LE TEMPERAMENT EGAL A-T-IL UNE JUSTIFICATION PHYSICO-ACOUSTIQUE ?

1. Quelques rappels

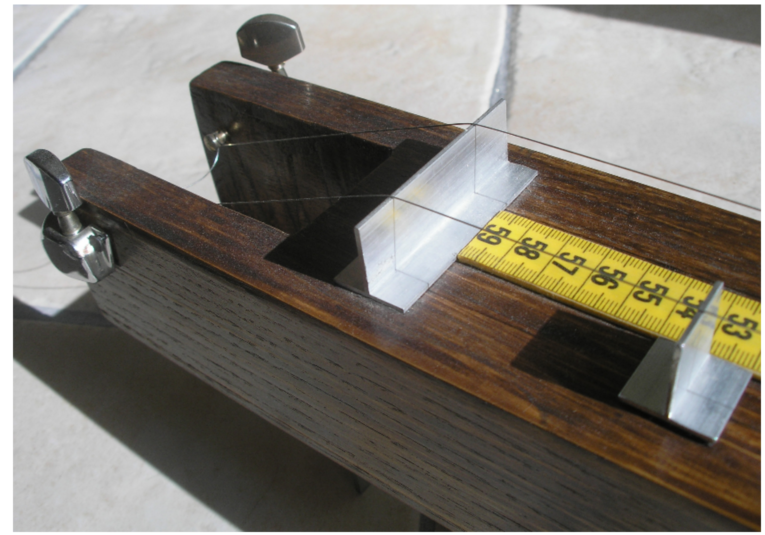
2. Harmoniques et oreille

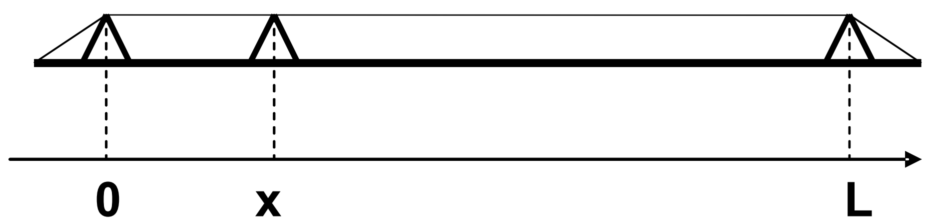
3. Découpage de l'octave

4. Proximité des échelles de 12 notes par rapport aux harmoniques

Conclusion

Le monocorde





$$\frac{F'}{F} = \frac{L/x}{L/x - 1}$$

L = 1m et x = 28,5mm donnent un intervalle d'un quart de ton

Définitions et rappels

Échelle = ensemble de toutes les notes de l'octave

Gamme (ou mode) = sous-ensemble de notes caractéristique du type de musique considéré

Ratio F'/F en cents = $1200\,\dfrac{\log(F'/F)}{\log(2)}$

- Constante universellement utilisée : **l'octave** (ratio 2/1 ou 1200 cents), toujours juste (sauf rares exceptions)

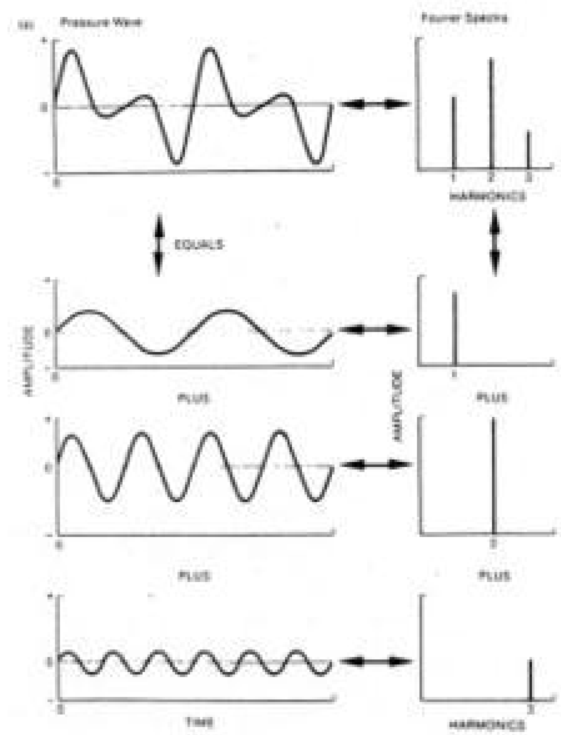
- L'utilisation de la quinte (ratio 3/2 ou 702 cents) va permettre de découper l'octave en 12 parties ($(3/2)^{12} = 2^7$, au comma pythagoricien près) : c'est le **cycle des quintes,** découpage imparfait mais qui a fonctionné si longtemps (2000 ans) et si loin (d'Athènes à Pékin) : Pythagore, Boèce, Huainan zi,...

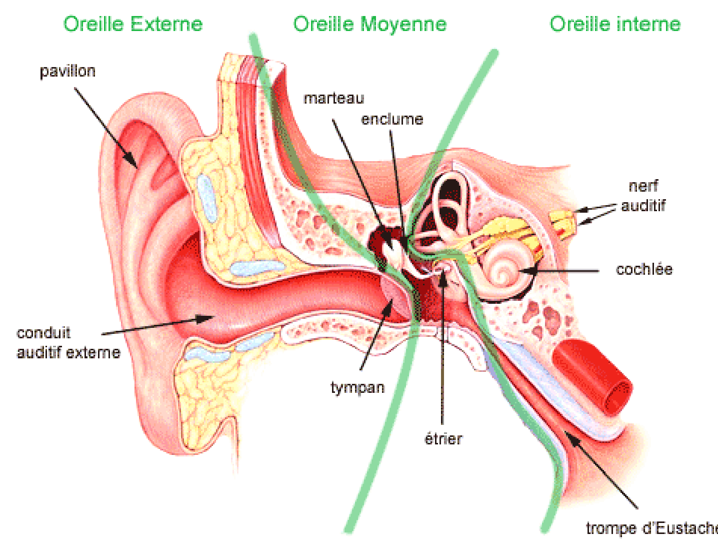
- En Occident, le développement de la **musique tonale** créant le besoin de **modulation,** va conduire à s'écarter du cycle des quintes : c'est l'apparition des **"tempéraments"** : Aron, Silbermann, Werckmeister, Vallotti…

- Parallèlement, découverte des **harmoniques** : intuitivement (Zarlino), puis scientifiquement (Sauveur), enfin mathématiquement (Fourier).

Harmoniques et oreille

Son <u>musical</u> = son <u>périodique</u> donc de la forme $\sum a_i \sin(2\pi \, iFt)$





Fonctionnement de l'oreille

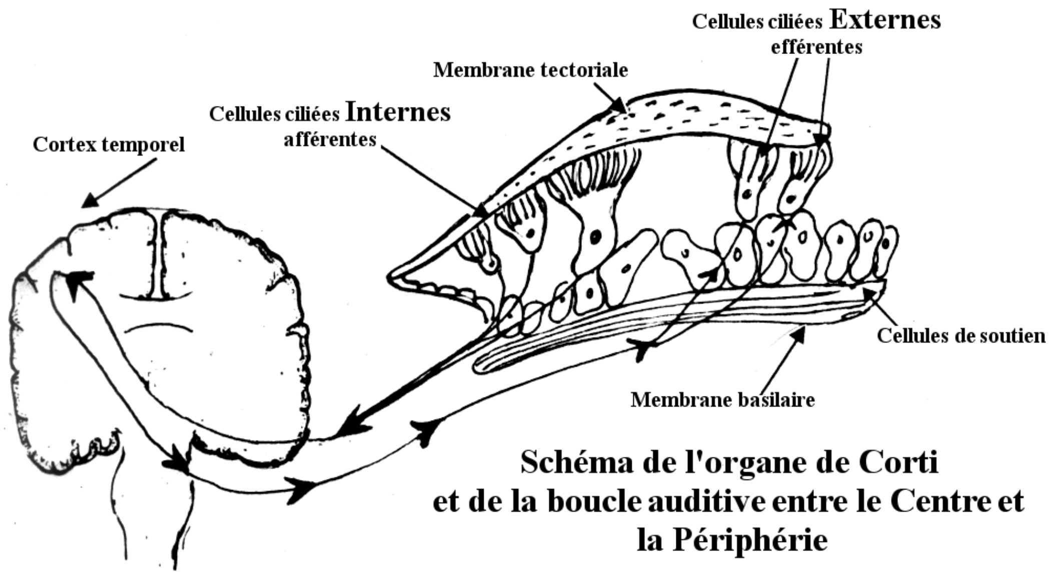
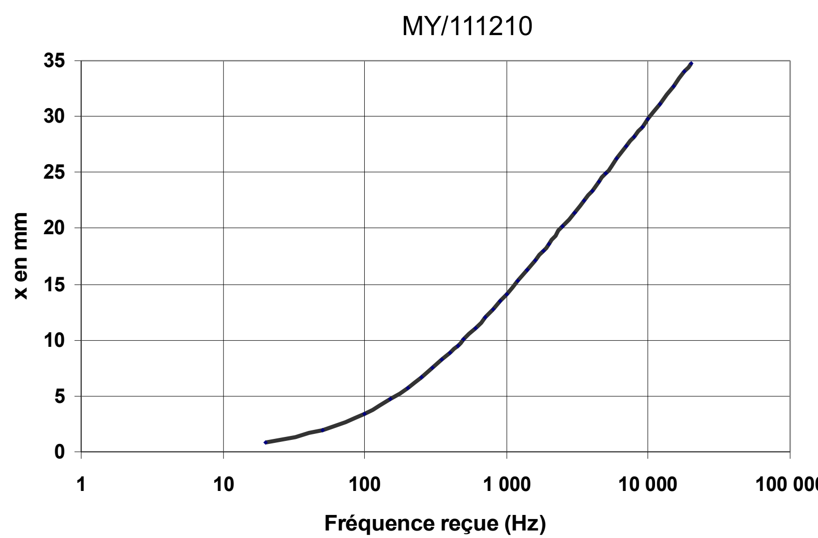


Schéma de l'organe de Corti et de la boucle auditive entre le Centre et la Périphérie

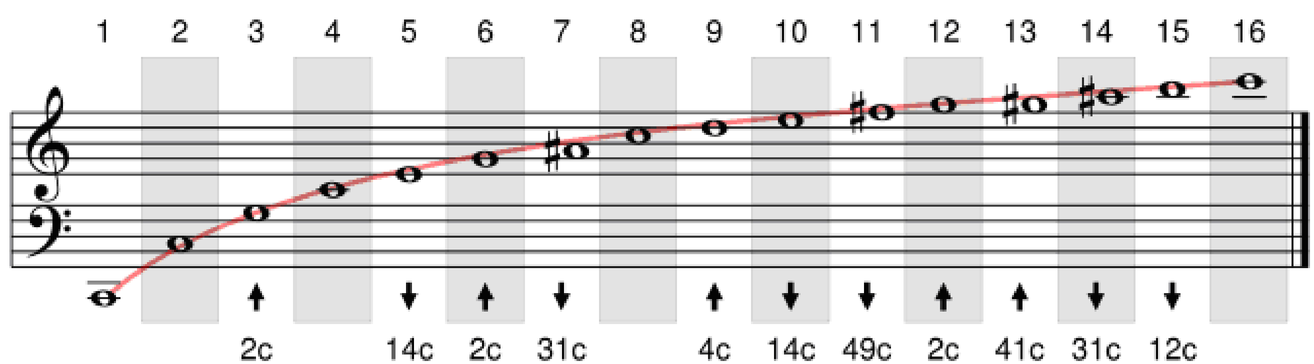


$$x = \frac{35}{2,1} \log\left(\frac{F}{165} + 1\right)$$

Greenwood 1990

axe des fréquences	F_1	$F_2 = 2 F_1$	$F_3 = 3 F_1$	$F_4 = 4 F_1$	$F_5 = 5 F_1$	$F_6 = 6 F_1$	$F_7 = 7 F_1$	$F_8 = 8 F_1$
	440 Hz (la_3)	880 Hz	1320 Hz	1760 Hz	2200 Hz	2640 Hz	3080 Hz	3520 Hz
Ratios bruts	$F_1/F_1 = 1$	$F_2/F_1 = 2$	$F_3/F_1 = 3$	$F_4/F_1 = 4$	$F_5/F_1 = 5$	$F_6/F_1 = 6$	$F_7/F_1 = 7$	$F_8/F_1 = 8$
normalisés	1/1	2/1	3/2	4/2	5/4	6/4	7/4	8/4
en cents	0	1200	702	1200	386	702	969	1200

	Ratios	Cents
H_1	1/1	0
H_3	3/2	702
H_5	5/4	386
H_7	7/4	969
H_9	9/8	204
H_{11}	11/8	551
H_{13}	13/8	841
H_{15}	15/8	1 088
H_{17}	17/16	105
H_{19}	19/16	298
H_{21}	21/16	471
H_{23}	23/16	628
H_{25}	25/16	773
H_{27}	27/16	906
H_{29}	29/16	1 030
H_{31}	31/16	1 145
H_{33}	33/32	53



Positionnement des harmoniques par rapport à la gamme tempérée

HARMONIQUES IMPAIRS			
H_n	$n/2^\alpha$		(cents)
H_1	1/1	1,0000	0,0
H_3	3/2	1,5000	702,0
H_5	5/4	1,2500	386,3
H_7	7/4	1,7500	968,8
H_9	9/8	1,1250	203,9
H_{11}	11/8	1,3750	551,3
H_{13}	13/8	1,6250	840,5
H_{15}	15/8	1,8750	1088,3
H_{17}	17/16	1,0625	105,0
H_{19}	19/16	1,1875	297,5
H_{21}	21/16	1,3125	470,8
H_{23}	23/16	1,4375	628,3
H_{25}	25/16	1,5625	772,6

QUINTES			
Q_p	$3^p/2^\beta$		(cents)
Q_0	1/1	1,0000	0,0
Q_1	3/2	1,5000	702,0
Q_2	9/8	1,1250	203,9
Q_3	27/16	1,6875	905,9
Q_4	81/64	1,2656	407,8
Q_5	243/128	1,8984	1109,8
Q_6	729/512	1,4238	611,7
Q_7	2187/2048	1,0679	113,7
Q_8	6561/4096	1,6018	815,6
Q_9	19683/16384	1,2014	317,6
Q_{10}	59049/32768	1,8020	1019,6
Q_{11}	177147/131072	1,3515	521,5
Q_{12}	531441/262144	2,0273	1223,5

INTERVALLES CLASSÉS		
	Harmoniques	Quintes
0	0,0	0,0
1	105,0	113,7
2	203,9	203,9
3	297,5	317,6
4	386,3	407,8
5	470,8	521,5
6	551,3	611,7
7	628,3	702,0
8	702,0	815,6
9	772,6	905,9
10	840,5	1019,6
11	968,8	1109,8
12	1088,3	1223,5

Le découpage de l'octave

Contraintes initiales :

- Équipartition : p parties égales de x cents, tel que px = 1200 cents
- Passage par la quinte $1200\dfrac{\log(3/2)}{\log(2)}$ = 702 cents

Passer par la quinte signifie qu'il faut trouver un entier q tel que qx = 702 : impossible, car p/q est égal à un rapport de logarithmes donc transcendant. Il faut se contenter de l'arrondi entier de q,

soit Q = Arrondi entier de $p\dfrac{\log(3/2)}{\log(2)}$

Ce qui génère un écart Qx – 702 par rapport à la quinte.

<u>Écart Quadratique Moyen</u>

Avec 2 séries de valeurs, d_i et H_i, l 'EQM des n premières est

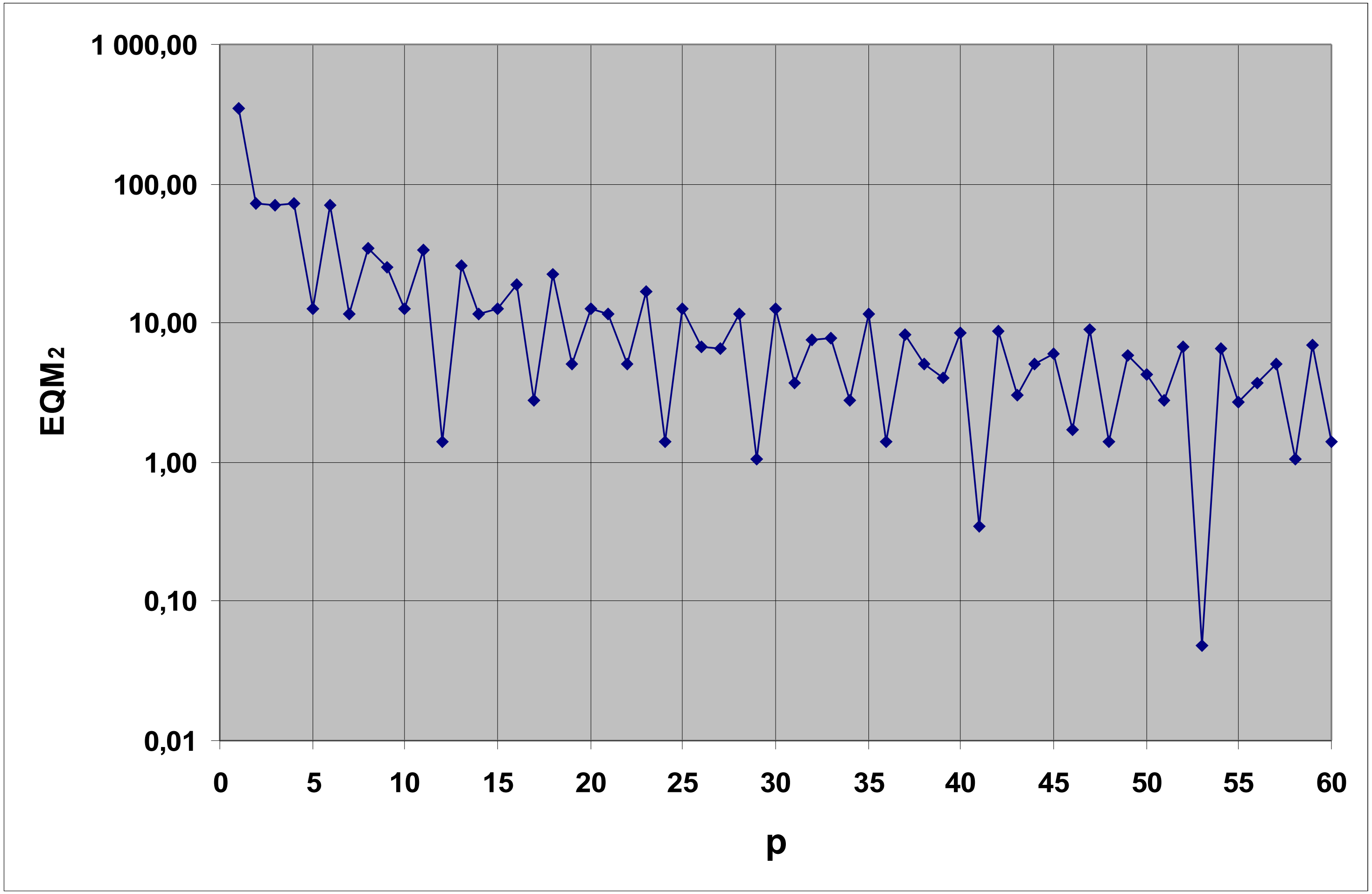
$$EQM_n=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(d_i-H_i)^2}$$

Si les d_i représentent les degrés de l'échelle d_1-d_p et H_i les harmoniques de la fondamentale d_1, on a $d_1= 0$ $H_1=0$

$d_i=Qx$ $H_i=702$

D'où $EQM_2=\sqrt{\frac{1}{2}(Qx-702)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|Q\frac{1200}{p}-702\right|$

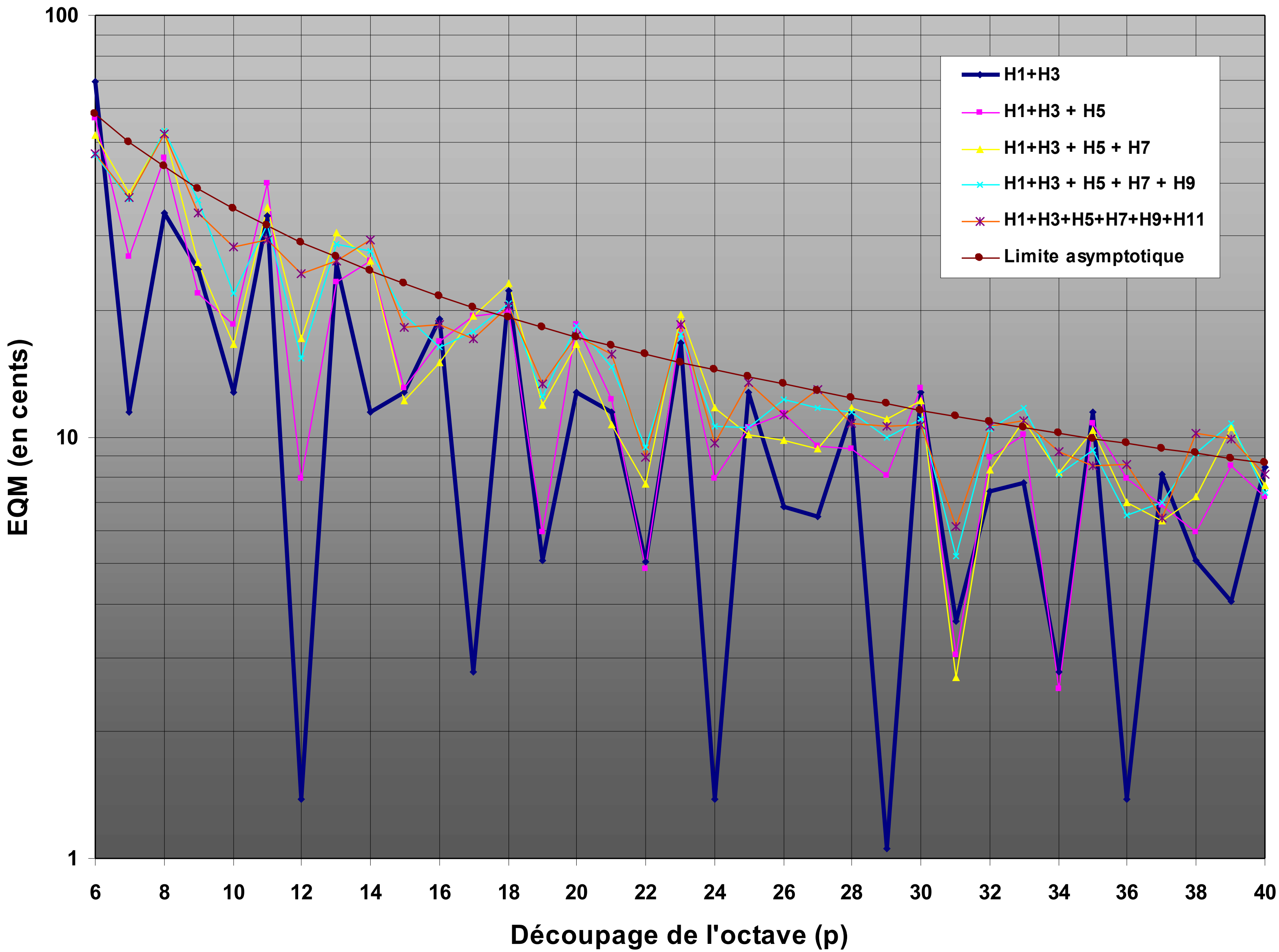
EQM des découpages de l'octave approchant la quinte



Les meilleurs découpages sont avec p = 12 puis 24
29
41
53

Nota : Les ratios que donne la fraction continue $\log_2(3/2)$ sont : 12/7, 41/24, 53/31,... Le ratio 29/17 n'apparaît pas.

Écart quadratique moyen selon le nombre d'harmoniques approchés



MY/111210

PROXIMITÉ DES ÉCHELLES DE 12 NOTES PAR RAPPORT AUX HARMONIQUES

Y a-t-il un nombre "minimal" d'harmoniques permettant d'approcher les 12 degrés d'une échelle à moins de δ près ?

Pour chaque d_i, on cherche le premier H_j (pris dans leur ordre d'apparition) tel que

$$|H_j - d_i| \leq \delta$$

jusqu'à ce qu'on ait approché les 12 degrés de l'échelle.

Quelle que soit l'échelle et quel que soit l'écart δ, il faut AU MOINS 14 harmoniques impairs pour approcher les 12 degrés de l'échelle.

L'idée est de calculer l'EQM des écarts entre chacun des 14 premiers harmoniques impairs pris dans leur ordre d'apparition et le plus proche des degrés de l'échelle étudiée, commençant par :

1. La Gamme chromatique également tempérée
2. La Gamme de Pythagore
3. La Gamme de Zarlino

ECART QUADRATIQUE MOYEN DE LA GAMME TEMPEREE

Gamme Egalement Tempérée	
do_1	0
do #	100
ré	200
mi ♭	300
mi	400
fa	500
fa #	600
sol	700
la ♭	800
la	900
si ♭	1000
si	1100
do_2	1200

Harmoniques dans l'ordre d'apparition		Degré le plus proche	Ecart en cents	Ecart Quadr. Moyen
H_1	0	0	0	0,0
H_3	702	700	2	1,4
H_5	386	400	-14	8,0
H_7	969	1000	-31	17,1
H_9	204	200	4	15,4
H_{11}	551	600	-49	24,3
H_{13}	841	800	41	27,2
H_{15}	1088	1100	-12	25,8
H_{17}	105	100	5	24,4
H_{19}	298	300	-2	23,1
H_{21}	471	500	-29	23,8
H_{23}	628	600	28	24,2
H_{25}	773	800	-27	24,4
H_{27}	906	900	6	23,6

ÉCART QUADRATIQUE MOYEN DE LA GAMME DE PYTHAGORE

	Échelle Pythagore	Ratios	normalisés	cents	
chromatique	sol #	$(3/2)^8$	1,6018	**816**	
	do #	$(3/2)^7$	1,0679	**114**	
	fa #	$(3/2)^6$	1,4238	**612**	
	si	$(3/2)^5$	1,8984	**1110**	diatonique
	mi	$(3/2)^4$	1,2656	**408**	
	la	$(3/2)^3$	1,6875	**906**	
	ré	$(3/2)^2$	1,1250	**204**	
	sol	$(3/2)$	1,5000	**702**	
	do	0	1,0000	**0**	
	fa	$(3/2)^{-1}$	1,3333	**498**	
	si ♭	$(3/2)^{-2}$	1,7778	**996**	
	mi ♭	$(3/2)^{-3}$	1,1852	**294**	
	la ♭	$(3/2)^{-4}$	1,5802	**792**	

Harmoniques dans l'ordre d'apparition		Degré le plus proche	Écart (en cents)	Écart Quadr. Moyen
H_1	**0**	**0**	0	**0,0**
H_3	**702**	**702**	0	**0,0**
H_5	**386**	**408**	-22	**12,4**
H_7	**969**	**996**	-27	**17,4**
H_9	**204**	**204**	0	**15,5**
H_{11}	**551**	**498**	53	**26,0**
H_{13}	**841**	**816**	25	**25,8**
H_{15}	**1088**	**1110**	-22	**25,3**
H_{17}	**105**	**114**	-9	**24,0**
H_{19}	**298**	**294**	3	**22,8**
H_{21}	**471**	**498**	-27	**23,3**
H_{23}	**628**	**612**	17	**22,8**
H_{25}	**773**	**816**	-43	**24,9**
H_{27}	**906**	**906**	0	**24,0**

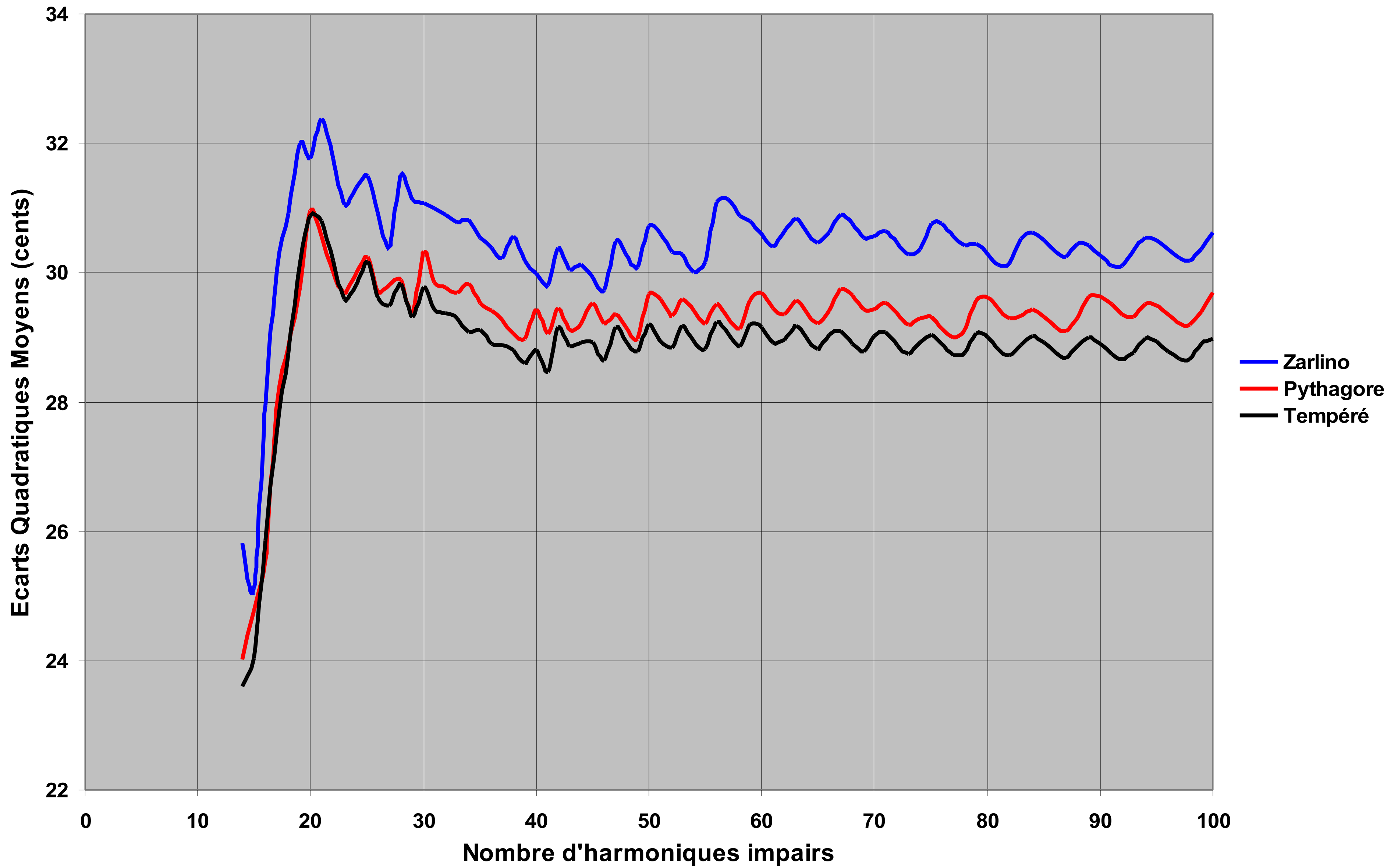
ÉCART QUADRATIQUE MOYEN DE LA GAMME DE ZARLINO

- Tierce (-386,3)*	Notes de base	+ Tierce (+386,3)*
la ♭ 813,7	**do** 0,0	**mi** 386,3
mi ♭ 315,6	**sol** 702,0	**si** 1088,3
ré ♭ 111,7	**fa** 498,0	**la** 884,4
si ♭ 1017,6	**ré** 203,9	**fa #** 590,2

*à ± 1200 près

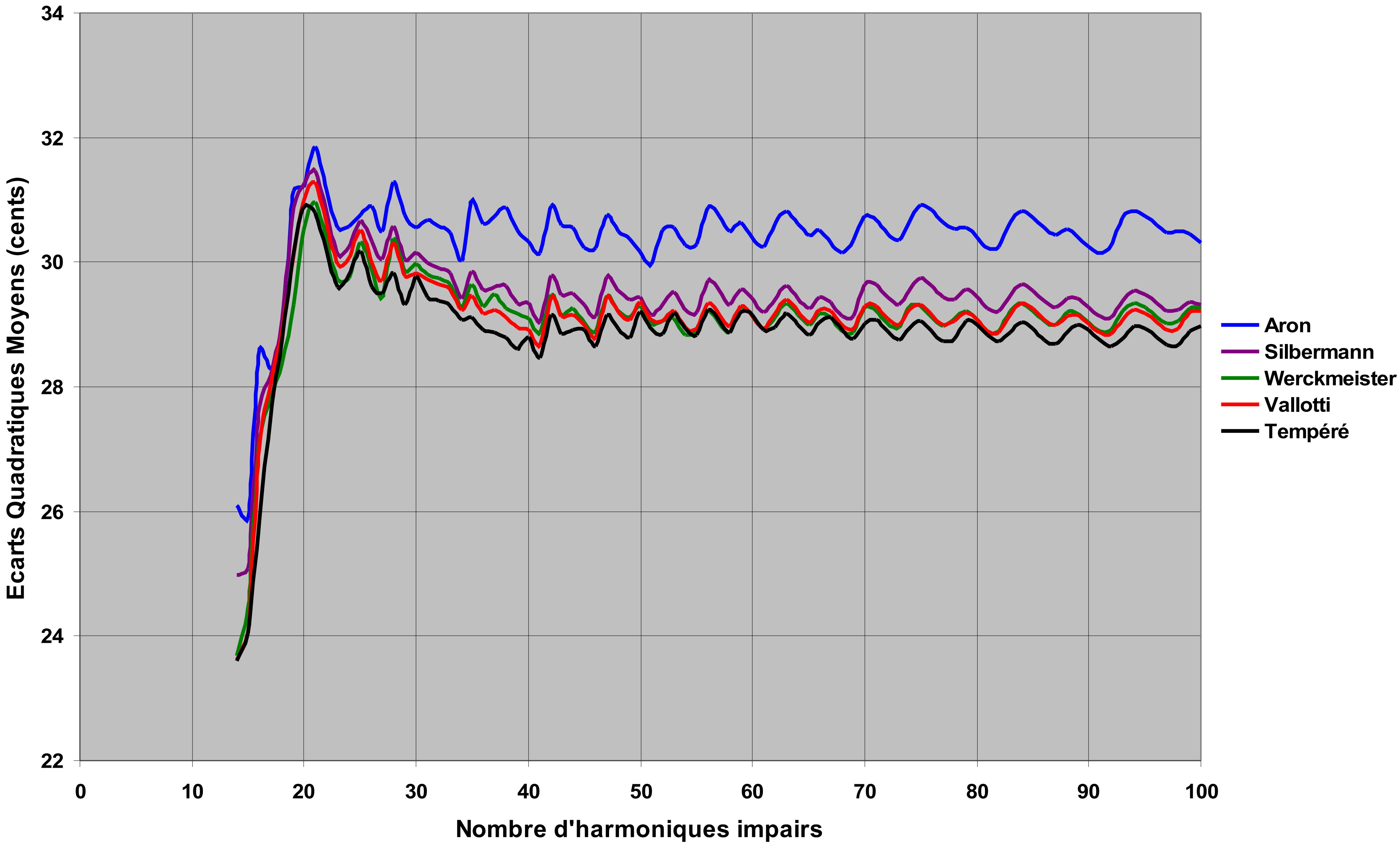
Harmoniques dans l'ordre d'apparition		Degré le plus proche	Écart (en cents)	Écart Quadr. Moyen
H_1	**0**	**0**	0	**0,0**
H_3	**702**	**702**	0	**0,0**
H_5	**386**	**386**	0	**0,0**
H_7	**969**	**1018**	-49	**24,4**
H_9	**204**	**204**	0	**21,8**
H_{11}	**551**	**590**	-39	**25,5**
H_{13}	**841**	**814**	27	**25,7**
H_{15}	**1088**	**1088**	0	**24,0**
H_{17}	**105**	**112**	-7	**22,8**
H_{19}	**298**	**316**	-18	**22,3**
H_{21}	**471**	**498**	-27	**22,8**
H_{23}	**628**	**590**	38	**24,5**
H_{25}	**773**	**814**	-41	**26,1**
H_{27}	**906**	**884**	22	**25,8**

EQM des échelles de 12 notes lorsque le nombre d'harmoniques croît



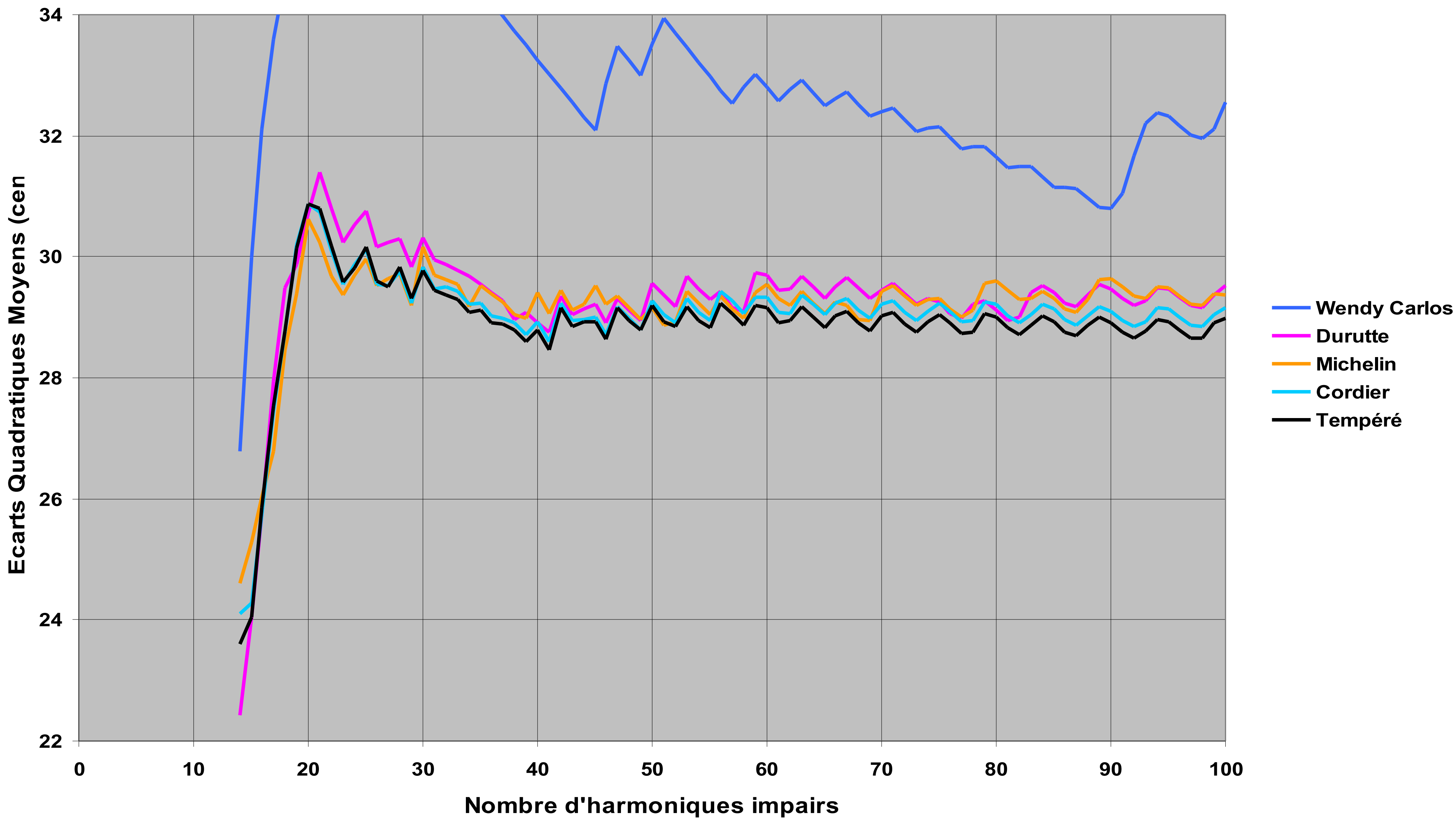
MY/111210

EQM des échelles de 12 notes lorsque le nombre d'harmoniques croît



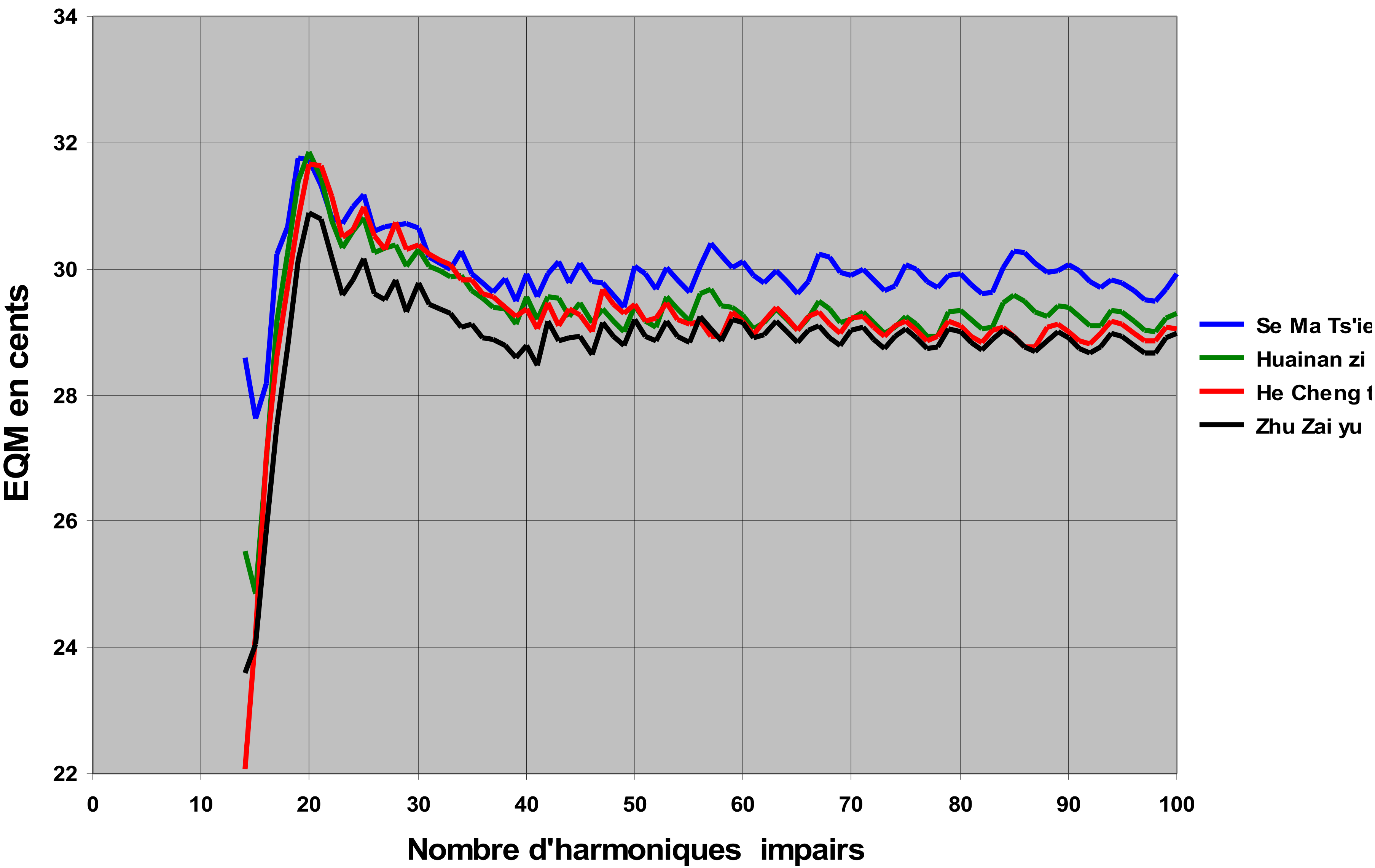
MY/111210

EQM des échelles de 12 notes lorsque le nombre d'harmoniques croît



MY/111210

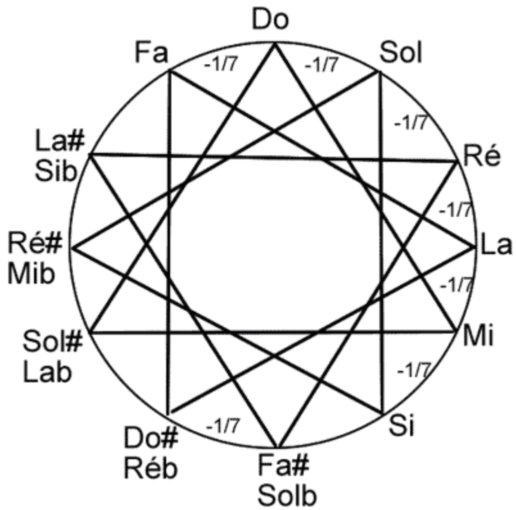
EQM des échelles de 12 notes lorsque le nombre d'harmoniques croît



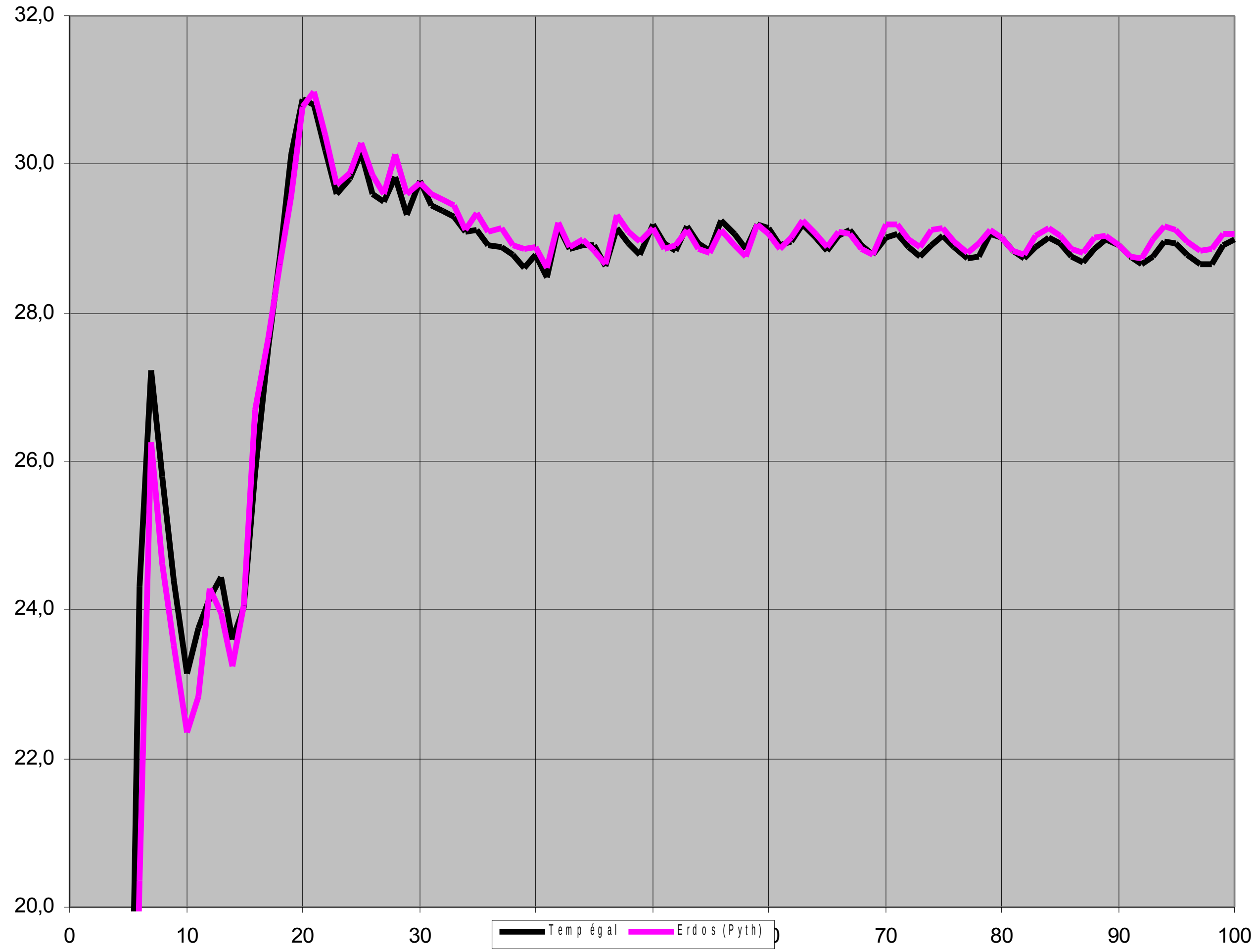
MY/111210

TEMPERAMENT J. ERDOS (1/7 comma pythagoricien)

Comma pythagoricien =	23,46
1/7 =	3,35
Quinte juste =	701,96
Quinte tempérée =	698,60



Gamme de Pythagore		Réduction 1/7 de comma pythagoricien	Gamme tempérée J. Erdos
fa	0		0
do	702	-1/7	699
sol	204	-2/7	197
ré	906	-3/7	896
la	408	-4/7	394
mi	1110	-5/7	1 093
si	612	-6/7	592
fa ♯	114		94
do ♯	816	-7/7	792
sol ♯	294		294
mi ♭	996		996
si ♭	498		498
EQM_{14}	**24,0**		**23,2**



MY/111210

Classement* des principales échelles de 12 notes par écart quadratique moyen croissant

Tempérament égal	**28,89** cents
Erdos II	28,92
Asselin	28,95
Erdos I	28,98
He Cheng tian	29,04
Cordier	29,08
Young	29,10
Kellner	29,10
Vallotti	29,10
Werckmeister III	29,11
Huainan Zi	29,22
Michelin	29,31
Just intonation	29,32
Durutte	29,35
Silbermann	29,39
Pythagore	29,40
Se Ma Ts'ien	29,87
Zarlino	30,46
Aron	30,51
Wendy Carlos	31,98

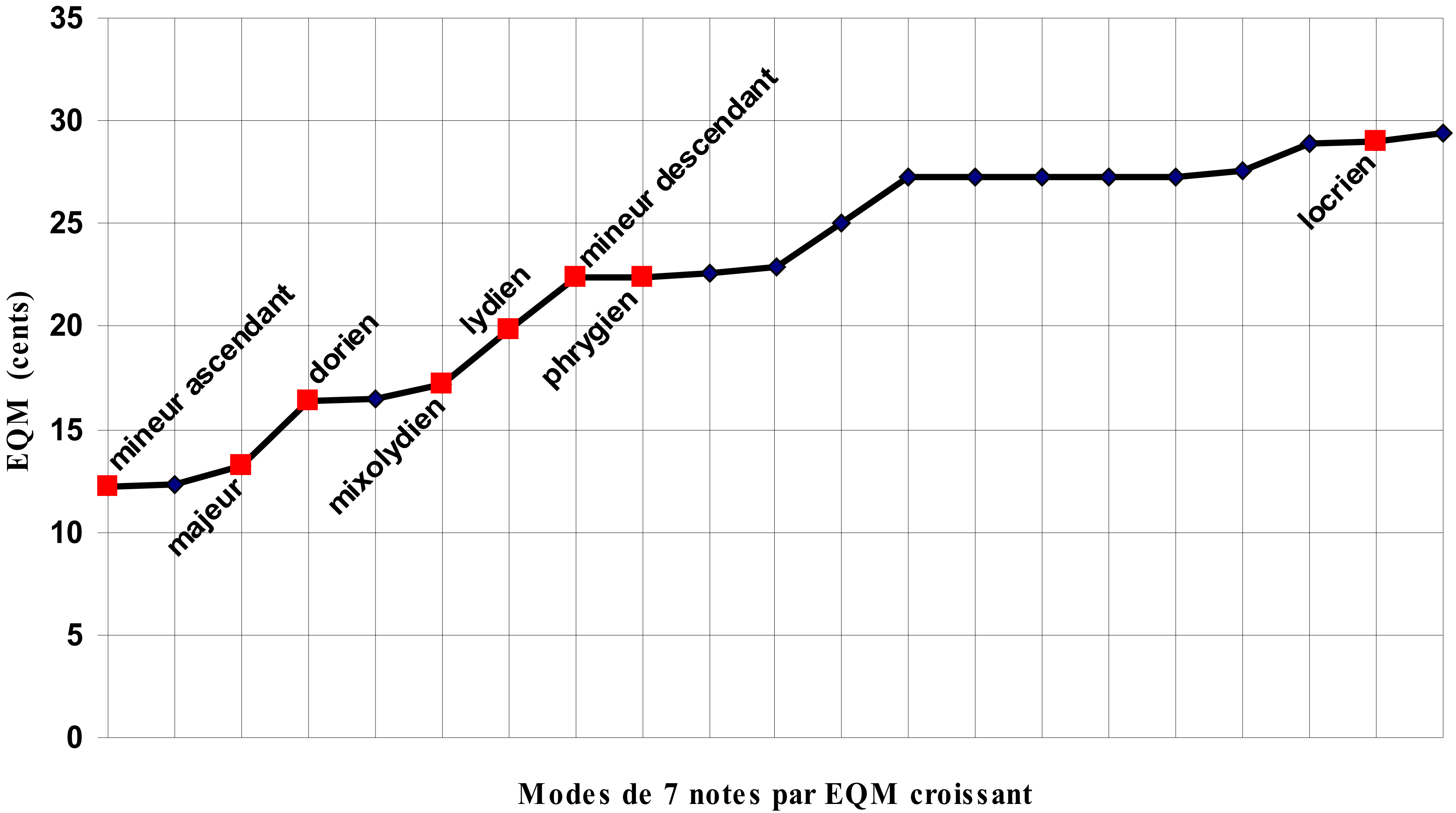
* moyenne des EQM pour $40 \leq H_i \leq 100$

Les 21 gammes de 7 notes (tons et demi-tons seulement)

n°	NOTES ACTUELLES													GAMMES	MODES		
	do	do♯	ré	mi♭	mi	fa	fa♯	sol	la♭	la	si♭	si	do		antiques ou grecs	médiévaux ou grégoriens	actuels ou naturels
1		S		T		T		T		T		T	S				
2			T	S		T		T		T		T	S	mineure ascendante			
3			T		T	S		T		T		T	S	majeure	lydien	hypolydien (6è)	ionien (do)
4			T		T		T	S		T		T	S		hypolydien	lydien (5è)	lydien (fa)
5			T		T		T		T	S		T	S				
6			T		T		T		T		T	S	S				
7		S		T		T		T		T	S		T				
8			T	S		T		T		T	S		T		phrygien	dorien (1er)	dorien (ré)
9			T		T	S		T		T	S		T		hypophrygien	mixolydien (7è)	mixolydien (sol)
10			T		T		T	S		T	S		T				
11			T		T		T		T	S	S		T				
12		S		T		T		T	S		T		T		dorien	phrygien (3è)	phrygien (mi)
13			T	S		T		T	S		T		T	mineure descendante	hypodorien	hypodorien (2è)	éolien (la)
14			T		T	S		T	S		T		T				
15			T		T		T	S	S		T		T				
16		S		T		T	S		T		T		T		mixolydien	hypophrygien (4è)	locrien (si)
17			T	S		T	S		T		T		T				
18			T		T	S	S		T		T		T				
19		S		T	S		T		T		T		T				
20			T	S	S		T		T		T		T				
21		S	S		T		T		T		T		T				

MY/111210

Classement des modes



Conclusion

On a utilisé un phénomène imperceptible (harmoniques plus ou mois proches) pour justifier une réalité tangible (le tempérament égal).

On retiendra que :

. les EQM tendent, lorsque le nombre d'harmoniques approchés augmente, vers une limite "raisonnable" (29 cents)

. cette limite propre à chaque échelle constitue une quantification de sa "qualité"

. le tempérament égal s'avère la solution optimale puisque présentant un écart minimal par rapport aux harmoniques

. les calculs d'EQM permettent de justifier certaines habitudes (gamme de Pythagore, modes diatoniques,...)

max.yribarren@wanadoo.fr