Deuxième séance
samedi 24 mars 2007

Les topos de Grothendieck

«C'est le thème du topos qui est ce «lit» où
viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre,
la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique
et la théorie des catégories, le monde du continu
et celui des structures «discontinues» ou «discrètes».
Il est ce que j'ai conçu de plus vaste,
pour saisir avec finesse, par un même langage
riche en résonnances géométriques,
une «essence» commune à des situations
des plus éloignées les unes des autres.»
A. Grothendieck [5, p. 59]

****

Cette deuxième séance est consacrée à la théorie des topos qui peut être vue comme une vaste extension de la topologie générale d'inspiration algébro-géométrique, qui intègre et fusionne l'idée de surface de Riemann et celle de faisceau.

Au lieu du double mouvement de la géométrie non commutative

espace des points $\rightsquigarrow$ algèbres de fonctions $\rightsquigarrow$ algèbres d'opérateurs,

on a ici le double mouvement

espace des points $\rightsquigarrow$ site des ouverts (ou des revêtements) $\rightsquigarrow$ topos des faisceaux (ou des faisceaux étales).

Plan

1. Topologie (présentation et représentations)
2. L'idée de surface de Riemann. Sites
3. Du local au global. Faisceaux
4. Faisceaux sur un site. Topos de Grothendieck
5. Interlude : catégories, foncteurs, adjonction
6. Topos et logique intuitionniste

La «morale» de l'histoire se trouve aux paragraphes 4 et 6.1.

****

1 Topologie (présentation et représentations).

Ce que l'on appelle aujourd'hui *topologie générale* est l'étude mathématique *qualitative* des «lieux» et des «rapports spaciaux» : elle théorise les notions de proximité, frontière, localité, continuité etc... et leurs liens mutuels.

Comme on l'a rappelé dans l'exposé précédent (2.2), on peut sans doute faire remonter le projet de la topologie (analysis situs, en latin) à Leibniz, mais c'est Riemann qui en jeta les bases dans sa célèbre dissertation, et la topologie générale fut ensuite axiomatisée par Hausdorff (1914).

Tout comme le terme *algèbre* vu dans l'exposé précédent, *topologie* désigne à la fois un chapitre des mathématiques et un objet mathématique dont s'occupe cette discipline.

1.1 Ce que c'est.

Lisons donc la définition d'une topologie dans le «texte canonique» : Bourbaki, Topologie générale, chapitre 1 [2].

> «DÉFINITION 1 . *On appelle structure topologique (* ou plus brièvement *topologie) sur un ensemble* X *une structure constituée par la donnée d'un ensemble* $\mathfrak{O}$ *de parties de* X *possédant les propriétés suivantes :*
>
> (O_I) *Toute réunion d'ensembles de* $\mathfrak{O}$ *est un ensemble de* $\mathfrak{O}$.
>
> (O_{II}) *Toute intersection finie d'ensembles de* $\mathfrak{O}$ *est un ensemble de* $\mathfrak{O}$.
>
> *Les ensembles de* $\mathfrak{O}$ *sont appelés ensembles ouverts.*
>
> DÉFINITION 2 . *On appelle espace topologique un ensemble muni d'une structure topologique.*
>
> Les éléments d'un espace topologique sont appelés *points*. [...] L'axiome (O_I) implique en particulier que la réunion de la partie vide de $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire *l'ensemble vide*, appartient à $\mathfrak{O}$. L'axiome (O_{II}) implique en particulier que l'intersection de la partie vide de $\mathfrak{O}$, c'est-à-dire de *l'ensemble* X, appartient à $\mathfrak{O}$.»[1].

Et voici le commentaire du poète mathématicien J. Roubaud [10, 159-160] :

> «J'ai lu et relu d'innombrables fois ces définitions, toute cette première page et les pages suivantes, sans rien comprendre, littéralement sans rien comprendre. Mais je n'ai pris que peu à peu conscience du fait que la difficulté essentielle venait non d'une extrême impénétrabilité du sujet (ce n'est certes pas le cas) ni d'une incapacité congénitale de ma part à le comprendre (heureusement), mais de ce que je ne savais pas lire.

[1] ce commentaire de Bourbaki sur la définition 1, qui semble de prime abord assez obscur, explique que, comme conséquence des axiomes, dans tout espace topologique X, le tout X et la partie vide $\emptyset$ sont des ouverts : pour Bourbaki (bon barbier selon Ockham), une réunion vide de parties (de X) est la partie vide, une intersection vide de parties est la partie pleine. Cela se justifie pleinement du point de vue «catégorique», mais guère du point de vue pédagogique, et bien d'autres exposés préfèrent être clairs et pécher par redondance en ajoutant aux axiomes (O_I) et (O_{II}) l'axiome suivant lequel X et $\emptyset$ sont des ouverts.

> [...] Le mode de lecture romanesque, l'extrême rapidité qui m'était coutumière depuis l'enfance pour la dévoration des romans, ne pouvait à l'évidence pas me servir dans ces circonstances nouvelles.
>
> [...] Restait la poésie. [...] (à la différence de ce qui se passait pour la prose) je relisais la poésie sans cesse jusqu'au point d'une réappréhension de tous ses éléments au présent, dans la simultanéité du temps intérieur. [...] Je me mis donc, et sans réfléchir, à lire les paragraphes du chapitre 1 du livre de Topologie comme s'il s'agissait d'une séquence de poèmes.»

Qu'est-ce donc que comprendre une notion mathématique ? C'est plus subtil, semble-t-il, que comprendre une démonstration. Comprendre littéralement - connaître la signification des termes employés dans la définition formelle - n'est clairement pas suffisant : Il faut un complément heuristique.

Il ne suffit pas de savoir lire. Il faut disposer d'exemples significatifs pour donner corps à la définition, et éventuellement de contre-exemples pour la baliser. Il faut par ailleurs saisir la motivation et surtout l'usage de cette notion, ce qui relève tant de la connaissance de l'histoire de la discipline que de la pratique : il faut voir «fonctionner» la définition dans divers contextes.

L'exemple de base d'un espace topologique est bien entendu la droite réelle $\mathbb{R}$ munie de la topologie dont les ouverts sont les réunions (éventuellement infinies) d'intervalles (privés de leurs extrémités).

Plus généralement, l'espace $\mathbb{R}^n$ à n dimensions muni de la topologie dont les ouverts sont les réunions de boules ouvertes[2].

1.2 Voisinages.

Un *voisinage* d'un point $x \in X$ est un partie de X contenant un ouvert contenant x.

Si cette notion dérive de celle d'ouvert, on récupère, réciproquement, la notion d'ouvert à partir de celle de voisinage : un ouvert est une partie de X qui est voisinage de chacun de ses points. Ces notions sont ainsi logiquement équivalentes et il est donc possible de définir, de manière équivalente, une topologie par une axiomatique des voisinages. Cette axiomatique consiste en fait à dire que l'ensemble $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages d'un point quelconque $x \in X$ forme un *filtre*, à savoir :

(V_I) Toute partie de X qui contient un élément de $\mathfrak{V}(x)$ (c'est-à-dire un voisinage de x) est un élément de $\mathfrak{V}(x)$.

(V_{II}) Toute intersection finie de parties de X qui sont des éléments de $\mathfrak{V}(x)$ est un élément de $\mathfrak{V}(x)$.

(V_{III}) Le vide n'est pas un élément de $\mathfrak{V}(x)$ (en effet x appartient à chacun de ses voisinages).

Revenons au problème de la compréhension des notions mathématiques. Il suit de ce que j'en ai dit qu'il s'agit d'un processus progressif - qui peut passer par le malentendu.

[2] la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'ensemble des points à distance strictement inférieure à r de x.

Il est en tout cas fort utile de se forger une représentation (même fantaisiste) donnant un contenu intuitif à la présentation formelle - sans jamais toutefois confondre celle-ci avec celle-là.

Écoutons par exemple le commentaire de Roubaud à propos du filtre des voisinages [10, 164-165, 199] :

> «C'est ici que le mot *filtre*, et l'image qu'aussitôt il évoque vient s'interposer entre la topologie telle qu'elle est [...] et le souvenir que j'en ai gardé.
>
> Cela veut dire qu'il ne m'était pas possible alors, qu'il ne m'est pas possible encore aujourd'hui de ne pas voir ces filtres, et surtout de ne pas les voir comme liés, et même surimprimés à une représentation mentale de ces objets exaspérants qu'étaient les cafés-filtres des cafés.
>
> [...] Je pense tout particulièrement à la lenteur générale de l'écoulement de leur contenu, cette soupe brunâtre qualifiée sans honte de café, qui m'amenait à les saisir, en dépit de toutes mes expériences antérieures, avant l'achèvement du trajet de haut en bas du liquide et par conséquent à me brûler les doigts; puis à me brûler la langue en essayant de m'en débarrasser trop tôt en les buvant. Je les vois et je vois aussitôt quelque chose comme une icône d'espace topologique, une sorte de grande prairie de «points», chacun placé au-dessous d'une tasse-filtre, son «filtre de voisinages».
>
> [...] Cette image donnait à l'idée de point une tout autre représentation que celle de la géométrie élémentaire scolaire et elle s'est pour moi entièrement substituée à la première.
>
> Et je ne vous parlerai pas des divins et singuliers ultrafiltres.
>
> [...] Si je m'y attarde un peu, le paysage glisse vers autre chose, vers un support de narration; il devient un paysage «carrollien», où une licorne vient boire dans les tasses avec une unique paille au-dessus de son unique corne. Elle en fausse la topologie, bien sûr. [...] Tel est le scénario irrémédiablement frivole, mathématiquement irresponsable, dont j'accompagne en pensée l'idée de topologie. [...] On ne commande pas aisément ce qui peuple notre espace intérieur, et ses lointains. »

1.3 Intérieur et frontière.

L'*intérieur* d'une partie A de X est l'ensemble des points de A dont A est un voisinage. On le note A°.

C'est encore une notion logiquement équivalente à celle d'ouvert : une partie est ouverte si et seulement si elle est son propre intérieur. On peut donc définir une topologie par une axiomatique des intérieurs[3] :

$$X^\circ = X,\ A^\circ \subset A,\ (A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ,\ A^{\circ\circ} = A^\circ.$$

La *frontière* d'une partie A de X est l'ensemble des points de X qui ne sont ni à l'intérieur de A, ni à l'intérieur du complémentaire de A.

[3] C'est cette axiomatique qui est utilisée, par exemple, par A. Badiou [1, VI].

Voici la vision «éthologique» de l'intérieur et de la frontière (d'un territoire) que propose le mathématicien R. Thom [11, 41, 43], fondateur d'une théorie topologique de la morphogenèse :

> «Si l'on examine les emplois actuels du mot *lieu* en français, on observera qu'un lieu demande toujours un habitant qui en fait sa résidence. [...] De là l'hypothèse que le mot *topos* implique un être humain ou un animal qui séjourne (normalement) en ce lieu.
>
> [...] On peut partir de l'hypothèse (simpliste) qu'Aristote, s'imaginant un être vivant, le dotera d'un territoire. [...] Mais ce domaine aura, dans la pratique, des bornes que l'individu préférera ne pas franchir. De là la notion [...] de limites : les *eschata*.
>
> [...] En fait, selon la conception ici proposée, la théorie des lieux serait liée à un problème central de l'éthologie actuelle : comment un animal (ou un humain) se repère-t-il au sein de son territoire ? »

1.4 De l'espace topologique au treillis de ses ouverts.

Bien que moins «intuitive» que la notion de voisinage, la notion d'ouvert s'avère souvent techniquement plus utile.

L'ensemble $\mathfrak{O}$ des ouverts d'un espace topologique X est muni d'une structure de *treillis* : c'est un ensemble ordonné[4] (par l'inclusion $\subset$), muni de deux lois de composition associatives $\cap$ et $\cup$ (en général : la borne inférieure et la borne supérieure ; ici, l'intersection et la réunion) qui vérifient la propriété suivante :

pour tous $U, V \in \mathfrak{O}$, $U \cap (U \cup V) = U \cup (U \cap V) = U$.

En associant à l'espace topologique $(X, \mathfrak{O})$ le treillis des ouverts $\mathfrak{O}$, il semble donc qu'on oublie les points de X. Or il n'en est rien : sous une condition extrêmement faible de séparation - la *sobriété*, toujours vérifiée en pratique - on ne perd rien : *on peut reconstruire l'ensemble X à partir du treillis $\mathfrak{O}$.*

L'idée est simple : on identifie un point $x \in X$ au filtre de ses voisinages ouverts.

1.5 Applications continues.

Une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est dite *continue* si l'image *inverse* par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X.

Une telle application f induit donc une application f^*, dans l'autre sens, entre le treillis des ouverts de Y et celui des ouverts de X.

Lorsque l'espace but Y est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de sa topologie naturelle[5], on dit que f est une fonction continue (à valeurs réelles ou complexes). L'algèbre $C(X, \mathfrak{O})$ que forment ces fonctions jouait un rôle-clé dans l'exposé précédent.

[4] un ordre $\leq$ sur un ensemble X est une relation binaire $x \leq y$ entre les éléments de X qui vérifie les conditions suivantes : $x \leq x$, $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$, $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

[5] rappelons que $\mathbb{C}$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}^2$ (en décomposant un nombre complexe en sa partie réelle et sa partie imaginaire), cette topologie est induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

Terminons ce paragraphe en concluant que la topologie générale a réussi à formaliser les notions de voisinage, frontière, continuité (et bien d'autres : limites, connexité, compacité etc...) de manière purement qualitative, sans faire appel à la notion de distance ou de mesure.

2 L'idée de surface de Riemann. Sites.

2.1 «Ambiguïtés».

Tout polynôme, tel que x^2 ou bien x^3+x définit une fonction (continue) d'une variable réelle ou complexe ($x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto x^3+x$, etc...).

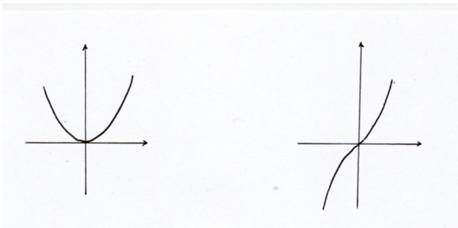

Fig. 2.1.

La situation est plus délicate pour une fonction algébrique telle que $\sqrt{x}$ ou bien $\sqrt{x^3+1}$. Elle définit bien une fonction (continue) d'une variable réelle positive. En revanche, elle n'est pas bien définie en tant que fonction d'une variable complexe : si l'on part d'un point x non nul, et qu'on tourne autour de 0, cette fonction variera continûment, mais en revenant à x au bout d'un tour, la valeur ne sera pas la valeur initiale, mais son opposé : $-\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x^3+x}$. On n'obtiendra la valeur initiale qu'au bout d'un second tour.

Fig. 2.2.

Il y a donc une ambiguïté (dans notre exemple : un signe) qui empêche de considérer une fonction algébrique comme une fonction (d'une variable complexe) bien définie.

2.2 Revêtements à plusieurs feuillets.

C'est Riemann qui a trouvé comment lever l'ambiguïté et donner à ces soi-disantes fonctions «multiformes» f le statut d'authentiques fonctions bien définies. Pour cela, il convient de regarder f comme une fonction définie non pas sur le plan complexe $X = \mathbb{C}$ ou l'un de ses ouverts, mais sur un certain *revêtement à plusieurs feuillets* de $\mathbb{C}$, (appelé *surface de Riemann* de f).

L'exemple de $f(x) = \sqrt{x}$ est trivial à cet égard : on considère une autre copie Y de $\mathbb{C}$ qu'on voit comme revêtement à deux feuillets du plan complexe original X via la fonction $y \mapsto x = y^2$ (les deux feuillets se touchent au point de ramification $y = 0$). Alors f devient la fonction identique $y \mapsto y = \sqrt{x}$ sur Y.

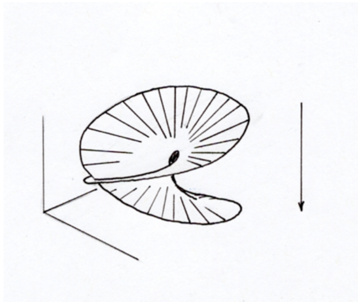

Fig. 2.3.

Nettement plus subtil est le cas de $f(x) = \sqrt{x^3 + x}$. Sa surface de Riemann est encore un revêtement à deux feuillets (qui se touchent en trois points de ramification), qui n'est plus du tout le plan complexe (c'est ce que l'on appelle une courbe elliptique : topologiquement, c'est une «bouée»).

2.3 Du treillis des ouverts aux sites de Grothendieck.

Retenons de cela que pour traiter correctement des fonctions algébriques, il convient de remplacer les ouverts de X par des revêtements à plusieurs feuillets d'ouverts de X.

Grothendieck, élargissant cette idée aux variétés algébriques de dimension quelconque, a proposé de généraliser «catégoriquement» la notion de topologie de la manière suivante, en introduisant les sites.

Un *site* est une catégorie $\mathcal{S}$ muni de la donnée, pour chaque objet U de $\mathcal{S}$, de familles $(U_i \to U)$ (dites couvrantes) de morphismes de but U, stables par changement de base et composition.

Tout espace topologique classique fournit un site : le treillis de ses ouverts (vu comme catégorie, les morphismes étant donnés par les inclusions[6]), une famille couvrante de but l'ouvert U étant une collection d'ouverts U_i contenus dans U dont la réunion est égale à U.

La première application (et la plus importante, sans doute) de cette généralisation de la notion de topologie est la construction du site étale attaché à une variété algébrique X, dont les objets sont les morphismes $U \to X$ «étales», c'est-à-dire à un nombre fini de feuillets qui ne se touchent pas (pas de ramification). Ce site pallie l'absence de théorème des fonctions implicites en géométrie algébrique.

[6]voir plus bas, 5.1.

3 Du local au global. Faisceaux.

> «Un des traits caractéristiques du développement des mathématiques depuis le milieu du XIX^e siècle, c'est que les recherches mathématiques les plus différentes aient pu être poursuivies à un double point de vue, le point de vue local et le point de vue global. L'étude locale se porte vers l'élément, le plus souvent infinitésimal, de la réalité [...] L'étude globale cherche au contraire à caractériser une totalité indépendamment des éléments qui la composent ; elle s'attaque d'emblée à la structure de l'ensemble [...].
>
> La dualité du point de vue local et du point de vue global s'est tout d'abord présentée aux mathématiciens comme une opposition entre deux modes d'étude, irréductibles l'un à l'autre. Il semblait qu'il fallût choisir entre ces deux conceptions incompatibles [...]»

écrivait le philosophe A. Lautman [5, p. 133] peu d'années avant l'introduction des faisceaux.

3.1 Données locales (préfaisceaux).

Rappelons que les *variétés* de dimension n sont des objets géométriques *localement* isomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

En général, bien entendu, elles ne sont pas globalement isomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (penser au ruban de Möbius ou la bouée).

Les problèmes de passage du local au global (problèmes de recollement, en particulier) sont fondamentaux en géométrie (et au-delà). Un concept universel pour poser et traiter ces problèmes est celui de *faisceau*, introduit par J. Leray vers 1945 et mis au point par H. Cartan.

Pour commencer, on formalise l'idée de données locales par la notion de préfaisceau : un *préfaisceau* $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X est une règle qui associe à chaque ouvert U de X un ensemble $\mathcal{F}(U)$ (de «données locales») et à chaque inclusion d'ouverts $V \subset U$ une application dite de *restriction* $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. On demande que pour une inclusion composée $W \subset V \subset U$, la restriction correspondante soit la composée des restrictions.

Les éléments de $\mathcal{F}(U)$ s'appellent les *sections* de $\mathcal{F}$ au-dessus de U.

Un morphisme de préfaisceau $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la donnée, pour tout ouvert U d'une application $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ compatible aux applications de restriction.

3.2 Recollement de données locales compatibles (faisceaux).

Un préfaisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau si toute famille $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ de sections «locales» compatibles (*i.e.* telles que les restrictions de s_i et s_j coïncident dans $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$) se recolle en une unique section «globale» $s \in \mathcal{F}(\bigcup U_i)$ (dont la restriction à U_i est s_i). Ici les U_i sont des ouverts quelconques de X.

Donnons quelques exemples.

Si X est un espace topologique, les fonctions continues forment un faisceau sur X.

Si X est en outre une variété lisse (ou algébrique), on dispose du faisceau $\mathcal{T}_X$ des champs de vecteurs tangents sur X.

On dispose aussi du faisceau d'orientation ε_X, dont les valeurs sont contenues dans $\{1, -1\}$ (X est orientable si et seulement si $\varepsilon_X(X) \neq \emptyset$).

3.3 Théorie des obstructions et cohomologie des faisceaux.

L'obstruction à recoller des données locales s'exprime donc en général par le fait qu'un certain préfaisceau n'est pas un faisceau. Mais on peut souvent aller plus loin, et donner à une telle obstruction le statut d'un objet mathématique.

Voici un cas typique. Considérons un faisceau abélien $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire un faisceau de groupes commutatifs), et un sous-faisceau abélien $\mathcal{G}$. On peut alors former le quotient au sens naïf : c'est le préfaisceau qui associe à tout ouvert U le groupe quotient $\mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$. En général, ce n'est pas un faisceau : l'obstruction à ce qu'il en soit ainsi peut être vue comme un élément d'un certain «groupe de cohomologie» $H^1(\mathcal{G})$.

La théorie des obstructions a pour objet de fournir des interprétations «cohomologiques» aux obstructions à diverses constructions mathématiques : recollement, déformation, etc... Par exemple, l'obstruction à déformer un variété X peut être vue comme un élément du groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{T}_X)$.

Dans un second volet, la théorie fournit des critères généraux pour l'annulation de ces groupes de cohomologie (annulation qui entraîne l'absence d'obstruction au problème posé).

Par ailleurs, les obstructions elles-mêmes, une fois interprétées cohomologiquement, posent des problèmes de recollement, qui conduisent à considérer aussi des obstructions supérieures, qui vivent dans des groupes $H^i(U, \mathcal{F}),\ i > 1$. La cohomologie des faisceaux[7], c'est-à-dire la théorie de ces groupes $H^i(U, \mathcal{F})$, est un outil très souple et fondamental en géométrie analytique ou algébrique.

4 Faisceaux sur un site. Topos de Grothendieck.

Comme Grothendieck l'a observé, la définition des préfaisceaux et faisceaux se transpose à tout site $\mathcal{S}$: un préfaisceau sur $\mathcal{S}$ est un foncteur contravariant $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ vers la catégorie des ensembles, et c'est un faisceau si pour toute famille couvrante $(U_i \to U)$, une section globale $s \in \mathcal{F}(U)$ s'identifie à une famille de sections locales $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ «compatibles».

Dans le cas où $\mathcal{S} = \mathfrak{O}$ est le treillis des ouverts d'un espace topologique X, on retrouve bien la notion de faisceau sur X.

Grothendieck appelle *topos* toute catégorie $\mathcal{X}$ équivalente à la catégorie $\mathcal{F}aisc_{\mathcal{S}}$ des faisceaux sur un site.

Exemples : le topos ponctuel, *i.e.* la catégorie des faisceaux sur l'espace-point, n'est autre que la catégorie des ensembles.

Si G est un groupe, la catégorie BG des ensembles sur lesquel G opère est un topos.

Le topos étale d'une variété algébrique X est la catégorie des faisceaux sur le site étale de X. Chaque topos donne lieu à une théorie de cohomologie. Celle du topos étale,

[7] dont les pionniers sont Cartan, Serre et Grothendieck.

appelée *cohomologie étale* s'est avérée parfaitement adaptée à la géométrie algébrique et a constitué l'outil principal de démonstration des conjectures de Weil[8].

Des sites différents peuvent donner des topos équivalents. En revanche, le topos des faisceaux sur un espace topologique (sobre) détermine cet espace - nous verrons comment ci-dessous (5.4). C'est en ce sens qu'on peut dire que la notion de topos généralise celle d'espace topologique tout en englobant à la fois l'idée de surface de Riemann et celle de faisceau de Leray. Au bout de ce double mouvement, on a remplacé les espaces topologiques par les topos de faisceaux associés :

$$\text{Espace topologique} \quad (X, \mathfrak{O}) \rightsquigarrow \text{Site} \quad \mathfrak{O} \rightsquigarrow \text{Topos} \quad \mathcal{X} = \mathcal{F}aisc_X.$$

Ce faisant, on n'a rien perdu, puisqu'on peut reconstruire l'espace topologique[9] *à partir du topos associé, et on a gagné une structure beaucoup plus souple, puisque les topos permettent essentiellement toutes les opérations familières dans la catégorie des ensembles. En mettant l'accent sur les conditions de recollement, on a ainsi extrait les propriétés intrinsèques de localisation de X en «oubliant» ses points.*

Comme l'écrit Grothendieck [5, 56-57] :

> «Cette notion [de topos] constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, *une métamorphose de la notion d'espace*. [...] Elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici.
>
> Primo, la nouvelle notion n'est pas trop vaste, en ce sens que dans les nouveaux «espaces», les intuitions et les constructions «géométriques» les plus essentielles, familières pour les bons vieux espaces d'antan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. [...]
>
> Et secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature «topologico-géométrique» - aux intuitions, justement, qu'on avait reservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires. »

5 Interlude : catégories, foncteurs, adjonction.

5.1 Catégories.

Les catégories ont fait leur apparition discrète à plusieurs reprises dans ces exposés. La notion de foncteur vient même d'être évoquée. Il est temps de faire halte pour préciser ces notions fondamentales.

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ consiste d'une part en une collection d'objets A, et d'autre part en la donnée, pour tout couple d'objets (A, B), d'un ensemble $\mathcal{C}(A, B)$ dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de A vers B.

[8]ces conjectures arithmético-géométriques qui datent de 1949 concernent le nombre de solutions modulo un nombre premier - ou plus généralement dans un corps fini - d'un système d'équations polynômiales à coefficients entiers. Elles étaient l'horizon des recherches de Grothendieck, et ont finalement été démontrées par lui-même et puis par Deligne (1973).

[9]supposé sobre.

On requiert que les morphismes se composent lorsque cela fait sens (*i.e.* le composé gf de $f \in \mathcal{C}(A,B)$ et de $g \in \mathcal{C}(B,C)$ est un élément de $\mathcal{C}(A,C)$), la composition étant associative. On requiert aussi qu'il y ait un morphisme identité 1_A de A vers lui-même, qui composé avec tout morphisme de source ou de but A, ne le modifie pas.

L'exemple de base est la catégorie *Ens* des ensembles (les morphismes entre deux ensembles étant les applications quelconques entre ces ensembles). On en déduit d'autres catégories par addition de structure : la catégorie des espaces vectoriels (objets : espaces vectoriels, morphismes : applications linéaires), la catégorie des espaces topologiques (objets : espaces topologiques, morphismes : applications continues).

Dans les exemples de cette nature, la spécificité du point de vue catégorique (par opposition au point de vue ensembliste) consiste à ne considérer et manipuler que les espaces et surtout les morphismes qui les relient, et non les points : *on occulte délibérément la structure interne des objets.*

Voici d'autres exemples, où les objets ne sont plus des ensembles structurés :
- la catégorie $\mathcal{F}aisc_X$ des faisceaux sur un espace topologique fixé X,
- tout groupe peut être vu comme une catégorie à un seul objet, les morphismes étant les éléments du groupe,
- tout ensemble ordonné $(X, \leq)$ (par exemple un treillis) peut être vu comme une catégorie (objets : les éléments x de X, morphismes de x vers y : un seul si $x \leq y$, aucun sinon).

5.2 Foncteurs.

De même que les ensembles sont reliés par des applications, les catégories sont reliées par des foncteurs.

Un *foncteur* (covariant) $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ associe à chaque objet A de $\mathcal{C}$ un objet $\phi(A)$ de $\mathcal{D}$ et à chaque morphisme $f \in \mathcal{C}(A,B)$ un morphisme $\phi(f) \in \mathcal{D}(\phi(A), \phi(B))$. On requiert que ϕ préserve les identités et la composition.

Un *foncteur contravariant* ψ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est un foncteur $\psi : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$, où $\mathcal{C}^{op}$ désigne l'opposée de $\mathcal{C}$, qui s'obtient en prenant les mêmes objets et en renversant le sens des flèches : $\mathcal{C}^{op}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$.

Donnons deux types d'exemples, d'allure banale, mais très utiles en pratique :

- si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'ensembles enrichis d'une structure (espaces vectoriels, espaces topologiques etc...), on dispose d'un foncteur d'oubli $\mathcal{C} \to Ens$: ensemble sous-jacent.

- Tout objet A de $\mathcal{C}$ donne lieu à un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers Ens : $\mathcal{C}(?, A)$ (où ? désigne un objet variable). Par le lemme de Yoneda, ce foncteur détermine l'objet A. Un foncteur contravariant de cette forme est dit *représentable.*

Dans un topos, le foncteur contravariant qui à tout objet U associe l'ensemble de ses sous-objets est représentable par un objet Ω appelé classifiant. Pour le topos ponctuel, Ω est l'ensemble à deux éléments.

Les foncteurs eux-mêmes (de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$) peuvent être vus comme objets d'une nouvelle catégorie, dont on laisse au lecteur deviner la définition des morphismes[10].

[10] Les morphismes de foncteurs s'appellent aussi *transformations naturelles.* Pour éviter des paradoxes

5.3 Foncteurs adjoints.

Soit $(\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D},\ \psi : \mathcal{D} \to \mathcal{C})$ un couple de foncteurs allant en sens opposés.

Ces foncteurs sont dits *adjoints* si pour tout objet A de $\mathcal{C}$ et tout objet B de $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}(A, \psi(B))$ s'identifie[11] à $\mathcal{D}(\phi(A), B)$. Noter que la notion n'est pas symétrique ; on dit que ϕ est adjoint à gauche de ψ, et ϕ adjoint à droite de ψ.

Il s'agit là d'un concept aussi fondamental que difficile à comprendre[12].

Bien des foncteurs d'oubli $\psi : \mathcal{D} \to Ens$ admettent un adjoint à gauche ϕ, $\phi(A)$ correspondant à l'objet «libre» de base A (c'est par exemple le cas lorsque $\mathcal{D}$ est la catégorie des espaces vectoriels : $\phi(A)$ est l'espace vectoriel de base A).

Bien des foncteurs d'inclusion admettent un adjoint à gauche. Exemples : l'abélianisation (adjoint à gauche de l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens (= commutatifs) dans celle de tous les groupes), la faisceautisation (adjoint de l'inclusion de la catégorie des faisceaux dans celle des préfaisceaux), la «cure de désintoxication» (adjoint de l'inclusion de la catégorie des espaces topologiques sobres dans celle de tous les espaces topologiques).

Bien des foncteurs diagonaux $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^I$ admettent à la fois un adjoint à gauche (appelé limite inductive et notée $\varinjlim_I$) et un adjoint à droite (appelé limite projective et notée $\varprojlim_I$).

5.4 Application : morphismes de topos et points d'un topos.

Soit $f : X \to Y$ une application continue. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, on définit un faisceau $f_*\mathcal{F}$ sur Y par $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Si $\mathcal{G}$ est un faisceau sur Y, on définit un faisceau $f^*\mathcal{G}$ sur X par $f^*\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$; en particulier, si f est l'inclusion d'un point $y \in Y$, l'ensemble $f^*\mathcal{G}(\{y\})$ est la *fibre de* $\mathcal{G}$ *en* y.

On obtient ainsi un couple de foncteurs adjoints

$$(f^* : \mathcal{F}aisc_Y \to \mathcal{F}aisc_X,\ f_* : \mathcal{F}aisc_X \to \mathcal{F}aisc_Y) :$$

$$\mathcal{F}aisc_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) = \mathcal{F}aisc_X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}).$$

On peut maintenant préciser comment on récupère un espace topologique (sobre) X à partir du topos $\mathcal{X} = \mathcal{F}aisc_X$ de ses faisceaux : l'idée est d'identifier un point $x \in X$ au foncteur «fibre en x» : $\mathcal{X} \to Ens$.

---

ensemblistes, il convient à ce niveau de supposer que les objets de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ forment des ensembles ; mais peu nous chaut ici...

[11] fonctoriellement en A et B bien entendu. Noter par ailleurs l'analogie formelle avec la définition des opérateurs adjoints ϕ et ψ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, au chapitre précédent : pour tout couple de vecteurs x, y de $\mathcal{H}$, $\langle x, \psi(y)\rangle = \langle \phi(x), y\rangle$.

[12] c'est semble-t-il un cas extrême d'hysteresis entre compréhension littérale et compréhension réelle. On prendra garde à ne surtout pas confondre cette notion avec celle d'inverse : il n'y a que ici d'inversion que le sens des foncteurs.

Plus généralement, Grothendieck définit la notion de morphisme de topos $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ comme la donnée d'un couple de foncteurs adjoints $f = (f^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}, f_* : \mathcal{X} \to \mathcal{Y})$, f^* commutant aux limites projectives finies[13].

Prenant pour $\mathcal{X}$ le topos ponctuel, on obtient la notion de *point* du topos $\mathcal{Y}$. La définition est raisonnable car dans le cas du topos $\mathcal{Y} = \mathcal{F}aisc_Y$ des faisceaux sur un espace topologique (sobre) Y, on retrouve bien les points de Y.

Mais il existe des topos exotiques sans aucun point !

6 Topos et logique intuitionniste.

6.1 Les topos entre géométrie et logique.

La transition est excellemment présentée par P. Cartier [6, 23] :

«[Grothendieck] avait remarqué que les faisceaux sur un espace donné formaient une une catégorie qui avait, en gros, toutes les propriétés de «la» catégorie des ensembles. Or, après les résultats d'indécidabilité de Gödel et de Cohen en théorie des ensembles, il y a non pas *une* théorie des ensembles, mais *divers modèles* non équivalents de la théorie des ensembles (au sens logique de «modèle»). Il était donc naturel d'explorer les relations entre topos et modèles de la théorie des ensembles. [...]

Il appartint à d'autres (surtout Bénabou, Lawvere et Tierney) de résoudre l'énigme : les topos sont exactement les modèles de la théorie des ensembles, mais dans une logique particulière, qu'on appelle «intuitionniste», et où le prinicipe du tiers exclu n'est pas valable. Il est très remarquable que cette logique ait été inventée par un fameux topologue, Brouwer, et qu'avec un peu de recul, elle s'impose naturellement en vertu du fait que l'intérieur de l'adhérence d'un ensemble ouvert ne lui est pas égal.

Mais l'invention des topos donne une liberté inouïe au jeu mathématique, et permet de briser le carcan de «la» théorie des ensembles. Rejouer une pièce mathématique bien connue dans le décor nouveau d'un topos exotique peut amener des surprises, et faire découvrir des accents nouveaux dans des vers ressassés ; parfois, cette nouvelle représentation révèle des trésors mathématiques. D'un point de vue plus général, un topos porte en lui sa propre logique, et définit donc une espèce de logique modale, ou plutôt une logique du *hic* et du *nunc*, une logique spatio-temporelle où la valeur de vérité d'une assertion peut dépendre du lieu et du temps.»

6.2 Règles du calcul propositionnel : formulaire.

Je me limiterai à logique des propositions, pour simplifier au maximum. Mais ce qui suit s'étend à la logique des prédicats[14] et même à la logique plus sophistiquée des «types».

Commençons par rappeler le formulaire des règles de déduction en logique des propositions. Si p et q sont des propositions (ou formules logiques), notons $\neg p$ la négation de

[13] c'est-à-dire des $\varprojlim_I$ avec I fini.

[14] la logique des prédicats fait intervenir les quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$, qui du reste peuvent s'interpréter comme adjoints à gauche et à droite respectivement d'un même foncteur.

p, $p \wedge q$ la conjonction de p et q, $p \vee q$ leur disjonction, $p \Rightarrow q$ la proposition «p implique q», et $\rightsquigarrow$ l'inférence : de p on infère q.

Les axiomes et règles de déduction sont les suivantes (en notant F le faux et V le vrai) :

$$F \rightsquigarrow p, \ \ p \rightsquigarrow V, \ \ p \rightsquigarrow p,$$

$$\neg p \rightsquigarrow (p \Rightarrow F), \ \ (p \Rightarrow F) \rightsquigarrow \neg p,$$

$$\frac{p \rightsquigarrow q, \, q \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow r}, \ \ \frac{p \rightsquigarrow q \wedge r}{p \rightsquigarrow q}, \ \ \frac{p \rightsquigarrow q \wedge r}{p \rightsquigarrow r}, \ \ \frac{p \rightsquigarrow q, \, p \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow q \wedge r},$$

$$\frac{p \vee q \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow r}, \ \ \frac{p \vee q \rightsquigarrow r}{q \rightsquigarrow r}, \ \ \frac{p \rightsquigarrow r, \, q \rightsquigarrow r}{p \vee q \rightsquigarrow r},$$

$$\frac{p \wedge q \rightsquigarrow r}{p \rightsquigarrow (q \Rightarrow r)}, \ \ \frac{p \rightsquigarrow (q \Rightarrow r)}{p \wedge q \rightsquigarrow r}.$$

(par la notation «fractionnaire», on entend que le dénominateur se déduit du numérateur).

On a alors $\neg\neg\neg p \rightsquigarrow \neg p$, mais l'inférence $\neg\neg p \rightsquigarrow p$ ne se déduit pas des règles précédentes et n'est pas valide en logique intuitionniste. Cette inférence est l'axiome supplémentaire (tiers exclu) qu'impose la logique classique.

6.3 Logique intuitionniste et algèbres de Heyting.

Si l'inférence $\rightsquigarrow$ est interprétée comme une relation d'ordre $\leq$, le calcul des propositions forme une *algèbre de Heyting*, c'est-à-dire un treillis avec plus petit élément F et plus grand élément V, ayant la propriété que le foncteur $? \wedge y$ (du treillis dans lui-même) admet un adjoint à droite (c'est $? \Rightarrow y$).

Plus précisément, une proposition p est valide en logique intuitionniste si et seulement son interprétation dans toute algèbre de Heyting l'est.

Le treillis des ouverts $\mathfrak{O}$ d'un espace topologique X est une algèbre de Heyting. Dans cette algèbre, l'inférence $\rightsquigarrow$ s'interprète comme l'inclusion $\subset$ (des ouverts les uns dans les autres), la conjonction $\wedge$ s'interprète comme l'intersection $\cap$, $\vee$ comme la réunion $\cup$, et la *négation* $\neg$ *comme l'intérieur du complémentaire*[15] :

$$\neg U = (X \setminus U)^\circ.$$

Plus généralement, dans tout topos $\mathcal{X}$, le treillis des sous-objets d'un objet A de $\mathcal{X}$ (treillis dont l'ensemble sous-jacent est $\mathcal{X}(A, \Omega)$ par définition du classifiant Ω), est une algèbre de Heyting.

La logique intuitionniste s'interprète donc dans tout topos de Grothendieck. Le classifiant apparaît comme *«faisceau» de valeurs de vérités*. Dans le topos ponctuel, cette logique devient classique : $\Omega = \{V, F\}$.

[15]cette interprétation topologique de la logique intuitionniste fait ressortir la non-validité du tiers-exclu : par exemple si X est la droite, et U la droite privée d'un point, $\neg U = \emptyset$, et $\neg\neg U = X$ qui n'est pas contenu dans U, de sorte que $\neg\neg U \rightsquigarrow U$ n'est pas valide.

Ce qu'on vient d'esquisser n'est que le début de la logique toposique[16], qui a précédé la logique des interactions évoquée dans l'exposé précédent - tout en lui demeurant complémentaire.

****

Bien que cela dépasse largement notre cadre, je ne peux omettre, en terminant, de signaler que la logique toposique forme le substrat mathématique de la logique de l'apparaître dans la philosophie d'A. Badiou et irrigue la construction des principaux concepts de son livre Logiques des Mondes.

Ni de signaler que les topos jouent un rôle fondamental dans la théorie mathématique de la musique de G. Mazzola [8], où ils permettent notamment d'effectuer le passage du local au global dans le contexte «discret» des compositions musicales.

****

Bibliographie

[1] - A. Badiou, Logiques des Mondes, Seuil 2006

[2] - N. Bourbaki, Topologie générale, Hermann 1971

[3] - P. Cartier, «Catégories, logique et faisceaux ; modèles de la théorie des ensembles», Séminaire Bourbaki, exposé 513, 1978

[4] - P. Cartier, «Grothendieck et les motifs», Prépublication IHES (2000)

[5] - A. Grothendieck, Récoltes et Semailles, notes miméographiées (désormais accessibles sur la Toile comme fichier pdf)

[6] - L. Illusie, «What is a topos ?», Notices of the AMS 51, 9 (2004), 1060-106

[7] - A. Lautman, Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. Réédition Vrin 2006.

[8] - S. Mac Lane, I. Moerdijk, Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994

[9] - C. Mac Larty, The uses and abuses of the history of Topos Theory,The British Journal for the Philosophy of Science, 2003

[16] pour les besoin de la logique, la notion de topos que Lawvere et Tierney et leurs successeurs utilisent est un peu plus générale que celle de Grothendieck.

[10] - G. Mazzola, The topos of Music, Birkhäuser 2002

[11] - J. Roubaud, Mathématique : (récit), Seuil 1997

[12] - R. Thom, «Aristote topologue», Revue de Synthèse (1999), 39-48

[13] - H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1913