Quatrième séance
samedi 1er décembre 2007

Représentations linéaires

«Plus une méthode est nouvelle et féconde,
plus elle étend le champ de l'inconnu.»
J. Bertrand, *D'Alembert*, cité dans [2]

Hegel parlait de «l'apparence bariolée du sensible». Ici, c'est plutôt «l'apparence bariolée» de l'intelligible mathématique que nous voudrions rendre sensible. En espérant faire entrevoir que le développement des mathématiques ne repose pas sur le seul mouvement d'élévation conceptuelle, mais qu'au contraire la conquête de l'intelligible mathématique s'appuie sur une dynamique de va-et-vient entre avancées conceptuelles et retombées applicatives.

«Retombée» : n'y voyons surtout pas une chute d'Icare du ciel des Idées, mais ce mouvement essentiel par lequel les nouveaux concepts essaiment, se concrétisent, et fécondent d'autres territoires mathématiques.

Ce second exposé sur le thème général des symétries s'ouvre sur un long préambule présentant les idées fondamentales de linéarisation et de représentation en mathématique. Nous esquisserons ensuite la théorie des représentations linéaires des groupes, initiée par Frobenius à la fin du XIXème siècle (dans le cas des groupes finis). Un acteur majeur fut H. Weyl qui, en liaison avec ses travaux sur les fondements de la mécanique quantique, fit la jonction inattendue avec l'analyse de Fourier et créa l'analyse harmonique non commutative. La théorie s'est ensuite énormément développée et ramifiée sous la maîtrise d'œuvre de Gelfand.

Le rêve de Burnside de mettre à profit l'impressionnante effectivité de la théorie des représentations linéaires pour classifier tous les groupes finis simples s'est finalement réalisé au bout d'un siècle. Entre-temps, cette théorie avait permis à Killing et Cartan de classifier tous les groupes infinis «continus» simples. Nous terminerons en expliquant comment le problème général de classification des représentations linéaires mène à une trichotomie (fini, modéré, sauvage), et comment l'indécidabilité surgit au coeur de situations extrêmement concrètes et apparemment élémentaires.

Plan

1. Linéarité. Linéarisation.
2. Le concept mathématique de représentation.
3. Représentations linéaires des groupes.
4. Représentations linéaires et problèmes de classification.

****

1 Linéarité. Linéarisation.

1.1 Bref retour à l'algèbre linéaire.

Comme nous l'affirmions au début du premier exposé, l'algèbre linéaire est la partie la plus simple des mathématiques. Elle consiste, rappelons-le, en l'étude des espaces vectoriels (espaces où les points nommés vecteurs peuvent être additionnés entre eux et multipliés par des nombres) et des applications linéaires qui relient ces espaces - et tout particulièrement, de l'algèbre $\mathcal{L}(V)$ des applications linéaires F d'un espace vectoriel V dans lui-même (munie de l'addition et de la composition).

Supposons V de dimension finie. Dans une base donnée $e_1, \ldots, e_n$, les vecteurs sont repérés par leurs coordonnées. Un opérateur $F \in \mathcal{L}(V)$ étant donné, les coordonnées λ_j^i des vecteurs $F(e_j)$ forment une matrice Λ, c'est-à-dire un tableau carré de nombres (disons des nombres complexes).

La matrice Λ de F dépend de la base choisie. Qu'est-ce qui, de la matrice Λ, reste invariant par changement de base ?

L'invariant le plus simple est la *trace* de Λ, c'est-à-dire la somme de ses coefficients diagonaux λ_i^i :

$$tr\,\Lambda = \sum \lambda_i^i = tr\,F,$$

qui jouera un rôle important dans la suite. En fait, $tr\,F$ est la somme $\sum \mu_i(F)$ des *valeurs propres* de F, qui ne sont autres que les éléments du spectre de F comptés éventuellement plusieurs fois[1]. En outre, vis-à-vis de la composition des opérateurs, la trace vérifie l'identité

$$tr\,FG = tr\,GF.$$

En dimension infinie, c'est plus compliqué : pour pouvoir écrire des sommes infinies, on doit introduire un peu de topologie. La situation la plus commode est celle des espaces de Hilbert, mais n'anticipons pas (ou plutôt, ne revenons pas si tôt sur le thème du premier exposé)...

1.2 Linéarisation.

La *linéarité* est le caractère des situations ou problèmes mathématiques dans lesquels les multiplicités à l'œuvre forment des espaces vectoriels. Le rôle de l'algèbre linéaire est précisément d'aider à traiter les problèmes linéaires, c'est-à-dire ceux dont les solutions forment a priori un espace vectoriel : la somme de deux solutions est encore une solution, de même que la multiplication d'une solution par une constante arbitraire.

La *linéarisation*, certainement l'une des démarches les plus universelles en mathématiques, des plus abstraites aux plus appliquées, consiste à essayer de ramener des problèmes non-linéaires à des problèmes linéaires, toujours plus abordables grâce notamment à la technologie élémentaire de l'algèbre linéaire.

La linéarisation se retrouve aussi bien en analyse qu'en géométrie et en algèbre. En analyse, elle se présente sous la forme de l'*approximation au premier ordre.*

[1] comme on l'a vu au § 4.1 du premier exposé, ces éléments sont les nombres μ tels que $F - \mu I$ n'est pas inversible.

Exemple 1. Soit f une fonction lisse d'une variable x («lisse» évoque, intuitivement, quelque chose comme «agréable à caresser» ; formellement : «indéfiniment différentiable». Pourvoir les chaînons manquants dans l'évolution putative de la notion intuitive à la notion formelle est une gageure tant pour les sciences cognitives que pour l'histoire des mathématiques...)

Une telle fonction admet un développement en puissances[2] de la variable x

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

où les a_i sont des constantes. La linéarisée de f est $a_0 + a_1 x$ (cela revient si l'on veut à poser, quelque peu brutalement, $x^2 = 0$ dans le développement de f). Avantages quantitatifs et qualitatifs : bonne approximation numérique en pratique, et détection de la croissance (positivité de a_1).

Du point de vue géométrique, cela revient à remplacer le graphe de la fonction f par sa tangente au point d'abscisse 0. Noter qu'on reconstruit f en prenant l'enveloppe de ses tangentes (en tous les points du graphe). Plus généralement prendre l'*espace tangent* d'une variété en un point est une forme de linéarisation.

Exemple 2. Prenons par exemple un groupe «continu» G de transformations («groupe de Lie»), par exemple le groupe $GL(V)$ des applications linéaires inversibles de V dans V. L'espace tangent en l'identité est l'*algèbre de Lie* de G (celle de $GL(V)$ est $\mathcal{L}(V)$, l'espace des applications linéaires de V dans V). Elle est munie d'opération «crochet de Lie» [,] que l'on obtient en «linéarisant» le commutateur

$$g_1, g_2 \mapsto g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$$

(en fait en regardant le terme d'ordre 2 car il n'y a pas de terme d'ordre 1). La structure d'algèbre de Lie[3] de G est une forme linéarisée de la structure de groupe de Lie.

Exemple 3. Les systèmes dynamiques, qui modélisent mathématiquement l'évolution de toutes sortes de systèmes physiques, biologiques, économiques etc..., sont souvent non-linéaires. Considérons par exemple un système du type

$$dy/dt = F(y, t),$$

où t désigne la variable temporelle et $y = (y_1, \dots, y_n)$ un ensemble de quantités dépendant du temps. Au voisinage d'un point d'équilibre y_0, on peut linéariser le système, ce qui donne

$$dy/dt = DF(y_0, t)(y - y_0),$$

où $DF(y_0, t)$ est maintenant une matrice. De nombreux théorèmes de la théorie des systèmes dynamiques ont pour objet de prédire le comportement du système en fonction du spectre de la matrice $DF(y_0, t)$ (e.g. si le spectre est négatif, l'équilibre est stable...).

[2]en pratique, souvent, ce développement converge et f en est la somme ; on dit alors que f est analytique. La théorie des développements asymptotiques, qui a fait une apparition-éclair à la fin du § 4 de l'exposé précédent, permet de donner sens à ces développements même dans le cas divergent.

[3]espace vectoriel muni d'une opération «crochet de Lie» vérifiant des axiomes convenables.

2 Le concept mathématique de représentation.

Nous le ferons émerger de trois doublets successifs : objets généraux/objets particuliers, mode intrinsèque/mode extrinsèque, présentation/représentation.

2.1 Objets généraux/objets particuliers.

Il s'agit là d'une distinction[4] imprécise et presque triviale, mais omniprésente dans le champ mathématique (et pourtant peu soulignée).

Appelons *objets généraux* ces objets indifférenciés dans leur type d'être mathématique, ceux qu'accompagne, plus ou moins tacitement, l'adjectif «quelconque» - comme dans les expressions canoniques «soit ABC un triangle quelconque», «considérons un groupe G» etc...

Souvent, les objets généraux que l'on considère sont tout simplement les objets d'une catégorie donnée (groupes, espaces vectoriels, espaces topologiques, etc...). Un point de vue structuraliste outrancier voudrait que ce soit toujours le cas ; autrement dit, qu'un objet mathématique général ne soit rien d'autre qu'une espèce de structure.

Or ce n'est pas toujours le cas, tant s'en faut : par exemple, les systèmes dynamiques évoqués ci-dessus sont les objets généraux d'un immense chapitre des mathématiques, qui ne se laissent pas enfermer dans une saisie catégorique - si ce n'est fort artificiellement.

Soit dit en passant, il importe d'être conscient des limites de l'approche catégorique, et surtout de ne pas confondre à cet égard trois «ordres d'universalité» : la notion mathématique d'«universalité» que la théorie des catégories thématise, l'«universalité» théorique d'application de ses concepts formels (liée au fait que par nature, cette théorie occulte la structure interne des objets), et l'«universalité» - ou plutôt la généralité - relativement limitée, voire précaire, de son importance pratique dans le champ mathématique tout entier.

Les *objets particuliers*, quant à eux, sont des sortes de «personnages» mathématiques qui ont un nom propre. Ils interagissent les uns avec les autres, et avec les objets généraux. Nous en avons déjà rencontré quelques specimens remarquables au cours de ces exposés :

- le facteur moyennable de type II_1 dans la théorie de von Neumann (et plus récemment héros de la logique des interactions de Girard),
- la logique classique (parmi toutes les logiques intuitionnistes),
- le groupe de Galois absolu $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (objet central de la théorie des nombres),
- le groupe de Galois cosmique (qui agit sur les constantes de toutes les théories quantiques des champs).

Ces objets particuliers sont d'autant plus fascinants qu'ils sont plus protéiformes et ubiquitaires, c'est-à-dire qu'ils admettent de nombreuses descriptions différentes et interviennent de façon différente dans plusieurs théories mathématiques. Cette *combinaison de singularité et d'ubiquité* enchante bien des mathématiciens, qui considèrent de tels objets particuliers remarquables comme les joyaux de leur discipline. Leur apparition inopinée dans une théorie mathématique qui les ignorait est le présage de développements exaltants, l'un des catalyseurs de l'unité des mathématiques en acte. L'explication de

[4]cette terminologie n'est guère satisfaisante. Nous l'employons par défaut, le doublet «générique/singulier» étant déjà fort employé en mathématique.

cette apparition passe souvent par le façonnage d'objets mathématiques généraux tout à fait nouveaux. L'exporation de ce nouvel inconnu peut alors mener, après un âpre travail, à une classification qui fait apparaître de nouveaux objets particuliers.

Cette dialectique entre objets généraux et objets particuliers, qui nous semble être l'un des moteurs de la recherche mathématique, ne semble pas avoir attiré l'attention des épistémologues.

2.2 Mode intrinsèque/mode extrinsèque.

La question qu'on se pose maintenant est celle du mode sous lequel tel ou tel objet mathématique *particulier* est constitué/envisagé.

Prenons, pour fixer les idées, le cas d'objets géométriques. Traditionnellement, c'est-à-dire depuis les Anciens jusqu'à Gauss, ils étaient envisagés par rapport à un *référent* géométrique : le plan ou bien l'espace euclidien de dimension trois ; l'étude portait donc sur l'*objet plongé*.

C'est Gauss qui, dans son étude fondamentale des surfaces, a mis l'accent sur les propriétés *intrinsèques*[5], c'est-à-dire indépendantes du plongement dans le référent. Cela suppose déjà une vision claire de l'identité (ou plus correctement, de l'«isomorphie») d'objets géométriques plongés différemment dans un référent. On peut y voir l'une des sources de l'importance prise peu à peu par la notion générale d'isomorphisme, puis de morphisme.

Toutefois, si c'est la notion intrinsèque qui importe en fin de compte, il ne s'agit pas pour autant de se débarrasser d'un référent, la donnée même d'un objet mathématique *particulier* se faisant très souvent de manière extrinsèque, e.g. via des équations. Le caractère intrinsèque des objets et propriétés considérés permet alors, selon un libre jeu de changements de repères, de choisir la description la plus commode selon les besoins.

Exemple. Reprenons le cas, évoqué au début de cet exposé, d'un opérateur linéaire $F \in \mathcal{L}(V)$. Bien souvent, ce qui est donné en pratique, ce n'est pas F lui-même, mais le tableau carré de nombres qu'est sa matrice Λ. L'opérateur F est l'objet abstrait intrinsèque défini par Λ dans une base donnée, c'est-à-dire une fois V identifié à $\mathbb{C}^n$.

Cette définition est donc de nature extrinsèque : elle dépend du choix d'une base. Lorsqu'on la change, Λ se change en une matrice du type $P\Lambda P^{-1}$, et on peut par exemple tirer profit de cette variation pour se ramener au cas commode d'une matrice triangulaire (*i.e.* n'ayant que des 0 au-dessous de la diagonale).

Nous allons maintenant discuter *deux modes extrinsèques de se donner un objet mathématique particulier : la présentation et la représentation.*

Ces deux modes sont de caractères opposés : la présentation est une description abstraite, formelle, symbolique de l'objet considéré, tandis que la représentation vise à une «concrétisation», une «réalisation», une «incarnation» de cet objet.

2.3 Présentations.

Présenter un objet mathématique, c'est l'exhiber en termes de générateurs et relations.

[5]comme me le rappelle F. Nicolas, la dialectique intrinsèque/extrinsèque a été bien thématisée par A. Lautman [6, II].

Pour fixer les idées, considérons le cas d'un groupe. Présenter un groupe G, c'est se donner G par générateurs g_i et relations r_j, de la manière suivante :

- les g_i sont des symboles (sans contenu sémantique spécifié), chacun étant accompagné d'un autre symbole g_i^{-1} (appelé inverse de g_i). On considère l'alphabet (fini ou infini) formé des g_i et des g_i^{-1},

- les $r_j = r_j(g_i, g_i^{-1})$ sont certains mots écrits dans cet alphabet,

- les éléments de G sont les mots qu'on peut écrire dans cet alphabet, *modulo les relations* r_j,

- la loi de composition de G est donnée par la concaténation des mots mis bout à bout. L'élément neutre est le mot vide (sans lettre), noté 1_G ou simplement 1.

L'expression «modulo les relations r_j» demande explication : on entend par là que deux mots m_1 et m_2 sont considérés comme définissant le même élément de G si on peut les obtenir tous deux à partir d'un troisième mot m en effaçant à l'intérieur de m certaines séquences du type r_j, ou $g_i g_i^{-1}$, ou $g_i^{-1} g_i$.

On dit que le groupe G est de *présentation finie* s'il peut être défini par un nombre fini de générateurs g_i et de relations r_j.

Exemple 1. Le groupe libre engendré par $g_1, \ldots, g_n$ est le groupe donné par les générateurs g_i et aucune relation. Si $n = 1$, on trouve le groupe des entiers $\mathbb{Z}$ (muni de l'addition). Si $n \geq 1$, ce groupe s'identifie au groupe fondamental du plan privé de n points $x_1, \ldots x_n$ (voir exposé 3) : les g_i symbolisent des chemins partant et aboutissant à un point-base fixé x, et tournant une fois autour du point manquant x_i dans le sens trigonométrique.

Du point de vue des présentations, les groupes libres jouent le rôle de référents. Dans ce mode extrinsèque de description, un groupe n'apparaît pas comme plongé dans un référent, mais, dualement, comme quotient du référent.

Exemple 2. Le groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ des transpositions du système tempéré est donné par un générateur g et une relation $r = gggggggggggg$ (g peut représenter la classe de 1 ou de 5 ou de 7 ou encore de 11 dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, au choix). Une autre présentation de ce groupe consiste à prendre deux générateurs g_1, g_2 et trois relations $r_1 = g_1 g_1 g_1$, $r_2 = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, $r_3 = g_2 g_2 g_2 g_2$ (g_1 peut représenter la classe de 4 et g_2 celle de 3 dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; la relation r_2 assure la commutativité). On voit donc qu'un groupe donné admet plusieurs présentations, qu'elles sont extrinsèques, et contiennent pas mal d'arbitraire.

Tout élémentaire et formel que paraisse ce mode de définition d'un groupe, surtout dans le cas de présentation finie où tout se réduit à concaténer et simplifier des mots sur un alphabet fini, la présentation par générateurs et relations recèle en fait de redoutables difficultés, dont le fameux *problème des mots* de M. Dehn (1911) :

soit G le groupe donné par une présentation finie explicite (g_i, r_j). Donner un algorithme pour déterminer si deux mots m_1 et m_2 (sur l'alphabet formé des g_i et des g_i^{-1}) coïncident modulo les relations r_j, autrement dit, s'ils définissent le même élément de G.

Toute la difficulté réside en ce qu'on ne connaît pas de borne a priori pour la longueur du mot m dont dériveraient m_1 et m_2 par simplification, s'ils définissaient le même élément de G. La réponse au problème de Dehn a été apportée en 1955 par P. Novikov :

pour certains groupes G de présentation finie, le problème des mots est indécidable.

Ce résultat célèbre est sans doute la première manifestation d'indécidabilité (au sens usuel d'inexistence de machines de Turing capables de trancher algorithmiquement la question) en dehors du domaine de la logique et de la théorie des ensembles.

Plus tard, Boone et Higman ont caractérisé les groupes G de présentation finie pour lesquels le problème des mots est décidable : ce sont ceux qui se plongent dans un groupe simple qui lui-même se plonge dans un groupe de présentation finie. De là à savoir construire des groupes où le problème des mots est indécidable, il y a un grand pas... et une riche théorie. *Gardons-nous donc de confondre «indécidable»* (qui a un sens logico-mathématique bien précis) *et «inconnaissable»* (qui n'en a aucun), *et d'interpréter l'indécidabilité comme on ne sait quel retrait du «manteau» mathématique devant le «toucher de l'esprit».*

2.4 Représentations.

Représenter un objet mathématique, c'est le décrire en termes de son action sur d'autres objets X préalablement connus.

Pour fixer les idées, reprenons le cas d'un groupe. Représenter un groupe G, c'est se donner G comme groupe de symétries d'un ensemble structuré X. Dans une acception un peu plus générale, c'est se donner un morphisme[6]

$$G \to Aut\, X$$

du groupe G vers le groupe des automorphismes de X. On parle aussi d'*action* de G sur X, et on note $g \cdot x$ l'élément de X qui est le résultat de l'action de l'élément $g \in G$ sur l'élément $x \in X$.

Exemple 1. Tout groupe G agit sur lui-même (de plusieurs façons, en fait), par exemple par translations à gauche : $g \cdot x$ étant le produit de g et de x dans G. Ce faisant, G s'incarne comme un groupe de permutations particulières de ses éléments.

Exemple 2. Le programme d'Erlangen de Klein évoqué dans l'exposé précédent (§ 2.2) fournit de nombreux exemples d'actions de groupes de déplacements sur des figures géométriques. Ce programme est en fait une réflexion de fond sur la notion d'action en géométrie.

2.5 Représentations linéaires.

Une représentation est d'autant plus efficace que le substrat X de l'action est élémentaire ou bien connu. Le cas d'un espace vectoriel est à cet égard prometteur.

On parle de *représentation linéaire* lorsque X est un espace vectoriel, qu'on note plutôt V comme d'habitude ; le groupe des automorphismes de V n'est autre que $GL(V)$. Lorsque V est de dimension finie, on parle de *représentation linéaire de dimension finie.*

Une représentation linéaire d'un groupe G dans l'espace vectoriel V, c'est donc un morphisme de groupes[7]

$$\rho : G \to GL(V).$$

[6] c'est-à-dire une application qui respecte la composition.

[7] si G est muni d'une topologie, il est naturel de requérir que ce morphisme soit continu.

En dimension finie et sous l'hypothèse que ρ injectif[8], représenter linéairement un groupe abstrait G, c'est donc le représenter «concrètement» comme *groupe de matrices*[9]. Une représentation linéaire est dite *irréductible* si V n'a pas de sous-espace[10] stable sous l'action de G.

Le leitmotiv de la théorie des représentations linéaires des groupes est d'essayer de «comprendre» un groupe abstrait G à partir de la collection de ses représentations linéaires (irréductibles).

Exemple 1 (linéarisation 1). Partant d'une action d'un groupe G sur un ensemble structuré X quelconque, voici comment en déduire une représentation linéaire de G. On prend pour V l'espace vectoriel $F(X)$ formé des fonctions sur X à valeurs complexes[11], et on fait agir G sur $F(X)$ par la règle suivante qui définit l'action $g \cdot f$:

$$(g \cdot f) \cdot x = f(g^{-1} \cdot x)$$

(où x désigne un élément de X, f un élément de $F(X)$, g un élément de G).

Par exemple si G agit sur $X = G$ par translation, la représentation linéaire ainsi obtenue (dans l'espace $F(G)$ des fonctions sur G) s'appelle la *représentation régulière* de G et est notée ρ_{reg}.

Exemple 2 (linéarisation 2). Reprenons l'exemple 1 du numéro précédent, dans le cas particulier d'un groupe continu de transformations G (groupe de Lie). Par linéarisation, l'action de G sur lui-même induit une représentation linéaire de G sur son algèbre de Lie.

Exemple 3. Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$p_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x) = 0,$$

les coefficients $p_i(x)$ étant des polynômes. Les singularités de cette équation sont les racines $x_1, \ldots x_n$ du polynôme $p_n(x)$. Au voisinage de tout point x distinct des singularités, les solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre n forment un espace vectoriel V de dimension n. Mais quand on «suit» une solution y le long d'un chemin partant de x et aboutissant à x, mais entourant une ou plusieurs singularités, on retombe en général sur une *autre* solution de l'équation[12]. Ainsi, le groupe fondamental du plan privé de $x_1, \ldots, x_n$ agit sur V : on obtient une représentation du groupe libre à n générateurs, dite *représentation de monodromie*.

Pour clore ce paragraphe, mentionnons brièvement deux opérations utiles sur les représentations linéaires :

- la somme de deux représentations $\rho \oplus \rho' : G \to GL(V \oplus V')$. L'espace sous-jacent consiste en les couples formés d'un vecteur de V et d'un vecteur de V'. L'action de $g \in G$ est donnée par la formule $g \cdot (v, v') = (g \cdot v, g \cdot v')$.

- le produit tensoriel[13] de deux représentations $\rho \otimes \rho' : G \to GL(V \otimes V')$. Si les e_i forment une base de V et les e'_j une base de V', une base de $V \otimes V'$ est formée des symboles $e_i \otimes e'_j$. L'action de $g \in G$ est donnée par la formule $g \cdot (e_i \otimes e'_j) = (g \cdot e_i) \otimes (g \cdot e'_j)$.

[8] c'est-à-dire faisant de G un sous-groupe de $GL(V)$.
[9] on renvoie au § 1.3 du premier exposé pour la définition de la composée de deux matrices.
[10] distinct de $\{0\}$ et de lui-même, bien entendu.
[11] variante utile en dimension infinie : on peut imposer diverses conditions sur ces fonctions.
[12] voir le § 4 de l'exposé précédent.
[13] dont l'intérêt apparaîtra plus bas, § 3.3.

3 Représentations linéaires des groupes.

3.1 Caractères : la théorie de Frobenius.

La théorie des représentations linéaires des groupes finis est née en 1896, grâce aux efforts de G. Frobenius pour répondre aux questions de R. Dedekind, qui se heurtait à des calculs inextricables en théorie de Galois des équations algébriques, dès que le degré dépassait 4. Le concept fondamental de sa théorie est celui de *caractère*.

Soit G un groupe à N éléments. On note $F_{cent}(G)$ le sous-espace de $F(G)$ formé des *fonctions centrales*, c'est-à-dire des fonctions f (à valeurs complexes) vérifiant $f(gg') = f(g'g)$ pour tout couple (g, g') d'éléments de G. Le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f_1(g) \bar{f}_2(g)$$

fait de $F_{cent}(G)$ un espace euclidien complexe (voir exposé 1, § 3.1).

Soit maintenant $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de dimension finie de G. Son *caractère* χ_ρ est la fonction sur G à valeurs complexes définie par la trace :

$$\chi_\rho(g) = tr\, \rho(g).$$

Par la propriété fondamentale de la trace, c'est un élément de $F_{cent}(G)$.

Il s'avère qu'une représentation ρ est complètement déterminée par son caractère χ_ρ. En outre, cette *correspondance de Frobenius entre représentations et caractères* jouit des propriétés remarquables suivantes :

- ρ est irréductible $\Leftrightarrow$ χ_ρ est *unitaire* : $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$,

- les caractères unitaires forment une base orthonormée de $F_{cent}(G)$; pour toute élément $f \in F_{cent}(G)$, on a donc la décomposition

$$f = \sum \langle f, \chi_n \rangle \chi_n$$

où χ_n parcourt les caractères unitaires,

- $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$ et $\chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho . \chi_{\rho'}$,

- toute représentation ρ de dimension finie de G est somme directe de représentations irréductibles. La multiplicité avec laquelle la représentation irréductible de caractère χ_n apparaît dans ρ est $\langle \chi_\rho, \chi_n \rangle$. Cas particulier : la décomposition de la représentation régulière est : $\rho_{reg} = \oplus\, (\dim \rho_n)\, \rho_n$ où ρ_n parcourt toutes les représentations irréductibles.

La correspondance de Frobenius permet d'associer à tout groupe fini sa *table de caractères*, c'est-à-dire le tableau de nombres complexes dont les entrées sont les valeurs des caractères unitaires[14], et *cette table détermine le groupe.* Cette correspondance réalise ainsi l'exploit de *ramener en principe la structure du groupe fini abstrait G à de simples*

[14] comme les caractères sont des fonctions centrales, on peut se limiter à considérer leurs valeurs sur des représentations des classes de conjugaison de G, ce qui permet d'obtenir un tableau carré. Par ailleurs ces valeurs sont des nombres d'un type bien particulier : comme tout élément g de G vérifie $g^N = 1_G$, toute valeur propre μ de $\rho(g)$ vérifie $\mu^N = 1$, de sorte que les valeurs de caractères sont toujours des sommes de racines N-ièmes de l'unité.

données numériques. Conformément au leimotiv énoncé ci-dessus, des renseignements sur la table de caractères donnent des renseignements sur le groupe. Par exemple, on montre facilement qu'un groupe fini G est

- *simple*[15] si et seulement si pour tout $g \neq 1_G$ et pour tout caractère $\chi \neq 1$, $\chi(g) \neq \chi(1_G)$.
- *commutatif* si et seulement si pour tout caractère unitaire χ, $\chi(1_G) = 1$.

Bien entendu, pour exploiter à fond cette correspondance, encore faut-il la rendre explicite, c'est-à-dire savoir calculer la table des caractères. Il existe pour cela un algorithme simple dû à W. Burnside, l'un des fondateurs de la théorie (voir [6, § 2]).

3.2 Représentations linéaires des groupes compacts et analyse harmonique. L'apport de Weyl.

Comme nous l'avons rappelé lors du premier exposé (§ 3.2), on définit en analyse de Fourier le produit scalaire de deux fonctions périodiques $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de période 2π par la formule

$$< f_1, f_2 >= \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)\bar{f}_2(t)\, \frac{dt}{2\pi}.$$

L'espace $L^2(U(1))$ des fonctions f pour lesquelles $< f, f >$ est bien défini est un espace de Hilbert[16]. Une base orthonormée est donnée par $e_n = e^{\sqrt{-1}nt}$ (où n est un entier quelconque), et tout $f \in L^2(U(1))$ s'écrit de manière unique

$$f = \sum_n < f, e_n > \, e_n.$$

C'est H. Weyl qui semble avoir remarqué le premier l'analogie (frappante !) entre ces formules et les formules ci-dessus. Ci-dessus, on avait affaire à un groupe fini G (non nécessairement commutatif), et à un espace euclidien de dimension finie dont le produit scalaire était défini par une somme finie. Ici, on a affaire au groupe topologique commutatif (infini) des rotations planes (qu'on peut identifier au cercle unité $U(1)$, chaque rotation étant épinglée par son angle $t \in]-\pi, \pi]$), et à un espace de Hilbert dont le produit scalaire est défini par une intégrale relative à la mesure de probabilité $\frac{dt}{2\pi}$ sur $U(1)$; les e_n sont les caractères unitaires de $U(1)$.

En mathématique, toute analogie est une aubaine : le chercheur n'a de cesse de la creuser jusqu'à sa disparition/absorption dans une théorie qui englobe les théories jumelles. C'est ce qu'a fait Weyl : il a étendu la théorie de Frobenius aux représentations linéaires de dimension finie des *groupes (topologiques) compacts* non nécessairement commutatifs, et créé l'analyse harmonique non commutative.

Le prototype d'un groupe compact est le groupe $U(n)$ des opérateurs unitaires d'un espace euclidien de dimension n, voir exposé 1, § 3.1.

L'analogue pour un groupe compact G de la décomposition de la représentation régulière d'un groupe fini, c'est le théorème de Peter-Weyl : $L^2_{cent}(G)$ se décompose selon les représentations irréductibles de G (il y en a une infinité), chacune intervenant avec une multiplicité égale à sa dimension (voir par exemple [6]).

[15] c'est-à-dire n'admet pas de quotient non trivial ; mais, attention, il peut admettre des sous-groupes non-triviaux, qui ne seront pas normaux.

[16] c'est-à-dire un espace euclidien complet de dimension infinie.

3.3 Problème de Tannaka.

Étant donné un groupe compact G, on dispose de la catégorie $Rep\,G$ des représentations linéaires de dimension finie de G[17].

Le leitmotiv général de la théorie des représentations linéaires formulé ci-dessus (§ 2.5) incite à poser le problème suivant (problème de Tannaka) :

Peut-on reconstituer G à partir de $Rep\,G$?

La réponse est «non... mais presque». Rappelons (ibidem) que $Rep\,G$ est munie d'une opération interne «produit tensoriel» $\otimes$. Le théorème de Tannaka dit qu'on peut bel et bien reconstruire G à partir de la catégorie $Rep\,G$ munie de $\otimes$.

C'est par le biais d'une vaste généralisation de ce résultat que Grothendieck est parvenu à l'idée de *groupe de Galois motivique*, qui a fait une apparition furtive dans l'exposé précédent (§ 5)[18].

3.4 Représentations linéaires et mécanique quantique.

Le produit tensoriel, conçu en algèbre et pour l'algèbre, a fait fortune en mécanique quantique : l'état de n particules est décrit non par la somme, mais par le produit tensoriel de n espaces de Hilbert $\mathcal{H}$. Du principe d'indiscernabilité des particules identiques, on déduit une action du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations sur n objets sur $\mathcal{H}^{\otimes n}$. Dès les années 1926-27, E. Wigner étudiait cette représentation linéaire. À la même époque, Weyl s'intéressait aux représentations unitaires de dimension infinie du groupe additif des réels $\mathbb{R}$ qui apparaissent en mécanique quantique sous la forme $t \mapsto e^{\sqrt{-1}tH}$ où H est un opérateur hamiltonien (voir exposé 1, § 5.3). La synthèse [9] qu'il a écrite sur la théorie des représentations et la mécanique quantique, parue en 1928 (soit fort peu après les travaux fondateurs de Heisenberg et Schrödinger), a eu une influence considérable.

Les théories de jauge, dont les origines remontent d'ailleurs aussi à Weyl, ont par la suite contribué à renforcer l'importance de la théorie des représentations en physique des particules. Selon ces théories, c'est grosso modo $U(1)$ qui gouverne l'électro-magnétisme, $U(2)$ les forces électro-faibles, $U(3)$ les interactions fortes (les quarks qui, avec les leptons, constituent la matière, furent introduits dans la théorie par Gell-Man et Neeman en 1964 sur la base de considérations sur les représentations de $U(3)$).

3.5 Représentations linéaires en dimension infinie. La théorie de von Neumann et l'école de Gelfand.

Les travaux de Weyl ont ouvert une nouvelle ère dans la théorie des représentations : celle de l'étude des représentations de dimension infinie (de préférence unitaires) des groupes topologiques G.

[17] un morphisme de représentations n'étant autre qu'une application linéaire compatible aux actions de G.

[18] signalons au passage que l'étude des représentations linéaires du groupe de Galois absolu $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (exposé précédent, § 3.1) est l'un des domaines les plus actifs de la théorie des nombres contemporaine. Pour un groupe compact totalement discontinu comme $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, ce n'est d'ailleurs pas le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes qui est le corps naturel de coefficients de ces représentations galoisiennes, mais ce sont ce qu'on appelle les corps p-adiques.

Deux théories, ou deux écoles, en sont nées : la théorie des algèbres d'opérateurs de von Neumann évoquée dans le premier exposé, et l'école de Gelfand.

Le lien entre représentations linéaires et algèbres d'opérateurs est le suivant. Soit $\rho : G \to U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire d'un groupe topologique G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors le commutant de $\rho(G)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une algèbre de von Neumann (voir exposé 1, § 5.1).

I. Gelfand (à qui l'on attribue le slogan «tout problème mathématique est un problème de représentation») et son école se sont principalement occupés de construire et classer des représentations. La théorie est extrêmement ramifiée, mais il en émerge un principe directeur (*principe de Kirillov*) : les représentations irréductibles de dimension infinie d'un groupe de Lie correspondent à certaines orbites pour l'action de ce groupe sur (le dual de) son algèbre de Lie (orbites soumises à une certaine condition de «quantification», dans l'esprit de la mécanique quantique). Ce principe permet de se ramener à des problèmes de dimension finie.

4 Représentations linéaires et problèmes de classification.

«Tout ce qui peut se ranger lui plaisait.»
G. Cuvier, *Eloge de Werner*, cité dans [2]

Nous avons déjà dit quelques mots sur le rôle de la classification en mathématique au § 5.4 du premier exposé. Ce rôle étant moins connu que dans d'autres sciences, les classifications paraissent davantage préservées, dans le domaine mathématique, du discrédit culturel actuel qui bannit presque du champ de la pensée ces avatars scientifiques de la philatélie, la patience illimitée qu'exige leur exercice étant perçue comme l'antithèse de l'éclair de génie.

On sait pourtant comment les grands travaux systématiques botaniques et zoologiques, de Linné à Lamark et Cuvier, ont forgé, lors de l'élaboration de schèmes classificatoires «naturels», la compréhension progressive de la structure visible et de l'organisation des êtres vivants ; comment la problématique de la classification des éléments simples, culminant avec la combinatoire du tableau périodique de Mendeleieff des 92, a contribué à façonner la rationalité chimique (*cf.* [2, ch. III]), etc...

De même, en mathématique, certaines classifications ont eu une importance conceptuelle qui dépasse de bien loin les problèmes de rangement[19] ; c'est certainement le cas de celles que nous allons évoquer ci-dessous.

Les classifications portent sur des objets généraux (au sens du § 2.1), mais font parfois apparaître en fin de compte des objets particuliers tout à fait imprévus ; un tel passage ne s'obtient pas par une simple méditation dialectique sur les objets généraux considérés.

[19]il y aurait certes bien des distinctions à faire parmi entre classifications, mais c'est à un philosophe des sciences qu'il revient d'en parler. Remarquons seulement qu'il ne s'agit dans ce chapitre que du cas où la classification aboutit à des listes dénombrables. Bien d'autres problèmes de classification mettent en jeu à la fois des invariants discrets et des modules continus qui forment parfois des objets de même nature générale que ceux que l'on classifie.

4.1 Classification des groupes finis simples.

Un exemple emblématique de classification mathématique est celui de la classification des groupes finis simples. Rappelons encore une fois qu'un groupe fini est dit simple s'il n'a pas de quotient non trivial, ou ce qui revient au même, s'il n'a pas de sous-groupe normal non trivial (voir l'exposé 3, § 1.3)[20]. Tout groupe fini se «dévisse» en groupes finis simples, qui sont, eux, «indévissables».

Le rêve de Burnside de classifier, en s'appuyant sur la théorie des représentations, les groupes finis simples a finalement abouti, au bout d'un siècle de travail monumental. On a la liste complète : trois séries infinies mais élémentaires

- groupes cycliques d'ordre premier,
- groupes alternés[21],
- groupes simples de type de Lie[22],

plus *26 groupes sporadiques*[23], dont le plus gros, appelé «Monstre», a

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$

éléments (il est construit par «représentation», comme groupe de symétries d'une certaine structure remarquable de dimension 196883).

Les 5 premiers groupes sporadiques ont été découverts par Mathieu en 1860. Il a fallu plus d'un siècle pour qu'un 6ème n'apparaisse, au cours du travail de classification. La fin de ce travail avait été annoncée en 1983, mais un «trou» a été repéré dans une démonstration, trou qui a été «bouché» grâce à un article-rustine de 1300 pages !

La classification est désormais réputée achevée et les experts sont en train de rédiger une preuve «de seconde génération», plus compacte (environ 5000 pages si tout va bien !) et plus conceptuelle.

Qu'en est-il de la classification des *représentations linéaires* des groupes finis simples ? Autrement dit, que sait-on de leurs tables de caractères ?

Pour les groupes cycliques ou alternés, elles étaient déjà connues de Frobenius. Pour les groupes sporadiques, on possède des atlas de tables de caractères. La question des tables de caractères des groupes finis de type de Lie est en revanche ouverte, c'est même l'objet d'un champ d'investigation vaste et très actif sous la maîtrise d'œuvre de G. Luzstig. Celui-ci a proposé une étonnante conjecture reliant les représentations des groupes finis simples de type de Lie aux représentations des groupes quantiques.

4.2 Classification des groupes de Lie simples.

Entre-temps, Cartan et Killing avaient classifié les groupes de Lie réels et complexes simples G. La classification se ramène à celle des algèbres de Lie simples $Lie\, G$. Un peu comme dans la théorie de Frobenius pour les groupes finis, mais de manière beaucoup plus sophistiquée, apparaît de la géométrie euclidienne.

[20] la notion, sinon le qualificatif, est due à Galois.

[21] c'est-à-dire groupes de permutations de n lettres composés d'un nombre impair d'échanges de deux lettres. C'est Galois qui a montré que ce sont des groupes simples dès que $n \geq 5$

[22] ce sont, grosso modo, des groupes de matrices à coefficients dans un corps fini.

[23] ce qualificatif est dû à Burnside.

En fait, à toute algèbre de Lie complexe simple[24] (ou somme directe de telles) est associée un petit bijou de géométrie euclidienne réelle appelé *système de racines*, qui consiste en un ensemble fini Φ de vecteurs qui engendrent l'espace et qui vérifient les 3 propriétés suivantes :

- pour tout $\alpha \in \Phi$, les seuls éléments de Φ proportionnels à α sont α et $-\alpha$,

- pour tout $\alpha \in \Phi$, Φ est stable par réflexion s_α par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à α,

- pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$, la projection orthogonale de β sur la droite menée par α est un multiple demi-entier de α.

Le groupe de Weyl est le groupe fini de symétries de Φ engendré par les réflexions s_α.

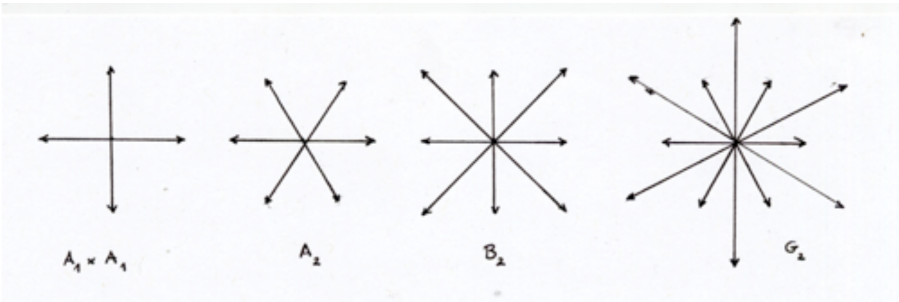

Fig. 4.1. Systèmes de racines en dimension 2.

Il reste à classifier les systèmes de racines : c'est affaire de combinatoire et de géométrie euclidienne élémentaire, quoique subtile. Ceux qui sont indécomposables (ce sont ceux qui correspondent effectivement à des algèbres de Lie simples) se laissent épingler, chacun, par un *diagramme de Dynkin*, dont voici la liste (on a pu dire que ces diagrammes de Dynkin sont des sortes de «lutins qui infestent les mathématiques»)[25] :

$$A_n : \ \circ - \circ - \cdots - \circ - \circ$$

$$B_n : \ \circ - \circ - \cdots - \circ \Rightarrow \circ$$

$$C_n : \ \circ - \circ - \cdots - \circ \Leftarrow \circ$$

$$D_n : \ \circ - \circ - \cdots - \circ < {\circ \atop \circ}$$

$$E_6 : \ \begin{array}{ccc} & \circ & \\ & | & \\ \circ - \circ - & \circ & - \circ - \circ \end{array}$$

[24]sic ! Complexe veut dire ici à coeffients dans le corps des nombres complexes, simple veut dire sans quotient non-trivial.

[25]leur signification est en gros la suivante : les sommets - ou petits cercles - figurent les racines simples, desquelles toutes les racines se déduisent par combinaison linéaire à coefficients tous positifs ou tous négatifs ; les arêtes figurent l'angle entre deux racines simples non perpendiculaires - simple arête si l'angle est de 120° etc...

$$E_7 : \quad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & \circ & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \end{array}$$

$$E_8 : \quad \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & \circ & & & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & & & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \end{array}$$

$$F_4 : \ \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ$$

$$G_2 : \ \circ \equiv \circ.$$

En conclusion, il y a 4 familles infinies (A_n, B_n, C_n, D_n) d'algèbres de Lie complexes simples[26], plus 5 exceptionnelles $(E_6, E_7, E_8, F_4, G_2)$.

Le problème de la classification des représentations des groupes de Lie simples a été résolu par Weyl pour l'essentiel, qui a donné une formule fondamentale pour les caractères. Il y a une relation entre les représentations de chacun de ces groupes continus et les représentations du groupe de Weyl (fini) correspondant.

4.3 Classification des représentations linéaires et indécidabilité.

Reprenons la notion de représentation linéaire dans son acception générale. On s'est attaché ci-dessus au cas des groupes (abstraits ou topologiques), mais on peut représenter linéairement d'autres structures. La situation la plus générale, semble-t-il, est celle des carquois.

Les *carquois* sont des graphes (en général finis) dont les arêtes (qui peuvent être multiples) sont orientées. Signalons en passant leur intervention récente dans la théorie des gestes musicaux de M. Andreatta et G. Mazzola [1].

Une *représentation linéaire* d'un carquois Q, c'est la donnée, pour tout sommet x de Q, d'un espace vectoriel V_x (disons de dimension finie pour fixer les idées), et pour toute arête a liant les sommets x et y d'une application linéaire F_a de V_x dans V_y.

Comme pour les représentations de groupes, il y a une notion naturelle de somme, et une représentation est dite indécomposable si elle ne se laisse pas décomposer (non trivialement) en somme.

La question de la classification des représentations linéaires des carquois mène alors à une trichotomie résumée dans le merveilleux théorème de Gabriel, Nazarova *et al.* (voir [3, 4.4]) où resurgissent, tels Scarbo, les diagrammes de Dynkin :

THEOREME : *Soit Q un carquois. On a la trichotomie suivante :*

1) Q n'a qu'un nombre fini de représentations indécomposables si et seulement si c'est un diagramme de Dynkin.

2) Q a une infinité de représentations indécomposables classifiables algébriquement (en un sens précis que nous n'éluciderons pas ici) si et seulement si c'est un diagramme de Dynkin étendu[27]*.*

[26] les groupes associés sont issus de la géométrie euclidienne réelle ou complexe, ou de la géométrie symplectique.

[27] obtenu par adjonction d'un sommet à un diagramme de Dynkin selon une règle simple que nous ne préciserons pas ici.

3) En dehors de ces deux cas, la «théorie» des représentations de Q est indécidable.

En fait, la démonstration de l'indécidabilité dans le cas 3) se fait en codant le problème des mots de Dehn dans la théorie des représentations de Q !

Exemple (Gelfand-Ponomarev). Soit Q_n le carquois ayant n sommets $x_1, \ldots, x_n$ liés par une arête orientée vers un sommet central x_0. La théorie des représentations de Q_n équivaut à celle des systèmes de n sous-espaces $V_1, \ldots V_n$ d'un espace vectoriel V_0, considéré à isomorphisms près. Il s'avère que Q_n est de type 1) (fini) pour $n \leq 3$, de type 2) (modéré) pour $n = 4$, de type 3) (sauvage) pour $n > 4$: il est donc impossible de classifier, à isomorphisme près, les systèmes de 5 sous-espaces d'un espace vectoriel.

****

Bibliographie

[1] - M. Andreatta, G. Mazzola, Formulas, Diagrams, and Gestures in Music, Journal of Mathematics and Music, 2007.

[2] - G. Bachelard, Le matérialisme rationnel, P. U. F. 1953.

[3] - D. Benson, Representations and cohomology I : basic representation theory of finite groups and associative algebras, Cambridge studies in advanced mathematics 30 (1995).

[4] - T. Coquand, B. Spitters, A constructive proof of the Peter-Weyl theorem, Math. Log. Quart. 0 (2004), 1-12.

[5] - A. Kirillov, Éléments de la Théorie des Représentations, (traduction française du russe) Éditions MIR, Moscou (1974).

[6] - A. Lautman, Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. Réédition Vrin 2006.

[7] - G. Mackey, The scope and history of commutative and noncommutative harmonic analysis, History of mathematics, vol. 5, A. M. S., L. M. S. (1992).

[8] - J. P. Serre, Représentations des groupes finis, 5ème éd., Hermann (1998).

[9] - H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik (1928), transl. by H. P. Robertson, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, 1931, rept. 1950 Dover.

[10] - H. Weyl, Classical Groups : their Invariants and Representations, Princeton (1939).