Séminaire Mathématiques-Musique, conférence du 10 Décembre 2005

S'orienter dans la pensée mathématique: l'art des conjectures.

Yves André

rédaction provisoire

"se perdre en conjectures..."

Prologue.

Mon intervention se situe dans le cadre du séminaire de l'an dernier, dont le thème était: intellectualité mathématique et intellectualité musicale.

Les exposés précédents ont fait retentir quelques échos, esquissé de fugaces correspondances, mis en lumière certains points de convergence et de divergence entre ces deux formes d'intellectualité. Mais il me semble qu'une synthèse est encore loin de se profiler. Aussi, plutôt que de la forcer en gommant les contours, en diluant le tout dans je ne sais quel symphonisme algébrique universel, il paraît préférable de laisser émerger spontanément, petit à petit, des rapports possibles, en s'efforçant, au contraire, de préciser les contours de ces deux intellectualités.

Intervenant ici en tant que mathématicien, je tâcherai donc de parler, en m'adressant surtout aux musiciens, d'intellectualité mathématique. Autrement dit, je parlerai de mathématiques, non pas en tant que mathématicien au travail, mais avec ce *léger surplomb* (comme dit joliment François Nicolas) que peut avoir le mathématicien pensif sur son activité, prise dans sa globalité. Il ne s'agira pas d'évoquer ma pratique des mathématiques, de livrer un témoignage, mais plutôt d'exprimer quelques réflexions personnelles d'ordre général - nourries de pratique davantage que de lectures -, en y mêlant mainte allusion musicale.

Le thème général que j'ai choisi d'aborder est une question qui me paraît centrale dans toute intellectualité: il s'agit de la question (kantienne) de l'orientation dans la pensée, dans la pensée mathématique en l'occurrence.

Ce thème étant beaucoup trop vaste pour un seul exposé, je me concentrerai sur un point particulier: *les conjectures.* D'abord parce que je crois qu'elles jouent un rôle, sinon fondamental, du moins caractéristique dans la question de l'orientation dans la pensée mathématique; ensuite parce que ce thème est extrêmement peu traité dans la littérature.

Avant de clore ce prologue, voici quelques précisions liminaires sur les mots "mathématiques" et "mathématicien", que j'emploierai tant de fois.

Mathématiques: par convention, dans tout cet exposé, je dirai "mathématiques" pour "mathématiques pures". Non que je prétende que les mathématiques appliquées forment un continent séparé des mathématiques pures, mais pour ces deux raisons:
1) je connais très mal les mathématiques appliquées, donc je m'abstiens d'en parler,
2) elles diffèrent des mathématiques pures en ceci notamment qu'elles se donnent une finalité, et semblent de ce fait plus éloignées de l'intellectualité artistique en général et donc du cadre de ce séminaire.

Mathématicien: si l'on me demande ce qu'est un mathématicien(1), je réponds sans état d'âme que c'est quelqu'un qui démontre des théorèmes(2). Cela appelle trois remarques:
1) cette "définition" est très restrictive: par mathématicien, j'entends donc exclusivement le "compositeur de mathématiques". Cette dernière expression (qui rappelle la musique), plus exacte, serait préférable, mais l'usage en a décidé autrement;
2) je ne veux pas dire, loin s'en faut, que faire des mathématiques se réduise à démontrer des théorèmes nouveaux (pas plus que faire de la musique ne se réduit à en composer); mais dans le cadre de ce séminaire, je ne vois guère de sens à confronter intellectualités mathématique et musicale s'il ne s'agit de celles des compositeurs de mathématiques et de musique respectivement;
3) les mathématiques sont un domaine quelque peu anachronique où la division du travail est beaucoup moins avancée qu'en musique ou qu'ailleurs. Ainsi, le mathématicien n'est pas seulement compositeur, mais aussi, à lui seul,

interprète,
musicologue,
critique,
copiste,
éditeur de partitions,
organisateur de festivals, ...

enfin tout, sauf ce qui concerne l'histoire ancienne de sa discipline et l'enseignement des éléments de son solfège (dont s'occupent d'autres professions).

Avant d'aborder mon thème proprement dit, il va me falloir déblayer un peu le terrain. En effet, les nombreuses conversations que j'ai pu avoir sur les mathématiques avec des philosophes, littéraires, musiciens et autres artistes, me font penser que l'image des mathématiques dans le public cultivé est *gravement défigurée*. Je vais donc d'abord prendre le temps de prendre à rebrousse-poil deux des préjugés les plus tenaces et les plus assidûment entretenus.

(1) sous-entendu: pur.
(2) sous-entendu: nouveaux.

I. L'arbuste.

Le premier préjugé que j'ai en vue a trait à l'architecture des mathématiques. Je l'épinglerai par l'image de "l'arbuste des mathématiques". En référence, bien sûr, à la célèbre image cartésienne de l'arbre de la connaissance. Rappelons-nous: l'arbre dont les racines sont la métaphysique; le tronc, la physique; les branches: la morale, la médecine, la mécanique, chacune ayant ses fruits. Et les mathématiques, dans cette image? Elles sont la sève de l'arbre.

L'arbuste des mathématiques, lui, aurait pour racines la logique, pour tronc la théorie des ensembles, et pour branches l'algèbre, l'analyse, la géométrie.

Je voudrais soulever quatre objections contre cette image(3).

1) Objection *topique*: cette image rend compte de manière totalement faussée de l'état des lieux, en paraissant donner un rôle central et nourricier à la logique et à la théorie des ensembles. En réalité,
i) ces deux disciplines occupent une place à la fois marginale et relativement congrue dans le paysage mathématique (ce qui n'ôte rien à leur intérêt propre);
ii) loin d'entretenir un rapport nourricier avec la "grande composante connexe" des mathématiques (algèbre, théorie des nombres, géométrie algébrique et différentielle, topologie algébrique et différentielle, les grands domaines de l'analyse linéaire et non-linéaire, etc...), elles n'ont de fait avec ces branches que des rapports extrêmement ténus(4).

L'arbuste n'a pas de sève...

2) Objection (plus sévère) contre le *réductionnisme* qui accompagne cette image. Ce réductionnisme, qui opère en deux mouvements, est surtout le fait d'un certain courant d'épistémologie bien implanté; j'appellerai ses adeptes les "épistémologues courants" (pour rester aimable).

Le premier mouvement de réduction est l'*élagage de l'arbuste*: ces "épistémologues courants", tout préoccupés de fondements, se figurent que pour penser les mathématiques, il suffit, si celles-ci reposent sur la logique et la théorie des ensembles, de ne retenir que ces dernières en ignorant tout le reste. Ce "reste" ne serait qu'épiphénomènes laissés aux techniciens.

Une fois ce sciage de branches effectué, ils sont alors aussi bien placés pour parler des fondements des mathématiques que le serait un sourd n'ayant jamais

(3) qui influence aussi les mathématiciens: le projet bourbachique en est tout imprégné, comme le faisait remarquer à juste titre B. Kahn dans la discussion qui a suivi la conférence.

(4) La logique d'aujourd'hui est à peu près coupée de cette grande composante connexe, une exception notable étant le sous-domaine très actif de la théorie des modèles qui entretient des liens traditionnels et nouveaux avec l'algèbre et la géométrie algébrique. Quant à la théorie des ensembles d'aujourd'hui, pour autant que je sache, elle est encore plus isolée; ce qu'elle apporte au reste des mathématiques semble limité à certaines parties de la combinatoire, et à quelques interventions ponctuelles aux confins les plus abstraits de l'algèbre (notamment homotopique).

ouvert une partition, mais possédant son solfège, pour parler des fondements de la musique!

Mais voici, après l'élagage, le second mouvement de réduction, le *rabougrissement de l'arbuste*: pour "améliorer" encore leur point de vue, nos "épistémologues courants" se sont avisés qu'on ne comprend jamais si bien un domaine de la pensée qu'à travers ses crises. Dès lors, ils focalisent toute leur attention sur la petite trentaine d'années dite de "la crise des fondements", au début du siècle dernier.

À les lire, on a souvent l'impression que les mathématiques furent pendant une génération entière comme frappées de tétraplégie, jusqu'à ce que l'organe central, la logique, eût enfin réparé les ravages causés par le traumatisme des paradoxes. Il est à peine besoin de mentionner à quel point cette vision est fausse, absurde, ridicule: le début du XX$^{\text{e}}$ fut en réalité une époque extraordinairement fertile, qui vit la naissance de l'algèbre abstraite (Emmy Noether...), de l'analyse abstraite (Hilbert, Banach...), de la topologie générale et algébrique, etc...

Chez ces "épistémologues courants", il n'est question que de Cantor, Tarski, Gödel et consorts, comme si un Euler, un Gauss, un Riemann n'avaient jamais existé! Et si Hilbert est mentionné, c'est seulement pour son programme formaliste - son seul échec -, jamais pour ses grands succès mathématiques(5).

3) Objection contre le *caractère de fondement de la logique*. Puisque mon prédécesseur à cette tribune, le logicien J.-Y. Girard, en a parlé éloquemment, je serai bref sur ce point: j'évoquerai pour mémoire:
i) ses objections vigoureuses contre le piètre fondement que constitue la traditionnelle régression à l'infini des méta-, méta-méta-théories logiques, se soutenant l'une l'autre en gigogne,
ii) son projet actuel qui, renversant l'image traditionnelle, vise à fonder la logique sur les mathématiques, et les mathématiques parmi les plus avancées: la géométrie non commutative.

On notera qu'A. Lautman avait soutenu dès 1937 "[...] cette idée que la véritable logique n'est pas *a priori* par rapport aux mathématiques mais qu'il faut à la logique une mathématique pour exister."(6)

Il y a un autre aspect de l'évolution de la logique mathématique qui conduit à lui dénier tout statut ou méta-statut spécial. Je cite G. Longo (en

---

(5) théorie des invariants, espaces de Hilbert, et tant de contributions à l'algèbre, à la théorie des nombres, au calcul des variations, etc...

Pour éviter tout malentendu, je précise que je n'ai rien contre les études spécialisées sur Cantor ou Gödel; ... pas plus, au reste, que contre celles sur le peintre Escher, si elles ne tendent pas systématiquement à nous faire oublier que Michel-Ange et Rembrandt ont existé! On aura compris, par ailleurs, qu'il ne s'agit pas ici d'une critique interne de telle ou telle théorie épistémologique, mais de la protestation solennelle d'un mathématicien contre une défiguration systématique et monomorphe de sa discipline!

(6) Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques, fin du ch. 1.

traduisant): "en informatique théorique, la logique mathématique n'est plus considérée comme un fondement, mais comme un outil. Il n'y a guère d'intérêt à établir sur des bases fermes Cobol ou Fortran de la manière que la logique tendait à fonder la théorie des nombres ou l'analyse au moyen de systèmes axiomatiques si possible complets. Le véritable travail est l'invention de nouveaux langages de programmation et de styles, ou d'algorithmes..."[(7)]

A mon sens, c'est une émancipation: enfin des rôles créatifs et non plus de soutènement! Le logicien Atlas est libéré, et la voûte des mathématiques ne s'effondre pas dans le Tartare!

4) Objection (plus large) *contre l'illusion de la recherche "essentialiste" de fondements immuables.* Pendant qu'Atlas s'en est allé cueillir les pommes de silicium au jardin de l'informatique, il n'est nul besoin qu'un Hercule le remplace...

Je ne développerai pas ce point, qui m'entraînerait trop loin, et me contenterai de remarquer que la critique la plus radicale à cet égard est celle d'Alain Badiou, pour qui il ne saurait être question de fondements ontologiques sur lesquels s'appuieraient les mathématiques: en effet, la thèse inaugurale de son livre "l'être et l'évènement" - d'une radicalité stupéfiante pour un mathématicien - est justement l'identité: mathématiques = ontologie (version statique), ou mieux (version dynamique): "les mathématiques sont l'historicité du discours sur l'être-en-tant-qu'être"; si on le suit, les "épistémologues courants" sont au mieux des chroniqueurs de l'ontologie, desquels on est en droit d'exiger une connaissance des mathématiques vivantes[(8)].

Voilà pour les objections. Pour neutraliser l'image vivace de l'arbuste, sans doute est-il judicieux de lui substituer une image très différente des mathématiques. Voici celle, manquant peut-être un peu de poésie mais nettement plus juste, que propose le géomètre W. Thurston[(9)]: c'est celle d'une *grande ville aux hautes*

---

(7) "In computer science, mathematical logic is no longer viewed as a foundation, but as a tool. There is little interest in setting on firm grounds Cobol or Fortran in a similar way that Logic aimed at founding Number Theory or Analysis by, possibly complete, axiomatic systems. The actual work is the invention of new programming languages and styles, or algorithms..."

(8) je suis conscient qu'il peut paraître paradoxal de terminer mon réquisitoire contre l'image de l'arbuste en invoquant Badiou comme témoin à charge, lui qui de bout en bout de son livre emploie le mot "mathématique" pour ne parler que de théorie des ensembles. Mais: 1) il n'occulte pas ce point mais s'en explique très judicieusement dans son introduction (§5), se confrontant aux critiques du "mathématicien qui soupçonne toujours le philosophe de n'en pas savoir assez pour avoir droit à la parole", 2) il n'y a pas trace du réductionnisme que je stigmatisais, 3) il n'est pas philosophe des mathématiques mais philosophe "tout court", puisant dans la théorie des ensembles non pas tant des objets d'étude que des figures de pensée, et surtout: 4) ce qu'il dit est, à mon sens, d'une tout autre profondeur que ce qu'on trouve chez les "épistémologues courants" (aveu: cette expression n'est pas de moi, mais de lui! (ibid.)).

(9) "Mathematical education", Notices of the A.M.S. 37 (1990) 844-850.

tours, aux multiples Babel, construites étage par étage par leurs habitants, tours en perpétuelle croissance et réaménagement, et connectées par des passerelles à divers niveaux, de plus en plus nombreuses.

Les tours ou groupes de tours sont bien sûr les grands domaines des mathématiques dont je parlais plus tôt, et les passerelles sont les connexions entre ces domaines, dont l'apparition est souvent inopinée.

Bien entendu, la logique n'est pas reléguée aux sous-sols (les logiciens ne sont pas les Nibelungen des mathématiques!), ce serait plutôt un groupe de tours en périphérie, dont la plupart sont sans doute plus proches de la ville voisine, l'Informatique (sauf la petite tour de la théorie des modèles).

Un mot sur le cas particulier intéressant de la théorie des catégories: à mon sens, il s'agirait d'une sorte de maison commune, dont les bâtiments sont édifiés par des voisins pour le bénéfice commun: des géomètres algébristes, des topologues algébristes, des logiciens, voire des physiciens théoriciens.

Mais assez là-dessus.

II. Le tricotin.

Venons-en au second préjugé, qui touche non plus à l'architecture des mathématiques vivantes, mais à sa nature même. J'épinglerai ce préjugé par l'"image du tricotin", ce jouet de bois jadis populaire, portant quatre épingles, à l'aide duquel on tricotait indéfiniment une tresse de laine, la seule variation possible étant celle des couleurs des fils enroulés autour des épingles.

Ce que je vise ici, c'est une certaine forme vulgaire de logicisme, et cette image des mathématiques qu'elle véhicule: des axiomes enroulés ad libitum autour de quatre épingles, tricotés indéfiniment en une tresse ininterrompue de vérités qui s'en déduisent, modus ponens, modus tollens, maille à l'endroit, maille à l'envers!...

Certes, le discours mathématique est un discours déductif, qui soumet ses énoncés à un ordre rigoureux. Quoi qu'on dise, chez les mathématiciens au travail, la notion de démonstration n'a guère varié depuis Euclide, ni d'ailleurs l'organisation générale du discours. Et bien sûr, les théorèmes d'Euclide sont toujours, tels quels, des théorèmes aujourd'hui.

1) Mais, ce sera ma première objection, l'image du tricotin omet un point évident (déjà chez Euclide): à savoir qu'un texte mathématique n'est pas un enchaînement uniforme d'implications, mais apparaît polarisé entre "énoncés" d'un côté, et "démonstrations" de l'autre; en outre, le côté "énoncé" est lui-même stratifié suivant une hiérarchie d'importance et de profondeur, en lemmes, propositions, théorèmes, corollaires. Ni cette polarisation, ni cette hiérarchie, ne résultent d'une loi formelle, mais de choix délicats du mathématicien qui vont bien plus loin que de simples choix rédactionnels ou de style.

Voir là-dessus, du côté philosophique, l'analyse inspirée de Badiou (en termes de fidélité, "dont le difficile est l'exercice, et non son critère"[(10)]), particulièrement attentive à ces symptômes qui percent l'universalité égalitaire du texte et pointent des situations, des évènements-théorèmes.

2) Ma seconde objection porte contre le *réductionnisme* du logicisme vulgaire, qui consiste à réduire les mathématiques à la suite de symboles dont est tricoté le texte mathématique, et aux règles élémentaires du tricotage. A cet égard, il était rafraîchissant d'entendre J. -Y. Girard commencer son allocution par une déclaration très claire, rappelant les mots de son livre "Le point aveugle": "réduire la pensée à une activité formelle, ce n'est pas très gentil pour les poètes, les philosophes, et même les mathématiciens"[(11)]. Je n'insisterai pas.

Une des aberrations les plus visibles de ce réductionnisme grossier est de faire table rase de toute heuristique, à commencer par l'opposition, si fondamentale dans la pensée du mathématicien, entre le trivial et le profond.

Les mathématiques sont en réalité comme ce "pays de la magie" d'Henri Michaux: "ce qu'il y a de plus intéressant dans ce pays, on ne le voit pas"[(12)].

3)ème objection: la démonstration, celle pratiquée par le mathématicien au travail, n'est pas un processus formel, elle ne tient pas de la bureaucratie des formules et des procès-verbaux. Démonstration n'est pas identique à vérification. Certaines vérifications peuvent être automatisées. La démonstration présuppose une idée - ce que les mathématiciens appellent une idée de démonstration - , même si elle se réduit à un calcul[(13)].

Les mathématiciens savent bien, d'ailleurs, qu'il y a des démonstrations de qualités bien différentes - indépendamment des questions de rigueur -, et ils passent beaucoup de temps à reprouver des théorèmes connus. Les démonstrations les plus frustes - et frustrantes - sont celles qui se réduisent à un calcul: elles emportent conviction, certes, mais il reste à comprendre le calcul lui-même - *pourquoi* cela marche. À l'autre extrême, il y a des démonstrations qui illumi-

---

(10) op. cit. XXIV, 1.

(11) Ceci dit, rien n'empêche d'étudier de manière purement formelle un certain discours mathématique idéalisé, comme le fait notamment la théorie de la démonstration; pourvu qu'on ne prétende pas représenter ainsi la pensée mathématique, ni même les démonstrations réelles des mathématiciens, - mais seulement leur trace formelle. La théorie de la démonstration est un domaine particulier de la logique où l'on prouve des théorèmes sérieux; elle n'a rien à voir avec le fantasme niais d'un robot intelligent qui produirait des idées mathématiques.

(12) citons aussi ces propos du mathématicien-physicien D. Ruelle: "Human mathematics is a sort of dance around an unwritten formal text, which if written would be unreadable. This may not seem very promising, but human mathematics has in fact been prodigiously successful." dans Mathematics: Frontiers and Perspectives. American Mathematical Society (2000).

(13) Rappelons aussi, à ce propos, ce mot très juste de Gilles Châtelet, parlant de "ces lieux où l'orientation ne s'obtient pas à titre gracieux et où le vrai ne se laisse pas saisir comme le vérifiable."

nent, qui ouvrent des horizons, qui “rendent sage” (comme disait, je crois, G.-C. Rota).

4)ème objection: contre l’arbitraire des axiomes. Que sont les axiomes, en fait? Ce sont des parties constitutives de la définition d’un concept (d’une notion, d’une structure, diraient plutôt les mathématiciens), ou plus largement d’un cadre conceptuel. Or les mathématiciens sont généralement de grands adeptes du rasoir d’Ockham, et détestent la multiplication gratuite des concepts (et donc des axiomes); ils travaillent assidûment à la recherche du “bon cadre conceptuel”, qui fait l’objet de débats passionnés entre spécialistes, et est tout sauf arbitraire. Les changements de systèmes d’axiomes correspondent à des changements de cadre conceptuel, à des mutations de point de vue, hautement significatifs pour l’histoire de la discipline. Si, comme disait Cantor, “l’essence des mathématiques, c’est la liberté”, la liberté du mathématicien ne consiste certainement pas dans l’arbitraire et le gratuit.

Je confesse que les mathématiciens ont leur part de responsabilité dans la diffusion de cette image purement ludique, “irresponsable”, de leur activité: interrogés par un public curieux de leurs motivations, ils se réfugient bien souvent - soit qu’ils répugnent à prendre quelque surplomb sur leur travail technique, soit qu’ils n’aient pas les mots pour l’exprimer - dans cette réponse un peu courte: “parce que ça m’amuse”. Comme si les mathématiques n’avaient pas d’autres enjeux...

Ici se termine la partie critique (et polémique) de mon exposé.

****

III. Objets singuliers.

Ayant déblayé le terrain, il me faut le préparer encore un peu par quelques réflexions sur les objets mathématiques. J’écarterai d’emblée, comme hors-sujet, la question générale de leur nature. Du reste, d’après G. Châtelet, “une philosophie offensive ne saurait se contenter de ratiociner indéfiniment sur le “statut” des objets scientifiques et doit se situer résolument aux avant-postes de l’obscur.” Le conseil vaut a fortiori pour le mathématicien!

Je distinguerai deux types d’objets mathématiques, que j’appellerai *génériques* et *singuliers* respectivement.

Les objets génériques sont les mieux connus: ce sont ceux sur lesquels portent les discours traditionnels sur le statut des objets mathématiques. Exemple: les groupes continus. Ils forment souvent des catégories, et c’est probablement le langage des catégories qui permet de rendre le mieux compte de la généricité en mathématique.

Les objets singuliers sont peu connus des non-mathématiciens; je vais donc m'y attarder un peu. Ce sont des sortes de "personnages" qui ont un *nom propre*, et qui interagissent les uns avec les autres, et avec les objets génériques. Chaque communauté de mathématiciens, voire chaque mathématicien, a ses objets singuliers familiers, plus ou moins apprivoisés. Ceux-ci sont à la fois des objets d'étude per se - voire des objets de dévotion! - , mais aussi, et de manière essentielle, les éléments du viatique d'exemples de chaque mathématicien, dont il n'hésite pas à se servir même pour ses crash-tests!

Certains objets singuliers sont si universels (sic) et si interactifs qu'ils sont familiers à de nombreuses communautés de mathématiciens, sous un nom unique mais sous des traits et caractères très différents, et avec des histoires différentes.

Je prends un exemple un peu au hasard: $SL_2(\mathbf{R})$, le groupe continu des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients réels a, b, c, d vérifiant $ad - bc = 1$. Personnage unique, familier à la plupart des mathématiciens, héros polymorphe de longues sagas très diverses.

Le géomètre différentiel verra $SL_2(\mathbf{R})$ comme groupe de symétries de l'espace hyperbolique le plus simple: le disque [(14)]. Ses quotients par des sous-groupes discrets forment des "tambours" dont les fréquences propres sont encore très mystérieuses (conjecture de Selberg...).

Le théoricien des nombres verra $SL_2(\mathbf{R})$ et ses sous-groupes discrets sous des traits similaires, mais à travers la longue histoire des formes modulaires.

Le géomètre algébriste complexe connaît bien $SL_2(\mathbf{R})$, entre autres, par son rôle dans la théorie des limites de périodes.

L'algébriste le côtoie comme objet basique en théorie des invariants et en théorie des représentations. etc...

Les rapports dialectiques que ces objets singuliers entretiennent avec les objets génériques sont très divers. Commençons par le plus trivial: la généralisation: la notion de groupe continu est une structure qui généralise certain aspect de $SL_2(\mathbf{R})$ (qui est un prototype de groupe continu).

Mais il arrive souvent que dans le but d'étudier tel ou tel objet singulier Ω, le mathématicien ait à introduire des objets génériques λ qui ne sont pas des généralisations de Ω, dont la fonction est d'interagir avec lui pour "le faire parler".

Voici d'autres rapports plus subtils et moins connus. L'étude des objets génériques diffère beaucoup de celle des objets singuliers: on y rencontre notamment des problèmes de classification. La situation idéale est celle où le classifiant est un objet ayant même structure que ceux qu'il classifie. Mais c'est un

---

(14) pour une introduction à cette histoire - et à la suivante - voir par exemple B. Mazur: "Plus symétrique que la sphère", Pour la science, Oct/Dec (2003) 78-85. Pour d'autres histoires de $SL_2(\mathbf{R})$, en liaison avec le programme d'Erlangen de F. Klein, voir V. Kisil: "Starting with $SL_2(\mathbf{R})$", ArXiv:math.GM/0607387.

objet singulier. La connaissance de cet objet singulier subsume celle des objets génériques qu'il classifie et va en fait au-delà, mais c'est une longue histoire...

Une autre instance importante où le générique produit du singulier est celle des dégénérescences, de la déformation vers les cas limites. Ces objets-limites sont souvent plus simples que les objets génériques dont ils proviennent et fournissent des informations précieuses à leur sujet. Toutefois, la complexité ne s'évanouit pas, elle change de niveau, et se loge dans le processus même de déformation, dont la compréhension requiert l'élaboration d'un nouveau cadre conceptuel et de nouveaux objets génériques, et ainsi de suite.

Nous sommes maintenant prêts à aller au coeur du sujet de cet exposé; et pour prendre la mesure du problème de l'orientation dans la pensée en mathématiques, essayons de nous "placer aux avant-postes de l'obscur", comme disait G. Châtelet.

IV. Brouillards et analogies.

J'irai vite, pour arriver enfin aux conjectures; qu'on me pardonne de commencer un peu comme un catéchisme!

Qu'est-ce qui meut le mathématicien dans sa pensée?
Le désir.
Quel désir?
Le désir de comprendre (c'est le "conatus" du mathématicien).
Comprendre quoi?
Certaines choses concernant les objets mathématiques, génériques ou singuliers, et surtout les mystères de leurs rapports mutuels.
Et ce qui excite ce désir?
Le mystère-même; le mystère qui enflamme l'imagination, qui elle-même fait surgir les idées nouvelles, qui déchireront le voile.

La plupart du temps, il est vrai, cette pêche au mystère, cette recherche des problèmes, n'est qu'un cabotage le long des côtes bien familières des théories constituées. Souvent aussi, il s'agit de la recherche d'un isthme entre deux terres connues mais jusque-là séparées. Quelquefois, il s'agit vraiment de pêche en eaux profondes.

De ce qui s'y joue, aucun mathématicien n'a mieux parlé qu'André Weil, dans un passage célèbre(15):

"Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à l'autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe; le pressentiment se change en certitude; les

(15) "De la métaphysique aux mathématiques" (1960), reproduit dans ses Oeuvres, vol. II, p. 408-412, Springer.

théories jumelles revèlent leur source commune avant de disparaître; comme l'enseigne la *Gītā*, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir."

Un peu plus loin: "Heureusement pour les chercheurs, à mesure que les brouillards se dissipent sur un point, c'est pour se reformer sur un autre".

Et, prenant un exemple historique: "Aussi nous savons, nous, ce que cherchait à deviner Lagrange, quand il parlait de métaphysique à propos de ses travaux d'algèbre; c'est la théorie de Galois, qu'il touche presque du doigt, à travers un écran qu'il n'arrive pas à percer. Là où Lagrange voyait des analogies, nous voyons des théorèmes. Mais ceux-ci ne peuvent s'énoncer qu'au moyen de notions et de "structures" qui pour Lagrange n'étaient pas encore des objets mathématiques..."

Dans "ces obscures analogies" qui vibrent, résonnent, retentissent, j'aime voir l'équivalent, pour une aventure mathématique, de ce que François Nicolas appelait les "moments de faveur" dans l'écoute d'une oeuvre musicale: elles conditionnent, elles orientent à la façon d'une boussole - mais encore dans l'obscur, le trouble, le furtif - le cheminement de la pensée mathématique dans l'aventure en jeu(16).

V. Conjectures.

L'idée principale de cet exposé est que dans cette traversée "de la métaphysique aux mathématiques", comme dit Weil, dans ce long cheminement labyrinthique allant des brouillards vers la clarté du théorème, ce qui oriente la pensée non plus à la manière d'une boussole, mais comme un phare éclairant de loin la petite porte cachée qui ouvre sur la clarté, c'est la conjecture.

"Conjecture" a un sens bien précis en mathématiques. Il s'agit d'un *énoncé destiné à devenir un théorème.* Ce qui manque encore, c'est la démonstration.

La conjecture fait donc partie du domaine heuristique. Son existence, en tant que conjecture, est en principe transitoire. Elle n'a aucune place dans l'image logiciste, vulgaire ou non, des mathématiques.

Une fois la conjecture formulée, la question de l'orientation de la pensée dans cette aventure devient celle de la recherche de stratégies de démonstration (ou de réfutation, éventuellement!). Après maint tatônnement, on a fini par mettre un doigt sur le noeud du mystère, on en a un condensé formulé, un précipité; et l'aventure se poursuit sur un mode plus concret et souvent plus technique.

Cela peut même se traduire par un relai des compétences: les conjectures sont souvent ce point où les "theory-makers" (les bâtisseurs de théorie) passent le relais aux "problem-solvers" (les résolveurs de problèmes). D'après cette

(16) l'analogie suppose qu'on mette en rapport une oeuvre musicale et une aventure mathématique (et non une oeuvre mathématique), même si une oeuvre musicale est, a priori, d'un seul auteur, tandis qu'une aventure mathématique est, a posteriori, oeuvre collective (en général non concertée).

mini-sociologie interne qu'affectionnent les mathématiciens, les premiers, plus sédentaires thématiquement, cherchent à élaborer, avec patience, des théories de grande portée; ce sont eux, en général, qui mettent au jour les conjectures fondamentales. Les seconds, plus nomades, sont davantage excités par le défi que constitue la résolution de problèmes bien posés et fameux. Mais le cycle se referme: la résolution des grandes conjectures s'accompagne souvent d'idées tout à fait nouvelles, dont l'approfondissement est alors l'occasion d'un passage de relai dans l'autre sens.

Critères. Pour être acceptée comme telle, une conjecture doit satisfaire à certains critères (qui naturellement sont bien différents des critères de vérité, de preuve rigoureuse, exigés pour un théorème). J'en distingue quatre:

1) puisqu'elle est censée devenir, telle quelle, un théorème, son énonciation doit satisfaire aux *mêmes critères formels que ceux d'un théorème*: précision, absence d'ambiguité, unité interne. Ce n'est pas une simple question. Noter que tout comme un théorème, elle peut porter tant sur les objets génériques que sur les objets singuliers.

2) À défaut de preuve, elle doit être accompagnée de ce qu'on appelle en anglais "*some evidence*" (ce qui n'est pas de l'évidence, mais ce qu'on pourrait traduire par "témoignage en faveur de" ou "bien-fondé heuristique"). Cette "evidence" peut être de nature diverse et hétérogène: il peut s'agir d'expérimentations (numériques ou non), de la démonstration de cas particuliers, ou encore d'analogies précises avec des énoncés qui sont déjà des théorèmes.

3) La conjecture doit être *en situation*, se rapporter à un problème identifié. On doit pouvoir lui attribuer une portée non nulle. Cela exclut les simples devinettes.

4) En formulant une conjecture, l'auteur de la conjecture s'engage, *prend parti*. C'est une sorte de pari. La réputation de l'auteur, comme expert et comme visionnaire, joue un rôle certain dans l'obtention de l'assentiment de la communauté.

Ce dernier critère doit toutefois être nuancé. Notamment lorsqu'il s'agit de conjectures anciennes - parfois présentées par leurs auteurs, sans trompettes en chamade, comme des questions intéressantes "qui les entraîneraient trop loin" (d'où l'on aurait tort de conclure qu'ils en mésestimaient la portée); c'est la postérité qui en a fait des conjectures. Du reste, le terme de conjecture dans son sens mathématique actuel semble dater seulement du début du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle[(17)].

---

(17) Dans son article "Conjecture" (Synthèse 111, pp. 197-210, 1997), B. Mazur écrit (p. 207): "Since I am not a historian of Mathematics I dare not make any serious pronouncements about the historical use of the term, but I have not come across any appearance of the word Conjecture or its equivalent in other languages with the above meaning in mathematical literature except in the twentieth century. The earliest use of the noun conjecture in mathematical writing that I have

Typologie. Si on compare les conjectures à des phares, on peut les classer suivant l'angle, la puissance ou la hauteur du faisceau lumineux. Mais en pratique, on constate que ces déterminations se recoupent, et même se recouvrent.

Les conjectures sont de portée très variable. Les plus puissantes sont celles que j'appellerai, en suivant le mathématicien Barry Mazur, *architectoniques*(18): elles façonnent le paysage conjectural d'un domaine.

Parfois, elles engendrent de véritables programmes de travail mettant en jeu de nombreux mathématiciens, ce que D. Kazhdan a ironiquement appelé les plans quinquénaux des mathématiques.

Par ailleurs, il arrive dans certains domaines mathématiques que les conjectures ne soient pas isolées, mais nombreuses et liées les unes aux autres par des liens logiques ou heuristiques très forts. C'est typiquement le cas dans la théorie des motifs, créée par Grothendieck, où les conjectures forment comme l'armature idéale dans laquelle s'échafaude la théorie.

J'ai parlé, à propos de conjecture, de condensation, de prédiction, d'engagement, de pari. Je voudrais ajouter quelques mots sur le *geste* de poser une conjecture.

La conjecture possède le pouvoir un peu magique de la formulation, elle "informe l'informe" si je puis dire. C'est aussi ce que font les théories mathématiques, mais la conjecture le fait d'un geste unique, impérieux, tandis que le façonnage des théories requiert des gestes hétérogènes et multipliés.

De G. Châtelet, qui a écrit tant de belles choses sur les gestes en mathématiques, je citerai cette phrase: "les vérités mathématiques sont bien éternelles, mais leur conquête, en vue de leur stratification dans un savoir, présuppose des gestes qui les font ressortir pour les arracher au tissu de l'Être". Ainsi les gestes que sont les conjectures architectoniques, qui *captent et pointent*. Et qu'il ne faut pas confondre avec ces évènements capitaux, ces grands catalyseurs de la pensée mathématique, que sont les irruptions d'idées nouvelles; autres gestes: déchirure, coup d'aile.

Les conjectures marquent - éclairent - un but, et pas du tout le chemin pour l'atteindre. L'essentiel n'est peut-être pas, d'ailleurs, d'atteindre le but marqué. Il est plutôt dans les *idées nouvelles* qui surgissent dans l'effort déployé vers ce but, et dont la portée peut parfois dépasser celle de la conjecture originaire au point de rendre celle-ci dérisoire (un exemple frappant est celui de la conjecture de Fermat).

---

encountered is in Hilbert's 1900 address, where it is used exactly once, in reference to Kronecker's Jugendtraum."

(18) "architectural", en anglais, cf. B. Mazur, op. cit.

VI. Exemples.

Nous allons maintenant examiner deux exemples de conjectures. J'ai dit que je m'adresserai surtout aux musiciens; mais je ne veux pas tricher, en présentant des amusettes de "mathématiques récréatives". Au contraire, ce sont deux des plus célèbres conjectures architectoniques des mathématiques que je vais rapidement présenter et commenter, l'une concernant les *nombres* (Riemann), l'autre les *formes* (Poincaré/ Thurston).

La conjecture, ou "hypothèse", de Riemann.[19] Il s'agit des nombres premiers. $p = 2, 3, 5, 7, 11...$, les "particules élémentaires de l'arithmétique". Euclide savait deux choses à leur propos:

1) tout nombre entier > 1 est produit de nombres premiers (avec répétitions, mais de manière unique); exemple: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

2) il existe une infinité de nombres premiers.

Pour prouver 2), il ne s'agit pas de faire des listes, aussi longues soient-elles, il faut une idée! Deux millénaires et demi plus tard, la preuve d'Euclide n'a rien perdu de sa fulgurance: soient $p_1, p_2, ..., , p_m$ des nombres premiers. Formons leur produit et ajoutons un; notons n le nombre ainsi formé: $n = \Pi p_i + 1$. Ce nombre est > 1 donc il admet un diviseur premier p. Si p était l'un des p_i, il diviserait à la fois n et $n - 1 = \Pi p_i$, donc aussi 1, ce qui est impossible. Donc p est un "nouveau" nombre premier distinct des p_i[20].

Jusqu'au XVII$^{\text{e}}$ siècle (Fermat), on en est à peu près resté là. Au XVIII$^{\text{e}}$, en pleines mathématiques baroques, L. Euler [21] a eu l'idée de "traduire" le point 1) ci-dessus en termes de séries - c'est-à-dire de sommes indéfinies -, de la façon suivante: si l'on multiplie les séries $1 + p + p^2 + p^3 + \ldots = \frac{1}{1-p}$ entre elles, pour tous les nombres premiers p, on trouve

$$(1+2+2^2+\ldots)\times(1+3+3^2+\ldots)\times(1+5+5^2+\ldots)\times ... = 1+2+3+4+5+\ldots$$

soit, en notation compacte:

$$\Pi \frac{1}{1-p} = \sum n.$$

(19) Pour plus de détail, dans un style informel et très accessible, on peut consulter: M. du Sautoy, "The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics", HarperCollins (2003). On peut aussi consulter la présentation plus formelle de E. Bombieri sur www.claymath.org/millennium.

(20) pour les puristes, signalons que l'énoncé précis d'Euclide est le suivant (Eléments, IX-20): "les nombres premiers sont plus nombreux que toute multiplicité donnée de nombres premiers", et que la preuve n'y est faite que dans le cas particulier de $m = 3$ nombres premiers.

(21) qui, soit dit en passant, a aussi écrit des volumes sur la théorie de la musique, sévèrement critiqués au siècle suivant par un autre Riemann...

Par le même argument, on a formellement, pour tout entier s (positif ou négatif),

$$\Pi \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum n^{-s},$$

ce qui suggère un lien entre la distribution des nombres premiers et le comportement des séries du type $\sum n^{-s}$. Euler a entrepris de calculer la somme de ces séries pour certains s, et y est parvenu pour tout entier pair positif, par exemple (1735):

$$\sum n^{-2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bien sûr, pour $s = -1$, la série $\sum n = 1 + 2 + 3 + \ldots$ diverge, autrement dit sa somme est $+\infty$; mais Euler, qui fut l'un des plus grands virtuoses es séries de l'Histoire (avec Jacobi et Ramanujan), voyait beaucoup plus loin, et affirmait qu'en un certain sens, tout se passait comme si

$$\sum n = -\frac{1}{12},$$

un nombre négatif! En fait, il affirmait qu'il y avait lieu de surmonter la divergence et d'attribuer une valeur finie à $\sum n^{2k-1}$, directement liée à $\sum n^{-2k}$.

Cent-vingt ans s'écoulèrent avant que cette prédiction géniale soit rigoureusement justifiée, lorsque le grand mathématicien romantique B. Riemann introduisit la célèbre *fonction*

$$\zeta(s) = \sum_{n>0} n^{-s}$$

où la variable s n'est plus nécessairement un entier, mais un nombre complexe. C'est là un point capital: quand s se déplace sur l'axe réel vers la gauche, $\zeta(s)$ est bien définie jusqu'au point 1 et devient infinie en 1. Mais dans le plan complexe, on peut *contourner* l'obstacle 1, et obtenir en fait une fonction définie partout, sauf en 1. C'est là une instance du principe du prolongement analytique, l'un des outils les plus puissants en mathématiques pour passer du local au global[(22)]. Dans son article visionnaire (1859)[(23)], Riemann prouve, pour tout nombre complexe s, la symétrie suggérée par Euler entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, et il explique le lien, basé sur la formule $\zeta(s) = \Pi \frac{1}{1-p^{-s}}$, entre la distribution des nombres premiers et la position des *zéros* de ζ (c'est-à-dire des valeurs de s pour lesquelles $\zeta(s)$ s'annule). C'est en suivant ces arguments que J. Hadamard et C. de la Vallée-Poussin ont démontré qu'entre 1 et n, il y a environ $\frac{n}{\log n}$ nombres premiers (1896).

---

(22) rappelons à ce propos le mot célèbre d'Hadamard: "le plus court chemin entre des vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe".

(23) "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", Monatsberichte der Berliner Akademie.

La conjecture de Riemann[24], qui préciserait de manière essentielle et optimale ce résultat, dit que *les zéros non triviaux*[25] *de* ζ *se trouvent tous sur l'axe de symétrie*, c'est-à-dire la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Commentaire. Notons en premier lieu que cette conjecture porte sur un objet *singulier*, la fonction ζ de Riemann. Elle n'en est pas moins une conjecture architectonique de la théorie des nombres. Elle domine toute la théorie des nombres premiers, et sa portée est en fait beaucoup plus grande (surtout sous sa forme généralisée aux cousines de la fonction ζ que sont les fonctions L de Dirichlet). Selon Alain Connes (je traduis), "l'hypothèse de Riemann est probablement le problème le plus basique des mathématiques, au sens où il s'agit de l'entrelacement de l'addition et de la multiplication. C'est un trou béant dans notre compréhension..."[26].

De quelle "evidence" dispose-t-on en faveur de cette conjecture?

Les premiers tests numériques sont dus à Riemann lui-même[27]. Aujourd'hui, des calculs parallèles sur un réseau (zetagrid) de plus de 10000 machines ont calculé les 250 milliards de zéros non triviaux les plus proches de $\frac{1}{2}$, qui tous semblent se trouver sur l'axe de symétrie de ζ. Mais ce n'est pas, tant s'en faut, la justification la plus convaincante (en 1897, Mertens avançait une conjecture "un peu plus forte" que celle de Riemann. Elle fut réfutée 88 ans plus tard par Odlyzko et te Riele, en suivant une voie très indirecte; ces experts estiment par ailleurs que la conjecture de Mertens est probablement vraie jusqu'à des valeurs de l'ordre de 10^{20}; de sorte qu'en attendant les ordinateurs quantiques, les calculs numériques ne pourraient que confirmer la conjecture fausse!).

L'argument heuristique le plus convaincant vient sans doute de l'analogie entre corps de nombres et courbes algébriques sur un corps fini: E. Artin avait montré dans sa thèse que l'hypothèse de Riemann avait un analogue dans ce contexte, et Weil a *démontré* cet analogue.

Weil a en outre généralisé la formule explicite qu'avait donnée Riemann pour le nombre de nombres premiers inférieurs à une quantité donnée. La formule de Weil présente quelque analogie troublante avec les formules de points fixes en

---

(24) Riemann l'énonce avec une discrétion remarquable: "Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien." La conjecture de Riemann est reprise par Hilbert comme l'un de ses 23 problèmes.

(25) la fonction ζ s'annule aux entiers pairs strictement négatifs, qu'on appelle "zéros triviaux".

(26) "The Riemann hypothesis is probably the most basic problem in mathematics, in the sense that it is the intertwining of addition and multiplication. It's a gaping hole in our understanding..." cité dans K. Sabbagh, Dr. Riemann's Zeros (Atlantic, 2002), p.208.

(27) retrouvés dans le Nachlass de Riemann par C.L. Siegel.

topologie (ou dans la théorie des systèmes dynamiques). Pour quel espace sous-jacent? L'une des analogies possibles serait un "sphéroïde" de dimension 3[28].

A propos de ζ, c'est donc un "texte" à trois colonnes qui se dévoile, dont seule la colonne "courbes algébriques sur un corps fini" est, pour le moment, bien comprise. "Combien de temps faudra-t-il encore pour que notre pierre de Rosette, à nous autres arithméticiens, rencontre son Champollion?" (Weil, ibid.).

Passons à notre second exemple, qui concerne les formes.

"Défiez-vous des ensorcellements et des attraits diaboliques de la géométrie."
Fénelon

Les conjectures de Poincaré et de Thurston[29]. Il s'agit de la classification, en topologie différentielle, des variétés de *dimension* 3 (en termes informels, il s'agit de décrire les différentes formes possibles à trois dimensions en "géométrie du caoutchouc"). On se limite aux variétés *compactes* (pour éviter les "fuites" vers l'infini) et *orientables* (on ne se laisse pas désorienter par Möbius...).

La classification en dimension 1 est très simple: on ne trouve, à équivalence[30] près, que le cercle S^1. Contrairement aux apparences, les noeuds sont bien équivalents au cercle: leur caractère "noué" tient au plongement choisi dans un espace ambient, mais c'est d'une classification intrinsèque qu'il s'agit ici (une fourmi parcourant le noeud a-t-elle le moyen de "savoir" qu'il est noué?).

En dimension 2, la classification est comprise depuis le XIX$^{\text{e}}$: on trouve les tores ("bouées") à g trous. Celle sans trou ($g = 0$) est la sphère S^2.

Par ailleurs, pour $g > 1$, le tore à g trous s'obtient en recollant g copies du tore à 1 trou (recollement le long d'un cercle quand on découpe un disque). La seule surface irréductible pour cette opération est le tore à $g = 1$ trou. Celui-ci peut d'ailleurs s'écrire comme quotient du plan euclidien R^2 par un groupe discret d'isométries (engendré par les translations entières horizontales et verticales).

L'étude bien plus ardue de la dimension 3 commence avec H. Poincaré. En

---

(28) l'analogie entre corps de nombres et espaces (éventuellement pincés) de dimension 3 est plus récente que celle entre corps de nombres et courbes algébriques sur les corps finis; l'une des premières pierres du gué étant que la dimension cohomologique étale des corps de nombres est 3.

(29) Pour plus de détail, dans un style informel et très accessible, on peut consulter le texte de la conférence de S. Lang: "Faire des maths: grands problèmes de géométrie et de l'espace", revue du Palais de la Découverte, vol. 12, n 114 (1984). On peut aussi consulter la présentation plus formelle de J. Milnor sur www.claymath.org/millennium.

(30) i. e. homéomorphie, ou même difféomorphie.

1904, il conjecture[31] que *toute 3-variété (compacte orientable) sans trou est équivalente à la sphère S^3 de dimension* 3.

Comme en dimension 2, on peut "composer" les 3-variétés, par recollement le long d'une sphère quand on découpe une boule; les variétés irréductibles pour cette opération sont un peu comme les nombres premiers vis-à-vis de la multiplication.

Le programme de W. Thurston, qui date de la fin des années 70, vise à classifier les 3-variétés irréductibles. Pour cela, il construit 8 "modèles canoniques" (S^3, l'espace euclidien R^3, l'espace hyperbolique H^3, et cinq autres variétés métriques explicites, non compactes mais très "symétriques"), et il conjecture que *toute* 3*-variété irréductible admet une décomposition canonique en morceaux quotients de l'un des* 8 *modèles par un groupe discret d'isométries.*

La conjecture de Poincaré en est un cas particulier.

Commentaire. Les conjectures de Poincaré/Thurston portent sur des objets *génériques.* La conjecture de Thurston est éminemment architectonique: elle prédit la classification complète des variétés de dimension 3. Son ancêtre, la conjecture de Poincaré, l'était aussi, pour avoir puissamment contribué à la naissance de la topologie différentielle[32].

Ces conjectures occupent actuellement le devant de la scène mathématique, car elles viennent probablement d'être démontrées. L'esquisse de démonstration, due à G. Perelman, est prise très au sérieux par les experts mais n'est pas complètement vérifiée à l'heure actuelle, et l'on est au *point d'oscillation entre conjecture et théorème.* La méthode de Perelman est un tour de force, et l'aboutissement d'une approche très originale ouverte en 1982 par R. Hamilton, dans laquelle font irruption les méthodes d'un autre domaine (calcul des variations).

VII. Conclusion.

Certains sont peut-être surpris de n'avoir pas entendu, jusqu'à ce point, de tirade enthousiaste sur la beauté des mathématiques, comme aiment à les faire

(31) voir ses Oeuvres, t. VI, pp. 486, 498. En fait, il ne la pose que comme question, en ajoutant "mais cette question nous entraînerait trop loin"!

On peut étendre, de manière évidente, la conjecture en toute dimension $n \geq 1$. Mais, ce qui peut paraître surprenant, la difficulté du problème n'augmente pas avec n, au contraire: l'énoncé en dimension $n =\geq 5$ a été démontré en 1961 (Zeeman), $n = 6$ en 1962 (Stallings), $n \geq 7$ en 1961 (S. Smale, qui a étendu ultérieurement sa preuve aux cas $n = 5, 6$); $n = 4$, cas beaucoup plus difficile, en 1982 (M. Friedman); le cas $n = 3$ de la conjecture originale est le plus difficile.

(32) Steve Smale: "A reason that Poincaré's conjecture is fundamental in the history of mathematics is that it helped give focus to a manifold as an object of study. In this way, Poincaré influenced much of 20th-century mathematics with its attention to geometric objects, including eventually algebraic varieties, Riemannian manifolds, etc..." (1998).

les mathématiciens. C'est que, s'il est aisé de chanter l'épithalame de la beauté et de la vérité en mathématiques, il semble bien difficile en revanche de *penser* leur union, ou même de marquer les modalités précises de rencontre entre elles. Or, n'est-ce pas là un prolégomène à la problématique de ce séminaire?

En guise de conclusion, je voudrais hasarder que les conjectures architectoniques illustrent la modalité suivante:

Beauté, promesse de vérité.

Il ne s'agit que d'une "conjecture" ! Et la seule "evidence" que j'ai à verser au dossier - qui étaie quelque peu le sentiment fréquent du mathématicien devant les grandes idées heuristiques: "c'est trop beau pour être faux" -, c'est que je ne connais pas d'exemple de conjecture architectonique qui se soit révélée fausse! J'ajouterai ceci: même si cela arrivait, ce serait peut-être encore plus intéressant - que le bouleversement complet de nos conceptions dans le domaine qu'elle éclaire conduise à une nouvelle traversée du désert, ou bien qu'elle s'accompagne de la découverte d'une réalité mathématique insoupçonnée(33).

Une des sources de la beauté en mathématique réside dans la cohérence et l'harmonie. Il en est ainsi dans ces constellations de conjectures que j'évoquais plus haut. Voici ce qu'en dit Alexandre Grothendieck, grand maître ès conjectures s'il en fut - je lui laisse le dernier mot(34):

"Dix choses soupçonnées seulement, dont aucune [...] n'entraîne conviction, mais qui mutuellement s'éclairent et se complètent et semblent concourir à une même harmonie encore mystérieuse, *acquièrent dans cette harmonie force de vision.* Alors même que toutes les dix finiraient par se révéler fausses, le travail qui a abouti à cette vision provisoire n'a pas été fait en vain..."

****

Ce texte est une version légèrement remaniée de ma conférence au Séminaire Mathématiques-Musique de l'E.N.S. Je remercie Charles Alunni, Moreno Andreatta et François Nicolas de m'avoir donné l'occasion de m'y exprimer, et je tiens aussi à les féliciter pour l'initiative de ce dialogue original entre musiciens d'une part et mathématiciens et logiciens de l'autre.

(33) cf. e.g. P. Sarnak: "if the Riemann Hypothesis is not true, then the world is a very different place. The whole structure of integers and prime numbers would be very different to what we could imagine. In a way, it would be more interesting if it were false, but it would be a disaster because we've built so much round assuming its truth." cité dans K. Sabbagh, Dr. Riemann's Zeros (Atlantic, 2002), p.30.

(34) Récoltes et semailles, p. 211.