïté et donner à ces soi-disantes fonctions « multiformes » f le statut d'authentiques fonctions bien définies¹⁴. Pour cela, il convient de regarder f comme une fonction définie non pas sur le plan complexe $X = \mathbb{C}$ ou l'un de ses ouverts, mais sur un certain *revêtement à plusieurs feuillets* de \mathbb{C} , (appelé *surface de Riemann* de f).

¹⁴voir par exemple l'ouvrage classique de H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1913.

L'exemple de $f(x) = \sqrt{x}$ est trivial à cet égard : on considère une autre copie Y de \mathbb{C} qu'on voit comme revêtement à deux feuillets du plan complexe original X via la fonction $y \mapsto x = y^2$ (les deux feuillets se touchent au point de ramification $y = 0$). Alors f devient la fonction identique $y \mapsto y = \sqrt{x}$ sur Y .

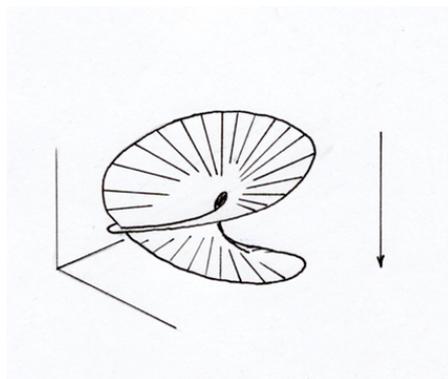


FIG. 1.3 – Fig 1.3

Nettement plus subtil est le cas de $f(x) = \sqrt{x^3 + x}$. Sa surface de Riemann est encore un revêtement à deux feuillets (qui se touchent en trois points de ramification), qui n'est plus du tout le plan complexe (c'est ce que l'on appelle une courbe elliptique : topologiquement, c'est une « bouée »).

1.2.3 Du treillis des ouverts aux sites de Grothendieck.

Retenons de cela que pour traiter correctement des fonctions algébriques, il convient de remplacer les ouverts de X par des revêtements à plusieurs feuillets d'ouverts de X .

Grothendieck, élargissant cette idée aux variétés algébriques de dimension quelconque, a proposé de généraliser « catégoriquement » la notion de topologie de la manière suivante, en introduisant les sites.

Un *site* est une catégorie \mathcal{S} muni de la donnée, pour chaque objet U de \mathcal{S} , de familles $(U_i \rightarrow U)$ (dites couvrantes) de morphismes de but U , stables par changement de base et composition.

Tout espace topologique classique fournit un site : le treillis de ses ouverts (vu comme catégorie, les morphismes étant donnés par les inclusions¹⁵), une famille couvrante de but l'ouvert U étant une collection d'ouverts U_i contenus dans U dont la réunion est égale à U .

La première application (et la plus importante, sans doute) de cette généralisation de la notion de topologie est la construction du site étale attaché à une variété algébrique X , dont les objets sont les morphismes $U \rightarrow X$ « étales », c'est-à-dire à un nombre fini de feuillets qui ne se touchent pas (pas de ramification). Ce site pallie l'absence de théorème des fonctions implicites en géométrie algébrique.

1.3 Du local au global. Faisceaux.

« Un des traits caractéristiques du développement des mathématiques depuis le milieu du XIX^e siècle, c'est que les recherches mathématiques les plus différentes aient pu être poursuivies à un double point de vue, le point de vue

¹⁵voir plus bas, 5.1.

local et le point de vue global. L'étude locale se porte vers l'élément, le plus souvent infinitésimal, de la réalité [...] L'étude globale cherche au contraire à caractériser une totalité indépendamment des éléments qui la composent ; elle s'attaque d'emblée à la structure de l'ensemble [...].

La dualité du point de vue local et du point de vue global s'est tout d'abord présentée aux mathématiciens comme une opposition entre deux modes d'étude, irréductibles l'un à l'autre. Il semblait qu'il fallût choisir entre ces deux conceptions incompatibles [...] »

écrivait le philosophe A. Lautman¹⁶ peu d'années avant l'introduction des faisceaux.

1.3.1 Données locales (préfaisceaux).

Rappelons que les *variétés* de dimension n sont des objets géométriques *localement* isomorphes à des ouverts de \mathbb{R}^n .

En général, bien entendu, elles ne sont pas globalement isomorphes à des ouverts de \mathbb{R}^n (penser au ruban de Möbius ou à la bouée).

Les problèmes de passage du local au global (problèmes de recollement, en particulier) sont fondamentaux en géométrie (et au-delà). Un concept universel pour poser et traiter ces problèmes est celui de *faisceau*, introduit par J. Leray vers 1945 et mis au point par H. Cartan.

Pour commencer, on formalise l'idée de données locales par la notion de *préfaisceau* : un *préfaisceau* \mathcal{F} sur un espace topologique X est une règle qui associe à chaque ouvert U de X un ensemble $\mathcal{F}(U)$ (de « données locales ») et à chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$ une application dite de *restriction* $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$. On demande que pour une inclusion composée $W \subset V \subset U$, la restriction correspondante soit la composée des restrictions.

Les éléments de $\mathcal{F}(U)$ s'appellent les *sections* de \mathcal{F} au-dessus de U .

Un morphisme de préfaisceau $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est la donnée, pour tout ouvert U d'une application $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ compatible aux applications de restriction.

1.3.2 Recollement de données locales compatibles (faisceaux).

Un préfaisceau \mathcal{F} est un faisceau si toute famille $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ de sections « locales » compatibles (*i.e.* telles que les restrictions de s_i et s_j coïncident dans $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$) se recolle en une unique section « globale » $s \in \mathcal{F}(\bigcup U_i)$ (dont la restriction à U_i est s_i). Ici les U_i sont des ouverts quelconques de X .

Donnons quelques exemples.

Si X est un espace topologique, les fonctions continues forment un faisceau sur X .

Si X est en outre une variété lisse (ou algébrique), on dispose du faisceau \mathcal{T}_X des champs de vecteurs tangents sur X .

On dispose aussi du faisceau d'orientation ε_X , dont les valeurs sont contenues dans $\{1, -1\}$ (X est orientable si et seulement si $\varepsilon_X(X) \neq \emptyset$).

¹⁶Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. Réédition Vrin 2006, p. 133.

1.3.3 Théorie des obstructions et cohomologie des faisceaux.

L'obstruction à recoller des données locales s'exprime donc en général par le fait qu'un certain préfaisceau n'est pas un faisceau. Mais on peut souvent aller plus loin, et donner à une telle obstruction le statut d'un objet mathématique.

Voici un cas typique. Considérons un faisceau abélien \mathcal{F} (c'est-à-dire un faisceau de groupes commutatifs), et un sous-faisceau abélien \mathcal{G} . On peut alors former le quotient au sens naïf : c'est le préfaisceau qui associe à tout ouvert U le groupe quotient $\mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$. En général, ce n'est pas un faisceau : l'obstruction à ce qu'il en soit ainsi peut être vue comme un élément d'un certain « groupe de cohomologie » $H^1(\mathcal{G})$.

La théorie des obstructions a pour objet de fournir des interprétations « cohomologiques » aux obstructions à diverses constructions mathématiques : recollement, déformation, etc... Par exemple, l'obstruction à déformer un variété X peut être vue comme un élément du groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{T}_X)$.

Dans un second volet, la théorie fournit des critères généraux pour l'annulation de ces groupes de cohomologie (annulation qui entraîne l'absence d'obstruction au problème posé).

Par ailleurs, les obstructions elles-mêmes, une fois interprétées cohomologiquement, posent des problèmes de recollement, qui conduisent à considérer aussi des obstructions supérieures, qui vivent dans des groupes $H^i(U, \mathcal{F})$, $i > 1$. La cohomologie des faisceaux¹⁷, c'est-à-dire la théorie de ces groupes $H^i(U, \mathcal{F})$, est un outil très souple et fondamental en géométrie analytique ou algébrique.

1.4 Faisceaux sur un site. Topos de Grothendieck.

Comme Grothendieck l'a observé, la définition des préfaisceaux et faisceaux se transpose à tout site \mathcal{S} : un préfaisceau sur \mathcal{S} est un foncteur contravariant \mathcal{F} de \mathcal{S} vers la catégorie des ensembles, et c'est un faisceau si pour toute famille couvrante $(U_i \rightarrow U)$, une section globale $s \in \mathcal{F}(U)$ s'identifie à une famille de sections locales $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ « compatibles ».

Dans le cas où $\mathcal{S} = \mathcal{D}$ est le treillis des ouverts d'un espace topologique X , on retrouve bien la notion de faisceau sur X .

Grothendieck appelle *topos* toute catégorie \mathcal{X} équivalente à la catégorie $\mathcal{Faisc}_{\mathcal{S}}$ des faisceaux sur un site.

Exemples : le topos ponctuel, *i.e.* la catégorie des faisceaux sur l'espace-point, n'est autre que la catégorie des ensembles.

Si G est un groupe, la catégorie BG des ensembles sur lequel G opère est un topos.

Le topos étale d'une variété algébrique X est la catégorie des faisceaux sur le site étale de X . Chaque topos donne lieu à une théorie de cohomologie. Celle du topos étale, appelée *cohomologie étale* s'est avérée parfaitement adaptée à la géométrie algébrique et a constitué l'outil principal de démonstration des conjectures de Weil¹⁸.

¹⁷dont les pionniers sont Cartan, Serre et Grothendieck.

¹⁸ces conjectures arithmético-géométriques qui datent de 1949 concernent le nombre de solutions modulo un nombre premier - ou plus généralement dans un corps fini - d'un système d'équations polynomiales à coefficients entiers. Elles étaient l'horizon des recherches de Grothendieck, et ont finalement été démontrées par lui-même et puis par Deligne (1973).

Des sites différents peuvent donner des topos équivalents. En revanche, le topos des faisceaux sur un espace topologique (sobre) détermine cet espace - nous verrons comment ci-dessous (5.4). C'est en ce sens qu'on peut dire que la notion de topos généralise celle d'espace topologique tout en englobant à la fois l'idée de surface de Riemann et celle de faisceau de Leray¹⁹. Au bout de ce double mouvement, on a remplacé les espaces topologiques par les topos de faisceaux associés :

$$\text{Espace topologique } (X, \mathfrak{D}) \rightsquigarrow \text{Site } \mathfrak{D} \rightsquigarrow \text{Topos } \mathcal{X} = \text{Faisc}_X.$$

Ce faisant, on n'a rien perdu, puisqu'on peut reconstruire l'espace topologique²⁰ à partir du topos associé, et on a gagné une structure beaucoup plus souple, puisque les topos permettent essentiellement toutes les opérations familières dans la catégorie des ensembles. En mettant l'accent sur les conditions de recollement, on a ainsi extrait les propriétés intrinsèques de localisation de X en « oubliant » ses points.

Comme l'écrit Grothendieck²¹ :

« Cette notion [de topos] constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, une *métamorphose de la notion d'espace*. [...] Elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici.

Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, en ce sens que dans les nouveaux « espaces », les intuitions et les constructions « géométriques » les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. [...]

Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature « topologico-géométrique » - aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires. »

1.5 Interlude : catégories, foncteurs, adjonction.

1.5.1 Catégories.

Les catégories ont fait leur apparition discrète à plusieurs reprises dans ce chapitre. La notion de foncteur vient même d'être évoquée. Il est temps de faire halte pour préciser ces notions fondamentales.

Une *catégorie* \mathcal{C} consiste d'une part en une collection d'objets A , et d'autre part en la donnée, pour tout couple d'objets (A, B) , d'un ensemble $\mathcal{C}(A, B)$ dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de A vers B .

On requiert que les morphismes se composent lorsque cela fait sens (*i.e.* le composé gf de $f \in \mathcal{C}(A, B)$ et de $g \in \mathcal{C}(B, C)$ est un élément de $\mathcal{C}(A, C)$), la composition étant associative. On requiert aussi qu'il y ait un morphisme identité 1_A de A vers lui-même, qui composé avec tout morphisme de source ou de but A , ne le modifie pas.

L'exemple de base est la catégorie *Ens* des ensembles (les morphismes entre deux ensembles étant les applications quelconques entre ces ensembles). On en dé-

¹⁹pour plus de précisions, voir le survol de L. Illusie, « What is a topos ? », Notices of the AMS 51, 9 (2004), 1060-1062

²⁰supposé sobre.

²¹« Récoltes et Semailles », notes miméographiées (désormais accessibles sur la Toile comme fichier pdf, §56-57.

duit d'autres catégories par addition de structure : la catégorie des espaces vectoriels (objets : espaces vectoriels, morphismes : applications linéaires), la catégorie des espaces topologiques (objets : espaces topologiques, morphismes : applications continues).

Dans les exemples de cette nature, la spécificité du point de vue catégorique (par opposition au point de vue ensembliste) consiste à ne considérer et manipuler que les espaces et surtout les morphismes qui les relient, et non les points : *on occulte délibérément la structure interne des objets, pour mettre l'accent sur leurs rapports mutuels.*

Voici d'autres exemples, où les objets ne sont plus des ensembles structurés :

- la catégorie \mathcal{Faisc}_X des faisceaux sur un espace topologique fixé X ,
- tout groupe peut être vu comme une catégorie à un seul objet, les morphismes étant les éléments du groupe,
- tout ensemble (partiellement) ordonné (X, \leq) - par exemple un treillis - peut être vu comme une catégorie (objets : les éléments x de X , morphismes de x vers y : un seul si $x \leq y$, aucun sinon).

1.5.2 Foncteurs.

De même que les ensembles sont reliés par des applications, les catégories sont reliées par des foncteurs, qui agissent tant sur les objets que sur les morphismes.

Un *foncteur* (covariant) $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ associe à chaque objet A de \mathcal{C} un objet $\phi(A)$ de \mathcal{D} et à chaque morphisme $f \in \mathcal{C}(A, B)$ un morphisme $\phi(f) \in \mathcal{D}(\phi(A), \phi(B))$. On requiert que ϕ préserve les identités et la composition.

Un *foncteur contravariant* ψ de \mathcal{C} vers \mathcal{D} est un foncteur $\psi : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$, où \mathcal{C}^{op} désigne l'opposée de \mathcal{C} , qui s'obtient en prenant les mêmes objets et en renversant le sens des flèches : $\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$.

Donnons deux types d'exemples, d'allure banale, mais très utiles en pratique :

- si \mathcal{C} est une catégorie d'ensembles enrichis d'une structure (espaces vectoriels, espaces topologiques etc...), on dispose d'un foncteur d'oubli $\mathcal{C} \rightarrow \mathit{Ens}$: ensemble sous-jacent.
- Tout objet A de \mathcal{C} donne lieu à un foncteur contravariant de \mathcal{C} vers $\mathit{Ens} : \mathcal{C}(?, A)$ (où ? désigne un objet variable). Par le lemme de Yoneda, ce foncteur détermine l'objet A . Un foncteur contravariant de cette forme est dit *représentable*.

Dans un topos, le foncteur contravariant qui à tout objet U associe l'ensemble de ses sous-objets est représentable par un objet Ω appelé classifiant. Pour le topos ponctuel, Ω est l'ensemble à deux éléments.

Les foncteurs eux-mêmes (de \mathcal{C} vers \mathcal{D}) peuvent être vus comme objets d'une nouvelle catégorie, dont on laisse au lecteur deviner la définition des morphismes²².

1.5.3 Foncteurs adjoints.

Soit $(\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C})$ un couple de foncteurs allant en sens opposés.

²²Les morphismes de foncteurs s'appellent aussi *transformations naturelles*. Pour éviter des paradoxes ensemblistes, il convient à ce niveau de supposer que les objets de \mathcal{C} et \mathcal{D} forment des ensembles ; mais peu nous chaut ici...

Ces foncteurs sont dits *adjoints* si pour tout objet A de \mathcal{C} et tout objet B de \mathcal{D} , $\mathcal{C}(A, \psi(B))$ s'identifie²³ à $\mathcal{D}(\phi(A), B)$. Noter que la notion n'est pas symétrique ; on dit que ϕ est adjoint à gauche de ψ , et ϕ adjoint à droite de ψ .

Il s'agit là d'un concept aussi fondamental que difficile à comprendre²⁴.

Bien des foncteurs d'oubli $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathit{Ens}$ admettent un adjoint à gauche ϕ , $\phi(A)$ correspondant à l'objet « libre » de base A (c'est par exemple le cas lorsque \mathcal{D} est la catégorie des espaces vectoriels : $\phi(A)$ est l'espace vectoriel de base A).

Bien des foncteurs d'inclusion admettent un adjoint à gauche. Exemples : l'abélianisation (adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens (= commutatifs) dans celle de tous les groupes), la faisceautisation (adjoint de l'inclusion de la catégorie des faisceaux dans celle des préfaisceaux), la « cure de désintoxication » (adjoint de l'inclusion de la catégorie des espaces topologiques sobres dans celle de tous les espaces topologiques).

Bien des foncteurs diagonaux $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^I$ admettent à la fois un adjoint à gauche (appelé limite inductive et notée \varinjlim_I) et un adjoint à droite (appelé limite projective et notée \varprojlim_I).

1.5.4 Application : morphismes de topos et points d'un topos.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si \mathcal{F} est un faisceau sur X , on définit un faisceau $f_*\mathcal{F}$ sur Y par $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Si \mathcal{G} est un faisceau sur Y , on définit un faisceau $f^*\mathcal{G}$ sur X par $f^*\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$; en particulier, si f est l'inclusion d'un point $y \in Y$, l'ensemble $f^*\mathcal{G}(\{y\})$ est la *fibre de \mathcal{G} en y* .

On obtient ainsi un couple de foncteurs adjoints

$$(f^* : \mathit{Faisc}_Y \rightarrow \mathit{Faisc}_X, f_* : \mathit{Faisc}_X \rightarrow \mathit{Faisc}_Y) :$$

$$\mathit{Faisc}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) = \mathit{Faisc}_X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}).$$

On peut maintenant préciser comment on récupère un espace topologique (sobre) X à partir du topos $\mathcal{X} = \mathit{Faisc}_X$ de ses faisceaux : l'idée est d'identifier un point $x \in X$ au foncteur « fibre en x » : $\mathcal{X} \rightarrow \mathit{Ens}$.

Plus généralement, Grothendieck définit la notion de morphisme de topos $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ comme la donnée d'un couple de foncteurs adjoints $f = (f^* : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, f_* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})$, f^* commutant aux limites projectives finies²⁵.

Prenant pour \mathcal{X} le topos ponctuel, on obtient la notion de *point* du topos \mathcal{Y} . La définition est raisonnable car dans le cas du topos $\mathcal{Y} = \mathit{Faisc}_Y$ des faisceaux sur un espace topologique (sobre) Y , on retrouve bien les points de Y .

Mais il existe des topos exotiques sans aucun point !

²³fonctoriellement en A et B bien entendu. Noter par ailleurs l'analogie formelle avec la définition des opérateurs adjoints ϕ et ψ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , au chapitre précédent : pour tout couple de vecteurs x, y de \mathcal{H} , $\langle x, \psi(y) \rangle = \langle \phi(x), y \rangle$.

²⁴c'est semble-t-il un cas extrême d'hysteresis entre compréhension littérale et compréhension réelle. On prendra garde à ne surtout pas confondre cette notion avec celle d'inverse : il n'y a que ici d'inversion que le sens des foncteurs.

²⁵c'est-à-dire des \varprojlim_I avec I fini.

1.6 Topos et logique intuitionniste.

1.6.1 Les topos entre géométrie et logique.

La transition est excellemment présentée par P. Cartier²⁶ :

« [Grothendieck] avait remarqué que les faisceaux sur un espace donné formaient une catégorie qui avait, en gros, toutes les propriétés de « la » catégorie des ensembles. Or, après les résultats d'indécidabilité de Gödel et de Cohen en théorie des ensembles, il y a non pas *une* théorie des ensembles, mais *divers modèles* non équivalents de la théorie des ensembles (au sens logique de « modèle »). Il était donc naturel d'explorer les relations entre topos et modèles de la théorie des ensembles. [...]

Il appartient à d'autres (surtout Bénabou, Lawvere et Tierney) de résoudre l'énigme : les topos sont exactement les modèles de la théorie des ensembles, mais dans une logique particulière, qu'on appelle « intuitionniste », et où le principe du tiers exclu n'est pas valable. Il est très remarquable que cette logique ait été inventée par un fameux topologue, Brouwer, et qu'avec un peu de recul, elle s'impose naturellement en vertu du fait que l'intérieur de l'adhérence d'un ensemble ouvert ne lui est pas égal.

Mais l'invention des topos donne une liberté inouïe au jeu mathématique, et permet de briser le carcan de « la » théorie des ensembles. Rejouer une pièce mathématique bien connue dans le décor nouveau d'un topos exotique peut amener des surprises, et faire découvrir des accents nouveaux dans des vers ressassés ; parfois, cette nouvelle représentation révèle des trésors mathématiques. D'un point de vue plus général, un topos porte en lui sa propre logique, et définit donc une espèce de logique modale, ou plutôt une logique du *hic* et du *nunc*, une logique spatio-temporelle où la valeur de vérité d'une assertion peut dépendre du lieu et du temps. »

1.6.2 Règles du calcul propositionnel : formulaire.

Je me limiterai à la logique des propositions, pour simplifier au maximum. Mais ce qui suit s'étend à la logique des prédicats²⁷ et même à la logique plus sophistiquée des « types ».

Commençons par rappeler le formulaire des règles de déduction en logique des propositions. Si p et q sont des propositions (ou formules logiques), notons $\neg p$ la négation de p , $p \wedge q$ la conjonction de p et q , $p \vee q$ leur disjonction, $p \Rightarrow q$ la proposition « p implique q », et \rightsquigarrow l'inférence : de p on infère q .

Les axiomes et règles de déduction sont les suivantes (en notant F le faux et V le vrai) :

$$F \rightsquigarrow p, \quad p \rightsquigarrow V, \quad p \rightsquigarrow p,$$

$$\neg p \rightsquigarrow (p \Rightarrow F), \quad (p \Rightarrow F) \rightsquigarrow \neg p,$$

²⁶« Grothendieck et les motifs », Prépublication IHES (2000). Voir aussi P. Cartier, « Catégories, logique et faisceaux ; modèles de la théorie des ensembles », Séminaire Bourbaki, exposé 513, 1978.

²⁷la logique des prédicats fait intervenir les quantificateurs universel \forall et existentiel \exists , qui du reste peuvent s'interpréter comme adjoints à gauche et à droite respectivement d'un même foncteur.

$$\frac{p \rightsquigarrow q, q \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow r}, \quad \frac{p \rightsquigarrow q \wedge r}{p \rightsquigarrow q}, \quad \frac{p \rightsquigarrow q \wedge r}{p \rightsquigarrow r}, \quad \frac{p \rightsquigarrow q, p \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow q \wedge r},$$

$$\frac{p \vee q \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow r}, \quad \frac{p \vee q \rightsquigarrow r}{q \rightsquigarrow r}, \quad \frac{p \rightsquigarrow r, q \rightsquigarrow r}{p \vee q \rightsquigarrow r},$$

$$\frac{p \wedge q \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow (q \Rightarrow r)}, \quad \frac{p \rightsquigarrow (q \Rightarrow r)}{p \wedge q \rightsquigarrow r}.$$

(par la notation « fractionnaire », on entend que le dénominateur se déduit du numérateur).

On a alors $\neg\neg\neg p \rightsquigarrow \neg p$, mais l'inférence $\neg\neg p \rightsquigarrow p$ ne se déduit pas des règles précédentes et n'est pas valide en logique intuitionniste. Cette inférence est l'axiome supplémentaire (tiers exclu) qu'impose la logique classique.

1.6.3 Logique intuitionniste et algèbres de Heyting.

Si l'inférence \rightsquigarrow est interprétée comme une relation d'ordre \leq , le calcul des propositions forme une *algèbre de Heyting*, c'est-à-dire un treillis avec plus petit élément F et plus grand élément V , ayant la propriété que le foncteur $? \wedge y$ (du treillis dans lui-même) admet un adjoint à droite (c'est $? \Rightarrow y$).

Plus précisément, une proposition p est valide en logique intuitionniste si et seulement son interprétation dans toute algèbre de Heyting l'est.

Le treillis des ouverts \mathcal{D} d'un espace topologique X est une algèbre de Heyting. Dans cette algèbre, l'inférence \rightsquigarrow s'interprète comme l'inclusion \subset (des ouverts les uns dans les autres), la conjonction \wedge s'interprète comme l'intersection \cap , \vee comme la réunion \cup , et la négation \neg comme l'intérieur du complémentaire²⁸ :

$$\neg U = (X \setminus U)^{\circ}.$$

Plus généralement, dans tout topos \mathcal{X} , le treillis des sous-objets d'un objet A de \mathcal{X} (treillis dont l'ensemble sous-jacent est $\mathcal{X}(A, \Omega)$ par définition du classifiant Ω), est une algèbre de Heyting.

La logique intuitionniste s'interprète donc dans tout topos de Grothendieck. Le classifiant apparaît comme « faisceau » de valeurs de vérités. Dans le topos ponctuel, cette logique devient classique : $\Omega = \{V, F\}$.

Ce qu'on vient d'esquisser n'est que le début de la logique toposique²⁹, qui a précédé la logique des interactions évoquée dans l'exposé suivant - tout en lui demeurant complémentaire.

Bien que cela dépasse largement notre cadre, je ne peux omettre, en terminant, de signaler que la logique toposique forme le substrat mathématique de la logique de l'apparaître dans la philosophie d'A. Badiou et irrigue la construction des principaux concepts de son livre *Logiques des Mondes*³⁰.

Ni de signaler que les topos jouent un rôle fondamental dans la théorie mathématique de la musique de G. Mazzola³¹, où ils permettent notamment d'effectuer le passage du local au global dans le contexte « discret » des compositions musicales.

²⁸cette interprétation topologique de la logique intuitionniste fait ressortir la non-validité du tiers-exclu : par exemple si X est la droite, et U la droite privée d'un point, $\neg U = \emptyset$, et $\neg\neg U = X$ qui n'est pas contenu dans U , de sorte que $\neg\neg U \rightsquigarrow U$ n'est pas valide.

²⁹pour le besoin de la logique, la notion de topos que Lawvere et Tierney et leurs successeurs utilisent est un peu plus générale que celle de Grothendieck.

³⁰Seuil 2006

³¹The topos of Music, Birkhäuser 2002.

Chapitre 2

Espace II. Algèbres d'opérateurs et géométrie non commutative.

Ce chapitre est consacré aux algèbres d'opérateurs (dont le nom technique plus précis est : algèbres de von Neumann), qui jouent un rôle-clé en géométrie non commutative.

Au lieu du double mouvement de la géométrie des topos

espace des points \rightsquigarrow site des ouverts (ou des revêtements) \rightsquigarrow topos des faisceaux (ou des faisceaux étales),

on a ici le double mouvement

espace des points \rightsquigarrow algèbres de fonctions \rightsquigarrow algèbres d'opérateurs.

La théorie des algèbres d'opérateurs peut être vue sous deux aspects complémentaires : comme étant obtenue par passage à la dimension infinie en algèbre linéaire, ou par passage au non commutatif dans la théorie de la mesure.

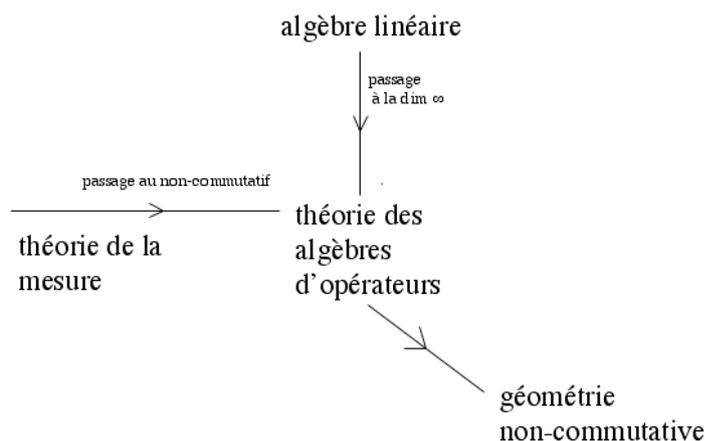


Fig1.1

FIG. 2.1 – Leitfaden (la place de la théorie des algèbres d'opérateurs par rapport à l'algèbre linéaire et à la théorie de la mesure).

Pour le lecteur pressé de lire la « morale » de l'histoire, je signale d'emblée qu'elle se trouve aux paragraphes 2.4 et 2.5.

Pour aller de nulle part au concept complexe, je tracerai une sorte de diagonale. Je commencerai, sur un mode rhapsodique, par faire sonner puis varier quelques thèmes, avant de les tisser ensemble.

Commençons par une remarque générale :

les mathématiques sont un *monde associatif*.

J'entends par là que la plupart des lois de composition auxquelles on a affaire en mathématiques sont associatives¹, ce qui veut dire la chose suivante : supposons qu'on ait des transformations $f, g, h \dots$ et un moyen de les composer (gf représentant la transformation composée de f suivie de g), alors on a la relation

$$(hg)f = h(gf).$$

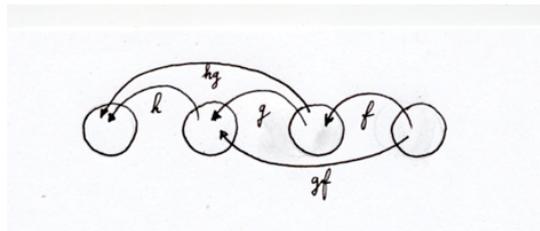


FIG. 2.2 – Fig 1.2

Par contre les mathématiques sont loin d'être un monde commutatif : si f et g sont composables dans les deux sens, en général gf n'est pas égal à fg . On dit que f commute à g lorsque $gf = fg$.

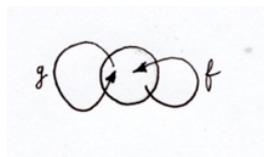


FIG. 2.3 – Fig 1.3

Autrement dit, la commutativité est la possibilité de changer l'ordre des opérations, tandis que l'associativité est la possibilité de changer le groupement des opérations, sans en changer l'ordre.

La non-commutativité est du reste un phénomène fort commun : si l'on demande son chemin et que l'on s'avise de permuter l'ordre des déplacements indiqués, il y a peu de chance que l'on parvienne à destination... Gardons-nous donc de voir du « quantique » dans tout ce qui est non commutatif !

J'en profite pour écarter d'emblée un malentendu à propos du terme « non commutatif » : il faut prendre garde qu'en mathématique, ce terme est bien plus souvent employé dans le sens de « non nécessairement commutatif » (et donc représente une généralisation du cas commutatif) que comme négation de « commutatif ».

2.1 Petite boîte à outils d'algèbre linéaire.

Commençons par explorer le diagramme de la fig. 1.1, en partant du haut.

¹ou bien s'y ramènent aisément, par des constructions universelles, si elles ne le sont pas elles-mêmes (comme le crochet de Lie par exemple).

L'*algèbre linéaire* est la partie la plus simple des mathématiques. Elle traite des espaces les plus « homogènes » qui soient, les *espaces vectoriels*, dont les points sont appelés vecteurs.

2.1.1 Espaces vectoriels.

L'homogénéité d'un espace vectoriel V se traduit par l'existence d'une origine (le vecteur nul noté simplement 0), et par le fait que les vecteurs peuvent être additionnés entre eux d'une part²

$$v_1, v_2 \mapsto v_1 + v_2,$$

et être multipliés par des nombres³ (réels ou complexes, suivant la situation⁴) d'autre part

$$v \mapsto \lambda \cdot v.$$

Exemples d'espaces vectoriels : la droite réelle $V = \mathbb{R}$ (ou un vecteur s'identifie à un nombre), le plan réel $V = \mathbb{R}^2$ (ou un vecteur s'identifie à un couple de nombres, son abscisse et son ordonnée), etc...

2.1.2 Applications linéaires.

Etant donnés deux espaces vectoriels V et W , une application linéaire $F : V \rightarrow W$ de V vers W est une règle qui associe à tout vecteur v de V un vecteur $F(v)$ de W et qui vérifie les compatibilités naturelles relatives à la structure d'espace vectoriel, à savoir :

1. $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$
2. $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$

(il découle tant de 1. que de 2. que F envoie l'origine de V sur l'origine de W).

Les applications linéaires de V vers W forment elles-mêmes un espace vectoriel : $F + G$ est l'application linéaire définie par $(F + G)(v) = F(v) + G(v)$, et $\lambda \cdot F$ est l'application linéaire définie par $(\lambda \cdot F)(v) = \lambda \cdot F(v)$.

Un cas qui nous intéresse particulièrement est celui où $V = W$. On parle alors d'*opérateur* (sous-entendu : linéaire) sur V plutôt que d'application linéaire de V vers V , et on note $\mathcal{L}(V)$ l'espace vectoriel des opérateurs (linéaires) de V (\mathcal{L} comme « linéaire »).

C'est un cas intéressant parce qu'on peut *composer* les opérateurs entre eux :

$$GF : V \xrightarrow{F} V \xrightarrow{G} V.$$

²L'addition des vecteurs est associative et commutative, l'addition de 0 à un vecteur v ne change pas v , et tout vecteur v admet un opposé $-v$, qui, lui étant ajouté, donne $v + (-v) = 0$; on dit que $(V, +)$ est un « groupe abélien ».

³la multiplication d'un vecteur v par le nombre 1 ne change pas v . Par ailleurs, la multiplication de v par un nombre vérifie la relation d'« associativité » $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$ et est liée à l'addition des vecteurs par les relations de « distributivité » $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$ et $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$. On allège souvent l'écriture en se dispensant du point : on écrit λv au lieu de $\lambda \cdot v$.

⁴on parle d'espace vectoriel réel ou complexe, respectivement ; en général, nous considérerons des espaces vectoriels complexes.

2.1.3 Bases, dimension, matrices.

La *dimension* d'un espace vectoriel est le « nombre de ses degrés de liberté ». Un peu plus précisément, l'espace vectoriel V est de dimension finie n si tout vecteur v de V peut s'écrire de façon unique comme *combinaison linéaire*⁵

$$v = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda^i e_i$$

de vecteurs particuliers e_1, e_2, \dots, e_n (formant ce que l'on appelle une *base* de V). Les nombres λ^i sont les *coordonnées* de v dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) ⁶.

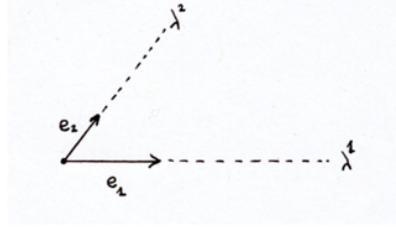


FIG. 2.4 – Fig 1.4

Une base étant fixée, se donner un vecteur revient donc à se donner n nombres (ses coordonnées). De la sorte, tout espace vectoriel réel de dimension n s'identifie à \mathbb{R}^n (modulo le choix d'une base). De même, tout espace vectoriel complexe de dimension n s'identifie à \mathbb{C}^n .

Si F est un opérateur, on peut écrire :

$$F(e_1) = \sum_i \lambda_1^i e_i, \dots, F(e_n) = \sum_i \lambda_n^i e_i$$

et la donnée de l'opérateur F équivaut à la simple donnée du tableau carré des $n \times n$ nombres (λ_j^i) , λ_j^i figurant à la i -ème ligne et à la j -ème colonne :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$

Ce tableau est appelé « matrice » de F . La composition des opérateurs s'exprime très simplement en termes de leurs matrices :

$$F \leftrightarrow \lambda_j^i, G \leftrightarrow \mu_j^i, GF \leftrightarrow \sum_k \mu_k^i \lambda_j^k.$$

2.1.4 Importance des problèmes linéaires.

Le rôle de l'algèbre linéaire est de traiter les « problèmes linéaires », c'est-à-dire, grosso modo, ceux dont l'ensemble des solutions est naturellement muni d'une

⁵le signe $\sum_{i=1}^{i=n}$ indique que l'on somme sur tous les indices i de 1 à n .

⁶ici, λ^i est juste le symbole pour la i ème coordonnée, ne pas confondre avec λ à la puissance i (il n'y a pas de λ^i !).

structure d'espace vectoriel. Ces problèmes sont particulièrement faciles en dimension finie⁷.

En mécanique classique, les problèmes sont souvent non linéaires, mais de dimension finie. Une technique classique consiste à se ramener, par une approximation au premier ordre, au cas linéaire, ce qui permet d'appliquer les techniques de l'algèbre (ou de l'analyse) linéaire pour traiter le problème approché.

En mécanique quantique, la situation est en quelque sorte opposée : le principe de superposition nous assure que les équations d'évolution sont linéaires ; mais cette fois la difficulté vient du fait que la dimension est infinie.

C'est une difficulté sérieuse : l'algèbre linéaire pure « bute » en dimension infinie. Par exemple, l'expression $\sum_k \mu_k^i \lambda_j^k$ qui traduit la composition des opérateurs devient une somme infinie et n'a donc pas de sens en général. Pour qu'elle ait un sens, il faut que la série soit convergente, et pour cela il faut introduire un peu de topologie...

Nous y reviendrons après un certain détour. Mais il nous reste à clore ces généralités sur l'algèbre linéaire en précisant la notion d'« algèbre » - au sens technique que lui donne le domaine des mathématiques appelé « algèbre »⁸.

2.1.5 Algèbres.

Une *algèbre* est la donnée d'un espace vectoriel A et d'une loi de composition

$$(g, f) \rightarrow gf$$

qui est associative, bilinéaire et avec un élément unité⁹ 1.

Elle est dite commutative si l'on a toujours $gf = fg$. Par exemple l'espace vectoriel des *fonctions*¹⁰ $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sur un espace X quelconque, muni de la multiplication entre fonctions¹¹ est une algèbre *commutative*.

Un autre exemple d'algèbre est l'espace $\mathcal{L}(V)$ des *opérateurs* $F : V \rightarrow V$, muni de la composition (on notera I l'élément unité, c'est-à-dire l'opérateur « qui ne fait rien »). C'est une algèbre *non commutative*¹². Nous verrons en particulier que les algèbres de von Neumann sont des sous-algèbres (*i.e.* des sous-ensembles stables par addition, multiplication par un nombre, et composition) de $\mathcal{L}(V)$.

Remarquons également que si A est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$, on peut en fabriquer une autre en prenant son *commutant* A' , c'est-à-dire l'ensemble de tous les opérateurs qui commutent à tout opérateur dans A . Le commutant de $\mathcal{L}(V)$ est réduit aux opérateurs dits « scalaires » (ceux qui multiplient tout vecteur de V par un nombre fixe).

⁷du moins du point de vue théorique. En revanche, bien des problèmes concrets de calcul numérique sont des problèmes linéaires en très grande dimension qui font peiner les ordinateurs...

⁸tout comme le terme *topologie* vu dans le chapitre précédent, « algèbre » désigne à la fois un domaine des mathématiques et une structure mathématique particulière appartenant à ce domaine.

⁹vérifiant $1f = f1 = f$ pour tout f dans A .

¹⁰rappelons qu'une fonction f sur un ensemble X est une règle qui associe à tout élément de X (ou parfois seulement à certains d'entre eux) un nombre réel ou complexe. On met en général des conditions supplémentaires adaptés à l'ensemble particulier X que l'on considère. Par exemple, si X est un espace « topologique », il est naturel de considérer des fonctions continues (voir chapitre précédent).

¹¹définie par $(fg)(x) = f(x).g(x)$.

¹²sauf en dimension 0 ou 1.

On vérifie que $A' = A'''$, et après une petite contorsion d'esprit, on en déduit qu'une algèbre A est égale à son bi-commutant A'' si et seulement si A est elle-même un commutant. Ce n'est pas automatiquement le cas, du reste.

2.2 Espaces et fonctions. Vers la géométrie non commutative.

Revenons au Leitfaden, et quittons temporairement la direction verticale pour la direction horizontale, en partant de la gauche.

Il n'y a pas de notion générale d'« espace en tant qu'espace » en mathématique ; jusqu'à présent, même les écoles les plus doctrinaires se sont abstenues de s'approprier symboliquement cette notion commune en la « taguant » d'une définition mathématique générale !

En revanche, il existe bien des *points de vue mathématiques* sur la notion commune d'espace, dont dérivent beaucoup de types d'espaces mathématiques particuliers, d'ailleurs toujours flanqués d'un prédicat (nous avons déjà rencontré les espaces vectoriels, caractérisés par leur homogénéité).

Je vais brièvement mentionner trois points de vue mathématiques sur la notion d'espace qui donnent lieu à des « catégories » d'espaces particuliers : grandeur, localité, topographie. Démêler ces trois points de vue fut d'ailleurs un très long travail conceptuel, achevé peu avant la première guerre mondiale.

2.2.1 « Grandeur ».

D'une certaine façon, c'est peut-être le point de vue le plus ancien (problèmes d'arpentage de l'antiquité). En termes mathématiques contemporains, j'ai ici en vue tout ce qui se rapporte à la *théorie de la mesure*. La catégorie attachée à ce point de vue est celle des *espaces mesurés*¹³ $(X, d\mu)$.

Les fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ qu'il est naturel de considérer dans ce contexte sont les fonctions *bornées presque partout*, c'est-à-dire bornées hors d'une partie de mesure nulle. Elles forment une algèbre commutative notée $L^\infty(X, d\mu)$ (ou $L^\infty(X)$ pour abrégé).

Cette théorie fait la synthèse entre les idées apparemment éloignées d'arpentage, de moyenne, de probabilité. Techniquement, la théorie des probabilités s'y rattache en effet : une probabilité n'étant rien d'autre, selon la définition moderne de Kolmogorov, qu'une mesure telle que la mesure de l'espace X , vu comme ensemble de tous les événements possibles, soit égale à 1. S'y rattachent de même les aspects mathématiques de la mécanique statistique, où l'étude mécanique d'un système de très nombreuses particules est remplacé par celui de l'espace des états muni de la mesure de Gibbs au moyen de laquelle on prend les moyennes.

C'est un chapitre passionnant de l'histoire des mathématiques que l'étude des chemins sinueux et ramifiés ayant mené des antiques problèmes d'arpentage à la théorie de la mesure, sous la forme définitive qu'elle a prise avec Lebesgue, en passant par le calcul intégral au XVII^e siècle, par l'intégrale de Riemann au milieu du XIX^e, et par les travaux de Cantor.

¹³une mesure $d\mu$ est une fonction à valeurs positives ou infinies sur certaines parties de X , qui est additive pour la réunion disjointe d'une collection finie ou dénombrable de parties deux à deux disjointes. On peut en profiter pour associer à quantité de notions leur « presque- »contrepartie.

2.2.2 « Localité ».

Il s'agit ici des notions de voisinage, de frontière, de compacité et de complétude, qui font l'objet de la *topologie générale*. La catégorie attachée à ce point de vue est celle des *espaces topologiques* (X, \mathfrak{D}) (détaillée dans le chapitre précédent).

Les fonctions sur X qu'il est naturel de considérer dans ce contexte sont les *fonctions continues*. Elles forment une algèbre commutative notée $C(X, \mathfrak{D})$ (ou $C(X)$ pour abrégé).

Bien que Leibniz l'ait, semble-t-il, appelée de ses vœux, c'est sans doute B. Riemann qui doit être considéré comme le fondateur de la théorie, dont la forme qualitative épurée a été mise au point par Hausdorff (1914).

[Puisque j'aurai à parler d'espaces topologiques *compacts* ou *complets*, je vais, sans rentrer dans les détails techniques, donner une idée (qu'on est invité à ignorer en première lecture) de ces deux notions voisines, en supposant pour simplifier qu'on dispose d'une métrique permettant de préciser numériquement la proximité de deux points ; on a alors aussi la notion de limite d'une suite de points.

La complétude d'un espace X reflète le fait qu'une suite de points converge (*i.e.* a une limite dans X) dès que les points sont tous arbitrairement proches les uns des autres à partir d'un certain rang.

La compacité de X reflète le fait que de toute suite de points de X , on peut extraire une suite convergente (*i.e.* qui a une limite).

Par exemple, les espaces \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n sont complets mais non compacts. Les parties compactes de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n sont les parties bornées et fermées (*i.e.* qui contiennent leur frontière) ; elles sont aussi complètes.]

2.2.3 « Topographie ».

Il s'agit ici des notions de cartes, de ligne de niveau, de géodésie en général, de courbure, etc... J'ai ici en vue tout ce qui se rapporte à la *géométrie différentielle*, et plus particulièrement à la géométrie différentielle riemannienne. La catégorie attachée à ce point de vue est celle des *variétés riemanniennes* (X, ds^2) , qui sont, *infinitésimalement*, linéaires et munies d'une distance ds^2 .

Les fonctions sur X qu'il est naturel de considérer dans ce contexte sont les *fonctions lisses*, c'est-à-dire indéfiniment différentiables. Elles forment une algèbre commutative notée $C^\infty(X)$.

Ce point de vue est encore dû aux réflexions de Riemann sur les fondements de la géométrie « courbe » en toute dimension (après Gauss, qui traita le cas des surfaces dans un ouvrage célèbre).

2.2.4 Le point de vue fonctionnel sur les espaces. Les points et leur ombre.

Ce point de vue - qui est apparu à divers moments et dans divers contextes de l'histoire des mathématiques - consiste grosso modo à *inverser le rôle de la fonction et celui de la variable* : au lieu de voir une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ comme fonction (fixe) d'un point variable x de l'espace X , on regarde le point x comme fixe, et on considère son « ombre » constituée des valeurs $f(x)$ prises par toutes les fonctions f sur X (ou plus précisément la règle qui associe à une fonction variable f le nombre complexe $f(x)$).

Cela amène à remplacer l'espace X (mesuré, topologique, ou riemannien) par l'algèbre commutative $L^\infty(X)$, ou $C(X)$, ou $C^\infty(X)$ suivant le cas.

La question qui se pose alors est de savoir si l'on ne perd rien ce faisant. Notamment, peut-on récupérer un point à partir de son « ombre » ?

Il se trouve que sous des hypothèses assez larges, c'est effectivement le cas, comme nous le verrons plus loin : on retrouve grosso modo l'espace comme *spectre* de l'algèbre associée, c'est-à-dire essentiellement comme l'ensemble des « ombres » des points.

Mais, si l'on ne perd rien, que gagne-t-on ?

En premier lieu, c'est de pouvoir *calculer* : on calcule avec des fonctions (qui forment une algèbre, à laquelle on peut appliquer les outils de l'analyse classique), et non avec les points d'un espace. Autrement dit, on gagne de passer du visuel (géométrie) au scriptural (algèbre).

A cet égard, j'aimerais inviter le lecteur à une grande prudence en ce qui concerne les thèses sur le prétendu antagonisme calcul/raisonnement en mathématique. Ni le slogan romantique « les mathématiques consistent à remplacer les calculs par des idées », ni les slogans opposés d'une certaine tradition logico-informatricienne (plus récente mais se réclamant non sans raison de Leibniz) ne rendent le moins du monde justice à la très délicate dialectique « borroméenne » entre *calcul*, *raisonnement* et *formation de concepts* en mathématiques.

Bien que cette « école » privilégie de manière presque exclusive le troisième terme de cette dialectique, il convient de ne pas négliger le rôle crucial des deux autres si l'on veut éviter de se forger une image complètement déformée de la pensée mathématique.

2.2.5 Comment le non commutatif s'introduit aussi subrepticement que naturellement dans le point de vue fonctionnel sur les espaces, en reléguant les points dans l'ombre. L'idée de géométrie non commutative.

Beaucoup d'espaces intéressants s'obtiennent par recollement. Par exemple, toute variété différentielle de dimension n s'obtient par recollement de « cartes » qui sont des parties ouvertes de \mathbb{R}^n .

L'opération de recollement est donc une des opérations les plus fondamentales de la géométrie, et dans beaucoup de problèmes, il importe de ne pas considérer seulement le résultat du recollement, mais de garder trace de l'opération-même de recollement. Comment traduire cela dans le point de vue fonctionnel esquissé ci-dessus ?

Considérons le cas le plus simple, passablement trivial, d'un espace X constitué d'un seul point, obtenu en identifiant deux espaces du même type $\{x\}$ et $\{y\}$. L'algèbre des fonctions sur la réunion disjointe $\{x\} \cup \{y\}$ est l'algèbre commutative \mathbb{C}^2 des couples de nombres (un pour chaque point). L'opération ensembliste de recollement se traduit alors en considérant tous les opérateurs sur \mathbb{C}^2 , c'est-à-dire l'algèbre non commutative de toutes les matrices 2×2

$$\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} \end{pmatrix}.$$

Dans le cas beaucoup moins trivial quoique similaire d'une variété différentielle compacte X obtenue par recollement de « cartes », l'algèbre qui décrit le re-

collement est l'algèbre des matrices infinies $(f_{x,x'})$, nulles à l'infini, indéxées continûment par les couples de points où le recollement a lieu. C'est une algèbre non commutative de dimension infinie.

Toutefois, dans ces deux exemples, on peut encore retrouver les points (c'est-à-dire l'espace X lui-même) à partir de spectres, comme dans le cas commutatif : du point de vue spectral, les algèbres non commutatives que l'on voit apparaître par recollement sont en fait équivalentes à l'algèbre commutative des fonctions sur X . Cela est dû au fait que les espaces en question obtenus par recollement restent très « conventionnels » du point de vue de l'analyse classique.

En revanche, pour des recollements plus sauvages (comme ceux qui apparaissent quand on considère les feuilles d'un feuilletage associé à un système dynamique), ce n'est plus du tout le cas. L'espace recollé peut avoir très peu de points « physiques » subsistants - l'opération de recollement ayant relégué en quelque sorte les points dans l'ombre (ou dans la colle !). Le point de vue ensembliste est totalement inadéquat pour décrire des situations de cette sorte (pourtant communes dans la théorie des systèmes dynamiques par exemple), et il en est de même de l'analyse classique : l'algèbre commutative des fonctions des points de cet espace recollé est un objet beaucoup trop pauvre pour décrire le recollement en question. Il devient nécessaire de remplacer résolument ensembles de points et algèbres de fonctions par une algèbre non commutative du type de celles considérées ci-dessus.

Parvenu à ce stade, on peut alors retourner complètement le point de vue et tâcher de définir et d'étudier directement, en termes d'algèbres non commutatives, les structures qui correspondraient, dans les situations géométriques classiques, aux notions de grandeur (mesure), de localité (topologie), de topographie (géodésie). Ce sont ces algèbres non commutatives qui remplacent les espaces, ou plutôt, qui jouent le rôle d'« espaces non commutatifs » sans points.

C'est là l'objet de la *géométrie non commutative*, initiée et développée principalement par A. Connes à partir des années 80¹⁴.

Dans la suite, nous nous concentrerons sur l'aspect « théorie de la mesure » de la géométrie non commutative, qui n'est autre que la théorie des algèbres de von Neumann et des poids (théorie qui est en fait antérieure à la géométrie non commutative).

2.3 Espaces de Hilbert et analyse fonctionnelle.

Revenons derechef au Leitfaden, en reprenant la direction verticale là où nous l'avions laissée, c'est-à-dire au passage à la dimension infinie en algèbre linéaire.

2.3.1 Espaces euclidiens.

Revenons d'abord brièvement à Euclide. Il construisait des triangles, abaissait des perpendiculaires, comparait des angles et des longueurs de côtés. Pour faire ces opérations, on pense, après deux millénaires et demi de réflexion, que le substrat adéquat est celui d'espace euclidien.

¹⁴le discours ci-dessus passe complètement sous silence les motivations et sources d'inspiration très importantes provenant de la mécanique quantique et de la physique statistique quantique. Nous y ferons brièvement allusion dans la suite.

Un *espace euclidien* est un espace vectoriel V de dimension finie muni d'une *produit scalaire*¹⁵, qui associe à un couple de vecteur (v_1, v_2) un nombre (réel ou complexe) noté $\langle v_1, v_2 \rangle$. On requiert que $\langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \langle v_1, v_2 \rangle$, que $\langle v_1, v_2 \rangle$ soit additif en v_1 et en v_2 et soit un nombre positif non nul lorsque $v_1 = v_2 \neq 0$.

À partir du produit scalaire, on peut définir la *norme* d'un vecteur :

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

La norme permet de mesurer la distance entre deux vecteurs (c'est la norme de la différence des vecteurs).

Le produit scalaire permet aussi de définir la notion d'*orthogonalité* (= perpendicularité) :

$$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Pour deux vecteurs orthogonaux, on a la « relation de Pythagore »

$$|v_1 + v_2|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2.$$

Etant donné un sous-espace W de l'espace euclidien V , l'espace orthogonal à W (formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de W) est noté W^\perp . Il a la propriété que

$$V = W \oplus W^\perp \text{ et } W^{\perp\perp} = W.$$

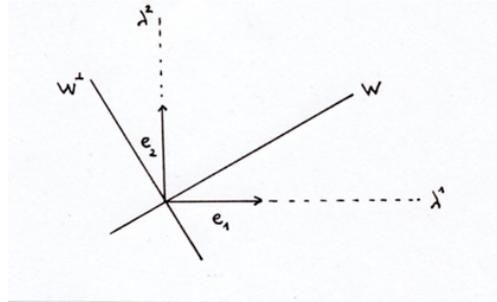


FIG. 2.5 – Fig 1.5

Quand on a un opérateur $F \in \mathcal{L}(V)$ on peut définir son adjoint F^* de deux façons. Une façon abstraite et intrinsèque est de dire que l'adjoint satisfait l'équation

$$\langle F^*(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle.$$

Une façon plus concrète est d'utiliser les matrices associées (modulo le choix de bases). L'adjonction est l'opération qui remplace lignes par colonnes en en prenant le conjugué, c'est-à-dire $(\lambda_j^i) \rightsquigarrow (\bar{\lambda}_i^j)$. On a :

- $F^{**} = F$
- $(GF)^* = F^*G^*$.

Par exemple, considérons le *projecteur* P_W sur un sous-espace vectoriel W de V . C'est l'opérateur qui à tout vecteur $v \in V$ associe sa composante dans W eu égard à la décomposition $V = W \oplus W^\perp$ (ce point se décrit aussi comme le point de W le plus proche de v).

¹⁵ dans le cas du plan euclidien réel proprement dit, le produit scalaire $\langle v_1, v_2 \rangle$ n'est autre que le produit des normes (= longueurs) de v_1 et de v_2 par le cosinus de l'angle entre v_1 et v_2 .

Alors P_W vérifie les équations $P_W = P_W^* = P_W P_W$, et ces équations caractérisent les opérateurs qui sont des projecteurs.

Autre exemple important : les opérateurs *unitaires*. Ce sont ceux (inversibles) qui préservent le produit scalaire. Ils vérifient les équations $U^*U = UU^* = I$, qui les caractérisent.

2.3.2 Espaces de Hilbert.

Il s'agit de la généralisation en dimension infinie des espaces euclidiens. Ces espaces ont été introduits par Hilbert en 1909, pour développer l'analyse fonctionnelle abstraite, dont le point de départ consiste à considérer des fonctions comme points d'un espace vectoriel topologique idoine - dans les cas les plus simples, d'un espace de Hilbert¹⁶.

Un espace (vectoriel) *de Hilbert* \mathcal{H} admet un produit scalaire tout comme un espace euclidien, mais il est de dimension infinie (dénombrable, pour simplifier), et complet (pour la distance définie par la norme définie elle-même par le produit scalaire comme ci-dessus).

En particulier, \mathcal{H} admet une base orthonormée infinie $(\dots, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots)$, et tout vecteur $v \in \mathcal{H}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire infinie convergente

$$v = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \lambda^n e_n, \quad \text{où } \lambda^n = \langle v, e_n \rangle,$$

et on a la relation « relation de Pythagore » en dimension infinie

$$|v|^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |\lambda^n|^2.$$

Les espaces de Hilbert ressemblent donc beaucoup aux espaces euclidiens, mais la dimension infinie donne une plus grande souplesse (bien qu'il n'existe, à isomorphie près, qu'un seul espace de Hilbert!¹⁷). Par exemple, \mathcal{H} peut être décomposé en somme directe de deux copies de lui-même !

L'exemple standard est fourni par les séries de Fourier¹⁸. Etant donné deux fonctions périodiques $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de période 2π , on définit leur produit scalaire par :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1 \bar{f}_2 dt$$

L'espace \mathcal{H} des fonctions f pour lesquelles $\langle f, f \rangle$ est bien défini, est un espace de Hilbert. Une base orthonormée est donnée par $e_n = e^{\sqrt{-1}nt}$ (où n est un entier positif ou négatif quelconque) : tout $f \in \mathcal{H}$ s'écrit de manière unique

$$f = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \langle f, e_n \rangle e_n,$$

où les coordonnées $\langle f, e_n \rangle$ s'appellent coefficients de Fourier de f .

¹⁶voir L. Schwartz, *Analyse hilbertienne*, Hermann, Paris, 1979.

¹⁷sous-entendu : de dimension dénombrable.

¹⁸préfet de l'Isère, auteur de la théorie de la chaleur - pour laquelle il inventa il y a 200 ans le développement en séries trigonométriques (séries de Fourier) et la transformation de Fourier - et du bel aphorisme selon lequel les mathématiques « n'ont pas de signe pour exprimer les notions confuses ».

2.3.3 Opérateurs sur un espace de Hilbert et algèbres stellaires.

Un opérateur sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est une application linéaire $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ qui est continue, ce qui revient à dire qu'elle est bornée sur la *boule unité* formée des vecteurs de norme au plus 1. La norme de F est le maximum des normes des valeurs que prend F sur la boule unité.

Les opérateurs se composent, et forment une algèbre non commutative notée $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, munie d'une norme $|\cdot|$ et d'une involution (l'adjonction $F \mapsto F^*$). On a la relation $|FF^*| = |F|^2$.

De manière générale, une algèbre involutive normée vérifiant cette propriété répond au beau nom d'*algèbre stellaire*.

2.4 Spectres.

2.4.1 De Newton à Gelfand.

L'histoire des spectres en sciences physico-mathématiques est une histoire merveilleuse pour laquelle je renvoie aux travaux de J. Mawhin.

Il semble que les spectres apparaissent pour la première fois en physique chez Newton à propos de la dispersion de la lumière solaire par un prisme (1671)¹⁹.

D'après Mawhin, « le développement de ces travaux au cours du XIXe siècle conduit à la spectroscopie, indispensable outil d'exploration de l'infiniment grand (astrophysique) et de l'infiniment petit (physique atomique). L'introduction du mot « spectre » en mathématiques est beaucoup plus tardive (fin du XIXe siècle), mais les notions qu'il recouvre sont plus anciennes et trouvent leur origine dans des disciplines mathématiques multiples (équations différentielles, mécanique céleste, géométrie analytique, physique mathématique, théorie de propagation de la chaleur, algèbre). Il faut attendre le XXe siècle pour que les notions physique et mathématique de spectre se réconcilient, au sein de la mécanique quantique ».

On a pu dire que le spectre d'un élément chimique est comme son « code-barre ». Dans le cas de l'hydrogène, les raies du spectre d'émission obéissent à la loi arithmétique de fréquence en $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$ ($n > m$) (loi de Ritz-Rydberg 1890), dont l'incompatibilité avec les lois de Newton et de Maxwell a été l'une des sources de l'émergence de la mécanique quantique de Heisenberg et Schrödinger (1925-26).

Du côté mathématique, si $F \in \mathcal{L}(V)$ est un opérateur, son *spectre* est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $F - \lambda I$ ne soit pas inversible²⁰.

Par exemple, si l'on prend comme opérateur un projecteur P non nul d'un espace euclidien ou de Hilbert, le spectre de P est l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$. Plus généralement, si un opérateur (continu) est auto-adjoint, c'est-à-dire si $F = F^*$, son spectre est un sous-ensemble compact de \mathbb{R} .

Si l'on considère en revanche des opérateurs auto-adjoints « non continus »²¹, alors le spectre est réel mais pas nécessairement compact. C'est le cas notamment

¹⁹incidemment, cette apparition est presque exactement contemporaine des lettres de Spinoza sur les spectres ! « Si les philosophes veulent appeler spectres ce que nous ignorons, je n'en nierai pas l'existence, car il y a une infinité de choses que j'ignore. [...] Ce sont des puérités, dirais-je, en y mettant de l'indulgence, ou cela rappelle les jeux auxquels se plaisent les simples. »

²⁰un opérateur F est dit inversible s'il existe un opérateur G tel que $FG = GF = I$, où I est, rappelons-le, l'opérateur identité.

²¹contrairement à notre convention précédente selon laquelle les opérateurs d'un espaces de Hilbert sont par définition continus.

des opérateurs hamiltoniens de la mécanique quantique, et c'est ainsi que s'interprète par exemple l'ensemble de Ritz-Rydberg des $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$ (sous-ensemble non compact de \mathbb{R}).

Revenant au cas d'un opérateur (continu) auto-adjoint F , on peut aussi définir son spectre comme l'ensemble des caractères (= fonctions linéaires multiplicatives²²) de l'algèbre stellaire $A = \mathbb{C}[F]$ qu'il engendre. Ceci permet d'étendre la notion de spectre au cas d'une algèbre stellaire commutative quelconque A : Gelfand définit le *spectre* de A comme l'ensemble des caractères de A . C'est de manière naturelle un espace topologique compact (mais plus forcément un ensemble de nombres).

2.4.2 Retour au point de vue fonctionnel. Les théorèmes de Gelfand et de Riesz.

Revenons maintenant au point de vue fonctionnel, et précisons le fait qu'on « ne perd rien » dans ce passage.

Commençons par le cas d'un espace topologique compact (X, \mathfrak{D}) . On lui associe l'algèbre stellaire commutative $A = C(X, \mathfrak{D})$ des fonctions continues à valeurs complexes sur X ²³.

Réciproquement, partant d'une algèbre stellaire commutative A , Gelfand lui associe son spectre X qui est un espace topologique compact. Le théorème de Gelfand dit que ces deux opérations sont *inverses* l'une de l'autre. En particulier, on récupère X à partir de A : un point $x \in X$ correspond à un caractère χ via la formule

$$f(x) = \chi(f) \text{ pour tout } f \in A.$$

Supposons en outre que X soit muni d'une mesure $d\mu$ (et pour faire « bonne mesure », faisons aussi l'hypothèse technique que la topologie de X provient d'une métrique). La mesure $d\mu$ permet d'intégrer les fonctions, et définit donc une application linéaire

$$\mu : A = C(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \mu(f) = \int_X f d\mu,$$

telle que $\mu(ff^*) \geq 0$.

Le théorème de Riesz affirme que, réciproquement, une telle fonction μ correspond toujours à une mesure $d\mu$, telle que $\mu(f) = \int f d\mu$ ²⁴. On peut alors considérer l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu) = \{f \mid \int |f|^2 d\mu < \infty\}$ des fonctions complexes sur X de carré intégrable. Toute fonction presque partout bornée agit par multiplication sur \mathcal{H} , de sorte que l'algèbre $M = L^\infty(X, d\mu)$ des fonctions presque partout bornées est une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Elle contient $A = C(X)$, et coïncide en fait avec le commutant de A . Elle est donc égale à son propre bicommutant : $M = M''$. En outre, μ s'étend à M , avec la même propriété de positivité.

En combinant les théorèmes de Gelfand et de Riesz, on voit que les données géométriques (espace topologique mesuré)

$$(X, \mathfrak{D}, d\mu)$$

²²en particulier, tout caractère χ vérifie $\chi(ff^*) \geq 0$ et $\chi(1) = 1$.

²³l'involution $f \mapsto f^*$ étant induite par la conjugaison complexe, et la norme $|f|$ étant le maximum des modules des valeurs prises par f sur X .

²⁴cas particulier : le caractère associé à un point x n'est autre que la mesure de Dirac en x .

et les données fonctionnelles

$$(A, M \xrightarrow{\mu} \mathbb{C})$$

se déterminent mutuellement²⁵.

On peut alors préciser ce qui a été dit à la fin de 2.5.

En géométrie non commutative, c'est la théorie des algèbres stellaires non commutatives²⁶, analogues non commutatifs des algèbres $C(X, \mathfrak{D})$, qui jouera le rôle de « topologie générale non commutative ».

C'est la théorie des algèbres de von Neumann et de leurs poids, analogues non commutatifs des algèbres $M = L^\infty(X, d\mu)$ et des mesures μ , qui jouera le rôle de « théorie de la mesure non commutative ».

2.5 Algèbres de von Neumann, facteurs et poids.

2.5.1 Ce que c'est.

La théorie des algèbres de von Neumann a été créée en l'espace de quelques années (de 1936 à 1943) par von Neumann et son élève F. J. Murray. Leur motivation principale venait de la mécanique quantique : tentative de classification des algèbres d'observables qu'on y rencontre.

Une *algèbre de von Neumann*²⁷ (on dit aussi, plus simplement : *algèbre d'opérateurs*) est une sous-algèbre stellaire M de l'algèbre stellaire $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs sur un espace de Hilbert complexe \mathcal{H} , qui est égale à son bi-commutant (voir 1.4), c'est-à-dire telle que

$$M = M''.$$

C'est la généralisation non commutative de l'algèbre $L^\infty(X)$ des fonctions presque partout bornées sur un espace mesuré X .

Un *facteur* M est une algèbre de von Neumann telle que les seuls éléments de M qui commutent avec tous les autres sont les opérateurs scalaires (opérateurs de multiplication par un nombre fixe), ce qui revient à dire que

$$M \cap M' = \mathbb{C}.$$

Nous avons déjà rencontré des exemples simples de facteurs (les moins intéressants qui soient, à dire vrai) :

- pour tout $n = 1, 2, \dots$ l'algèbre stellaire $I_n = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ des matrices $n \times n$,
- l'algèbre stellaire $I_\infty = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs (continus) sur l'espace de Hilbert.

²⁵ Il y a quelque chose d'analogue, mais plus compliqué (en termes d'opérateurs de Dirac) dans le cas où l'on ajoute une structure riemannienne.

²⁶ de préférence séparables en norme, ce qui reflète, dans le cas commutatif, la condition que le spectre peut être muni d'une métrique.

²⁷ Si par hasard, un connaisseur tombait sur ces lignes, je préviens que, techniquement, je me limiterai souvent tacitement aux algèbres de von Neumann à préduel séparable. Sur les algèbres de von Neumann et leur usage en géométrie non commutative, on peut consulter A. Connes, *Géométrie non commutative*, Interéditions, Paris, 1990 (réédité éditions Dunod, 2005)

J.-Y. Girard, « Introduction aux algèbres d'opérateurs I : Des espaces de Hilbert aux algèbres stellaires », texte inédit disponible à l'adresse :

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/AlgOpGirard.pdf>

J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)*, Editions Jacques Gabay, 1996 (reprint)

V. S. Sunder, *An Invitation to Von Neumann Algebras*, Springer, 1987.

Ce sont les facteurs *de type I*. On verra qu'il existe deux autres types bien plus intéressants.

Un théorème fondamental de von Neumann assure la possibilité de « désintégrer » toute algèbre de von Neumann M en facteurs ; les facteurs sont les briques élémentaires, et il suffit de les comprendre pour comprendre les algèbres d'opérateurs.

Voilà donc le début de la théorie de von Neumann. Des motivations solides d'où est issu un concept fondamental bien précis (celui de facteur en l'occurrence). Il s'est alors agi de développer cette théorie :

1. développement d'une technologie aussi riche que celle de la théorie classique de la mesure (dans le cas commutatif). Par exemple la notion de mesure a un analogue dans le cas non commutatif, celle de *poids* ; le théorème de Riesz vu plus haut assure que dans le cas commutatif, il n'y a pas « deux poids, deux mesures », c'est la même chose.
2. Exploration de phénomènes nouveaux.
3. Construction et classification des facteurs.

2.5.2 Facteurs de type *II* et géométrie en dimension continue.

Soit $M \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un facteur. Murray et von Neumann ont eu l'idée de chercher à classifier les projecteurs P de M (voir 3.1), en s'inspirant de ce qui se passe en dimension finie n , c'est-à-dire pour le type I_n .

Deux projecteurs P_1 et P_2 sont équivalents (on écrit $P_1 \sim P_2$) s'il existe un opérateur $V \in M$ tel que $P_1 = V^*V$ et $P_2 = VV^*$ (on a alors $P_2V = VP_1$). En dimension finie, cela signifie simplement que les dimensions des espaces vectoriels images des projecteurs sont les mêmes ; modulo équivalence, les projecteurs P sont donc entièrement classifiés par la dimension $D(P)$ de leur image.

Murray et von Neumann ont découvert quelque chose d'analogue pour tout facteur M . On peut associer de façon canonique à chaque projecteur P une *dimension* $D(P) \in [0, \infty]$ qui est un nombre réel positif ou l'infini, vérifiant :

1. $P_1 \sim P_2 \Leftrightarrow D(P_1) = D(P_2)$,
2. $P_1P_2 = 0 \Rightarrow D(P_1 + P_2) = D(P_1) + D(P_2)$.

On peut alors effectuer une première classification grossière des facteurs suivant les valeurs que peuvent prendre les dimensions des projecteurs. On obtient les cinq familles suivantes (y compris les deux vues précédemment), réparties en trois types :

- $I_n : \{1, 2, \dots, n\}$
- $I_\infty : \{1, 2, 3, \dots\}$
- $II_1 : [0, 1]$
- $II_\infty : [0, \infty]$
- $III : \{0, \infty\}$

L'apparition de « dimensions continues » constitue la première grande découverte de la théorie. Ces dimensions apparaissent en fait comme des « densités de dimension », au sens où on pourrait dire que les entiers pairs sont de densité $1/2$ parmi tous les entiers (elles n'ont guère à voir avec les dimensions fractionnaires des fractals).

Pour construire un exemple de facteur de type II_1 , on peut s'y prendre de la manière suivante. Prenons un groupe (discret) dénombrable Γ d'opérateurs unitaires qui est « assez non commutatif » ; alors le commutant $M = \Gamma'$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un facteur de type II_1 .

2.5.3 Facteurs de type III et dynamique.

Les facteurs de type III sont précisément ceux sur lesquels la théorie de la dimension de von Neumann et Murray ne dit rien. Pendant un quart de siècle, et bien que la provision d'exemples s'enrichît, cette classe resta complètement mystérieuse.

La deuxième grande découverte de la théorie les concerne, et vient des travaux de Tomita, Takesaki et Connes²⁸. Pour tout facteur M muni d'un poids μ , il existe un groupe à un paramètre d'évolution (analogue aux flots d'évolution dans le temps que l'on rencontre en mécanique statistique quantique)

$$t \mapsto (F \in M \mapsto e^{\sqrt{-1}tH_\mu} \cdot F \cdot e^{-\sqrt{-1}tH_\mu}),$$

qui ne dépend du poids μ qu'à conjugaison unitaire près. Il définit donc un homomorphisme canonique

$$\delta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Out } M,$$

où $\text{Out } M$ est le groupe des « automorphismes extérieurs » (c'est-à-dire les automorphismes à conjugaison unitaire près) du facteur M .

Ce qui est tout à fait remarquable est justement cet aspect canonique : si l'on interprète \mathbb{R} comme la droite du temps (ainsi qu'on le fait dans la situation qui a motivé la théorie : en mécanique statistique quantique), le groupe à un paramètre d'évolution ne dépend pas du choix d'une unité de temps.

Il se trouve que les facteurs de type III sont justement ceux pour lesquels ce groupe à un paramètre d'évolution est non trivial : *les facteurs de type III sont des objets dynamiques*.

2.5.4 Classification des facteurs moyennables.

Comme dans beaucoup de théories, où des motivations solides et quelques exemples non triviaux ont mené, dans un premier mouvement, à la définition d'un objet mathématique fondamental, se pose le problème de la classification des objets répondant à cette définition. C'est là un second mouvement, en général très difficile et dont l'achèvement signe souvent la maturité de la théorie.

La classification des objets, loin de « sortir » de la définition-même, requiert d'abord une période de « gestation » où s'accumulent des exemples provenant de constructions variées et parfois surprenantes, puis une période « taxinomique » où les objets construits sont analysés en détail et comparés entre eux ; vient un moment où l'on a l'impression d'avoir une liste complète. Reste à le démontrer²⁹.

²⁸Voir, par exemple, Alain Connes, « Une classification des facteurs de type III », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* Sér. 4, 6 no. 2 (1973), p. 133-252.

²⁹Il me paraît dommage que les philosophes des mathématiques se penchent si peu sur les problèmes de classification. Si les épistémologies d'inspiration platonicienne semblent à première vue « pré-adaptées » pour décrire cet aspect de la pensée mathématique - ce qui n'est pas si sûr : comment penser le « sporadique » ? -, quel éclairage pourraient apporter d'autres épistémologies ? - par exemple, des épistémologies de type « nominaliste » ou « cognitiviste » sur le Monstre ?

Il arrive parfois qu'une classification complète soit impossible, et que cette impossibilité - en un sens précisé - soit démontrée. C'est en fait ce qui se passe pour les facteurs. La tâche de classification se complique alors : il s'agit de déterminer d'abord une « bonne » classe qui, tout en étant suffisamment ubiquitaire, soit susceptible de classification.

Dans le cas des facteurs, de nombreux travaux convergents ont permis de dégager cette « bonne » classe : c'est celle des *facteurs moyennables*³⁰, caractérisés par la propriété d'être approximés par des sous-algèbres stellaires de dimension finie.

Ce sont des algèbres de dimension infinie (sauf pour le type I_n), mais « pas trop » !

La classification des facteurs moyennables est due à A. Connes³¹. C'est la suivante :

- I_n
- I_∞
- II_1 : il n'y a qu'un seul facteur moyennable de ce type.
- II_∞ : idem.
- III_λ avec $\lambda \in]0, 1[$: idem. En fait λ est directement relié à la dynamique δ : l'ensemble $\{t : \delta(t) = 0\}$ est l'ensemble des $\frac{2\pi n}{\log \lambda}$ pour n entier quelconque.
- III_1 : encore un seul facteur moyennable de ce type.
- III_0 : dans cette rubrique, il y a une infinité de facteurs moyennables, tous décrits « géométriquement » à l'aide de la théorie des systèmes dynamiques.

2.5.5 Prolongements.

Le facteur moyennable de type II_1 est l'un des plus remarquables de la liste, tant à cause de ses multiples propriétés que de ses applications. On peut le construire comme indiqué en 5.2 en prenant pour Γ un groupe localement fini (par exemple un groupe de substitutions sur un alphabet infini ou chaque élément du groupe ne permute qu'un nombre fini de lettres).

C'est un facteur de dimension infinie, certes, mais il possède une double propriété de finitude : la moyennabilité - approximation par des sous-algèbres stellaires de dimension finie -, et l'existence d'une *trace*, c'est-à-dire un poids particulier qui joue le rôle d'une probabilité. C'est l'analogue non commutatif d'un espace de probabilités.

La classification des sous-facteurs du facteur II_1 moyennable par V. Jones a donné lieu à des nouveaux invariants pour la théorie des nœuds, et a ouvert un nouveau chapitre des mathématiques, la « topologie quantique ».

2.6 Coda : logique des interactions.

En guise de conclusion³², je dirai quelques mots (beaucoup trop brefs) sur l'intervention surprenante du facteur moyennable de type II_1 en logique, dans le cadre

³⁰il y a beaucoup d'autres noms « équivalents », par exemple facteurs hyperfinis, ou encore injectifs. Il ne s'agit d'ailleurs nullement d'une pure synonymie : chacun de ces noms est associé à une propriété spécifique de facteurs, qui a d'abord été étudiée pour elle-même, et la coïncidence de ces propriétés est un résultat majeur de la théorie qui met en évidence l'importance de cette classe de facteurs.

³¹voir, en particulier, l'article « Classification of injective factors », *Ann. of Math.* 104 (1976), 73-115.

³²« la bêtise consiste à vouloir conclure » disait Flaubert...

de la théorie de la démonstration, plus précisément dans la récente « logique des interactions » de J.-Y. Girard³³.

Il est intéressant de remarquer que l'histoire en logique mime un peu l'histoire que j'ai racontée à propos du changement de point de vue :

espace des points \rightsquigarrow algèbres de fonctions \rightsquigarrow algèbres d'opérateurs.

Le point de vue naïf d'espace de points correspond au point de vue des débuts de la logique formelle : dans cette analogie les points correspondent aux formules logiques. Les fonctions, quant à elles, correspondent aux programmes, et l'équivalence de Gelfand entre espaces compacts de points et algèbres stellaires commutatives de fonctions correspond à l'équivalence de de Bruijn-Curry-Howard entre preuves et programmes. L'analyse poussée de la notion de preuve a souligné l'importance théorique de l'élimination des coupures (il s'agit, grosso modo, de transformer une preuve en une autre plus directe, en supprimant les lemmes intermédiaires). Or le processus d'élimination des coupures est, d'après des résultats de Church-Rosser-Girard, un processus associatif. Une description en termes topologiques classiques avait été tentée (domaines de Scott), mais le résultat est peu satisfaisant, les espaces obtenus étant non séparés ; cela correspond à la situation décrite en 2.5 des points « englués ».

Grâce à sa notion opératorielle de feed-back dans le processus d'élimination des coupures, Girard est parvenu à donner une description géométrique (au sens non commutatif) de la situation, en termes de géométrie de dimension continue associée au facteur moyennable de type II_1 , en jouant de la double propriété de finitude de ce facteur remarquable.

Il est impossible de rentrer ici dans les détails, mais disons simplement ce que devient la tautologie « de a , on infère a » dans ce nouveau contexte : on utilise la décomposition de l'espace de l'Hilbert en deux copies de lui-même, et l'avatar opératorielle de ladite tautologie est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ associée à cette décomposition.

³³voir *Le Point Aveugle. Cours de théorie de la démonstration*, Roma Tre, Octobre-Décembre 2004, Hermann, collection « Visions des Sciences ». Tomes I, II.

Chapitre 3

Symétries I. Idées galoisiennes.

« Il existe pour ces sortes d'équations
un certain ordre de considérations métaphysiques
qui planent sur les calculs
et qui souvent les rendent inutiles. »

« Sauter à pieds joints sur les calculs,
grouper les opérations, les classer
suivant leur difficulté et non suivant leur forme,
telle est selon moi la mission des géomètres futurs. »

É. Galois.

Évariste Galois : révolutionnaire - en politique et en mathématique - mort en 1832 dans sa vingtième année.

Éduqué par sa mère à Bourg-la-Reine (dont son père est le maire), puis élève au lycée Louis-le Grand où il se passionne pour les mathématiques suite à la lecture, à quinze ans, des *Éléments de Géométrie* de Legendre, Galois commence à lire les mémoires des grands mathématiciens contemporains (Lagrange, Gauss, Jacobi), et obtient le premier prix du concours général dans cette discipline. Il échoue néanmoins au concours d'entrée à l'École Polytechnique, quelques jours après le suicide de son père suite à une cabale du curé du village. Il obtient, dès dix-huit ans, des résultats mathématiques d'une portée incomparable (« théorie de l'ambiguïté », théorie des intégrales abéliennes) qu'on a pu qualifier d'acte de naissance des mathématiques contemporaines.

Pendant la révolution de juillet 1830, Galois est élève à l'École Normale Supérieure¹, et consigné comme ses condisciples. Suite à la publication de deux lettres de lui (brocardant le directeur, et la misère de l'enseignement scientifique), il est renvoyé, et, sans ressource, ouvre un cours privé d'algèbre supérieure chez un libraire du quartier latin.

Il s'engage alors très activement dans la lutte politique, au sein de la Société des Amis du Peuple présidée par Raspail. Toast régicide puis manifestation en tenue illégale de garde républicain lui valent de passer l'essentiel de la dernière année de sa vie en prison. C'est en partie là qu'il rédige ses mémoires les plus importants, dont la plupart ont été perdus (par Cauchy et par Fourier) ou rejetés (par Poisson).

¹transitoirement rebaptisée École Préparatoire après avoir été supprimée quelques temps.

Il meurt fin mai 1832, à vingt ans et demi, le lendemain d'un duel dont les circonstances restent obscures (« pour une infâme coquette », écrit-il). La nuit précédant le duel, il a écrit une splendide lettre-testament qui sera évoquée ci-dessous.

Épilogue : en 1843, Liouville exhume un mémoire de Galois et expose la « théorie de l'ambiguïté » à l'Académie des Sciences. Depuis, l'influence de ces idées n'a cessé de croître²

En suivre certaines lignes de force jusque dans les mathématiques les plus contemporaines, tel est l'objet de ce chapitre dont le thème central est celui de *groupe de symétries et d'invariant*.

3.1 Théorie de Galois des équations algébriques.

3.1.1 Résolubilité par radicaux.

« Mon cher Ami, j'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles. Les unes concernent la théorie des équations, les autres les fonctions intégrales. Dans la théorie des équations, j'ai recherché lesquelles étaient résolubles par radicaux... » Ainsi débute la lettre-testament de Galois.

Une équations algébrique de degré n est une équation de la forme

$$(*) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

où les coefficients a_i sont des constantes (par exemple des nombres rationnels), et x est l'inconnue (appelée racine de l'équation).

La recherche de « formules » pour les racines x d'une telle équation est un problème très ancien, qui, au XVI^e siècle avait été résolu jusqu'au degré $n = 4$ au moyen de techniques de changement de variables et substitutions (Tartaglia, Cardano³, del Ferro, Ferrari). Ces formules se présentent sous la forme d'expressions faisant intervenir des radicaux $\sqrt[m]{}$, pour $m \leq n$.

Par exemple, la formule donnant une solution de l'équation du troisième degré

$$x^3 + a_1x + a_0 = 0$$

est

$$x = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{3}\right)^3}}.$$

On notera toutefois que de telles formules présentent des ambiguïtés techniques (dans la prise des radicaux), liées à une ambiguïté de fond : comment briser l'indiscernabilité a priori des racines de l'équation ?

Autre souci : ces formules peuvent faire intervenir des racines carrées de nombres négatifs (exclus jusqu'au XVI^e siècle), même lorsque la solution x est rationnelle : par exemple la formule précédente exprime la racine $x = 4$ de l'équation $x^3 - 15x - 4$ sous la forme alambiquée

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

²voir aussi A. Connes, « La pensée d'Evariste Galois et le formalisme moderne ».

³Ars Magna, 1545.

Ces problèmes étaient néanmoins à peu près circonscrits (sinon réglés) après les travaux de Bombelli. À la fin du XVI^e, Viète systématisa l'usage des lettres pour noter coefficients et inconnues, et découvrit la relation entre coefficients de (*) et fonctions symétriques des racines. Malgré tout l'intérêt du bouleversement conceptuel qui accompagna l'assimilation progressive des racines imaginaires et la clarification de la notion-même de racine⁴, je n'en dirai pas plus, considérant que cela appartient à la préhistoire de notre sujet.

Il fallut plus de deux siècles avant de pouvoir aller au-delà du degré $n = 4$ dans la question de la résolution « par radicaux » des équations. Les travaux de Lagrange sur la technique des résolvantes à la fin du XVIII^e siècle mirent en lumière le rôle crucial joué par les permutations des racines, sans toutefois résoudre le problème.

Mais c'est N. Abel, précurseur de Galois mort à 26 ans en 1829, qui le premier démontra rigoureusement l'impossibilité de résoudre l'équation générale du 5^e degré par radicaux⁵.

Peu après, Galois s'empara du problème de la résolubilité par radicaux et le résolut complètement en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur un certain groupe de symétries des racines de l'équation,

3.1.2 Le groupe de Galois.

Voici comment Galois l'introduit lui-même⁶, sous forme d'un « Théorème. Soit une équation donnée, dont a, b, c, \dots sont les racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres a, b, c, \dots qui jouira de la propriété suivante :

1. que toute fonction des racines, invariable par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue,⁷
2. réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable rationnellement, soit invariable par ces substitutions. »

C'est sans doute là l'une des toutes premières apparitions de la notion mathématique de groupe. En fait, Galois ne considère pas de « groupes abstraits »⁸, mais

⁴dans le cas des équations dont les coefficients sont des nombres, on peut considérer que la question a été complètement élucidée par le classique « théorème fondamental de l'algèbre » (énoncé par Girard, « justifié » par D'Alembert, puis démontré rigoureusement par Gauss) : toute équation (*) de degré non nul, à coefficients a_i dans le corps \mathbb{C} des nombres complexes, a au moins une racine dans \mathbb{C} .

⁵N. Abel, « Sur la résolution algébrique des équations », Oeuvres t. II.

⁶Oeuvres mathématiques, suivies d'une notice de G. Verriest, Gauthiers-Villars, 1951 .

⁷ce qui signifie : exprimable à partir des coefficients de l'équation *rationnellement*, c'est-à-dire en ne faisant intervenir que l'addition, la soustraction, la multiplication, la division.

⁸C'est semble-t-il Cayley qui donna en 1854 une première définition générale de groupe abstrait (en indiquant d'ailleurs que tout groupe abstrait peut être vu comme groupe de permutations de ses éléments, de sorte que la considération des seuls groupes de substitutions n'est pas limitative) ; mais la condition d'associativité n'est clairement mise en avant que plus tard (Huntington, Moore, 1902). La définition d'un groupe (abstrait) s'est alors stabilisée : un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $(x, y) \mapsto x \cdot y$ qui est associative $(x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$, admet un élément neutre 1 ($1 \cdot x = x \cdot 1 = x$), et telle que tout élément x admet un inverse x^{-1} ($x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$). Exemples : le groupe des permutations d'un ensemble d'objets, le groupe des déplacements dans l'espace, le groupe des transformations canoniques du sujet d'une fugue, etc... Les groupes abstraits (non donnés comme groupes de transformations concrètes, comme dans les exemples précédents) sont souvent définis par générateurs et relations.

Un groupe G est dit *commutatif* ou *abélien* si on a toujours $x \cdot y = y \cdot x$. Exemples : l'addition des vecteurs dans un espace vectoriel, le groupe des transpositions d'un mode musical, etc...

seulement des groupes de substitutions, c'est-à-dire des ensembles de permutations de a, b, c, \dots qui sont stables par composition et par passage à l'inverse. Mais, comme on va voir, c'est bien la structure de ces groupes qui l'intéresse, et non le calcul des permutations des a, b, c, \dots elles-mêmes (comme chez Lagrange).

Mon but n'étant pas de nature historique, c'est non pas avec les mots-mêmes de Galois, mais sous la forme moderne et compacte que lui ont donnée au tournant du XX^e siècle Kronecker, Weber, et (définitivement) Artin, que je vais exposer, brièvement, les notions et résultats de base de la théorie⁹.

On part d'un corps de base k qui contient les coefficients a_i de l'équation (par exemple le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels). Sans perte de généralité, on peut supposer, et nous supposons toujours, que l'équation (*) est *irréductible* sur k , c'est-à-dire que le polynôme $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ n'est pas produit de polynômes à coefficients dans k de degrés moindres.

Alors (*) a exactement n racines complexes. On aimerait bien les appeler x_1, \dots, x_n , mais comment les distinguer a priori les unes des autres pour les numéroter ?

C'est précisément sur cette ambiguïté, sur les substitutions indétectables de racines - ou mieux : sur les symétries intrinsèques de l'équation -, que va jouer Galois pour fonder sa théorie, qu'il baptise « théorie de l'ambiguïté »¹⁰.

Notons K le corps engendré sur k par ces racines, c'est-à-dire le corps qu'on obtient en formant toutes les expressions bâties à partir des éléments de k et des racines par addition, soustraction, multiplication, division. Une extension (= sur-corps) du type K/k est dite *normale*.

Le *groupe de Galois* de l'équation algébrique (*) est le groupe des automorphismes du corps K qui fixent k ¹¹ : c'est le groupe des « symétries » de l'extension K/k .

Il est noté $Gal(K/k)$ en l'honneur de son inventeur. Il vérifie les deux propriétés énoncées par Galois :

1. toute expression rationnelle en les racines (c'est-à-dire tout élément de K) qui est invariant par $Gal(K/k)$ est en fait dans k ,
2. réciproquement, tout élément de k est invariant par $Gal(K/k)$.

Les éléments de $Gal(K/k)$ sont entièrement déterminés par les valeurs qu'ils prennent sur les racines de (*), valeurs qui sont encore des racines de (*). Ainsi $Gal(K/k)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe \mathfrak{S}_n des permutations des n racines. On montre que c'est un groupe d'ordre égal à la dimension¹² du k -espace vectoriel K .

3.1.3 La correspondance de Galois.

Le cœur de la théorie de Galois est une correspondance bijective entre extensions ℓ de k contenues dans l'extension normale K , et sous-groupes H du groupe de Galois $Gal(K/k)$. Elle est définie ainsi :

⁹pour les détails, voir par exemple I. Stewart, *Galois theory*, Chapman and Hall, 2. ed., 1989, et R. et A. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes II*, Cedic, 1979.

La thèse de C. Ehrhardt contient un exposé critique de la construction progressive du canon de la théorie de Galois, de Galois à Artin. .

¹⁰et que l'on a appelée après lui « théorie de Galois ».

¹¹ce sont les opérateurs du k -espace vectoriel K qui respectent la multiplication.

¹²qui est comprise entre n et $n! = 1.2 \dots n$.

1. à l'extension ℓ , on associe le sous-groupe H formé des éléments qui fixent ℓ (autrement dit, le groupe de symétries de l'extension K/ℓ),
2. réciproquement, au sous-groupe H , on associe l'extension ℓ formés des éléments de K invariants par H .

Cette *correspondance entre extensions (de corps) et groupes (de symétries)* renverse le sens des inclusions.

Par ailleurs, Galois dégage la notion de sous-groupe *normal* H d'un groupe G . C'est un sous-groupe tel que pour tout $g \in G$, la conjugation par g :

$$h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$$

envoie H dans lui-même ; on peut alors former le groupe quotient G/H . Dans la correspondance de Galois, les sous-groupe normaux de $Gal(K/k)$ correspondent aux extensions normales ℓ/k .

Galois introduit aussi la notion de groupe *résoluble*. C'est un groupe qui se « dévisse en groupes abéliens ». Plus précisément, un groupe G est dit résoluble s'il existe une chaîne finie de sous-groupes inclus les uns dans les autres, commençant à $\{1\}$ et finissant à G , chacun étant normal dans le suivant avec un quotient abélien. Galois démontre que l'équation (*) est résoluble si et seulement si son groupe de Galois est résoluble. Il démontre en outre que le groupe S_n n'est pas résoluble dès que $n \geq 5$, et en déduit qu'il y a des équations de tout degré $n \geq 5$ qui ne sont pas résolubles par radicaux.

Il a par ailleurs introduit les corps finis¹³ et utilisé sa correspondance pour les classer.

3.2 Portée et enjeux de la « théorie de l'ambiguïté ».

Galois était pleinement conscient du caractère révolutionnaire, à divers titres, de ses conceptions, et du fait qu'elles dépassaient largement le cadre spécifique des équations algébriques.

3.2.1 Émergence d'un corps de concepts d'un type nouveau.

L'usage d'une structure algébrique - celle de groupe en l'occurrence, suivie par celle d'extension de corps que la théorie « appelle » - comme outil fondamental, et de notions abstraites comme celles de sous-groupes normaux, de groupes résolubles, a modifié l'idée qu'on se faisait de la nature des objets mathématiques.

En mettant l'accent sur les concepts d'opération (« abstraite de son résultat ») et d'invariant, la démarche galoisienne ouvre un champ conceptuel nouveau aux mathématiques qui marque la naissance de l'algèbre moderne¹⁴.

3.2.2 Fécondité du principe de correspondance galoisienne.

Selon S. Lie, premier grand continuateur (avec F. Klein) de l'œuvre de Galois, « la grande portée de l'œuvre de Galois tient au fait que sa théorie originale des

¹³on ne connaissait guère avant lui que l'exemple des corps finis obtenus par réduction des entiers modulo un nombre premier p .

¹⁴voir J. Vuillemin, *Philosophie de l'algèbre*.

équations algébriques est une application systématique des deux notions fondamentales de *groupe* et d'*invariant*, notions qui tendent à dominer la science mathématique¹⁵. »

L'idée galoisienne de correspondance entre symétries d'une structure mathématique et treillis de ses sous-structures a essaimé dans d'autres domaines des mathématiques. L'un des premiers et plus célèbres avatars est le programme d'Erlangen de Klein, qui jette un pont entre géométrie et théorie des groupes : il s'agit de classer les géométries de l'espace à n dimensions où le « mouvement d'une figure invariable est possible » - et, en toile de fond, de comprendre de manière unifiée les géométries classiques de l'époque (géométries euclidienne, affine, projective, sphérique, elliptique, hyperbolique, conforme). Klein montre qu'elles correspondent à certains groupes G de « déplacements » : la géométrie correspondant à G est définie par les propriétés des figures (parties de l'espace) telles que G soit exactement le groupe de déplacements qui conservent ces propriétés, ou par les classes invariantes par G de figures (on peut alors chercher à classer ces figures pour l'action de G , c'est-à-dire déterminer les orbites). Par exemple, pour le groupe affine G , les coniques forment une classe invariante, et se répartissent en trois orbites : ellipses, paraboles, hyperboles.

Comme l'écrit G. Bachelard dans sa polémique contre E. Meyerson sur le principe d'identité¹⁶, « des êtres géométriques qui sont *invariants* dans les opérations d'un sous-groupe G' du groupe général G de la géométrie euclidienne peuvent cesser d'être invariants pour des opérations qui, comprises dans G , ne figurent pas dans G' . Leur « identité » est donc simplement relative au groupe qui définit le système rationnel qui sert de base à l'examen de leurs propriétés. [...] Qu'une sphère et un ellipsoïde soient des surfaces identiques du point de vue de l'Analysis Situs, voilà un fait qui nous libère d'une *identité en soi*. [...] »

Dès qu'on aborde les géométries très spécialisées, le principe d'identité pose un discernement très travaillé. [...] Les géométries ont besoin chacune d'un protocole d'identification. [...] Si l'on suivait en détail ces *applications* de la pensée algébrique à la géométrie, on s'apercevrait que fonctionne toujours - plus ou moins tacitement - une fonction d'adverbe à côté de l'adjectif *identique*. [...] On devrait donc, si l'on veut se cantonner dans la géométrie usuelle, parler de figures *euclidiennement* identiques. »

Le point de vue que promeut Klein est que c'est le groupe sous-jacent qui fonde une géométrie, car c'est lui qui permet la définition même de l'identité des figures. Qu'il apparaisse encore - en second lieu - comme groupe de symétries des figures est le reflet du principe de correspondance galoisienne.

Nous verrons d'autres avatars plus récents de correspondances galoisiennes dans la suite.

3.2.3 Thématization des obstructions.

Avec Galois, la notion vague, à connotation esthétique, de symétrie devient un concept mathématique précis et opératoire.

Les ambiguïtés constituent-elles une *nuisance*? Non, répond Galois en substance, elles constituent un *groupe*!

¹⁵de l'époque, tout au moins!

¹⁶ Le rationalisme appliqué, P. U. F. 1949, p. 83 .

Loin d'être un simple zeugma, c'est là un geste de pensée étonnant : geste inaugural de la théorie de l'obstruction (mentionnée dans le premier chapitre) dont l'objet est de réaliser les obstructions à effectuer telle ou telle opération mathématique comme éléments d'un nouvel objet mathématique (souvent un groupe) ; l'étude de ce nouvel objet *per se* livre la clé du problème. Sur un plan philosophique beaucoup plus général, ce geste inaugure un

3.2.4 Changement de paradigme dans la conception des problèmes mathématiques.

Ce point a été bien cerné par G. Deleuze¹⁷ :

« On se rappelle, en effet, le cercle dans lequel tourne la théorie des problèmes : un problème n'est résoluble que dans la mesure où il est « vrai », mais nous avons toujours tendance à fonder le caractère extrinsèque de la résolubilité dans le caractère intérieur du problème (Idée), nous faisons dépendre le caractère interne du simple critère extérieur. Or, si un tel cercle a été brisé, c'est d'abord par le mathématicien Abel ; c'est lui qui élabore toute une méthode d'après laquelle la résolubilité doit découler de la forme du problème. Au lieu de chercher comme au hasard si une équation est résoluble en général, il faut déterminer des conditions de problèmes qui spécifient progressivement des champs de résolubilité, de telle manière que « l'énoncé contienne le germe de la solution ». Il y a là un renversement radical dans le rapport solution-problème [...]

Le même jugement se confirme, appliqué aux travaux de Galois : à partir d'un « corps » de base, les adjonctions successives à ce corps permettent une distinction de plus en plus précise des racines d'une équation, par limitation progressive des substitutions possibles. Il y a donc une cascade de « résolvantes partielles » ou un emboîtement de « groupes », qui font découler la solution des conditions mêmes du problème : qu'une équation ne soit pas résoluble algébriquement, par exemple, cela n'est plus découvert à l'issue d'une recherche empirique ou d'un tâtonnement, mais d'après les caractères des groupes et des résolvantes qui constituent la synthèse du problème et de ses conditions. [...]

Le groupe de l'équation caractérise à un moment, non pas ce que nous savons des racines, mais l'objectivité de ce que nous n'en savons pas. Inversement, ce non-savoir n'est plus un négatif, une insuffisance, mais une règle, un *apprendre* auquel correspond une dimension fondamentale de l'objet. »

3.3 Revêtements, groupes fondamentaux, dessins d'enfants.

3.3.1 La « montée vers l'absolu ». Le groupe $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

La correspondance galoisienne concerne les extensions intermédiaires $k \subset \ell \subset K$, l'extension normale K/k étant fixée. On peut aussi ne fixer que le corps de base k , disons $k = \mathbb{Q}$, et faire varier l'extension normale K/\mathbb{Q} : lorsque K grossit (c'est-à-dire lorsqu'on adjoint de plus en plus de nombres algébriques), on obtient ainsi un système « projectif » de groupes finis s'envoyant les uns sur les autres :

$$\cdots \rightarrow Gal(K/\mathbb{Q}) \rightarrow \cdots \rightarrow Gal(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) = \{1\}.$$

¹⁷La différence et la répétition, p. 233.

La limite $\varprojlim_K Gal(K/\mathbb{Q})$ de ce système est le groupe infini¹⁸ $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ des automorphismes du corps $\bar{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques¹⁹.

C'est cette démarche qu'A. Lautman appelle la « montée vers l'absolu »²⁰ : un seul objet mathématique, le groupe de Galois absolu, code les propriétés de toutes les équations algébriques à coefficients rationnels à la fois.

Ce *groupe de Galois absolu* $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, objet central de la théorie des nombres, reste largement un mystère après un siècle et demi d'efforts intenses pour en comprendre la structure.

3.3.2 Théorie de Galois des revêtements.

Il s'agit d'une « jumelle » géométrique de la théorie de Galois des nombres algébriques. En voici un aperçu dans le cadre des revêtements de surfaces de Riemann évoqués dans le premier chapitre.

L'histoire commence en 1877 lorsque Klein remarque que le groupe des isométries laissant invariant l'icosaèdre est isomorphe au groupe de Galois d'une équation quintique à coefficients dans le corps de fonctions rationnelles d'une variable auxiliaire. On a maintenant deux variables, et les solutions complexes de l'équation quintique forment une surface de Riemann, qui est un revêtement du plan complexe.

Plus généralement, on a la notion de revêtement²¹ fini normal $Y \rightarrow X$ de surfaces de Riemann. C'est l'avatar géométrique d'une équation (*): ce qui joue le rôle de racines de l'équation est l'ensemble $\{y_1, \dots, y_n\}$ des points de Y qui s'envoient sur un point x arbitraire fixé de X . Le groupe de Galois $Gal(Y/X)$ est un sous-groupe du groupe \mathfrak{S}_n des permutations de $\{y_1, \dots, y_n\}$ ²². Il peut se calculer comme suit : traçons sur X un lacet γ pointé en x , et choisissons un point y_i de Y au-dessus de x . Un tel γ se « relève » alors en un chemin sur Y partant de y_i , qui en général aboutira à un autre point y_j , d'où une permutation $y_i \mapsto y_j$ de l'ensemble des points au-dessus de x , qui ne dépend en fait du lacet γ qu'à homotopie (= déformation) près. C'est ainsi que s'obtiennent les éléments de $Gal(Y/X)$.

Dans ce contexte, on peut encore effectuer une « montée vers l'absolu ». Ce qui correspond au corps $\bar{\mathbb{Q}}$ est maintenant le *revêtement universel* de X , et son groupe d'automorphismes n'est autre que le *groupe fondamental* de Poincaré $\pi_1(X)$: c'est le groupe des lacets tracés sur X à homotopie près, partant et aboutissant à un point x fixé.

On peut algébriser la construction en remplaçant $\pi_1(X)$ par la limite projective $\hat{\pi}_1(X)$ des groupes $Gal(Y/X)$, lorsque le revêtement Y/X grossit. D'après Grothendieck, $\hat{\pi}_1(X)$ s'interprète comme groupe des automorphismes du foncteur fibre en x

$$Y \mapsto Y_x = \{y_1, \dots, y_n\}$$

sur la catégorie des revêtements de (X, x) (à valeurs dans la catégorie des ensembles), ce qui permet d'unifier les théories de Galois arithmétique et géométrique dans un même moule.

¹⁸il est naturellement muni d'une structure de groupe topologique compact.

¹⁹nombres vérifiant une équation algébrique à coefficients rationnels.

²⁰Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. Réédition Vrin 2006.

²¹qu'on suppose non ramifié pour simplifier.

²²dans le cas de la quintique de Klein, le groupe de Galois est le groupe de l'icosaèdre, auquel Klein a consacré un ouvrage classique.

3.3.3 Une vision géométrique, voire graphique, de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Une approche indirecte fascinante de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ consiste à le relier à la géométrie des surfaces de Riemann.

Pour fixer les idées, prenons pour X le plan complexe privé des points 0 et 1. Son groupe fondamental $\pi_1(X)$ est le groupe libre à deux générateurs, les lacets γ_0 et γ_1 autour de 0 et de 1 (qu'on ne peut « défaire » par déformation). Son complété $\hat{\pi}_1(X)$ s'obtient en permettant des « mots infinis » en γ_0 et γ_1 (et leurs inverses).

Suivant Grothendieck et Belyi, $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ opère sur les revêtements finis de X , donc sur $\hat{\pi}_1(X)$, et cette opération est *fidèle* : le groupe de Galois absolu arithmétique $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ se plonge dans le groupe des automorphismes du groupe de Galois absolu géométrique $\hat{\pi}_1(X)$.

De là, Grothendieck a alors proposé de décrire $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ au moyen de notions graphiques « si simples qu'un enfant peut les connaître en jouant ». Considérons un revêtement $Y \rightarrow X$, en supposant pour simplifier que Y est le plan complexe privé de quelques points. L'image inverse dans Y du segment $]0, 1[$ de X est un objet combinatoire très simple que Grothendieck appelle « dessin d'enfant ». Le défi est de comprendre en termes combinatoires l'opération fidèle de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur ces dessins.

Pour ce faire, il faut disposer au préalable d'un codage combinatoire des éléments de $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ lui-même. C'est ce qui a été obtenu par Drinfeld autour de 1990 (en découvrant un lien insoupçonné entre $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et groupes quantiques) : il plonge $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans un groupe de nature combinatoire (le groupe de Grothendieck-Teichmüller, défini par générateurs et trois relations très simples), qui s'avère agir fidèlement sur les dessins d'enfants. On ignore à l'heure actuelle si GT est réellement « plus gros » que $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (on le soupçonne).

3.4 Ambiguïtés galoisiennes en analyse.

Voici la fin de la lettre-testament de Galois : « Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori dans une relation entre quantités ou fonctions transcendentes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pouvait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense... »

Liouville est le premier à avoir poursuivi dans cette direction : au lieu de se demander quand une équation algébrique est résoluble par radicaux, il se demande quand une équation différentielle linéaire est résoluble à l'aide de fonctions élémentaire (des radicaux, des logarithmes, des exponentielles), et obtient un critère galoisien. Au début du XX^e siècle, Picard et Vessiot introduisent dans ce contexte le *groupe de Galois différentiel* : c'est le groupe formé des automorphismes de l'extension du corps des fonctions de base, obtenu en adjoignant les solutions et leurs dérivées, qui commutent à la dérivation. Du fait que les solutions d'une équations différentielle linéaire forment non plus un ensemble fini, mais un espace vectoriel de dimension finie, le groupe de Galois différentiel n'est plus un groupe fini en général, mais un groupe « continu » de matrices.

La théorie a mûri lentement, et la classification des ambiguïtés galoisiennes dans le cadre des équations différentielles linéaires analytiques au voisinage d'une singularité, due à J. P. Ramis, date seulement de la fin du XX^e siècle. Le résultat est qu'il y a trois types, et trois seulement, de telles ambiguïtés galoisiennes - qui prennent en fait la forme de matrices :

1) la *monodromie* : c'est l'ambiguïté qui résulte de ce que l'on ne retombe pas la valeur initiale lorsque l'on fait subir à une solution un tour autour de la singularité. On a déjà vu ce phénomène dans le premier chapitre (1.1). Considérons l'équation différentielle

$$y' = \frac{1}{2x}y$$

au voisinage de la singularité 0 ; une solution est $y = \sqrt{x}$, et un tour autour de l'origine la transforme en $-y$. Le groupe de Galois différentiel de cette équation est le groupe à deux éléments engendré par la monodromie.

2) le *recalibrage des exponentielles* : considérons l'équation différentielle

$$xy' + y = 0$$

au voisinage de la singularité 0 ; une solution est $y = e^{1/x} = \sum x^{-n}/n!$, et toute autre solution non nulle s'obtient en multipliant y par une constante non nulle. Le groupe de Galois différentiel de cette équation est le groupe multiplicatif \mathbb{C}^\times (des nombres complexes non nuls) engendré par ces recalibrages.

3) les *ambiguïtés de Stokes* : considérons l'équation différentielle

$$xy' + y = x$$

au voisinage de la singularité 0 ; une solution formelle est $\hat{y} = \sum (-1)^n n! x^{n+1}$, qui diverge en tout point $x \neq 0$. Toutefois, il y a moyen de « resommer » cette série divergente de manière canonique pour obtenir une vraie solution dans certains secteurs de sommet 0. Par exemple, dans un secteur bissecté par le demi-axe réel positif, une vraie solution, asymptotique à \hat{y} , est $y = \int_0^\infty \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$, mais les changements de secteurs introduisent des ambiguïtés dans ces vraies solutions resommées, les ambiguïtés de Stokes.

De manière générale, le groupe de Galois différentiel est engendré (au sens des groupes « continus ») par ces trois types de matrices.

Ainsi la théorie de Galois s'étend, comme Galois l'avait pressenti, aux fonctions transcendentes solutions d'équations différentielles²³.

3.5 Groupes de Galois motiviques et nombres transcendants.

Mais laissons là les équations différentielles et même les fonctions, pour revenir aux nombres. La théorie de Galois, initialement conçue dans le cadre des nombres algébriques, s'étend-elle aux nombres transcendants ?

Il s'avère que la réponse est oui, du moins conjecturalement, pour des nombres qui s'écrivent comme intégrales (multiples) $\int_\Delta \omega$ où le domaine d'intégration Δ est limité par des équations polynômiales définies sur \mathbb{Q} et l'intégrant ω est une

²³voir M. van der Put, M. Singer, Galois theory of linear differential equations, Springer Grundlehren der Math. Wiss. 328, 2003.

algébrique et définie sur \mathbb{Q} . Par exemple, le nombre $\pi = \int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt$ est de ce type.

Pour ces nombres, la réponse conjecturale est donnée par la *théorie des motifs* (imaginée par Grothendieck), plus précisément par la théorie de Galois motivique qui est une vaste généralisation (partiellement conjecturale) de la théorie de Galois qui s'applique aux systèmes de plusieurs équations algébriques à plusieurs variables²⁴.

Dans le cas de π , la réponse est que le groupe de Galois associé est le groupe multiplicatif \mathbb{Q}^\times des nombres rationnels non nuls.

3.6 Coda : un groupe de Galois « cosmique » ?

Depuis quelque temps, les idées galoisiennes ont fait irruption en physique quantique, plus précisément en théorie perturbative des champs quantiques.

À partir des travaux de Feynman et Schwinger, les physiciens ont mis au point des techniques sophistiquées pour éliminer les quantités infinies qui se présentent systématiquement, sous forme d'intégrales divergentes, dans la théorie. La plus simple et la plus utilisée de ces techniques est la renormalisation par régularisation dimensionnelle : on fait fluctuer la dimension de l'espace-temps en lui faisant prendre des valeurs complexes voisines de 4, et on développe les intégrales obtenues en séries indexées par des diagrammes de Feynman de complexité croissante. L'élimination des termes « divergents » de la série se fait suivant de subtiles règles combinatoires qui garantissent la cohérence du procédé.

La « moëlle » mathématique de cette technique a récemment été extraite par Connes et Kreimer, qui ont associé à toute théorie quantique des champs un certain groupe de symétries infini (mais résoluble) directement construit en termes de diagrammes de Feynman. En effectuant une « montée vers l'absolu », ils obtiennent, dans la situation universelle, un groupe de Galois absolu - le groupe de Galois « cosmique » (Cartier²⁵) - qui agit sur les constantes de toutes les théories quantiques des champs à la fois.

Ce groupe, d'une ubiquité stupéfiante, incarne à lui seul les divers avatars galoisiens évoqués ci-dessus :

- il s'interprète comme groupe de Galois différentiel
- il apparaît comme groupe de Galois motivique
- il est sensé être le groupe de Galois de certaines intégrales de Feynman²⁶
- c'est une variante algébro-géométrique du groupe de Grothendieck-Teichmüller.

En conclusion, on peut dire qu'en théorie quantique des champs, les divergences, loin d'être des nuisances, donnent naissance à des « ambiguïtés galoisiennes » formant le groupe de symétrie d'une riche structure qui apparaît dans des domaines mathématiques très éloignés les uns des autres.

²⁴voir Y. André, Une introduction aux motifs, Panoramas et Synthèses 17, SMF, 2004.

²⁵« La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich », Festschrift des 40 ans de l'IHES.

²⁶nombres présumés transcendants qui généralisent les valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann.

Chapitre 4

Symétries II. Représentations linéaires.

« Plus une méthode est nouvelle et féconde,
plus elle étend le champ de l'inconnu. »

J. Bertrand, *D'Alembert*¹

Hegel parlait de « l'apparence bariolée du sensible ». Ici, c'est plutôt « l'apparence bariolée » de l'intelligible mathématique que nous voudrions rendre sensible. En espérant faire entrevoir que le développement des mathématiques ne repose pas sur le seul mouvement d'élévation conceptuelle, mais qu'au contraire la conquête de l'intelligible mathématique s'appuie sur une dynamique de va-et-vient entre avancées conceptuelles et retombées applicatives.

« Retombée » : n'y voyons surtout pas une chute d'Icare du ciel des Idées, mais ce mouvement essentiel par lequel les nouveaux concepts essaient, se concrétisent, et fécondent d'autres territoires mathématiques.

Ce second chapitre sur le thème général des symétries s'ouvre sur un long préambule présentant les idées fondamentales de linéarisation et de représentation en mathématique. Nous esquisserons ensuite la théorie des représentations linéaires des groupes, initiée par Frobenius à la fin du XIX^{ème} siècle (dans le cas des groupes finis). Un acteur majeur fut H. Weyl qui, en liaison avec ses travaux sur les fondements de la mécanique quantique, fit la jonction inattendue avec l'analyse de Fourier et créa l'analyse harmonique non commutative. La théorie s'est ensuite énormément développée et ramifiée sous la maîtrise d'œuvre de Gelfand.

Le rêve de Burnside de mettre à profit l'impressionnante effectivité de la théorie des représentations linéaires pour classifier tous les groupes finis simples s'est finalement réalisé au bout d'un siècle. Entre-temps, cette théorie avait permis à Killing et Cartan de classifier tous les groupes infinis « continus » simples. Nous terminerons en expliquant comment le problème général de classification des représentations linéaires mène à une trichotomie (fini, modéré, sauvage), et comment l'indécidabilité surgit au coeur de situations extrêmement concrètes et apparemment élémentaires.

¹ cité dans G. Bachelard, *Le matérialisme rationnel*, P. U. F. 1953.

4.1 Linéarité. Linéarisation.

4.1.1 Bref retour à l'algèbre linéaire.

Comme nous l'affirmions au début du second chapitre, l'algèbre linéaire est la partie la plus simple des mathématiques. Elle consiste, rappelons-le, en l'étude des espaces vectoriels (espaces où les points nommés vecteurs peuvent être additionnés entre eux et multipliés par des nombres) et des applications linéaires qui relient ces espaces - et tout particulièrement, de l'algèbre $\mathcal{L}(V)$ des applications linéaires F d'un espace vectoriel V dans lui-même (munie de l'addition et de la composition).

Supposons V de dimension finie. Dans une base donnée e_1, \dots, e_n , les vecteurs sont repérés par leurs coordonnées. Un opérateur $F \in \mathcal{L}(V)$ étant donné, les coordonnées λ_j^i des vecteurs $F(e_j)$ forment une matrice Λ , c'est-à-dire un tableau carré de nombres (disons des nombres complexes).

La matrice Λ de F dépend de la base choisie. Qu'est-ce qui, de la matrice Λ , reste invariant par changement de base ?

L'invariant le plus simple est la *trace* de Λ , c'est-à-dire la somme de ses coefficients diagonaux λ_i^i :

$$\text{tr } \Lambda = \sum \lambda_i^i = \text{tr } F,$$

qui jouera un rôle important dans la suite. En fait, $\text{tr } F$ est la somme $\sum \mu_i(F)$ des *valeurs propres* de F , qui ne sont autres que les éléments du spectre de F comptés éventuellement plusieurs fois². En outre, vis-à-vis de la composition des opérateurs, la trace vérifie l'identité

$$\text{tr } FG = \text{tr } GF.$$

En dimension infinie, c'est plus compliqué : pour pouvoir écrire des sommes infinies, on doit introduire un peu de topologie. La situation la plus commode est celle des espaces de Hilbert, mais n'anticipons pas (ou plutôt, ne revenons pas si tôt sur le thème du second chapitre)...

4.1.2 Linéarisation.

La *linéarité* est le caractère des situations ou problèmes mathématiques dans lesquels les multiplicités à l'œuvre forment des espaces vectoriels. Le rôle de l'algèbre linéaire est précisément d'aider à traiter les problèmes linéaires, c'est-à-dire ceux dont les solutions forment a priori un espace vectoriel : la somme de deux solutions est encore une solution, de même que la multiplication d'une solution par une constante arbitraire.

La *linéarisation*, certainement l'une des démarches les plus universelles en mathématiques, des plus abstraites aux plus appliquées, consiste à essayer de ramener des problèmes non-linéaires à des problèmes linéaires, toujours plus abordables grâce notamment à la technologie élémentaire de l'algèbre linéaire.

La linéarisation se retrouve aussi bien en analyse qu'en géométrie et en algèbre. En analyse, elle se présente sous la forme de l'*approximation au premier ordre*.

Exemple 1. Soit f une fonction lisse d'une variable x (« lisse » évoque, intuitivement, quelque chose comme « agréable à caresser » ; formellement : « indéfiniment différentiable ». Pourvoir les chaînons manquants dans l'évolution putative de la

²comme on l'a vu au § 4.1 du second chapitre, ces éléments sont les nombres μ tels que $F - \mu I$ n'est pas inversible.

notion intuitive à la notion formelle est une gageure tant pour les sciences cognitives que pour l'histoire des mathématiques...)

Une telle fonction admet un développement en puissances³ de la variable x

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

où les a_i sont des constantes. La linéarisée de f est $a_0 + a_1x$ (cela revient si l'on veut à poser, quelque peu brutalement, $x^2 = 0$ dans le développement de f). Avantages quantitatifs et qualitatifs : bonne approximation numérique en pratique, et détection de la croissance (positivité de a_1).

Du point de vue géométrique, cela revient à remplacer le graphe de la fonction f par sa tangente au point d'abscisse 0. Noter qu'on reconstruit f en prenant l'enveloppe de ses tangentes (en tous les points du graphe). Plus généralement prendre l'espace tangent d'une variété en un point est une forme de linéarisation.

Exemple 2. Prenons par exemple un groupe « continu » G de transformations (« groupe de Lie »), par exemple le groupe $GL(V)$ des applications linéaires inversibles de V dans V . L'espace tangent en l'identité est l'algèbre de Lie de G (celle de $GL(V)$ est $\mathcal{L}(V)$, l'espace des applications linéaires de V dans V). Elle est munie d'opération « crochet de Lie » $[,]$ que l'on obtient en « linéarisant » le commutateur

$$g_1, g_2 \mapsto g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$$

(en fait en regardant le terme d'ordre 2 car il n'y a pas de terme d'ordre 1). La structure d'algèbre de Lie⁴ de G est une forme linéarisée de la structure de groupe de Lie.

Exemple 3. Les systèmes dynamiques, qui modélisent mathématiquement l'évolution de toutes sortes de systèmes physiques, biologiques, économiques etc..., sont souvent non-linéaires. Considérons par exemple un système du type

$$dy/dt = F(y, t),$$

où t désigne la variable temporelle et $y = (y_1, \dots, y_n)$ un ensemble de quantités dépendant du temps. Au voisinage d'un point d'équilibre y_0 , on peut linéariser le système, ce qui donne

$$dy/dt = DF(y_0, t)(y - y_0),$$

où $DF(y_0, t)$ est maintenant une matrice. De nombreux théorèmes de la théorie des systèmes dynamiques ont pour objet de prédire le comportement du système en fonction du spectre de la matrice $DF(y_0, t)$ (e.g. si le spectre est négatif, l'équilibre est stable...).

4.2 Le concept mathématique de représentation.

Nous le ferons émerger de trois doublets successifs : objets généraux/objets particuliers, mode intrinsèque/mode extrinsèque, présentation/représentation.

³en pratique, souvent, ce développement converge et f en est la somme ; on dit alors que f est analytique. La théorie des développements asymptotiques, qui a fait une apparition-éclair à la fin du § 4 du chapitre précédent, permet de donner sens à ces développements même dans le cas divergent.

⁴espace vectoriel muni d'une opération « crochet de Lie » vérifiant des axiomes convenables.

4.2.1 Objets généraux/objets particuliers.

Il s'agit là d'une distinction⁵ imprécise et presque triviale, mais omniprésente dans le champ mathématique (et pourtant peu soulignée).

Appelons *objets généraux* ces objets indifférenciés dans leur type d'être mathématique, ceux qu'accompagne, plus ou moins tacitement, l'adjectif « quelconque » - comme dans les expressions canoniques « soit ABC un triangle quelconque », « considérons un groupe G » etc...

Souvent, les objets généraux que l'on considère sont tout simplement les objets d'une catégorie donnée (groupes, espaces vectoriels, espaces topologiques, etc...). Un point de vue structuraliste outrancier voudrait que ce soit toujours le cas ; autrement dit, qu'un objet mathématique général ne soit rien d'autre qu'une espèce de structure.

Or ce n'est pas toujours le cas, tant s'en faut : par exemple, les systèmes dynamiques évoqués ci-dessus sont les objets généraux d'un immense chapitre des mathématiques, qui ne se laissent pas enfermer dans une saisie catégorique - si ce n'est fort artificiellement.

Soit dit en passant, il importe d'être conscient des limites de l'approche catégorique, et surtout de ne pas confondre à cet égard trois « ordres d'universalité » : la notion mathématique d'« universalité » que la théorie des catégories thématise, l'« universalité » théorique d'application de ses concepts formels (liée au fait que par nature, cette théorie occulte la structure interne des objets), et l'« universalité » - ou plutôt la généralité - relativement limitée, voire précaire, de son importance pratique dans le champ mathématique tout entier.

Les *objets particuliers*, quant à eux, sont des sortes de « personnages » mathématiques qui ont un nom propre. Ils interagissent les uns avec les autres, et avec les objets généraux. Nous en avons déjà rencontré quelques spécimens remarquables :

- le facteur moyennable de type II_1 dans la théorie de von Neumann (et plus récemment héros de la logique des interactions de Girard),
- la logique classique (parmi toutes les logiques intuitionnistes),
- le groupe de Galois absolu $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (objet central de la théorie des nombres),
- le groupe de Galois cosmique (qui agit sur les constantes de toutes les théories quantiques des champs).

Ces objets particuliers sont d'autant plus fascinants qu'ils sont plus protéiformes et ubiquitaires, c'est-à-dire qu'ils admettent de nombreuses descriptions différentes et interviennent de façon différente dans plusieurs théories mathématiques. Cette *combinaison de singularité et d'ubiquité* enchante bien des mathématiciens, qui considèrent de tels objets particuliers remarquables comme les bijoux de leur discipline. Leur apparition inopinée dans une théorie mathématique qui les ignorait est le présage de développements exaltants, l'un des catalyseurs de l'unité des mathématiques en acte. L'explication de cette apparition passe souvent par le façonnage d'objets mathématiques généraux tout à fait nouveaux. L'exporation de ce nouvel inconnu peut alors mener, après un âpre travail, à une classification qui fait apparaître de nouveaux objets particuliers.

Cette dialectique entre objets généraux et objets particuliers, qui nous semble être l'un des moteurs de la recherche mathématique, ne semble pas avoir attiré l'attention des épistémologues.

⁵cette terminologie n'est guère satisfaisante. Nous l'employons par défaut, le doublet « générale/singulier » étant déjà fort employé en mathématique.

4.2.2 Mode intrinsèque/mode extrinsèque.

La question qu'on se pose maintenant est celle du mode sous lequel tel ou tel objet mathématique *particulier* est constitué/envisagé.

Prenons, pour fixer les idées, le cas d'objets géométriques. Traditionnellement, c'est-à-dire depuis les Anciens jusqu'à Gauss, ils étaient envisagés par rapport à un *référent* géométrique : le plan ou bien l'espace euclidien de dimension trois ; l'étude portait donc sur l'*objet plongé*.

C'est Gauss qui, dans son étude fondamentale des surfaces, a mis l'accent sur les propriétés *intrinsèques*⁶, c'est-à-dire indépendantes du plongement dans le référent. Cela suppose déjà une vision claire de l'identité (ou plus correctement, de l'« isomorphie ») d'objets géométriques plongés différemment dans un référent. On peut y voir l'une des sources de l'importance prise peu à peu par la notion générale d'isomorphisme, puis de morphisme.

Toutefois, si c'est la notion intrinsèque qui importe en fin de compte, il ne s'agit pas pour autant de se débarrasser d'un référent, la donnée même d'un objet mathématique *particulier* se faisant très souvent de manière extrinsèque, e.g. via des équations. Le caractère intrinsèque des objets et propriétés considérés permet alors, selon un libre jeu de changements de repères, de choisir la description la plus commode selon les besoins.

Exemple. Reprenons le cas, évoqué au début de ce chapitre, d'un opérateur linéaire $F \in \mathcal{L}(V)$. Bien souvent, ce qui est donné en pratique, ce n'est pas F lui-même, mais le tableau carré de nombres qu'est sa matrice Λ . L'opérateur F est l'objet abstrait intrinsèque défini par Λ dans une base donnée, c'est-à-dire une fois V identifié à \mathbb{C}^n .

Cette définition est donc de nature extrinsèque : elle dépend du choix d'une base. Lorsqu'on la change, Λ se change en une matrice du type $P\Lambda P^{-1}$, et on peut par exemple tirer profit de cette variation pour se ramener au cas commode d'une matrice triangulaire (*i.e.* n'ayant que des 0 au-dessous de la diagonale).

Nous allons maintenant discuter *deux modes extrinsèques de se donner un objet mathématique particulier : la présentation et la représentation*.

Ces deux modes sont de caractères opposés : la présentation est une description abstraite, formelle, symbolique de l'objet considéré, tandis que la représentation vise à une « concrétisation », une « réalisation », une « incarnation » de cet objet.

4.2.3 Présentations.

Présenter un objet mathématique, c'est l'exhiber en termes de générateurs et relations.

Pour fixer les idées, considérons le cas d'un groupe. Présenter un groupe G , c'est se donner G par générateurs g_i et relations r_j , de la manière suivante :

- les g_i sont des symboles (sans contenu sémantique spécifié), chacun étant accompagné d'un autre symbole g_i^{-1} (appelé inverse de g_i). On considère l'alphabet (fini ou infini) formé des g_i et des g_i^{-1} ,
- les $r_j = r_j(g_i, g_i^{-1})$ sont certains mots écrits dans cet alphabet,
- les éléments de G sont les mots qu'on peut écrire dans cet alphabet, *modulo les relations* r_j ,

⁶la dialectique intrinsèque/extrinsèque a été bien thématisée par A. Lautman, Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. Réédition Vrin 2006, II.

- la loi de composition de G est donnée par la concaténation des mots mis bout à bout. L'élément neutre est le mot vide (sans lettre), noté 1_G ou simplement 1.

L'expression « modulo les relations r_j » demande explication : on entend par là que deux mots m_1 et m_2 sont considérés comme définissant le même élément de G si on peut les obtenir tous deux à partir d'un troisième mot m en effaçant à l'intérieur de m certaines séquences du type r_j , ou $g_i g_i^{-1}$, ou $g_i^{-1} g_i$.

On dit que le groupe G est de *présentation finie* s'il peut être défini par un nombre fini de générateurs g_i et de relations r_j .

Le groupe *libre* engendré par g_1, \dots, g_n est le groupe donné par les générateurs g_i et aucune relation. Si $n = 1$, on trouve le groupe des entiers \mathbb{Z} (muni de l'addition). Si $n \geq 1$, ce groupe s'identifie au groupe fondamental du plan privé de n points x_1, \dots, x_n (voir chapitre 3) : les g_i symbolisent des chemins partant et aboutissant à un point-base fixé x , et tournant une fois autour du point manquant x_i dans le sens trigonométrique.

Du point de vue des présentations, les groupes libres jouent le rôle de référents. Dans ce mode extrinsèque de description, un groupe n'apparaît pas comme plongé dans un référent, mais, dualement, comme quotient du référent.

Tout élémentaire et formel que paraisse ce mode de définition d'un groupe, surtout dans le cas de présentation finie où tout se réduit à concaténer et simplifier des mots sur un alphabet fini, la présentation par générateurs et relations recèle en fait de redoutables difficultés, dont le fameux *problème des mots* de M. Dehn (1911) :

soit G le groupe donné par une présentation finie explicite (g_i, r_j) . Donner un algorithme pour déterminer si deux mots m_1 et m_2 (sur l'alphabet formé des g_i et des g_i^{-1}) coïncident modulo les relations r_j , autrement dit, s'ils définissent le même élément de G .

Toute la difficulté réside en ce qu'on ne connaît pas de borne a priori pour la longueur du mot m dont dériveraient m_1 et m_2 par simplification, s'ils définissaient le même élément de G . La réponse au problème de Dehn a été apportée en 1955 par P. Novikov :

pour certains groupes G de présentation finie, le problème des mots est indécidable.

Ce résultat célèbre est sans doute la première manifestation d'indécidabilité (au sens usuel d'inexistence de machines de Turing capables de trancher algorithmiquement la question) en dehors du domaine de la logique et de la théorie des ensembles.

Plus tard, Boone et Higman ont caractérisé les groupes G de présentation finie pour lesquels le problème des mots est décidable : ce sont ceux qui se plongent dans un groupe simple qui lui-même se plonge dans un groupe de présentation finie. De là à savoir construire des groupes où le problème des mots est indécidable, il y a un grand pas... et une riche théorie.

Gardons-nous donc de confondre « indécidable » (qui a un sens logico-mathématique bien précis) et « inconnaisable » (qui n'en a aucun), et d'interpréter l'indécidabilité comme on ne sait quel retrait du « manteau » mathématique devant le « toucher de l'esprit ».

4.2.4 Représentations.

Représenter un objet mathématique, c'est le décrire en termes de son action sur d'autres objets X préalablement connus.

Pour fixer les idées, reprenons le cas d'un groupe. Représenter un groupe G , c'est se donner G comme groupe de symétries d'un ensemble structuré X . Dans une acception un peu plus générale, c'est se donner un morphisme⁷

$$G \rightarrow \text{Aut } X$$

du groupe G vers le groupe des automorphismes de X . On parle aussi d'*action* de G sur X , et on note $g \cdot x$ l'élément de X qui est le résultat de l'action de l'élément $g \in G$ sur l'élément $x \in X$.

Exemple 1. Tout groupe G agit sur lui-même (de plusieurs façons, en fait), par exemple par translations à gauche : $g \cdot x$ étant le produit de g et de x dans G . Ce faisant, G s'incarne comme un groupe de permutations particulières de ses éléments.

Exemple 2. Le programme d'Erlangen de Klein évoqué dans le chapitre précédent (§ 2.2) fournit de nombreux exemples d'actions de groupes de déplacements sur des figures géométriques. Ce programme est en fait une réflexion de fond sur la notion d'action en géométrie.

4.2.5 Représentations linéaires.

Une représentation est d'autant plus efficace que le substrat X de l'action est élémentaire ou bien connu. Le cas d'un espace vectoriel est à cet égard prometteur.

On parle de *représentation linéaire* lorsque X est un espace vectoriel, qu'on note plutôt V comme d'habitude ; le groupe des automorphismes de V n'est autre que $GL(V)$. Lorsque V est de dimension finie, on parle de *représentation linéaire de dimension finie*.

Une représentation linéaire d'un groupe G dans l'espace vectoriel V , c'est donc un morphisme de groupes⁸

$$\rho : G \rightarrow GL(V).$$

En dimension finie et sous l'hypothèse que ρ injectif⁹, représenter linéairement un groupe abstrait G , c'est donc le représenter « concrètement » comme *groupe de matrices*¹⁰. Une représentation linéaire est dite *irréductible* si V n'a pas de sous-espace¹¹ stable sous l'action de G .

Le leitmotiv de la théorie des représentations linéaires des groupes est d'essayer de « comprendre » un groupe abstrait G à partir de la collection de ses représentations linéaires (irréductibles).

Exemple 1. Partant d'une action d'un groupe G sur un ensemble structuré X quelconque, voici comment en déduire une représentation linéaire de G . On prend pour V l'espace vectoriel $F(X)$ formé des fonctions sur X à valeurs complexes¹², et on fait agir G sur $F(X)$ par la règle suivante qui définit l'action $g \cdot f$:

$$(g \cdot f) \cdot x = f(g^{-1} \cdot x)$$

(où x désigne un élément de X , f un élément de $F(X)$, g un élément de G).

⁷c'est-à-dire une application qui respecte la composition.

⁸si G est muni d'une topologie, il est naturel de requérir que ce morphisme soit continu.

⁹c'est-à-dire faisant de G un sous-groupe de $GL(V)$.

¹⁰on renvoie au § 1.3 du premier exposé pour la définition de la composée de deux matrices.

¹¹distinct de $\{0\}$ et de lui-même, bien entendu.

¹²variante utile en dimension infinie : on peut imposer diverses conditions sur ces fonctions.

Par exemple si G agit sur $X = G$ par translation, la représentation linéaire ainsi obtenue (dans l'espace $F(G)$ des fonctions sur G) s'appelle la *représentation régulière* de G et est notée ρ_{reg} .

Exemple 2. Reprenons l'exemple 1 du numéro précédent, dans le cas particulier d'un groupe continu de transformations G (groupe de Lie). Par linéarisation, l'action de G sur lui-même induit une représentation linéaire de G sur son algèbre de Lie.

Exemple 3. Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$p_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_0(x) = 0,$$

les coefficients $p_i(x)$ étant des polynômes. Les singularités de cette équation sont les racines x_1, \dots, x_n du polynôme $p_n(x)$. Au voisinage de tout point x distinct des singularités, les solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre n forment un espace vectoriel V de dimension n . Mais quand on « suit » une solution y le long d'un chemin partant de x et aboutissant à x , mais entourant une ou plusieurs singularités, on retombe en général sur une *autre* solution de l'équation¹³. Ainsi, le groupe fondamental du plan privé de x_1, \dots, x_n agit sur V : on obtient une représentation du groupe libre à n générateurs, dite *représentation de monodromie*.

Pour clore ce paragraphe, mentionnons deux opérations très utiles sur les représentations linéaires :

- la *somme* de deux représentations $\rho \oplus \rho' : G \rightarrow GL(V \oplus V')$. L'espace sous-jacent consiste en les couples formés d'un vecteur de V et d'un vecteur de V' . L'action de $g \in G$ est donnée par la formule $g \cdot (v, v') = (g \cdot v, g \cdot v')$.

- le *produit tensoriel*¹⁴ de deux représentations $\rho \otimes \rho' : G \rightarrow GL(V \otimes V')$. Si les e_i forment une base de V et les e'_j une base de V' , une base de $V \otimes V'$ est formée des symboles $e_i \otimes e'_j$. L'action de $g \in G$ est donnée par la formule $g \cdot (e_i \otimes e'_j) = (g \cdot e_i) \otimes (g \cdot e'_j)$.

4.3 Représentations linéaires des groupes.

4.3.1 Caractères : la théorie de Frobenius.

La théorie des représentations linéaires des groupes finis est née en 1896, grâce aux efforts de G. Frobenius pour répondre aux questions de R. Dedekind, qui se heurtait à des calculs inextricables en théorie de Galois des équations algébriques, dès que le degré dépassait 4. Le concept fondamental de sa théorie est celui de *caractère*.

Soit G un groupe à N éléments. On note $F_{cent}(G)$ le sous-espace de $F(G)$ formé des *fonctions centrales*, c'est-à-dire des fonctions f (à valeurs complexes) vérifiant $f(gg') = f(g'g)$ pour tout couple (g, g') d'éléments de G . Le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f_1(g) \bar{f}_2(g)$$

fait de $F_{cent}(G)$ un espace euclidien complexe (voir chapitre 1, § 3.1).

¹³voir le § 4 du chapitre précédent.

¹⁴dont l'intérêt apparaîtra plus bas, § 3.3.

Soit maintenant $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de dimension finie de G . Son caractère χ_ρ est la fonction sur G à valeurs complexes définie par la trace :

$$\chi_\rho(g) = \text{tr } \rho(g).$$

Par la propriété fondamentale de la trace, c'est un élément de $F_{cent}(G)$.

Il s'avère qu'une représentation ρ est complètement déterminée par son caractère χ_ρ . En outre, cette correspondance de Frobenius entre représentations et caractères jouit des propriétés remarquables suivantes :

- ρ est irréductible $\Leftrightarrow \chi_\rho$ est unitaire : $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$,
- les caractères unitaires forment une base orthonormée de $F_{cent}(G)$; pour toute élément $f \in F_{cent}(G)$, on a donc la décomposition

$$f = \sum \langle f, \chi_n \rangle \chi_n$$

où χ_n parcourt les caractères unitaires,

- $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$ et $\chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho \cdot \chi_{\rho'}$,
- toute représentation ρ de dimension finie de G est somme directe de représentations irréductibles. La multiplicité avec laquelle la représentation irréductible de caractère χ_n apparaît dans ρ est $\langle \chi_\rho, \chi_n \rangle$. Cas particulier : la décomposition de la représentation régulière est : $\rho_{reg} = \bigoplus (\dim \rho_n) \rho_n$ où ρ_n parcourt toutes les représentations irréductibles.

La correspondance de Frobenius permet d'associer à tout groupe fini sa *table de caractères*, c'est-à-dire le tableau de nombres complexes dont les entrées sont les valeurs des caractères unitaires¹⁵, et cette table détermine le groupe. Cette correspondance réalise ainsi l'exploit de ramener en principe la structure du groupe fini abstrait G à de simples données numériques. Conformément au leimotiv énoncé ci-dessus, des renseignements sur la table de caractères donnent des renseignements sur le groupe. Par exemple, on montre facilement qu'un groupe fini G est

- simple¹⁶ si et seulement si pour tout $g \neq 1_G$ et pour tout caractère $\chi \neq 1$, $\chi(g) \neq \chi(1_G)$.
- commutatif si et seulement si pour tout caractère unitaire χ , $\chi(1_G) = 1$.

Bien entendu, pour exploiter à fond cette correspondance, encore faut-il la rendre explicite, c'est-à-dire savoir calculer la table des caractères. Il existe pour cela un algorithme simple dû à W. Burnside, l'un des fondateurs de la théorie¹⁷.

4.3.2 Représentations linéaires des groupes compacts et analyse harmonique. L'apport de Weyl.

Comme nous l'avons rappelé lors du second chapitre (§ 3.2), on définit en analyse de Fourier le produit scalaire de deux fonctions périodiques $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de

¹⁵comme les caractères sont des fonctions centrales, on peut se limiter à considérer leurs valeurs sur des représentations des classes de conjugaison de G , ce qui permet d'obtenir un tableau carré. Par ailleurs ces valeurs sont des nombres d'un type bien particulier : comme tout élément g de G vérifie $g^N = 1_G$, toute valeur propre μ de $\rho(g)$ vérifie $\mu^N = 1$, de sorte que les valeurs de caractères sont toujours des sommes de racines N -ièmes de l'unité.

¹⁶c'est-à-dire n'admet pas de quotient non trivial ; mais, attention, il peut admettre des sous-groupes non-triviaux, qui ne seront pas normaux.

¹⁷voir T. Coquand, B. Spitters, A constructive proof of the Peter-Weyl theorem, Math. Log. Quart. 0 (2004), 1-12.

période 2π par la formule

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \bar{f}_2(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

L'espace $L^2(U(1))$ des fonctions f pour lesquelles $\langle f, f \rangle$ est bien défini est un espace de Hilbert¹⁸. Une base orthonormée est donnée par $e_n = e^{\sqrt{-1}nt}$ (où n est un entier quelconque), et tout $f \in L^2(U(1))$ s'écrit de manière unique

$$f = \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n.$$

C'est H. Weyl qui semble avoir remarqué le premier l'analogie (frappante !) entre ces formules et les formules ci-dessus. Ci-dessus, on avait affaire à un groupe fini G (non nécessairement commutatif), et à un espace euclidien de dimension finie dont le produit scalaire était défini par une somme finie. Ici, on a affaire au groupe topologique commutatif (infini) des rotations planes (qu'on peut identifier au cercle unité $U(1)$, chaque rotation étant épinglée par son angle $t \in]-\pi, \pi[$), et à un espace de Hilbert dont le produit scalaire est défini par une intégrale relative à la mesure de probabilité $\frac{dt}{2\pi}$ sur $U(1)$; les e_n sont les caractères unitaires de $U(1)$.

En mathématique, toute analogie est une aubaine : le chercheur n'a de cesse de la creuser jusqu'à sa disparition/absorption dans une théorie qui englobe les théories jumelles. C'est ce qu'a fait Weyl : il a étendu la théorie de Frobenius aux représentations linéaires de dimension finie des groupes (topologiques) compacts non nécessairement commutatifs, et créé l'analyse harmonique non commutative.

Le prototype d'un groupe compact est le groupe $U(n)$ des opérateurs unitaires d'un espace euclidien de dimension n , voir chapitre 2, § 3.1.

L'analogie pour un groupe compact G de la décomposition de la représentation régulière d'un groupe fini, c'est le théorème de Peter-Weyl : $L^2_{cent}(G)$ se décompose selon les représentations irréductibles de G (il y en a une infinité), chacune intervenant avec une multiplicité égale à sa dimension¹⁹.

4.3.3 Problème de Tannaka.

Étant donné un groupe compact G , on dispose de la catégorie $Rep G$ des représentations linéaires de dimension finie de G ²⁰.

Le leitmotiv général de la théorie des représentations linéaires formulé ci-dessus (§ 2.5) incite à poser le problème suivant (problème de Tannaka) :

Peut-on reconstituer G à partir de $Rep G$?

La réponse est « non... mais presque ». Rappelons (ibidem) que $Rep G$ est munie d'une opération interne « produit tensoriel » \otimes . Le théorème de Tannaka dit qu'on peut bel et bien reconstruire G à partir de la catégorie $Rep G$ munie de \otimes .

C'est par le biais d'une vaste généralisation de ce résultat que Grothendieck est parvenu à l'idée de *groupe de Galois motivique*, qui a fait une apparition furtive dans le chapitre précédent (§ 5)²¹.

¹⁸c'est-à-dire un espace euclidien complet de dimension infinie.

¹⁹voir par exemple T. Coquand, B. Spitters, A constructive proof of the Peter-Weyl theorem, Math. Log. Quart. 0 (2004), 1-12.

²⁰un morphisme de représentations n'étant autre qu'une application linéaire compatible aux actions de G .

²¹signalons au passage que l'étude des représentations linéaires du groupe de Galois absolu

4.3.4 Représentations linéaires et mécanique quantique.

Le produit tensoriel, conçu en algèbre et pour l'algèbre, a fait fortune en mécanique quantique : l'état de n particules est décrit non par la somme, mais par le produit tensoriel de n espaces de Hilbert \mathcal{H} . Du principe d'indiscernabilité des particules identiques, on déduit une action du groupe \mathfrak{S}_n des permutations sur n objets sur $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Dès les années 1926-27, E. Wigner étudiait cette représentation linéaire. À la même époque, Weyl s'intéressait aux représentations unitaires de dimension infinie du groupe additif des réels \mathbb{R} qui apparaissent en mécanique quantique sous la forme $t \mapsto e^{\sqrt{-1}tH}$ où H est un opérateur hamiltonien (voir chapitre 2, § 5.3). La synthèse²² qu'il a écrite sur la théorie des représentations et la mécanique quantique, parue en 1928 (soit fort peu après les travaux fondateurs de Heisenberg et Schrödinger), a eu une influence considérable.

Les théories de jauge, dont les origines remontent d'ailleurs aussi à Weyl, ont par la suite contribué à renforcer l'importance de la théorie des représentations en physique des particules. Selon ces théories, c'est grosso modo $U(1)$ qui gouverne l'électro-magnétisme, $U(2)$ les forces électro-faibles, $U(3)$ les interactions fortes (les quarks qui, avec les leptons, constituent la matière, furent introduits dans la théorie par Gell-Man et Neeman en 1964 sur la base de considérations sur les représentations de $U(3)$).

4.3.5 Représentations linéaires en dimension infinie. La théorie de von Neumann et l'école de Gelfand.

Les travaux de Weyl ont ouvert une nouvelle ère dans la théorie des représentations : celle de l'étude des représentations de dimension infinie (de préférence unitaires) des groupes topologiques G .

Deux théories, ou deux écoles, en sont nées : la théorie des algèbres d'opérateurs de von Neumann évoquée dans le chapitre 2, et l'école de Gelfand.

Le lien entre représentations linéaires et algèbres d'opérateurs est le suivant. Soit $\rho : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire d'un groupe topologique G dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors le commutant de $\rho(G)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une algèbre de von Neumann (voir chapitre 2, § 5.1).

I. Gelfand (à qui l'on attribue le slogan « tout problème mathématique est un problème de représentation ») et son école se sont principalement occupés de construire et classer des représentations. La théorie est extrêmement ramifiée, mais il en émerge un principe directeur (*principe de Kirillov*) : les représentations irréductibles de dimension infinie d'un groupe de Lie correspondent à certaines orbites pour l'action de ce groupe sur (le dual de) son algèbre de Lie (orbites soumises à une certaine condition de « quantification », dans l'esprit de la mécanique quantique). Ce principe permet de se ramener à des problèmes de dimension finie.

$Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (chapitre précédent, § 3.1) est l'un des domaines les plus actifs de la théorie des nombres contemporaine. Pour un groupe compact totalement discontinu comme $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, ce n'est d'ailleurs pas le corps \mathbb{C} des nombres complexes qui est le corps naturel de coefficients de ces représentations galoisiennes, mais ce sont ce qu'on appelle les corps p -adiques.

²² Gruppentheorie und Quantenmechanik (1928), transl. by H. P. Robertson, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, 1931, rept. 1950 Dover.

4.4 Représentations linéaires et problèmes de classification.

« Tout ce qui peut se ranger lui plaisait. »

G. Cuvier, *Eloge de Werner*²³

Nous avons déjà dit quelques mots sur le rôle de la classification en mathématique au § 5.4 du second chapitre. Ce rôle étant moins connu que dans d'autres sciences, les classifications paraissent davantage préservées, dans le domaine mathématique, du discrédit culturel actuel qui bannit presque du champ de la pensée ces avatars scientifiques de la philatélie, la patience illimitée qu'exige leur exercice étant perçue comme l'antithèse de l'éclair de génie.

On sait pourtant comment les grands travaux systématiques botaniques et zoologiques, de Linné à Lamarck et Cuvier, ont forgé, lors de l'élaboration de schèmes classificatoires « naturels », la compréhension progressive de la structure visible et de l'organisation des êtres vivants ; comment la problématique de la classification des éléments simples, culminant avec la combinatoire du tableau périodique de Mendeleïeff des 92, a contribué à façonner la rationalité chimique²⁴, etc...

De même, en mathématique, certaines classifications ont eu une importance conceptuelle qui dépasse de bien loin les problèmes de rangement²⁵ ; c'est certainement le cas de celles que nous allons évoquer ci-dessous.

Les classifications portent sur des objets généraux (au sens du § 2.1), mais font parfois apparaître en fin de compte des objets particuliers tout à fait imprévus ; un tel passage ne s'obtient pas par une simple méditation dialectique sur les objets généraux considérés.

4.4.1 Classification des groupes finis simples.

Un exemple emblématique de classification mathématique est celui de la classification des groupes finis simples. Rappelons encore une fois qu'un groupe fini est dit simple s'il n'a pas de quotient non trivial, ou ce qui revient au même, s'il n'a pas de sous-groupe normal non trivial (voir chapitre 3, § 1.3)²⁶. Tout groupe fini se « dévisse » en groupes finis simples, qui sont, eux, « indévisibles ».

Le rêve de Burnside de classifier, en s'appuyant sur la théorie des représentations, les groupes finis simples a finalement abouti, au bout d'un siècle de travail monumental. On a la liste complète : trois séries infinies mais élémentaires

- groupes cycliques d'ordre premier,
- groupes alternés²⁷,
- groupes simples de type de Lie²⁸,

plus 26 groupes sporadiques, dont le plus gros, appelé « Monstre », a

80801742479451287588645990496171075700575436800000000

²³ cité dans G. Bachelard, *Le matérialisme rationnel*, P. U. F. 1953.

²⁴ cf. G. Bachelard, *Le matérialisme rationnel*, P. U. F. 1953, chap. III.

²⁵ il y aurait certes bien des distinctions à faire parmi entre classifications, mais c'est à un philosophe des sciences qu'il revient d'en parler. Remarquons seulement qu'il ne s'agit dans ce chapitre que du cas où la classification aboutit à des listes dénombrables. Bien d'autres problèmes de classification mettent en jeu à la fois des invariants discrets et des modules continus qui forment parfois des objets de même nature générale que ceux que l'on classifie.

²⁶ la notion, sinon le qualificatif, est due à Galois.

²⁷ c'est-à-dire groupes de permutations de n lettres composés d'un nombre impair d'échanges de deux lettres. C'est Galois qui a montré que ce sont des groupes simples dès que $n \geq 5$

²⁸ ce sont, grosso modo, des groupes de matrices à coefficients dans un corps fini.

éléments (il est construit par « représentation », comme groupe de symétries d'une certaine structure remarquable en dimension 196883).

Les cinq premiers groupes sporadiques²⁹ ont été découverts par Mathieu en 1860. Il a fallu plus d'un siècle pour qu'un 6ème n'apparaisse, au cours du travail de classification. La fin de ce travail avait été annoncée en 1983, mais un « trou » a été repéré dans une démonstration, trou qui a été « bouché » grâce à un article-rustine de 1300 pages !

La classification est désormais réputée achevée et les experts sont en train de rédiger une preuve « de seconde génération », plus compacte (environ 5000 pages si tout va bien !) et plus conceptuelle.

Au-delà des groupes finis simples eux-mêmes, qu'en est-il de la classification de leurs *représentations linéaires* ? Autrement dit, que sait-on de leurs tables de caractères ?

Pour les groupes cycliques ou alternés, elles étaient déjà connues de Frobenius. Pour les groupes sporadiques, on possède des atlas de tables de caractères. La question des tables de caractères des groupes finis de type de Lie est en revanche ouverte, c'est même l'objet d'un champ d'investigation vaste et très actif sous la maîtrise d'œuvre de G. Lusztig. Celui-ci a proposé une étonnante conjecture reliant les représentations des groupes finis simples de type de Lie aux représentations des groupes quantiques.

4.4.2 Classification des groupes de Lie simples.

Entre-temps, Cartan et Killing avaient classifié les groupes de Lie réels et complexes simples G . La classification se ramène à celle des algèbres de Lie simples *Lie* G . Un peu comme dans la théorie de Frobenius pour les groupes finis, mais de manière beaucoup plus sophistiquée, apparaît de la géométrie euclidienne.

En fait, à toute algèbre de Lie complexe simple³⁰ (ou somme directe de telles) est associée un petit bijou de géométrie euclidienne réelle appelé *système de racines*, qui consiste en un ensemble fini Φ de vecteurs qui engendrent l'espace et qui vérifient les 3 propriétés suivantes :

- pour tout $\alpha \in \Phi$, les seuls éléments de Φ proportionnels à α sont α et $-\alpha$,
- pour tout $\alpha \in \Phi$, Φ est stable par réflexion s_α par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à α ,
- pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$, la projection orthogonale de β sur la droite menée par α est un multiple demi-entier de α .

Le groupe de Weyl est le groupe fini de symétries de Φ engendré par les réflexions s_α .

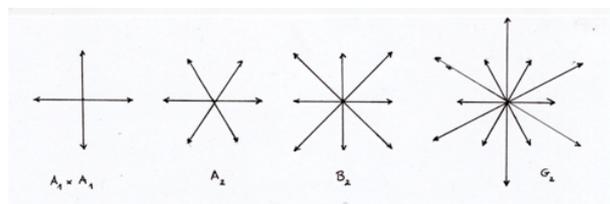


FIG. 4.1 – **Systèmes** de racines en dimension 2.

²⁹ ce qualificatif est dû à Burnside.

³⁰ sic ! Complexe veut dire ici à coefficients dans le corps des nombres complexes, simple veut dire sans quotient non-trivial.

Il reste à classifier les systèmes de racines : c'est affaire de combinatoire et de géométrie euclidienne élémentaire, quoique subtile. Ceux qui sont indécomposables (ce sont ceux qui correspondent effectivement à des algèbres de Lie simples) se laissent épinglez, chacun, par un *diagramme de Dynkin*, dont voici la liste (on a pu dire que ces diagrammes de Dynkin sont des sortes de « lutins qui infestent les mathématiques »)³¹ :

$$\begin{aligned}
 A_n &: \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \\
 B_n &: \circ - \circ - \dots - \circ \Rightarrow \circ \\
 C_n &: \circ - \circ - \dots - \circ \Leftarrow \circ \\
 D_n &: \circ - \circ - \dots - \circ < \begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix} \\
 E_6 &: \begin{matrix} & & \circ & & \\ & & | & & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \end{matrix} \\
 E_7 &: \begin{matrix} & & \circ & & \\ & & | & & \\ \circ & - & \circ \end{matrix} \\
 E_8 &: \begin{matrix} & & \circ & & \\ & & | & & \\ \circ & - & \circ \end{matrix} \\
 F_4 &: \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ \\
 G_2 &: \circ \equiv \circ.
 \end{aligned}$$

En conclusion, il y a 4 familles infinies (A_n, B_n, C_n, D_n) d'algèbres de Lie complexes simples³², plus 5 exceptionnelles (E_6, E_7, E_8, F_4, G_2).

Le problème de la classification des représentations des groupes de Lie simples a été résolu par Weyl pour l'essentiel, qui a donné une formule fondamentale pour les caractères. Il y a une relation entre les représentations de chacun de ces groupes continus et les représentations du groupe de Weyl (fini) correspondant.

4.4.3 Classification des représentations linéaires et indécidabilité.

Reprenons la notion de représentation linéaire dans son acception générale. On s'est attaché ci-dessus au cas des groupes (abstraites ou topologiques), mais on peut représenter linéairement d'autres structures. La situation la plus générale, semble-t-il, est celle des carquois.

Les *carquois* sont des graphes (en général finis) dont les arêtes (qui peuvent être multiples) sont orientées.

Une *représentation linéaire* d'un carquois Q , c'est la donnée, pour tout sommet x de Q , d'un espace vectoriel V_x (disons de dimension finie pour fixer les idées), et pour toute arête a liant les sommets x et y d'une application linéaire F_a de V_x dans V_y .

³¹leur signification est en gros la suivante : les sommets - ou petits cercles - figurent les racines simples, desquelles toutes les racines se déduisent par combinaison linéaire à coefficients tous positifs ou tous négatifs ; les arêtes figurent l'angle entre deux racines simples non perpendiculaires - simple arête si l'angle est de 120° etc...

³²les groupes associés sont issus de la géométrie euclidienne réelle ou complexe, ou de la géométrie symplectique.

Comme pour les représentations de groupes, il y a une notion naturelle de somme, et une représentation est dite indécomposable si elle ne se laisse pas décomposer (non trivialement) en somme.

La question de la classification des représentations linéaires des carquois mène alors à une trichotomie résumée dans le merveilleux théorème de Gabriel, Nazarova *et al.*³³ où resurgissent, tels Scarbo, les diagrammes de Dynkin :

Soit Q un carquois. On a la trichotomie suivante :

1) Q n'a qu'un nombre fini de représentations indécomposables si et seulement si c'est un diagramme de Dynkin.

2) Q a une infinité de représentations indécomposables classifiables algébriquement (en un sens précis que nous n'éluciderons pas ici) si et seulement si c'est un diagramme de Dynkin étendu³⁴.

3) En dehors de ces deux cas, la « théorie » des représentations de Q est indécidable.

En fait, la démonstration de l'indécidabilité dans le cas 3) se fait en codant le problème des mots de Dehn dans la théorie des représentations de Q !

Exemple (Gelfand-Ponomarev). Soit Q_n le carquois ayant n sommets x_1, \dots, x_n liés par une arête orientée vers un sommet central x_0 . La théorie des représentations de Q_n équivaut à celle des systèmes de n sous-espaces V_1, \dots, V_n d'un espace vectoriel V_0 , considéré à isomorphismes près. Il s'avère que Q_n est de type 1) (fini) pour $n \leq 3$, de type 2) (modéré) pour $n = 4$, de type 3) (sauvage) pour $n > 4$: il est donc impossible de classifier, à isomorphisme près, les systèmes de 5 sous-espaces d'un espace vectoriel.

³³voir D. Benson, Representations and cohomology I : basic representation theory of finite groups and associative algebras, Cambridge studies in advanced mathematics 30 (1995), §4.4.

³⁴obtenu par adjonction d'un sommet à un diagramme de Dynkin selon une règle simple que nous ne préciserons pas ici.

Chapitre 5

Singularités.

5.1 Généricité, lissité, singularités

5.1.1 Notion de singularité

« Singulier » s'oppose à « générique », mais il n'y a pas de définition formelle de ces termes en mathématiques. De manière générale, toutefois, l'adjectif « générique » est employé en mathématiques dans le sens suivant. Etant donné une collection d'objets x formant un espace X (mesurable, ou topologique, ou algébrique...), on dit qu'une propriété \mathcal{P} de ces objets est *générique* si elle est vraie « presque partout », c'est-à-dire pour « presque tout » objet x - le sens de « presque partout » variant suivant le contexte¹.

On qualifie parfois l'ensemble des x qui ne vérifient pas \mathcal{P} de *lieu singulier* (eu égard à \mathcal{P}). En ce sens très général, « singularité » a donc valeur d'« exception », de « dégénérescence ». C'est par exemple le lieu où certaines fonctions ne sont pas « bien définies », où certaines quantités deviennent infinies etc...

Toutefois, l'acception la plus courante de ce terme en mathématique, celle qui est en jeu dans la *théorie des singularités*, concerne le cas où la propriété \mathcal{P} est la *lissité*.

Rappelons qu'intuitivement, *lisse* veut dire « infiniment doux à la caresse » ; formellement : indéfiniment différentiable.

On parle ainsi de fonctions et de variétés lisses. Une variété lisse est en tout point infinitésimalement linéaire, c'est-à-dire qu'elle s'identifie infinitésimalement à son espace tangent en chacun de ses points.

Le cadre dans lequel la théorie des singularités opère est celui d'objets géométriques ou de systèmes évolutifs qui sont *génériquement lisses*². C'est le cas des systèmes dynamiques de la science classique (optique, mécanique...) dont l'étude

¹dans le contexte mesurable, cela signifie « hors d'un ensemble de mesure nulle » ; dans le contexte topologique, « dans un ouvert dense », ou plus généralement, « dans une intersection dénombrable d'ouverts denses » ; dans le contexte algébrique, « hors d'un sous-ensemble algébrique de dimension moindre que celle de X ».

²cela exclut donc les objets fractals, même s'ils ont tendance à « rentrer par la petite porte » en théorie des systèmes dynamiques...

est à l'origine de la théorie des singularités, et en fait de la plupart des modèles mathématiques des sciences de la nature.

Au sens mathématique strict, *une singularité est donc un « défaut de lissité », une « aspérité » ou une « crise », dans un contexte génériquement lisse.*

5.1.2 Enjeux

Si le lisse est générique, si donc « la caresse rencontre presque partout de l'infiniment doux », pourquoi se préoccuper des singularités, ces « aspérités exceptionnelles » ?

Une première réponse est que (comme nous allons le voir au paragraphe suivant) les singularités apparaissent « spontanément » même dans des contextes *lisses* a priori, et on ne peut se contenter de les ignorer : la catégorie ayant comme objets les variétés lisses et comme morphismes les applications lisses s'avère vite trop « étroite » pour faire de la géométrie.

En fait, les singularités et autres bifurcations (changements de régime), loin d'être des « impuretés » dont il faudrait se débarrasser, en disent souvent long sur les systèmes étudiés tout entiers, comme si ces derniers étaient *caractérisés par leurs « crises »*.

En fait, nous verrons plus loin qu'en plusieurs sens, les objets géométriques tendent à être conditionnés, voire caractérisés, par leurs singularités.

Par ailleurs, on remarque que dans le doublet générique/singulier, c'est le générique qui est surdéterminé par rapport au singulier - le sens mathématique de ce doublet est donc bien différent du sens philosophique traditionnel.

En effet, les singularités apparaissent *a priori comme de purs négatifs* : carence de lissité, obstruction au principe de linéarisation. Mais la théorie des singularités va opérer une sorte de renversement dialectique : elle va thématiquer ces obstructions, en faire des objets mathématiques à part entière, les décrire, les classer, etc... Dans ses listes, le point lisse ne figurera plus qu'en tant que « singularité triviale ».

L'aspect le plus remarquable de ce renversement est la description des singularités en termes d'objets combinatoires (par exemple des diagrammes de Dynkin) : au bout du compte, par un mouvement subtil et réversible, *on sera passé d'objets du monde continu à des objets du monde discret.*

Outre l'illustration de ces deux thèses, ce chapitre sera l'occasion de faire un peu de *phénoménologie des singularités* : comment elles apparaissent, se déploient, et disparaissent (en laissant quelles traces ?)

5.1.3 Comment les singularités apparaissent

« Je n'existe que singulier
et comme à l'état naissant.

Ne comprends que ce que j'invente. »

(P. Valéry, Oeuvres, I, p. 161)

Voici trois modes très communs d'apparition des singularités en mathématique.

- *Projections*. Exemple 1 : projection sur un plan d'une courbe lisse dans l'espace : on peut voir apparaître un croisement, ou un point de rebroussement.

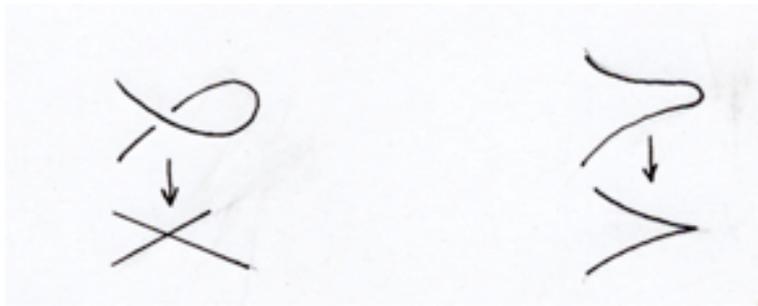


FIG. 5.1 – Fig 5.1

Exemple 2 : projection d'une surface lisse dans l'espace à 3 dimensions sur une surface (e.g. la rétine).

Un observateur regarde des collines : les contours sont en général des courbes lisses (plis), mais peuvent apparaître des singularités (fronces...). Figuration des draperies en peinture (études de Dürer³, Vinci...)



FIG. 5.2 – Fig 5.2

Exemple 3 : projection d'une surface lisse dans l'espace à 3 dimensions sur une droite : lignes de niveau

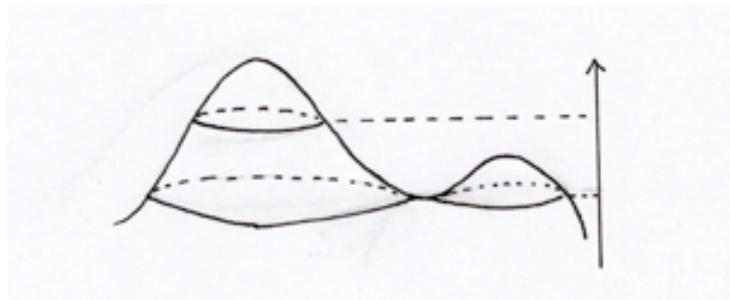


FIG. 5.3 – Fig 5.3

- *Dégénérescences* : ajout de fibres « dégénérées » dans le processus de compactification d'une famille de variétés lisses. par exemple, si l'on veut compactifier la famille d'hyperboles $x_1x_2 = \lambda$, il faut ajouter les fibres correspondant à $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. En $\lambda = 0$, il s'agit de deux droites ayant un point d'intersection, qui est donc une singularité.

³ Geometric libris, 1532.



FIG. 5.4 – Fig 5.4

• *Quotients*, repliements. Il ne s'agit pas ici des quotients « sauvages » qui mènent aux espaces non commutatifs. Des quotients très « modérés », comme celui du plan par un groupe fini de symétries, peuvent présenter des singularités, qui correspondent aux points fixes du groupe (voir la fin du chapitre).

5.2 Points critiques

5.2.1 Linéarisation des champs de vecteurs

Considérons une variété lisse M et un champ de vecteurs \vec{v} , c'est-à-dire la donnée, pour tout point x de M d'un vecteur tangent $\vec{v}(x)$ qui varie de manière continue et même lisse avec x . Un théorème classique affirme qu'au voisinage de tout point x où $\vec{v}(x)$ ne s'annule pas, le champ de vecteur est linéarisable, c'est-à-dire équivalent à un champ de vecteurs constant (en termes heuristiques : on peut peigner là où il n'y a pas d'épi !):



FIG. 5.5 – Fig 5.5

5.2.2 Points critiques

Considérons une fonction lisse f sur M . Un point ξ de M est dit *critique* pour f si la partie linéaire de $f - f(\xi)$ s'annule en ξ . Cela revient à dire que dans des coordonnées locales convenables x_1, \dots, x_n au voisinage du point ξ , le champ de vecteurs $\vec{\nabla} f$ défini par les dérivées partielles $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$ s'annule en ξ^4 . L'image $f(\xi)$ par f d'un point critique ξ s'appelle *valeur critique* de f (ces valeurs sont exceptionnelles).

Le théorème de linéarisation précédent implique qu'au voisinage de tout point *non critique*, la fonction f est équivalente à sa partie linéaire.

Plus précisément, fixons une valeur ν de f et considérons la fibre $f^{-1}(\nu)$ de f au-dessus ν , c'est-à-dire l'ensemble des points ξ en lesquels f prend la valeur ν (si M représente la surface d'un ensemble de collines, et f est la fonction altitude,

⁴cette condition ne dépend pas en fait du choix des coordonnées locales, bien que le champ de vecteurs en dépende.



FIG. 5.6 – Fig 5.6

$f^{-1}(\nu)$ n'est autre que la *ligne de niveau* ν . Si ν n'est pas une valeur critique, alors en tout point ξ de la fibre $f^{-1}(\nu)$, il existe un système de coordonnées x_1, \dots, x_n dans lequel cette fibre est définie par l'équation linéaire $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \nu$; elle est donc lisse. On voit ainsi que les points critiques correspondent à des singularités, non de M ni de f (qui sont lisses), mais des fibres $f^{-1}(\nu)$ (lignes de niveau).

5.2.3 Points critiques génériques

En un point critique ξ , il n'est plus vrai qu'une fonction soit équivalente à sa partie linéaire (qui d'ailleurs est constante). Que peut-on dire ?

Il se trouve qu'il y a une hiérarchie de points critiques. En particulier, on peut définir la notion de point critique « générique ». Au voisinage d'un tout point *critique générique*, la fonction f est équivalente à sa partie quadratique : elle est en fait de la forme $f(x) \sim \nu + a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$, les a_i étant non nuls, pour un choix convenable de coordonnées locales x_1, \dots, x_n (la constante ν étant la valeur de f au point ξ considéré).

L'indice d'un point critique générique est le nombre de a_i positifs.

Par exemple, en dimension 2, on trouve trois types de points critiques : le sommet ($f \sim -x_1^2 - x_2^2$, d'indice 0), le col ($f \sim x_1^2 - x_2^2$, d'indice 1), le bassin ($f \sim x_1^2 + x_2^2$, d'indice 2).

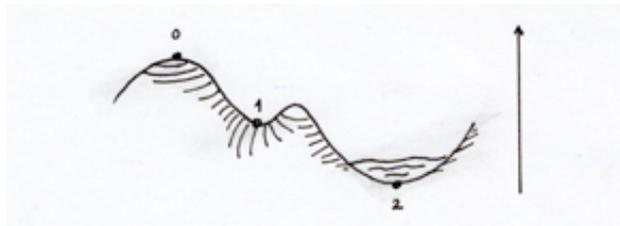


FIG. 5.7 – Fig 5.7

On montre que toute fonction lisse « générique » f est *de Morse*, c'est-à-dire n'admet que des points critiques génériques, et qu'il n'y a pas deux points critiques en lesquels f prend même valeur.

5.2.4 Théorie de Morse

L'idée, ancienne, vient de la cartographie : représenter un relief, un paysage montagneux, par des lignes de niveaux. Sa mise en oeuvre mathématique, ébauchée au XIXe par le physicien Maxwell et l'avocat-mathématicien Cayley, a abouti au XXe à la théorie de Morse, qui montre que *la topologie d'une variété lisse compacte M peut être reconstruite, de manière combinatoire, à partir de l'étude des points critiques (singularités des fibres) d'une fonction auxiliaire f suffisamment générique.*

Pour en saisir l'intuition, dans l'exemple du paysage montagneux, on peut se représenter que le relief est progressivement submergé par une crue, et essayer de se figurer la variation de la topologie de la partie immergée lors de la montée des eaux. Il est assez clair que celle-ci ne change pas lorsque le niveau n'est pas critique, c'est-à-dire s'il n'atteint ni sommet, ni col, ni bassin. Avec un certain effort d'attention, on observe que le franchissement d'un bassin revient, topologiquement, à attacher un point supplémentaire (0-cellule), celui d'un col à attacher un segment (1-cellule), celui d'un sommet à attacher un disque (2-cellule).

il s'agit d'un phénomène général, valable en toute dimension⁵ : la partie au-dessus du niveau critique ν se construit, topologiquement, en attachant à la partie au-dessous du niveau ν une cellule de dimension égale à l'indice.

5.3 Généricité et stabilité

Pour ce paragraphe et les suivants, nous renvoyons à V. Arnold, *Catastroph theory*, Springer verlag, 1984 et D. Bennequin, *Caustique mystique*, Séminaire Bourbaki 634 (1984) pour les détails.

5.3.1 La dialectique générique/singulier selon Poincaré.

En jetant les bases de la théorie qualitative des systèmes dynamiques, H. Poincaré a mis en lumière l'importance cruciale du générique dans ce domaine, et la subtilité de la dialectique générique/singulier (bien au-delà de la simple opposition logique).

Dans la perspective des applications de l'étude des systèmes dynamiques aux sciences de la nature, il paraît raisonnable, dans un premier temps, de se limiter aux situations génériques : en effet, les paramètres du système ne sont connus qu'approximativement en pratique, et une modification arbitrairement petite des paramètres permet toujours de sa ramener au cas générique.

Toutefois, l'argument tombe en défaut lorsqu'il s'agit précisément d'analyser une famille de systèmes : on rencontre inévitablement, en général, un lieu de *bifurcation* Σ . Le principe de généricité doit être affiné de la manière suivante : s'il s'agit d'une famille à un paramètre de système, on pourra, en pratique, se limiter aux bifurcations génériques (c'est-à-dire correspondant à presque tous les points de Σ). Plus généralement, on aura une stratification de Σ , les strates de codimension $\leq i$ correspondant aux systèmes à $i + 1$ paramètres génériques.

Un programme de classification ambitieux consiste alors à chercher les *formes normales*, c'est-à-dire des équations les plus simples possibles, auxquelles se ramènent les systèmes à i paramètres.

5.3.2 L'exemple des draperies

Dans cet exemple remarquable, la théorie mathématique a récemment achevé, sur le plan théorique, la tradition des études de Dürer et Vinci, en menant à bien la classification complète de toutes les singularités qui apparaissent lorsque l'observateur-peintre se déplace. Il y en a 13 (travaux de Whitney, Arnold, Platonova, Sherback).

⁵cf. J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963.

Le manteau M est vu comme surface lisse plongée dans l'espace usuel \mathbf{R}^3 . L'observateur-peintre occupe la position ω (le point de vue) dans \mathbf{R}^3 . Ce qu'il observe, ce qu'il peint, est la projection de M sur un plan \mathbf{R}^2 , suivant le point de vue ω .

- Pour un point de vue ω générique, il n'y a, d'après un théorème classique de Whitney, que deux singularités possibles (dépendant de la forme de M dans \mathbf{R}^3) : le pli et la fronce

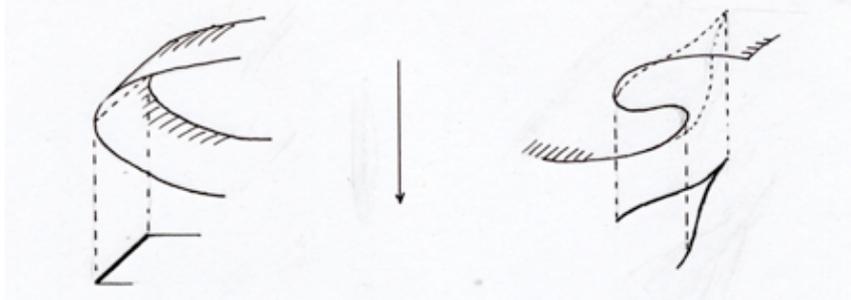


FIG. 5.8 – Fig 5.8

Les formes normales de M correspondantes s'écrivent respectivement

$$x_3 = x_1^2, \quad x_3 = x_1^3 + x_1x_2$$

(dans des coordonnées pour lesquelles la projection est donnée par élimination de la troisième coordonnée, de sorte que ω est considéré comme rejeté à l'infini).

- Pour des points de vue ω à un degré de liberté, s'introduisent trois nouvelles singularités (correspondant à des bifurcations génériques) : la lèvre, le bec-à-bec et le passage du chameau.



FIG. 5.9 – Fig 5.9

Les formes normales de M s'écrivent respectivement

$$x_3 = x_1^3 + x_1x_2^2, \quad x_3 = x_1^3 - x_1x_2^2, \quad x_3 = x_1^4 + x_1x_2.$$

- Pour des points de vue ω à deux degré de liberté, s'introduisent quatre nouvelles singularités (correspondant à des bifurcations de codimension 1). Les formes normales de M s'écrivent respectivement

$$x_3 = x_1^3 + x_1x_2^3, \quad x_3 = x_1^4 + x_1x_2 + x_1x_2^2, \quad x_3 = x_1^5 + x_1^3x_2 + x_1x_2, \quad x_1^5 - x_1^3x_2 + x_1x_2.$$

- Enfin, si l'on tient compte de tous les points de vue possibles, s'introduisent encore quatre nouvelles singularités (correspondant à des bifurcations de codimension 2). Les formes normales de M s'écrivent respectivement

$$x_3 = x_1^3 + x_1x_2^4, \quad x_3 = x_1^3 - x_1x_2^5, \quad x_3 = x_1^4 + x_1^2x_2 + x_1x_3, \quad x_1^5 + x_1x_2.$$

Le théorème de Whitney sur le pli et la fronce a été popularisé par les modélisations (plus ou moins fantaisistes) de la « théorie des catastrophes appliquée ». Voici un exemple d'interprétation catastrophiste de la fronce, dû à Zeeman⁶. Dans cet essai de modélisation de la créativité, x_1 mesure l'enthousiasme, x_2 la force technique, x_3 la réussite (!). Sans grand enthousiasme, la réussite croît de façon monotone en fonction de la force technique ; mais si l'enthousiasme est grand, il peut y avoir un saut qualitatif dans la qualité des résultats à partir d'une certaine virtuosité (bifurcation entre maniaques et génies (!)).

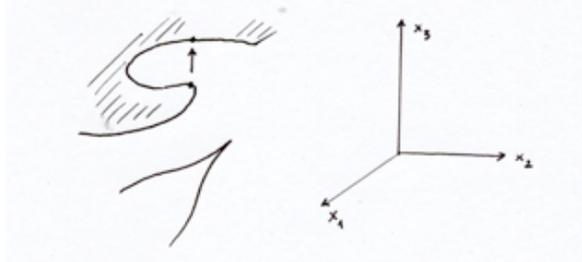


FIG. 5.10 – Fig 5.10

5.3.3 Singularités stables

Une singularité est dite *stable* si toute déformation suffisamment petite des conditions où elle apparaît donne lieu à une singularité « équivalente ».

Exemple : le croisement, comme singularité de projection de courbe, est stable ; en revanche, le point de rebroussement ne l'est pas.



FIG. 5.11 – Fig 5.11

On peut alors se demander si toute singularité générique est stable.

La réponse dépend en fait de ce qu'on entend par « équivalente ». Dans le contexte purement topologique (où « équivalente » est pris au sens de homéomorphe), la réponse est oui (théorème de Mather).

5.4 Déploiements et catastrophes

5.4.1 Comment les singularités se déploient

Considérons à nouveau une fonction f sur une variété lisse de dimension d (par exemple sur une surface, pour fixer les idées) à valeurs réelles (ou complexes), et poursuivons l'étude des points critiques ξ (de valeur critique $f(\xi) = 0$ pour fixer les idées), sans plus nous limiter au cas générique.

Plus précisément, penchons-nous sur les singularités isolées ξ de la fibre $f^{-1}(0)$ (l'hypersurface de M définie par $f(x) = 0$).

⁶ Catastroph theory, selected papers 1972-77, Addison-Wesley, 1977.

Un *déploiement* de (f, ξ) est une déformation F de f à un ou plusieurs paramètres λ , qui s'annule en ξ (tout comme f). Autrement dit :

$$F(x, 0) = f \text{ pour tout } x \in M, \quad F(\xi, \lambda) = 0 \text{ pour tout } \lambda.$$

On montre qu'il existe un déploiement F dit *versel*⁷, dont tous les autres se déduisent. La dimension d'un déploiement versel, augmentée de 1, est un invariant fondamental de la singularité, noté μ .

L'ensemble des λ pour lesquels la variété définie par $F(x, \lambda) = 0$ est singulière (c'est-à-dire non lisse) s'appelle le *discriminant*.

Exemples. • Le déploiement versel de $(f(x) = x^3, 0)$ est $F(x) = x^3 + \lambda x$. Le discriminant est $\lambda = 0$.

• Le déploiement versel de $(x^4, 0)$ est $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$. Le discriminant est une fronce.

• Le déploiement versel de $(x^5, 0)$ est $x^5 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x$. Le discriminant est une *queue d'aronde*



FIG. 5.12 – Fig 5.12

5.4.2 Singularités simples

Une singularité est dite *simple* si, par déformation suffisamment petite, elle n'« engendre » qu'un nombre fini de classes d'équivalence de singularités.

La classification complète des singularités simples du type précédent (singularités isolées d'hypersurfaces) est la suivante : elles correspondent exactement aux diagrammes de Dynkin sans arête double, c'est-à-dire les diagrammes de type A,D,E (voir le chapitre précédent).

Plus précisément, la liste des formes normales est la suivante (Arnold et al...) :

$$A_n : \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \quad f = x_1^{n+1} + \sum_3^d x_i^2,$$

$$D_n : \circ - \circ - \dots - \circ < \overset{\circ}{\circ} \quad f = x_1^{n-1} + x_1 x_2^2 + \sum_3^d x_i^2,$$

$$E_6 : \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} \quad f = x_1^3 + x_2^4 + \sum_3^d x_i^2,$$

$$E_7 : \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} \quad f = x_1^3 + x_1 x_2^3 + \sum_3^d x_i^2,$$

⁷pas tout-à-fait universel, il y a un petit grain de sel technique...

$$E_8 : \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} \quad f = x_1^3 + x_2^5 + \sum_3^d x_i^2.$$

Le principe du codage par les diagrammes est le suivant : dans un déploiement versel, la singularité se transforme en un ensemble de cercles⁸, chacun étant figuré par un sommet du diagramme ; une arête relie deux sommets quand les cercles associés se touchent.

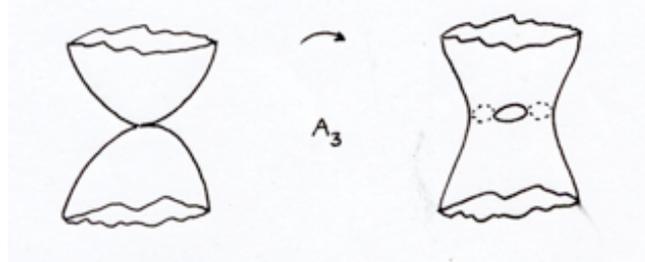


FIG. 5.13 – Fig 5.13

5.4.3 Géométrie symplectique et catastrophes

De même que la géométrie euclidienne est modelée sur l'espace euclien, défini par un crochet \langle , \rangle symétrique (*i.e.* inchangé lorsque l'on permute les deux vecteurs), la géométrie symplectique⁹ est modelée sur l'espace symplectique, défini par un crochet \langle , \rangle antisymétrique : le signe change lorsque l'on permute les deux vecteurs.

Cette géométrie, qui est sous-jacente à la mécanique hamiltonienne, est aussi celle sous-jacente à la théorie des catastrophes¹⁰ développée par Thom et Arnold.

Il se trouve que les catastrophes sont classifiées, elles aussi, par les diagrammes de Dynkin de type A,D,E. L'explication est que cette classification se ramène à la précédente : les catastrophes ne sont autres que les singularités des discriminants des déploiements versels des singularités isolées simples d'hypersurfaces.

Par exemple, en dimension ≤ 4 , on trouve les catastrophes élémentaires de Thom :

- A_2 : le pli,
- A_3 : la fronce,
- A_4 : la queue d'aronde,
- D_4 : l'ombilic (dont Thom distingue deux sous-espèces),
- A_5 : le papillon,
- D_5 : le champignon.

5.5 Le contexte analytique (*i.e.* « plus-que-lisse »).

5.5.1 Principe du prolongement analytique

Si le lisse est l'infiniment doux à la caresse, que peut bien être le plus-que-lisse ?

⁸voir les petits films de C. Sorger, [http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/\[tilde\]sorger/colloquium/](http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/[tilde]sorger/colloquium/)

⁹le terme est dû à Weyl.

¹⁰techniquement : les catastrophes associées aux applications lagrangiennes en géométrie symplectique.

Eh bien, c'est ce dont la forme est si harmonieuse que le toucher ou la contemplation d'un fragment permet de deviner la forme entière !

Par exemple, les fonctions analytiques sont celles qui sont non seulement développables en puissances de la variable x à un ordre arbitraire, mais celles qui sont en fait sommes de leur série de puissances :

$$f(x) = \sum a_i x^i.$$

On parle de même de variété analytique M (réelle ou complexe), de fonction analytique f sur M , etc...

Le principe de prolongement analytique assure qu'étant donné un germe de fonction analytique sur M , on peut toujours le prolonger le long de tout chemin tracé sur M , et que ce prolongement ne change pas si on déforme le chemin (à extrémités fixées). En revanche, le long de deux chemins non déformables l'un sur l'autre, on peut très bien aboutir à deux valeurs différentes de la fonctions. On a déjà vu ces ambiguïtés galoisiennes dans le chapitre 3.

Thom voyait dans ce principe la source de caractère prédictif des théories physiques¹¹ :

Il existe en mathématique une seule procédure d'extrapolation canonique, le prolongement analytique. De fait c'est par prolongement analytique que l'on procède lorsque l'on fait des prédictions. Par conséquent, on parvient au résultat que les possibilités d'actions effectives dans le futur, face à une situation déterminée, sont toujours liées à la possibilité d'avoir une modélisation analytique des phénomènes. [...]

Par exemple, en mécanique quantique, l'état de l'univers pour un observateur A peut être représenté par un vecteur X_A d'un espace vectoriel E . Les visions de deux observateurs distincts A, B diffèrent du fait qu'un automorphisme linéaire h_{AB} (matrice) qui ne dépend, en principe, que de la position et du mouvement relatif de B par rapport à A . [...] A partir du moment où l'on s'intéresse uniquement aux états « stationnaires » de l'univers [...], on peut supposer que le groupe G d'équivalence est compact. Il est connu que dans ce cas (théorème de Peter-Weyl), la représentation h_{AB} est nécessairement analytique [...] et cela suffit à expliquer d'où vient, dans ce cas, la possibilité de prédiction.

5.5.2 Comment les singularités disparaissent

On connaît deux moyens de faire disparaître les « aspérités » en géométrie, qu'on pourrait comparer à la « lime » et à la « dynamite » respectivement.

On peut parfois « limer » les singularités par déploiement (c'est par exemple le cas des singularités simples isolées d'hypersurfaces).

L'autre moyen, plus « brutal » mais qui marche toujours dans le cadre *analytique* en vertu d'un théorème fondamental de Hironaka (1964), est d'*éclater* les singularités.

L'exemple le plus simple d'éclatement est celui de l'origine O dans le plan : on remplace O par l'ensemble des droites passant par O (ensemble qui lui-même forme une droite projective, c'est-à-dire un cercle dans le cas réel), ce qui revient à faire le changement de variable $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2/x_1)$.

¹¹ R. Thom, *Paraboles et catastrophes*, Champs, Flammarion, 1983, p. 92.

Partant d'une variété M ayant un lieu singulier Σ (qui peut être un point, ou une sous-variété de dimension quelconque), le procédé de désingularisation de Hironaka¹² consiste à éclater une sous-variété lisse soigneusement choisie de Σ , et à itérer autant de fois qu'il le faut pour aboutir à une variété lisse \tilde{M} . On peut même s'arranger pour que l'image inverse de Σ dans \tilde{M} soit une réunion d'hypersurfaces¹³ lisses H_i se coupant transversalement.

Autrement dit, M s'obtient à partir de la variété analytique lisse \tilde{M} par contraction des hypersurfaces H_i sur Σ . Hors de Σ et des H_i respectivement, M et \tilde{M} coïncident. Les H_i sont en quelque sorte la « trace » que laisse le lieu singulier Σ en disparaissant par éclatement.

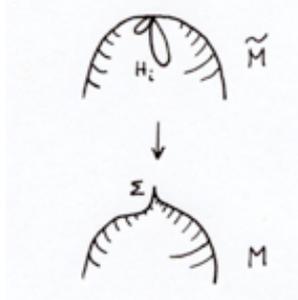


FIG. 5.14 – Fig 5.14

5.5.3 Le rôle des groupes platoniciens

Soit G l'un des groupes finis suivants : le groupe cyclique des rotations d'un polygone à n côtés, le groupe diédral de toutes les symétries d'un tel polygone, l'un des trois groupes de symétries d'un solide platonicien (tétraèdre, cube/octaèdre, icosaèdre/dodécaèdre).

Le quotient du plan, fabriqué en identifiant des points au moyen de G , est singulier à l'origine (qui est un point fixe de G). Là encore, la singularité se code au moyen des diagrammes de Dynkin A, D, E : A_n correspond aux groupes cycliques, B_n aux groupes diédraux, E_6 au groupe du tétraèdre, E_7 au groupe du cube, E_8 au groupe de l'icosaèdre.

Le principe de ce codage par les diagrammes est le suivant : dans une résolution par éclatements à la Hironaka, la singularité se transforme en un ensemble de droites projectives, c'est-à-dire des cercles dans le cas réel, chacune étant figurée par un sommet du diagramme ; une arête relie deux sommets quand les cercles associés se touchent.

Au bout du compte - après ce qui a été dit plus haut des discriminants de singularités isolées simples et des catastrophes en géométrie symplectique - , on voit que la classification des catastrophes en toute dimension se ramène à celle des groupes platoniciens. Retour au Timée ?

¹²dont la preuve a été progressivement considérablement simplifiée, voir J. Kollar, Lectures on Resolution of Singularities, 2007 ; le procédé a même été algorithmisé, voir <http://www.risc.univ-linz.ac.at/projects/basic/adjoints/blowup/index.html>

¹³c'est-à-dire de sous-variétés de dimension un de moins que la dimension de \tilde{M} .

Chapitre 6

Dualité.

La dualité est présente depuis la nuit des temps dans la pensée humaine.

Elle a traversé toute la philosophie occidentale, de Platon à Descartes et au-delà, en se modifiant considérablement. Elle a hanté la physique : rappelons le rôle capital joué par la dualité onde-corpuscule, dont l'histoire s'étend de Huygens et Newton à Heisenberg et De Broglie.

Aussi est-il curieux de constater que la dualité ne fait son entrée que tardivement dans l'histoire des mathématiques, aux alentours de 1820 (à propos de géométrie projective). Cette idée fondamentale a peu à peu essaimé, sous divers avatars, dans toutes les branches des mathématiques, tout en conservant son sens original extrêmement précis.

6.1 Dualité linéaire

C'est dans le contexte de la géométrie projective que la dualité apparaît en mathématique. Nous allons donc commencer par dire quelques mots de cette dernière.

6.1.1 Débuts et vicissitudes de la géométrie projective

On considère que son acte de naissance est le traité de 1822 du capitaine Poncelet intitulé « Traité des Propriétés Projectives des Figures ». Mais il s'inspire fortement de la géométrie descriptive de ses maîtres Monge et L. Carnot¹.

L'histoire singulière de ces trois personnages mérite sans doute d'être brièvement évoquée. Chacun d'eux fut non seulement géomètre, mais aussi ingénieur, administrateur et homme public - politique ou militaire.

Monge, jacobin puis bonapartiste, fut le cofondateur de l'ENS et de l'X.

Carnot, montagnard modéré et futur général, créa les 14 armées de la République en 1793 ; il fut proscrit en 1795, élu à l'Académie, puis banni et exclu de

¹et, pour remonter davantage dans le temps, les transformations projectives avaient été étudiées et utilisées un siècle avant eux par Desargues dans sa théorie de la perspective, qui eut le malheur de déplaire aux artistes, et tomba en oubli malgré le soutien de Descartes.

l'Académie l'année suivante pour céder son fauteuil à... Bonaparte (sur l'instigation de Monge !), qui le rappela comme ministre de la guerre. Il fut réélu à l'Académie en 1800... puis banni à nouveau (comme régicide) sous la restauration. Monge fut exclu à son tour de l'Académie sous la restauration.

Quant à Poncelet, lieutenant dans la campagne de Russie, il fut laissé pour mort sur le champ de Krasnoïé en 1812. Fait prisonnier et transféré par marche forcée de 1500 kms vers Saratov. Dans les prisons de Saratov, il reconstitua l'enseignement de Monge et Carnot, puis développa ab ovo la géométrie projective, avant de rentrer en France en 1814. Il finit sa carrière comme général commandant l'X, avant d'être démis par Napoléon III en 1850.

Connu pour son goût de la polémique², il réussit à se brouiller avec quasiment tous ses contemporains notables qui s'intéressèrent à ses travaux : admirateurs (Gergonne, Plücker, Steiner..., qu'il accusait de plagiat), comme adversaires (Cauchy..., qu'il accusait d'irréflexion, de vanité et de malveillance).

La géométrie projective avait pour objet d'étudier celles des propriétés des figures qui sont stables par projection (e.g. les propriétés d'incidence), dans l'espace « projectif » (espace complété par un plan à l'infini). L'enthousiasme qui habitait les disciples est palpable dans cette vigoureuse citation de Gergonne³ :

Il ne s'agit pas moins que de commencer, pour la géométrie, mal connue depuis près de deux mille ans sans qu'on s'en occupe, une ère tout-à-fait nouvelle ; il s'agit d'en mettre tous les anciens traités à peu près au rebut, de leur substituer des traités d'une forme tout-à-fait différente, des traités vraiment philosophiques qui nous montrent enfin cette étendue, réceptacle universel de tout ce qui existe, sous sa véritable physionomie, que la mauvaise méthode d'enseignement adoptée jusqu'à ce jour ne nous avait pas permis de remarquer ; il s'agit, en un mot, d'opérer dans la science une révolution aussi impérieusement nécessaire qu'elle a été jusqu'ici peu prévue.

Ce n'est précisément pas parce que la nouvelle doctrine promet une moisson plus abondante de théorèmes qu'elle mérite toute notre attention. Qu'importe, en effet, quelques théorèmes de plus qui demeureront peut-être éternellement sans applications ? [...] Mais, comme toutes les révolutions, celle qui se prépare dans la science de l'étendue, et que M. Poncelet regarde peut-être à tort comme étant presque achevée, doit compter pour adversaires, ou tout au moins pour spectateurs indifférents, tous ceux qui n'y auront pas coopéré.

Un peu plus loin :

Ce qu'il y a de plus important et de plus éminemment philosophique dans ces recherches, c'est, ce nous semble, d'une part cette double face de la géométrie que son dernier mémoire a pour objet de mettre en évidence, et de l'autre la possibilité de démontrer, sans aucune sorte de calculs ni de constructions, la totalité peut-être des théorèmes qui ne dépendent ni des relations d'angles ni des relations de longueur.

Ce à quoi fait allusion Gergonne, c'est d'une part le principe de dualité (cf. ci-dessous), et d'autre part le principe de continuité de Poncelet, qui exprime que la déformation continue d'une configuration n'altère pas ses propriétés descriptives quitte à interpréter correctement les modifications survenues (par exemple une sécante devenant tangente etc...). Ce principe proche de la métaphysique de Leibniz

²ce goût n'a pas disparu dans la profession, mais ses tenants omettent de rendre hommage au grand ancêtre !

³qui n'a rien à envier au célèbre « A bas Euclide, à bas le triangle » de Dieudonné

(la Nature ne procède pas par sauts) fut sévèrement critiqué, notamment par Cauchy.

À titre d'exemple, voyons comment on dérive de ce principe, en un tour de main, le théorème de Bézout, selon lequel deux courbes dans le plan projectif, de degrés m et n , s'intersectent en mn points (comptés avec multiplicité) : on peut toujours faire dégénérer, par déformation, une courbe plane de degré m en une réunion de m droites en position générale, et dans ce cas le résultat devient évident.

La géométrie projective (au sens de Poncelet et Gergonne) s'étiola vers le milieu du XIXe siècle, en partie parce qu'elle ne faisait plus guère qu'accumuler des résultats sans portée générale, mais aussi parce que le principe de continuité de Poncelet était mathématiquement mal fondé⁴.

Assez récemment, toutefois, on assiste à un vif regain d'intérêt, voire une résurrection, en raison de nouvelles interactions insoupçonnées avec d'autres disciplines :

- la physique théorique : les idées de la symétrie-miroir notamment ont permis de résoudre tout une hiérarchie de problèmes réputés inaccessibles de géométrie projective.

- l'imagerie : plus précisément, la photogrammétrie⁵, où l'on se pose le problème de reconstituer une image 3D à partir de sections planes (photographies). Projet zurichois d'application aux Bouddhas de Bamiyan (dynamités par les Talibans).

6.1.2 Dualité en géométrie projective

L'histoire de la dualité en mathématique débute donc par la découverte commune de Gergonne et de Poncelet (source de leur polémique)⁶.

Poncelet remarque d'abord la symétrie de certains énoncés (ou configurations) de géométrie projective plane si l'on échange dans ces énoncés les mots « point » et « droite ».

Par exemple la configuration formée de trois points sur une droite admet comme duale la configuration formée de trois droites concourantes : les relations d'incidence sont inversées ; le dual d'un cube est un octaèdre, le dual d'un icosaèdre est un dodécaèdre.

La duale de la duale est la configuration originale.

Poncelet déduit de là un principe de dualité qui permet de démontrer automatiquement de nouveaux théorèmes à partir d'anciens.

Un peu plus tard, Chasles⁷ proposera une autre variante, dynamique, de la dualité projective, qui échange translations et rotations autour d'un axe :

⁴il dut attendre plus d'un siècle un fondement rigoureux et général

⁵<http://www.photogrammetry.ethz.ch/research/bamiyan/pub/index.html>

⁶voir J.D. Gergonne, Réflexion sur le précédent article. *Annales de Gergonne*, 17 (1826-1827), p. 272-276 (<http://www.numdam.org>)

J.D. Gergonne, Polémique mathématique. Réclamation de M. le capitaine Poncelet (extraite du bulletin universel des annonces et nouvelles scientifiques) ; avec des notes. *Annales de Gergonne*, 18 (1827-1828), p. 125-125 (<http://www.numdam.org>)

J.V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822. <http://imgbase-scd-ulp.u-strasbg.fr/thumbnails.php?album=433>

⁷Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1837, cité dans G. Châtelet, *Les enjeux du mobile*, Seuil, ch. 5.

Mais ne peut-on pas supposer, maintenant, que les deux mouvements inséparables des corps de l'Univers doivent donner lieu à des théories mathématiques, dans lesquelles ces deux mouvements joueraient identiquement le même rôle ? Et alors, le principe qui unirait ces deux théories, qui servirait à passer de l'une à l'autre, comme le théorème sur lequel nous avons basé la dualité géométrique de l'étendue au repos [...], pourrait jeter un grand jour sur les principes de la philosophie naturelle.

Peut-on prévoir même où s'arrêteraient les conséquences d'un tel principe de dualité ? Après avoir lié deux à deux tous les phénomènes de la nature et les lois mathématiques qui les gouvernent, principe ne remonterait-il point aux causes même de ces phénomènes ?

Nous reviendrons sur cette mystérieuse dualité de Chasles à la fin du chapitre.

6.1.3 Formes linéaires et dualité

Plutôt que la dualité projective, c'est la dualité linéaire, c'est-à-dire entre espaces vectoriels qui est désormais considérée comme fondamentale en mathématiques.

Soit V un espace vectoriel (réel ou complexe). Son dual V^* est l'espace vectoriel formé des formes linéaires sur V (c'est-à-dire des fonctions linéaires à valeurs réelles ou complexes selon le cas).

On a donc un accouplement de dualité entre V^* et V , qui à la forme linéaire $v^* \in V^*$ et au vecteur v associe le nombre (réel ou complexe) $\langle v^*, v \rangle = v^*(v)$.

Cet accouplement permet, au rebours, de voir v comme un forme linéaire sur V^* , c'est-à-dire un élément du bidual V^{**} . Lorsque V est de dimension finie, ceci permet d'identifier V et son bidual V^{**} .

Dans le cas d'un espace euclidien V , on a déjà un produit scalaire \langle, \rangle sur V . Celui-ci permet d'identifier V avec son propre dual V^* .

Le lien avec le cas projectif est le suivant. Plutôt que de voir un espace projectif P de dimension n comme un espace usuel vectoriel complété à l'infini, on peut le voir comme l'espace des droites $P(V)$ d'un espace vectoriel de dimension $n+1$.

L'espace projectif dual P^* n'est autre que l'espace $P(V^*)$ attaché à l'espace vectoriel dual.

6.2 Dualités catégoriques

6.2.1 Exemple primordial : espaces vectoriels de dimension finie

Voyons la dualité linéaire d'une point de vue catégorique : soit Vec la catégorie des espaces vectoriels (réels ou complexes, au choix) de dimension finie. La dualité transforme tout objet V de Vec en un autre V^* , et $V^{**} \stackrel{can}{\cong} V$. Mais on a plus : la dualité est un foncteur contravariant : elle transforme tout morphisme (c'est-à-dire toute application linéaire) $F : V \rightarrow W$ en un autre qui va dans l'autre sens $F^* : W^* \rightarrow V^*$, l'adjoint de F (cf. chapitre 1), et vis-à-vis de la composition, on a la formule

$$(GF)^* = F^*G^*.$$

Ceci amène à généraliser, et appeler *dualité* dans une catégorie quelconque toute auto-équivalence *contravariante* (elle renverse le sens des flèches) et *involutive* (on dit aussi : réflexive : en l'appliquant deux fois, on trouve l'identité).

6.2.2 Exemples

1) *Inversion dans un groupe* : tout groupe peut être vu comme catégorie à un seul objet, les éléments du groupes étant les (auto)morphismes de cet objet. L'inversion $g \mapsto g^{-1}$ est une dualité (au sens catégorique).

2) *Ensembles ordonnés* : tout ensemble (partiellement) ordonné Δ peut être vu comme une catégorie (il y a une flèche - et une seule - entre x et y si et seulement si $x \leq y$). Une dualité est une involution de Δ qui inverse l'ordre.

Par exemple, en logique classique (et plus généralement dans un treillis de Boole), la négation est une dualité (dualité de De Morgan, 1847⁸), qui transforme « et » (l'inf) et « ou » (le sup). En logique intuitionniste, ce n'est plus une dualité au sens précédent car l'involutivité est perdue.

Autre exemple : soient V un espace vectoriel de dimension finie, et $S \subset V$ un convexe (i.e contenant tout l'intervalle joignant deux quelconques de ses points) contenant 0. Son *polaire* $S^* \subset V^*$ est le convexe, contenant 0, formé des v^* tels que

$$\langle v^*, v \rangle \leq 1$$

pour tout $v \in S$. On a $S^{**} = S$. La polarité échange réunion et intersection. Dans un espace euclidien (donc autodual), la polarité est donc une dualité sur l'ensemble ordonné par inclusion des convexes contenant 0.

6.2.3 Produit tensoriel et dualité

Rappelons (chapitre 4) qu'il existe la notion de produit tensoriel $V \otimes W$ de deux espaces vectoriels (de dimension finie). Etant donné un troisième espace vectoriel $U \in \text{Vec}$, on a alors un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}(U, V \otimes W) \stackrel{\text{can}}{\cong} \text{Hom}(U \otimes W^*, V) :$$

les foncteurs $- \otimes W$ et $- \otimes W^*$ sont adjoints. La notion de dualité est donc subordonnée à celle de produit tensoriel.

En fait cela s'étend, dans le contexte de Tanaka, aux représentations de groupes compacts. Le \otimes permet de retrouver le produit du groupe, et la dualité l'inverse.

Note : Parfois, on va même jusqu'à appeler « dualité » tout couple d'anti-équivalences adjointes entre deux catégories. Par exemple, la dualité de Gelfand entre algèbres stellaires commutatives et espaces compacts. Cette extension extrême de la notion de dualité finit par se confondre avec l'extension catégorique extrême de la notion de représentation.

6.3 Dualités analytiques

6.3.1 Dualité linéaire topologique

En dimension infinie, les espaces vectoriels ne sont pas réflexifs. On l'a déjà vu, l'algèbre linéaire ne marche pas seule, il faut y mettre de la topologie.

Alors, si V est un espace vectoriel topologique (par exemple un espace de Hilbert), on définit son dual comme l'espace vectoriel des formes linéaires *continues* sur V . Tout espace de Hilbert est alors auto-dual.

⁸ Formal Logic : or, The calculus of inference, necessary and probable Publié par Taylor and Walton, 1847

6.3.2 Distributions

L'idée de base est la suivante : on part d'un espace de fonctions-test ϕ qui ne posent pas de problèmes (lisses et nulles hors d'un compact).

Alors toute fonction (mesurable) f définit une forme linéaire sur cet espace :

$$\langle f, \phi \rangle = \int f \phi dt.$$

Si f est lisse, on a

$$\langle \frac{df}{dt}, \phi \rangle = - \langle f, \frac{d\phi}{dt} \rangle .$$

Cela suggère de considérer toutes les formes⁹ D (appelées *distributions*) sur l'espace de fonctions-test, et de définir la dérivée $\frac{dD}{dt}$ de D par la formule

$$\langle \frac{dD}{dt}, \phi \rangle = - \langle D, \frac{d\phi}{dt} \rangle .$$

Exemple : la distribution de Dirac δ , définie par $\delta(\phi) = \phi(0)$. C'est la dérivée de la fonction-marche d'escalier d'Heaviside (qui vaut 0 pour $t < 0$, 1 pour $t > 0$). En fait toute distribution est, localement, la dérivée itérée d'une fonction continue.

Ainsi toute fonction, même non dérivable, est dérivable au sens des distributions. En un sens, on évacue d'emblée, à l'aide de cette géniale idée de dualité, la question des singularités ! Mais il y a un prix à payer : il est très difficile de *multiplier* les distributions (et davantage encore de les diviser), ce qui rend délicat leur emploi dans les problèmes non-linéaires.

6.3.3 Transformée de Fourier. Dualité onde-corpuscule

La transformation de Fourier d'une fonction f est la fonction \hat{f} définie par

$$\hat{f}(\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Plus f est concentrée, plus \hat{f} est diffuse.

La transformation de Fourier s'étend en un automorphisme de l'espace des distributions tempérées (variante des distributions obtenue en prenant pour fonctions-test les fonctions lisses rapidement décroissantes à l'infini). Elle a la vertu d'échanger dérivation et multiplication par $i\omega$.

La transformée de Fourier permet de passer d'une fonction des positions et du temps (q, t) à une fonction des impulsions et de la fréquence (p, ω) . Ce que Heisenberg nous a appris à voir comme un changement de repère en mécanique quantique, associé à la dualité onde-particule.

La dualité onde-corpuscule stipule que tous les objets du domaine quantique présentent simultanément des propriétés d'ondes et de particules, ces deux aspects ne pouvant adéquatement être pris isolément.

L'origine de ce principe remonte à la concurrence entre la théorie ondulatoire de la lumière de Huygens et celle, corpusculaire, de Newton. Avec la théorie des ondes électromagnétiques de Maxwell, la théorie ondulatoire (qui rendait compte du phénomène de polarisation) sembla occulter sa concurrente, avant que les travaux d'Einstein, De Broglie, Heisenberg et d'autres n'imposent le principe de dualité. Les relations d'incertitude de Heisenberg limitent les points de vue en dualité.

⁹continues, par rapport à une topologie sur les fonctions-test qui tient compte de toutes les dérivées.

6.3.4 Transformée de Legendre. Mécanique lagrangienne et mécanique hamiltonienne

La dualité est aussi très importante en optimisation (économie mathématique, transport optimal [des remblais... une théorie initiée par Monge et actuellement très active] etc...) et en calcul aux variations (mécanique, etc...). Elle apparaît souvent via la notion de transformée de Legendre.

Soit V un espace vectoriel réel - de dimension finie, ou un Hilbert, disons -, et soit V^* son dual.

Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (ie majorée par la fonction affine qui prend les mêmes valeurs aux extrémités d'un intervalle). Sa transformée de Legendre $f^* : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe est définie par

$$f^*(v^*) = \sup \langle v^*, v \rangle - f(v),$$

où v^* désigne un élément quelconque de V^* . On a

$$f^{**} = f.$$

(on ignore ici les discontinuités). On a donc

$$\langle v^*, v \rangle \leq f^*(v^*) + f(v),$$

c'est-à-dire la majoration du *produit* scalaire par la *somme* d'une fonction du premier argument et d'une fonction du second argument. On peut choisir ici la fonction convexe f arbitrairement, et tirer de là beaucoup d'inégalités fondamentales de l'analyse (Hölder, Minkovski, ...). Le minimum de $f - v^*$ est $-f^*(v^*)$.

Exemple : avec pour V l'espace des vitesses q' , et V^* l'espace des impulsions p , la transformée de Legendre de $\frac{mq'^2}{2}$ est $\frac{p^2}{2m}$.

C'est un cas particulier du fait que le passage du lagrangien $L(q, q', t)$ à l'hamiltonien

$$H(p, q, t) = pq' - L(q, q', t)$$

(avec $p = \frac{\partial L}{\partial q'}$) est une transformée de Legendre (par rapport à q'). L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

est alors équivalente aux équations de Hamilton

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad q' = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

p et q sont les coordonnées de l'espace des phases (symplectique).

6.4 Dualités géométriques (homologiques)

6.4.1 Dualité de Poincaré

Les nombres de Betti b_i d'une variété M (compacte orientable) de dimension n sont définis en termes de « triangulations » (par exemple si M est la sphère,

$b_0 = b_n = 1$, et les autres b_i sont nuls). La première manifestation de la dualité de Poincaré (1893) est que

$$b_i = b_{n-i}.$$

L'argument¹⁰ est une sorte de dualité entre cellules qui généralise la dualité de Poncelet-Gergonne entre polyèdres.

En termes de ces cellules, on définit en fait des espaces vectoriels d'*homologie* $H_i(M)$, dont la dimension est b_i . La dualité de Poincaré proprement dite est que

$$H_i(M) = (H_{n-i}(M))^*.$$

6.4.2 Dualité de De Rham-Hodge

Soit ω une *i*-forme différentielle : une expression du type

$$\omega = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_i}, \quad j_1 < \dots < j_i$$

où les x_j sont des coordonnées locales sur M . On peut l'intégrer sur les *i*-cellules σ , d'où un accouplement

$$\langle \omega, \sigma \rangle = \int_{\sigma} \omega.$$

On peut définir le bord $d\omega$, qui est une $i+1$ -forme différentielle, et on a la « formule de Stokes »

$$\langle d\omega, \sigma \rangle = \langle \omega, \partial\sigma \rangle$$

où $\partial\sigma$ est le bord de la cellule σ .

Supposons M muni d'une structure riemannienne : l'espace tangent en tout point est un espace euclidien de dimension n . A partir de la dualité entre *i*-plans et $n-i$ -plans dans un tel espace, on définit alors un *opérateur * de Hodge*, involutif (au signe près), qui transforme *i*-formes différentielle en $n-i$ -formes différentielle sur M . Puis on définit le cobord $\partial\omega = *d*\omega$, qui est une $i-1$ -forme différentielle. Cela permet de définir les espaces vectoriels de *cohomologie* de De Rham-Hodge $H^i(M)$ comme formé des *i*-formes différentielle de bord et cobord nulles.

Le théorème de De Rham-Hodge affirme que l'intégration induit une dualité

$$H_i(M) = (H_{DR}^i(M))^*$$

(la terminologie « homologie/cohomologie » et la notation (indice inférieur/supérieur) indiquent d'ailleurs la dualité). En outre, traduite en terme de cohomologie de De Rham-Hodge, la dualité de Poincaré est induite par l'opérateur *** de Hodge.

Ces dualités sont contravariantes par rapport aux applications continues entre variétés.

Il y a beaucoup d'autres types ou variantes de ces dualités géométriques (Serre, Grothendieck, Verdier...), mais terminons plutôt par une application dans le contexte de l'électromagnétisme de Maxwell.

¹⁰d'abord troué, et corrigé à plusieurs reprises par Poincaré.

6.4.3 Dualité de Maxwell

Les équations de Maxwell pour les champs électrique E et magnétique B dans l'espace-temps (vide) \mathbb{R}^4 s'écrivent

$$\begin{aligned}\nabla \times B &= \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \nabla \cdot B &= 0, \quad \nabla \cdot E = 0.\end{aligned}$$

Elles sont donc invariante par $E \mapsto B$, $B \mapsto -E$. C'est l'exemple primordial de dualité en physique classique.

Dans le dernier chapitre de son livre « Les enjeux du mobile », G. Châtelet restitue la longue quête de Faraday, Maxwell et Hamilton, à partir d'une intuition de Schelling, pour interpréter géométriquement la dualité électricité-magnétisme. le symbole ∇ de Hamilton lui-même, (qu'il introduisait via ses quaternions), en est dérivé.

En termes « modernes » la dualité implicite dans les équations de Maxwell s'explique comme une dualité mathématique de la façon suivante. Selon les idées de la théorie de jauge (abélienne), E et B sont les composantes d'une 2-forme différentielle F sur l'espace lorentzien \mathbb{R}^4 , qui s'écrit elle-même comme courbure

$$F = dA + A \wedge A$$

d'une 1-forme différentielle A ; la courbure vérifie toujours l'identité de Bianchi

$$dF = 0,$$

(ce qui redonne la 1ère et la 4ème équations), tandis que l'équation dite de Yang-Mills s'écrit

$$d * F = 0,$$

(ce qui redonne la 2ème et la 3ème équations, car l'action de l'opérateur $*$ de Hodge se traduit par $E \mapsto B$, $B \mapsto -E$).

On voit donc que *l'opérateur de Hodge en dimension 4 rend compte non seulement de la dualité de Maxwell, mais aussi de la dualité de Chasles, qu'il unifie.*

Pour conserver cette symétrie en présence de charges et de courants, Dirac a fait l'hypothèse du monopôle magnétique (non encore détecté expérimentalement).

Plus récemment, on s'est aperçu que la symétrie complète est récupérée dans le cadre d'une théorie de jauge (Yang-Mills-Higgs) à 4 supersymétries en dimension 4 (Sen, 1994), qui échange courte et longue échelles. Cela a mené aux *dualités étranges* qui hantent les théories de cordes d'aujourd'hui...

Chapitre 7

« Des infinis subtils ».

Chapitre 8

S'orienter dans la pensée mathématique. L'art des conjectures.

Qu'est-ce que s'orienter dans la pensée, pour un mathématicien ? Comment le mathématicien s'oriente-t-il, de la recherche des questions fécondes à la formulation et à la démonstration des théorèmes ? Du mystère à la théorie, quelles boussoles pour le guider ?¹

En effleurant ces questions profondes de l'intellectualité mathématique², je tâcherai surtout de mettre en lumière le rôle singulier qu'y joue l'art des conjectures. Hétérogènes à l'appareil déductif du discours mathématique, les conjectures ont un statut heuristique transitoire et semblent suspendues à leur mystérieux pouvoir d'énonciation ; telles des phares, elles pointent une cible sans indiquer le chemin qui y mène.

Avant d'aborder mon thème proprement dit, il va me falloir déblayer un peu le terrain. En effet, les nombreuses conversations que j'ai pu avoir sur les mathématiques avec des philosophes, littéraires, et artistes, me font penser que l'image des mathématiques dans le public cultivé est gravement défigurée. C'est pourquoi je vais d'abord tenter de récuser deux des préjugés les plus tenaces.

8.1 L'arbuste.

Le premier préjugé que j'ai en vue a trait à l'*architecture* des mathématiques. Je l'épinglerai par l'image de « l'arbuste des mathématiques ». En référence, bien sûr, à la célèbre image cartésienne de l'arbre de la connaissance. Rappelons-nous : l'arbre dont les racines sont la métaphysique ; le tronc, la physique ; les branches : la morale, la médecine, la mécanique, chacune ayant ses fruits. Et les mathématiques, dans cette image cartésienne ? Elles sont la sève de l'arbre.

¹cet épilogue est la version abrégée d'un article, intitulé « Le problème de l'orientation dans la pensée mathématique et l'art des conjectures », à paraître au journal *Synthèse*.

²en me limitant aux mathématiques dites pures - donc en laissant de côté, comme je ferai, tout ce qui touche aux applications.

L'arbuste des mathématiques, lui, aurait pour racines la logique, pour tronc la théorie des ensembles, et pour branches l'algèbre, l'analyse, la géométrie.

Je voudrais soulever quatre objections contre cette image.

1^{ère} objection : cette image rend compte de manière totalement faussée de l'état des lieux, en paraissant donner un rôle central et nourricier à la logique et à la théorie des ensembles. En réalité,

i) ces deux disciplines occupent une place à la fois marginale et relativement congrue dans le paysage mathématique (ce qui n'ôte rien à leur intérêt propre) ;
ii) loin d'entretenir un rapport nourricier avec la « grande composante connexe » des mathématiques (algèbre, théorie des nombres, géométrie algébrique et différentielle, topologie algébrique et différentielle, les grands domaines de l'analyse linéaire et non-linéaire, etc...), elles en sont presque disconnectées.

2^{ème} objection : contre le *réductionnisme* qui accompagne cette image. Ce réductionnisme, qui opère en deux mouvements, est surtout le fait d'un certain courant d'épistémologie bien implanté ; j'appellerai ses adeptes les « épistémologues courants » (en empruntant le mot à A. Badiou).

Le premier mouvement de réduction est l'*élagage de l'arbuste* : ces « épistémologues courants », tout préoccupés de fondements, se figurent que pour penser les mathématiques, il suffit, si celles-ci reposent sur la logique et la théorie des ensembles, de ne retenir que ces dernières en ignorant tout le reste. Ce « reste » ne serait qu'épiphénomènes laissés aux techniciens.

Une fois ce sciage de branches effectué, ils sont alors aussi bien placés pour parler des fondements des mathématiques que le serait un sourd n'ayant jamais ouvert une partition, mais possédant son solfège, pour parler des fondements de la musique !

Mais voici, après l'élagage, le second mouvement de réduction, le *rabougrissement de l'arbuste* : pour « améliorer » encore leur point de vue, nos « épistémologues courants » se sont avisés qu'on ne comprend jamais si bien un domaine de la pensée qu'à travers ses crises. Dès lors, ils focalisent toute leur attention sur la petite trentaine d'années dite de « la crise des fondements », au début du siècle dernier.

À les lire, on a souvent l'impression que les mathématiques furent pendant une génération entière comme frappées de tétraplégie, jusqu'à ce que l'organe central, la logique, eût enfin réparé les ravages causés par le traumatisme des paradoxes. Il est à peine besoin de mentionner à quel point cette vision est fautive, absurde, ridicule : le début du XX^e fut en réalité une époque extraordinairement fertile, qui vit la naissance de l'algèbre abstraite, de l'analyse abstraite, de la topologie générale et algébrique, etc...

3^{ème} objection : contre le *caractère de fondement de la logique*. A. Lautman avait soutenu dès 1937 - je cite -

cette idée que la véritable logique n'est pas *a priori* par rapport aux mathématiques mais qu'il faut à la logique une mathématique pour exister.

Cette idée trouve dans les travaux contemporains très influents de J.-Y. Girard, créateur de la logique linéaire, une confirmation éloquente. Outre ses objections vigoureuses contre le piètre fondement que constitue la traditionnelle régression à l'infini des méta-, méta-méta-théories logiques, se soutenant l'une l'autre en gigogne, je mentionnerai son programme actuel qui, renversant l'image traditionnelle, vise à fonder la logique sur les mathématiques, et les mathématiques parmi

les plus avancées : la géométrie non commutative³.

Il y a un autre aspect de l'évolution de la logique mathématique qui conduit à lui dénier tout statut spécial « a priori », c'est le rôle récent et de plus en plus important qu'elle joue en informatique théorique, rôle qui n'est pas du tout celui d'un fondement, mais celui d'un outil au service de l'invention de nouveaux langages de programmation ou d'algorithmes...

A mon sens, c'est une émancipation : enfin des rôles créatifs et non plus de soutènement ! Le logicien Atlas est libéré, sans que la voûte des mathématiques ne s'effondre dans le Tartare !

4^{ème} objection : *contre l'illusion de la recherche « essentialiste » de fondements immuables*. Pendant qu'Atlas s'en est allé cueillir les pommes de silicium au jardin de l'informatique, il n'est nul besoin qu'un Hercule le remplace...

Je ne développerai pas ce point, qui m'entraînerait trop loin, et me contenterai de remarquer que la critique la plus radicale à cet égard est celle d'Alain Badiou, pour qui il ne saurait être question de fondements ontologiques sur lesquels s'appuieraient les mathématiques : en effet, la thèse inaugurale de son livre « L'Être et l'Évènement » - d'une radicalité stupéfiante pour un mathématicien - est justement l'identité : mathématiques = ontologie, ou plus précisément :

les mathématiques sont l'historicité du discours sur l'être-en-tant-qu'être.

Voilà pour les objections contre l'image de l'arbuste.

8.2 Le tricotin.

Venons-en au second préjugé, qui touche non plus à l'architecture des mathématiques vivantes, mais à sa *nature* même. J'épinglerai ce préjugé par l'« image du tricotin », ce jouet de bois jadis populaire, portant quatre épingles, à l'aide duquel on tricotait indéfiniment une tresse de laine, la seule variation possible étant celle des couleurs des fils enroulés autour des épingles.

Ce que je vise ici, c'est une certaine forme vulgaire de logicisme, et cette image des mathématiques qu'elle véhicule : des axiomes enroulés ad libitum autour de quatre épingles, tricotés indéfiniment en une tresse ininterrompue de vérités qui s'en déduisent, *modus ponens*, *modus tollens*, maille à l'endroit, maille à l'envers !...

Je voudrais de nouveau soulever quatre objections contre cette image.

1^{ère} objection. Certes, le discours mathématique est un discours déductif, qui soumet ses énoncés à un ordre rigoureux. Mais l'image du tricotin omet un point évident (déjà chez Euclide) : à savoir qu'un texte mathématique n'est pas un enchaînement uniforme d'implications, mais apparaît polarisé entre « énoncés » d'un côté, et « démonstrations » de l'autre ; en outre, le côté « énoncé » est lui-même stratifié suivant une hiérarchie d'importance et de profondeur, en lemmes, propositions, théorèmes, corollaires. Ni cette polarisation, ni cette hiérarchie, ne résultent d'une loi formelle, mais de choix délicats du mathématicien qui vont bien plus loin que de simples choix rédactionnels ou de style. Ces symptômes qui percent l'universalité égalitaire du texte pointent des *situations*.

³voir Le point aveugle.

2^{ème} objection : contre le *réductionnisme* du logicisme vulgaire, qui consiste à réduire les mathématiques à la suite de symboles dont est tricoté le texte mathématique, et aux règles élémentaires du tricotage.

Certes, c'est une singularité de la mathématique parmi les sciences que s'être dotée d'une écriture propre (on peut en dire autant de la musique parmi les arts). Pour autant, elle ne se réduit pas à son écriture.

Rien n'empêche, certes, d'étudier de manière purement formelle un certain discours mathématique idéalisé, comme le fait notamment la théorie de la démonstration ; pourvu qu'on ne prétende pas représenter ainsi la pensée mathématique, ni même les démonstrations réelles des mathématiciens, - mais seulement leur trace formelle.

Une des aberrations les plus visibles de ce réductionnisme grossier est de faire table rase de toute heuristique, à commencer par l'opposition, si fondamentale dans la pensée du mathématicien, entre le trivial et le profond.

3^{ème} objection : la démonstration, celle pratiquée par le mathématicien au travail, n'est pas un processus formel, elle ne tient pas de la bureaucratie des formules et des procès-verbaux. Démonstration n'est pas identique à vérification. Certaines vérifications peuvent être automatisées. La démonstration présuppose une idée - ce que les mathématiciens appellent une idée de démonstration - , même si elle se réduit à un calcul.

Les mathématiciens savent bien, d'ailleurs, qu'il y a des démonstrations de qualités bien différentes - indépendamment des questions de rigueur -, et ils passent beaucoup de temps à reprouver des théorèmes connus. Les démonstrations les plus frustes - et frustrantes - sont celles qui se réduisent à un calcul : elles emportent conviction, certes, mais il reste à comprendre le calcul lui-même - *pourquoi* cela marche. À l'autre extrême, il y a des démonstrations qui illuminent, qui ouvrent des horizons.

4^{ème} objection : contre l'arbitraire des axiomes. Que sont les axiomes, en fait ? Ce sont des parties constitutives de la définition d'un concept, ou plus largement d'un cadre conceptuel mathématique. Or les mathématiciens sont généralement de grands adeptes du rasoir d'Ockham, et détestent la multiplication gratuite des concepts (et donc des axiomes) ; ils travaillent assidûment à la recherche du « bon cadre conceptuel », qui fait l'objet de débats passionnés entre spécialistes, et est tout sauf arbitraire. Les changements de systèmes d'axiomes correspondent à des changements de cadre conceptuel, à des mutations de point de vue, hautement significatifs pour l'histoire de la discipline. Si, comme disait Cantor, l'essence des mathématiques, c'est la liberté, la liberté du mathématicien ne consiste certainement pas dans l'arbitraire et le gratuit.

On rejoint ici notre problème de l'orientation dans la pensée mathématique... là où, comme disait G. Châtelet⁴,

l'orientation ne s'obtient pas à titre gracieux et où le vrai ne se laisse pas saisir comme le vérifiable.

8.3 Brouillards et analogies.

Nous sommes maintenant prêts à aller au coeur du sujet de ce chapitre. J'irai vite, pour arriver enfin aux conjectures ; qu'on me pardonne de commencer un peu

⁴Les enjeux du mobile, Seuil, ch. 5.

comme un catéchisme !

- Qu'est-ce qui meut le mathématicien dans sa pensée ?
- Le désir.
- Quel désir ?
- Le désir de comprendre.
- Comprendre quoi ?
- Certaines choses concernant les objets mathématiques, et surtout les mystères de leurs rapports mutuels.
- Et ce qui excite ce désir ?
- Le mystère-même ; le mystère qui enflamme l'imagination, qui elle-même fait surgir les idées nouvelles, qui déchireront le voile.

La plupart du temps, il est vrai, cette pêche au mystère, cette recherche des problèmes, n'est qu'un cabotage le long des côtes bien familières des théories constituées. Souvent aussi, il s'agit de la recherche d'un isthme entre deux terres connues mais jusque-là séparées. Quelquefois, il s'agit vraiment de pêche en eaux profondes.

Ce qui s'y joue, A. Weil l'a peint dans un célèbre passage⁵ :

Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à l'autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles revèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la *Gita*, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir. [...] Heureusement pour les chercheurs, à mesure que les brouillards se dissipent sur un point, c'est pour se reformer sur un autre.

Ainsi, ces « obscures analogies » conditionnent-elles, orientent-elles à la façon d'une boussole - mais encore dans le trouble - le cheminement de la pensée mathématique.

8.4 Points de vue féconds.

C'est là, dans le passage mystérieux des troubles reflets initiaux à la découverte de questions, notions, théorèmes nouveaux, que se pose la question de l'orientation de la pensée mathématique. Le jour « où l'illusion se dissipe » n'advient qu'après la longue patience de ce travail d'orientation. A. Grothendieck a admirablement décrit le rôle qu'y joue *la recherche de points de vue féconds*⁶ :

[...] ces innombrables questions, notions, énoncés [...] ne prennent [...] un sens qu'à la lumière d'un tel « point de vue » - ou pour mieux dire, ils en naissent spontanément, avec la force de l'évidence. [...] Le point de vue fécond est celui qui nous révèle, comme autant de parties vivantes d'un même Tout qui les englobe et leur donne un sens, ces questions brûlantes que nul ne sentait, et (comme en réponse peut-être à ces questions) ces notions tellement naturelles que personne n'avait songé à dégager, et ces énoncés enfin qui

⁵De la métaphysique aux mathématiques, 1960.

⁶Récoltes et Semailles.

semblent couler de source, et que personne ne risquait de poser, aussi longtemps que les questions qui les ont suscités, et les notions qui permettent de les formuler, n'étaient pas apparues encore. Plus encore que ce qu'on appelle les théorèmes-clef en mathématique, *ce sont les points de vue féconds qui sont, dans notre art, les plus puissants outils de découverte - ou plutôt, ce ne sont pas des outils, mais ce sont les yeux même du chercheur qui, passionnément, veut connaître la nature des choses mathématiques.*

8.5 Conjectures.

L'idée que je voudrais développer est que dans cette traversée « de la métaphysique aux mathématiques », comme disait Weil, dans ce long cheminement labyrinthique allant des brouillards vers la clarté du théorème, ce qui oriente la pensée non plus à la manière d'une boussole, mais *comme un phare éclairant de loin la petite porte cachée qui ouvre sur la clarté*, c'est la conjecture. Aux avant-postes de ces points de vue dont parle Grothendieck, les conjectures marquent et éclairent un but... mais pas du tout le chemin pour l'atteindre.

« Conjecture » a un sens bien précis en mathématiques. Il s'agit d'un *énoncé destiné à devenir un théorème*. Ce qui manque encore, c'est la démonstration.

La conjecture fait donc partie du domaine heuristique. Son existence, en tant que conjecture, est en principe transitoire. Elle n'a aucune place dans l'image logicienne des mathématiques.

Une fois la conjecture formulée, la question de l'orientation de la pensée dans cette aventure mathématique devient celle de la recherche de stratégies de démonstration (ou de réfutation, éventuellement !). Après maint tâtonnement, on a fini par mettre un doigt sur le noeud du mystère, on en a un condensé formulé, un précipité ; et l'aventure se poursuit sur un mode plus concret et souvent plus technique.

Cela peut même se traduire par un relai des compétences : les conjectures sont souvent ce point où les « theory-makers » (les bâtisseurs de théorie) passent le relais aux « problem-solvers » (les résolveurs de problèmes). Mais le cycle se referme : la résolution des grandes conjectures s'accompagne souvent d'idées tout à fait nouvelles, dont l'approfondissement est alors l'occasion d'un passage de relai dans l'autre sens.

Critères. Pour être acceptée comme telle, une conjecture doit satisfaire à certains critères (qui naturellement sont bien différents des critères de vérité, de preuve rigoureuse, exigés pour un théorème). J'en distinguerai quatre :

1) puisqu'elle est censée devenir, telle quelle, un théorème, son énonciation doit satisfaire aux *mêmes critères formels que ceux d'un théorème* : précision, absence d'ambiguïté, unité interne. Ce n'est pas une simple question.

2) À défaut de preuve, elle doit être accompagnée de ce qu'on appelle en anglais « *some evidence* » (ce qui n'est pas de l'évidence, mais ce qu'on pourrait traduire par « témoignage en faveur de » ou « bien-fondé heuristique »). Cette « evidence » peut être de nature diverse et hétérogène : il peut s'agir d'expérimentations (numériques ou non), de la démonstration de cas particuliers, ou encore d'analogies précises avec des énoncés qui sont déjà des théorèmes.

3) La conjecture doit être *en situation*, se rapporter à un problème identifié. On doit pouvoir lui attribuer une portée non nulle. Cela exclut les simples devinettes.

4) En formulant une conjecture, l'auteur de la conjecture s'engage, *prend parti*. C'est une sorte de pari. La réputation de l'auteur, comme expert et comme visionnaire, joue un rôle certain dans l'obtention de l'assentiment de la communauté. Ce dernier critère doit toutefois être nuancé. Notamment lorsqu'il s'agit de conjectures anciennes - parfois présentées par leurs auteurs comme des questions intéressantes « qui les entraîneraient trop loin » ; c'est la postérité qui en a fait des conjectures.

Gestes. J'ai parlé, à propos de conjecture, de condensation, de prédiction, d'engagement, de pari. La conjecture, par nature transitoire, est suspendue au mystérieux pouvoir de son énonciation. G. Châtelet écrivait ceci

les vérités mathématiques sont bien éternelles, mais leur conquête, en vue de leur stratification dans un savoir, présuppose des gestes qui les font ressortir pour les arracher au tissu de l'Être.

Ainsi sont ces gestes qui posent les conjectures architectoniques, gestes qui captent et qui pointent. Et qu'il ne faut pas confondre avec ces événements capitaux, ces grands catalyseurs de la pensée mathématique, que sont les irrptions d'idées nouvelles ; autres gestes : déchirure, coup d'aile.

Typologie. En tant que « phares », les conjectures sont de portée très variable. Les plus puissantes sont celles que j'appellerai, en suivant le mathématicien B. Mazur, *architectoniques* : elles façonnent le paysage conjectural d'un domaine.

Parfois, elles engendrent de véritables programmes de travail mettant en jeu de nombreux mathématiciens, ce qu'on a pu ironiquement appeler les *plans quinquennaux* des mathématiques.

Par ailleurs, il arrive dans certains domaines mathématiques que les conjectures ne soient pas isolées, mais nombreuses et liées les unes aux autres par des liens logiques ou heuristiques très forts ; c'est typiquement le cas dans la théorie des « motifs », créée par Grothendieck, où les conjectures forment comme l'armature idéale dans laquelle s'échafaude la théorie.

Exemple. J'aimerais mentionner brièvement au moins un exemple emblématique de conjecture architectonique, qui se trouve être au cœur de l'actualité mathématique. Je veux parler de la grande conjecture de W. Thurston qui domine la géométrie en dimension 3 (conjecture qui date des années 70 et contient la fameuse conjecture de Poincaré comme cas particulier) : il y a huit modèles-type, et chaque variété de dimension trois se déduit de l'un d'eux, après découpage canonique, et identifications par symétries. Les récents travaux de G. Perelman permettent, très probablement, de démontrer cette conjecture ; les experts sont en train de vérifier les détails.

8.6 Conclusion.

On sera peut-être surpris de n'avoir pas entendu, jusqu'à ce point, de tirade sur la beauté des mathématiques, comme aiment à les faire les mathématiciens. C'est que, s'il est aisé de chanter l'épithalame de la beauté et de la vérité en mathématiques, il semble bien difficile en revanche de *penser* leur union, ou même de marquer les modalités précises de rencontre entre elles.

En guise de conclusion, je voudrais hasarder que les conjectures architectoniques illustrent la modalité suivante :

Beauté, promesse de vérité.

Il ne s'agit que d'une « conjecture » ! Et la seule « evidence » que j'ai à verser au dossier, c'est que je ne connais pas d'exemple de conjecture architectonique qui se soit révélée fausse ! Ce qui était quelque peu le sentiment fréquent du mathématicien devant les grandes idées heuristiques : « c'est trop beau pour être faux ».

J'ajouterai ceci : même si cela arrivait, ce serait peut-être encore plus intéressant - que le bouleversement complet de nos conceptions dans le domaine qu'elle éclaire conduise à une nouvelle traversée du désert, ou bien qu'elle s'accompagne de la découverte d'une réalité mathématique insoupçonnée. Du reste, l'essentiel n'est peut-être pas d'atteindre le but marqué par la conjecture : il est plutôt dans les *idées nouvelles* qui surgissent dans l'effort déployé vers ce but, et dont la portée peut dépasser celle de la conjecture originale au point de rendre celle-ci dérisoire.

Une des sources de la beauté en mathématique réside dans la cohérence et l'harmonie. Il en est ainsi dans ces constellations de conjectures que j'évoquais. Voici ce qu'en dit Alexandre Grothendieck⁷, grand maître ès conjectures s'il en fut - je lui laisse le dernier mot :

Dix choses soupçonnées seulement, dont aucune [...] n'entraîne conviction, mais qui mutuellement s'éclairent et se complètent et semblent concourir à une même harmonie encore mystérieuse, *acquièrent dans cette harmonie force de vision*. Alors même que toutes les dix finiraient par se révéler fausses, le travail qui a abouti à cette vision provisoire n'a pas été fait en vain...

⁷*op. cit.* p. 211.