

# La théorie de la RELATIVITE D'ECHELLE et ses applications : 2<sup>e</sup> partie

Laurent Nottale

*CNRS*

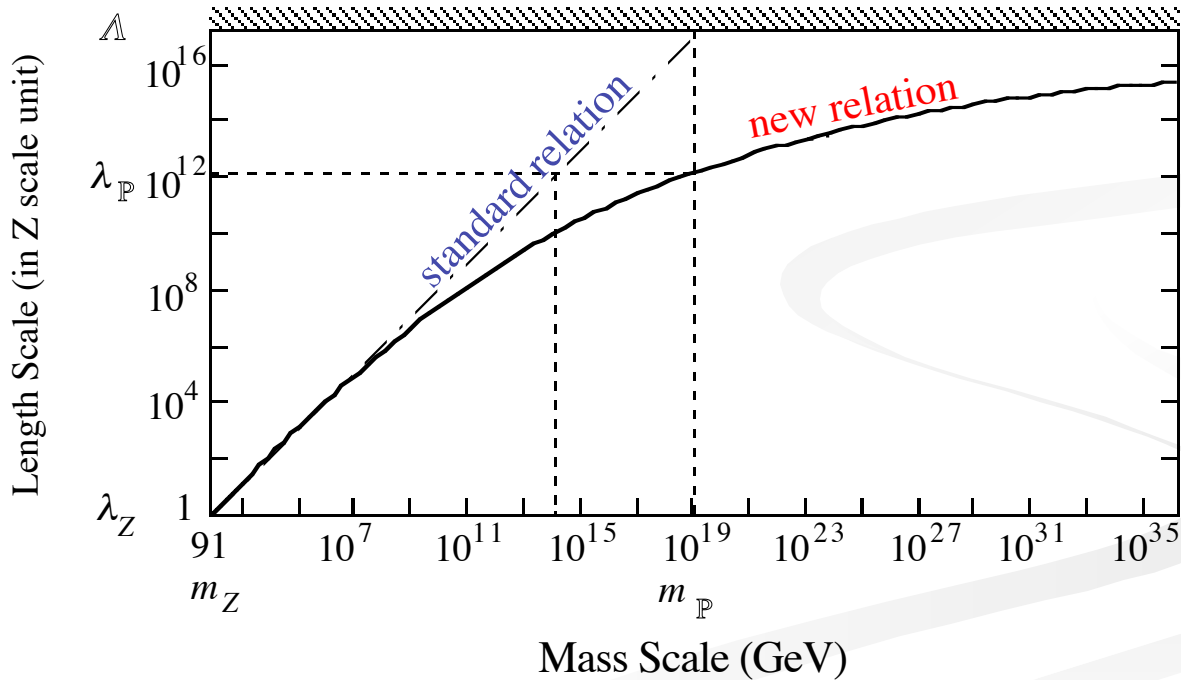
*LUTH, Observatoire de Paris-Meudon*

<http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale>

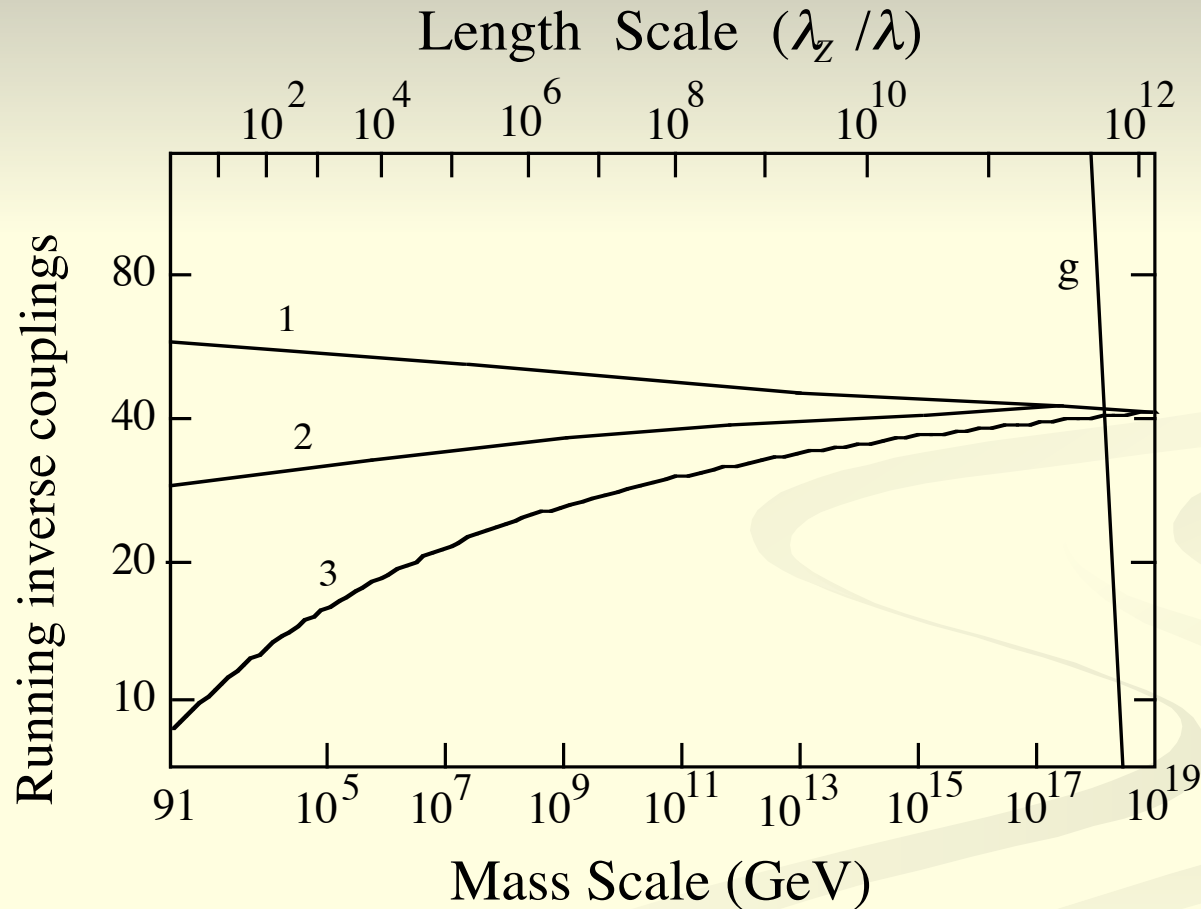
# Applications à la physique des hautes énergies

# Nouvelle transformation entre échelles de longueur et échelles de masse en relativité d'échelle restreinte

$$\ln\left(\frac{\lambda_Z}{r}\right) = \frac{\ln(m/m_Z)}{\sqrt{1 + \ln^2(m/m_Z)/\ln^2(m_P/m_Z)}}$$



# Echelle de « grande unification » = échelle d'énergie de Planck en relativité d'échelle restreinte



# Valeur critique $\alpha = 1/4\pi^2$ des constantes de couplage. 1.

Force entre deux quanta de « charge »:

$$F = \frac{q^2}{4\pi r^2} \quad \text{avec} \quad q^2 = 4\pi\alpha\hbar c$$

Expression quantique de la force  $\bar{F}$  en unités de  $\hbar$  et  $c$ :

$$F = \frac{\alpha \hbar c}{r^2}$$

Quantification du champ: la force vient d'un échange de bosons de masse nulle. Valeur moyenne:

$$F = \left\langle \frac{\delta p}{\delta t} \right\rangle$$

# Valeur critique $\alpha = 1/4\pi^2$ des constantes de couplage. 2.

Fraction du nombre de quanta émis par la première particule et absorbée par la deuxième  $\rightarrow$  3D: facteur  $1/4\pi$


$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta p}{\delta t}$$

\* Pour un boson de masse nulle dans le vide:

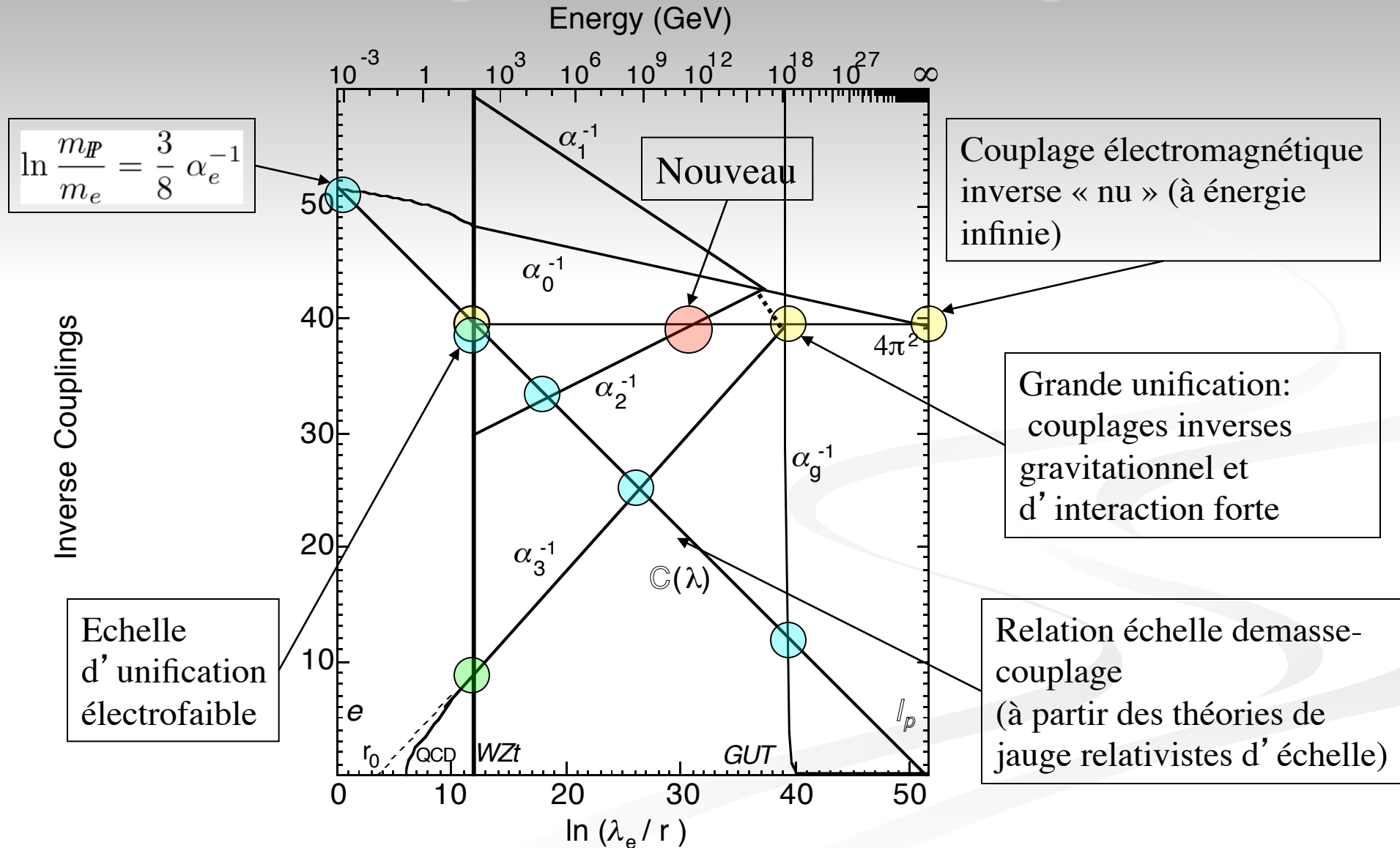
$$\delta r = c \delta t$$

\* Deuxième quantification  $\rightarrow$  relation de Heisenberg pour un oscillateur (valeur « saturante » pour des intervalles, cf. Finkel 89):

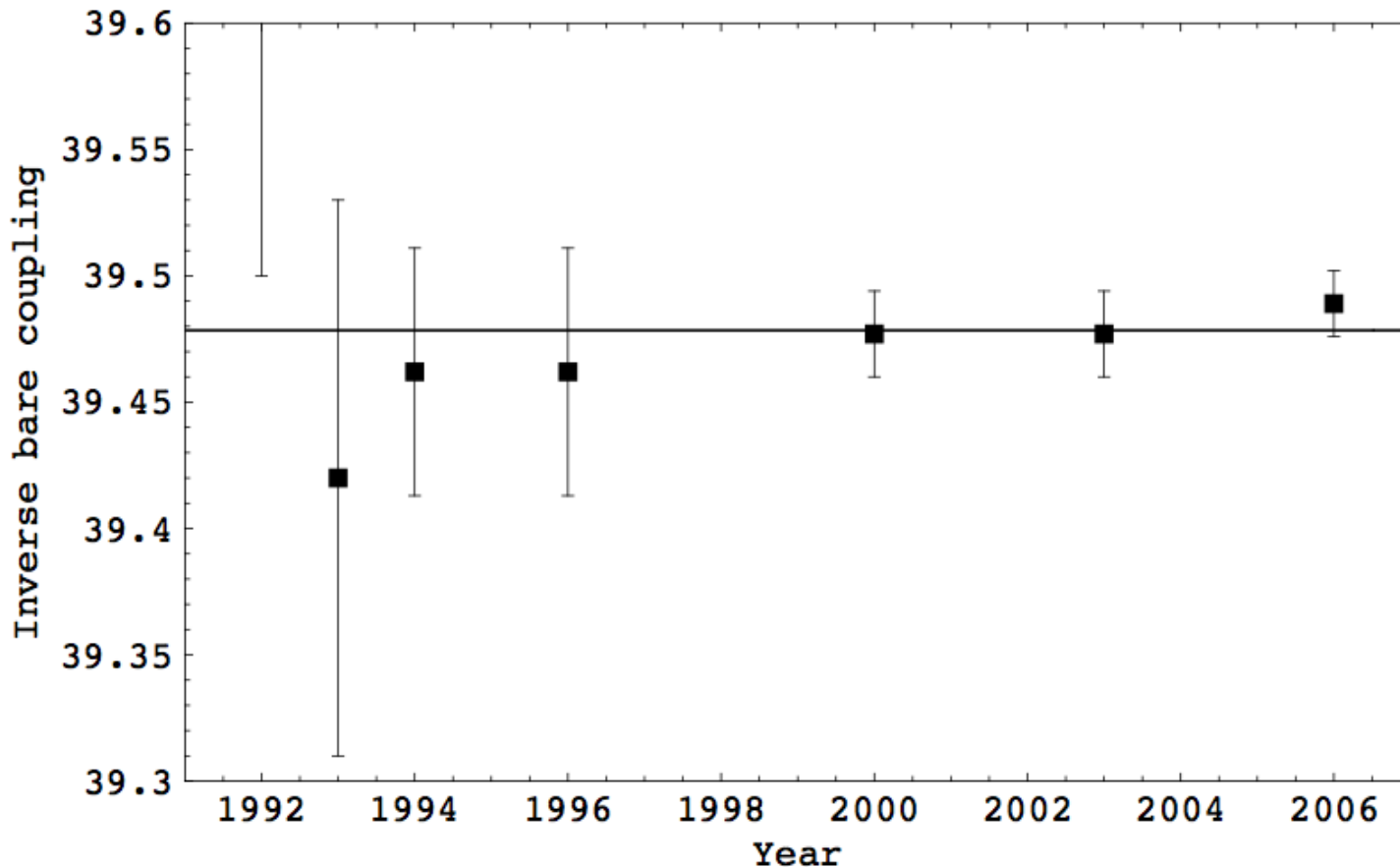
$$\delta p \times \delta r = \frac{\hbar}{\pi}$$

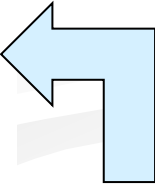

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\hbar c}{r^2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4\pi^2}$$

# Comparaison aux données expérimentales (+ extrapolation hautes énergies)



# Couplage électromagnétique « nu » (constante de structure fine à énergie infinie): évolution de sa mesure et comparaison à la prédiction théorique (1992)




$$\alpha = \frac{1}{4\pi^2}$$

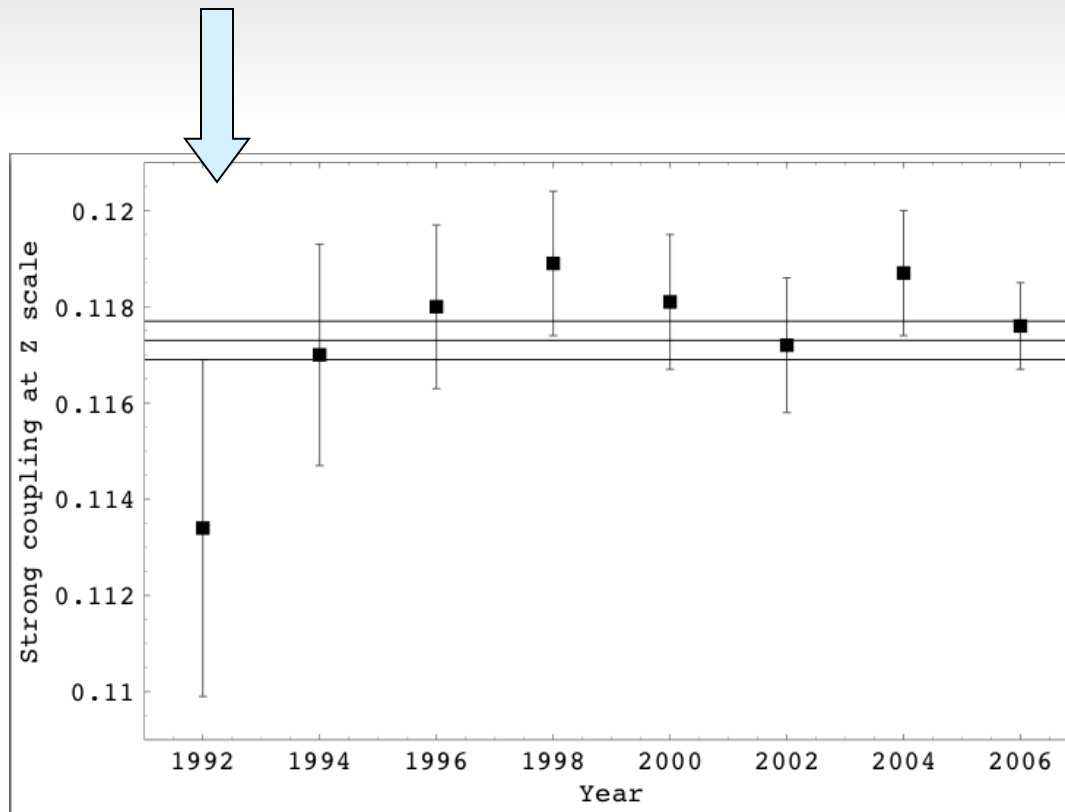
# Variation du couplage fort (chromodynamique) en fonction de l' échelle

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_3(r) = & \bar{\alpha}_3(\lambda_Z) + \frac{7}{2\pi} \ln \frac{\lambda_Z}{r} \\ & + \frac{11}{4\pi(40 + N_H)} \ln \left\{ 1 - \frac{40 + N_H}{20\pi} \alpha_1(\lambda_Z) \ln \frac{\lambda_Z}{r} \right\} \\ & - \frac{27}{4\pi(20 - N_H)} \ln \left\{ 1 + \frac{20 - N_H}{12\pi} \alpha_2(\lambda_Z) \ln \frac{\lambda_Z}{r} \right\} \\ & + \frac{13}{14\pi} \ln \left\{ 1 + \frac{7}{2\pi} \alpha_3(\lambda_Z) \ln \frac{\lambda_Z}{r} \right\}.\end{aligned}$$

# Comparaison entre la prédiction théorique et la valeur expérimentale de la constante de couplage forte $\alpha_s(m_Z)$ : évolution au cours du temps

Date de la prédiction théorique  
(LN 1992, *IJMPA* 7,4899)

Données: Particle Data Group 1992-2006



Prédiction théorique:  
 $0.1165 \pm 0.0005$  (1992) .  
En prenant en compte la  
masse du quark top (connue  
après 1992), devient:  
 $0.1173 \pm 0.0004$

(à partir de la valeur critique  
 $4\pi^2$  du couplage inverse à  
l'échelle d'énergie de  
Planck et de sa variation de  
l'échelle de Planck à celle  
du Z dérivée des équations  
du groupe de  
renormalisation incluant les  
corrections de relativité  
d'échelle restreinte)

**Nature et valeur de la  
constante cosmologique  
(accélération de l'expansion de  
l'Univers)**

# Relativité (d' échelle) des masses

\*Einstein--> principe « de Mach » (« Postulate of the relativity of all inertia », Einstein 1917) incorporé dans la construction de la RG

\*Mach ( $\approx 1880$ ): il n' y a pas de masse, il n' y a que des *rappports* de masse; ces rapports de masse sont des rapports d' accélération (cf Newton):

$$m_1/m_2 = a_2/a_1$$

\*Ces rapports se ramènent à des rapports de longueur:

-Masse inerte --> longueur de Compton:

$$m / m_p = \lambda_p / \lambda$$

-Masse gravitationnelle active --> longueur de Schwarzschild:

$$m / m_p = \lambda / \lambda_p$$

Relations inverses!

# La RG avec $\Lambda$ est « machienne »

Einstein (1915-1917), Sciama 1952, Wheeler, Barbour, Bertotti, etc...: incorporation du principe de Mach en cosmologie -->

$$m c^2 - \sum_i G m m_i / r_i = m c^2 - G M_U m / R_U = 0$$

--->

$$G M_U / c^2 R_U = 1$$

i.e., relation de Schwarzschild pour l' Univers.

Mais (Einstein 1915)--> toutes les solutions cosmologiques de la RG sont:

-conservatives:  $M_U = \text{cste}$

-non-statiques:  $R_U = R_U(t)$

Contradiction --> recherche d' une solution statique -->

introduction de  $\Lambda$  (AE1917) --> modèle à  $R_U = \text{cst}$

# Constante cosmologique et densité d'énergie du vide. 1.

Forme générale des équations du champ d'Einstein (Cartan, 1922):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

i.e., la relativité générale est une théorie à 2 constantes ( $\Lambda$ ,  $G$ )

$$\Lambda = \text{courbure} = \text{constante géométrique} \quad \Lambda = \frac{1}{L^2}$$

Cadre de RG pure:  $\Lambda = \text{cst universelle}$ , donc  $L = \text{longueur invariante}$

Tenseur impulsion-énergie d'un fluide parfait avec contribution de densité et pression du vide:

$$\text{car} \quad \rho_v + \frac{p_v}{c^2} = 0 \quad T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u_\nu - \frac{p + p_v}{c^2}g_{\mu\nu}$$

# Constante cosmologique et densité d'énergie du vide. 2.

Les équations d'Einstein s'écrivent:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} - (\Lambda + \frac{8\pi G}{c^2}\rho_v)g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

Problème:  $\rho_v = \sum (\frac{1}{2}\hbar\omega)$  est formellement infini

A l'échelle de Planck:  $\rho_{\mathbb{P}} = \frac{c^5}{8\pi G^2 \hbar} = \frac{c^2}{8\pi G} \times \frac{1}{l_{\mathbb{P}}^2}$

Alors que la contribution géométrique est:  $\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \frac{c^2}{8\pi G} \times \frac{1}{\mathbb{L}^2}$

Donc:  $\boxed{\frac{\rho_{\mathbb{P}}}{\rho_{\Lambda}} = \left(\frac{\mathbb{L}}{l_{\mathbb{P}}}\right)^2} = \mathbb{K}^2 \sim (10^{60})^2 \sim 10^{120}$

# Constante cosmologique et densité d'énergie du vide. 3.

Solution: la densité d'énergie du vide quantique est explicitement dépendante d'échelle

$$E_v \propto \frac{1}{r} \Rightarrow \rho_v \propto \frac{1}{r^4}$$

Donc:

$$\rho_v(\mathbb{L}) = \rho_v(l_{\mathbb{P}}) \times \left(\frac{l_{\mathbb{P}}}{\mathbb{L}}\right)^4 = \rho_{\Lambda} \times \left(\frac{l_{\mathbb{P}}}{\mathbb{L}}\right)^2 \approx 10^{-120} \times \rho_{\Lambda}$$

De plus: toujours renormalisable ?  $\rightarrow \langle E \rangle = 0$  ?

Autre contribution (cf Zeldovich 67):

Densité de self-énergie gravitationnelle des fluctuations du vide

$$E_g = \frac{G}{c^4} \frac{\langle E^2 \rangle}{r} \quad \langle E^2 \rangle^{1/2} = \frac{\hbar c}{r} \neq 0$$

$$\rho_{gv} = \rho_{\mathbb{P}} \left(\frac{l_{\mathbb{P}}}{r}\right)^6$$

# Constante cosmologique et densité d'énergie du vide. 4.

Approche directe: lois d'échelle (équations différentielles d'échelle):

$$\frac{d\rho}{d \ln r} = \Gamma(\rho) = a + b\rho + O(\rho^2)$$

Solution:

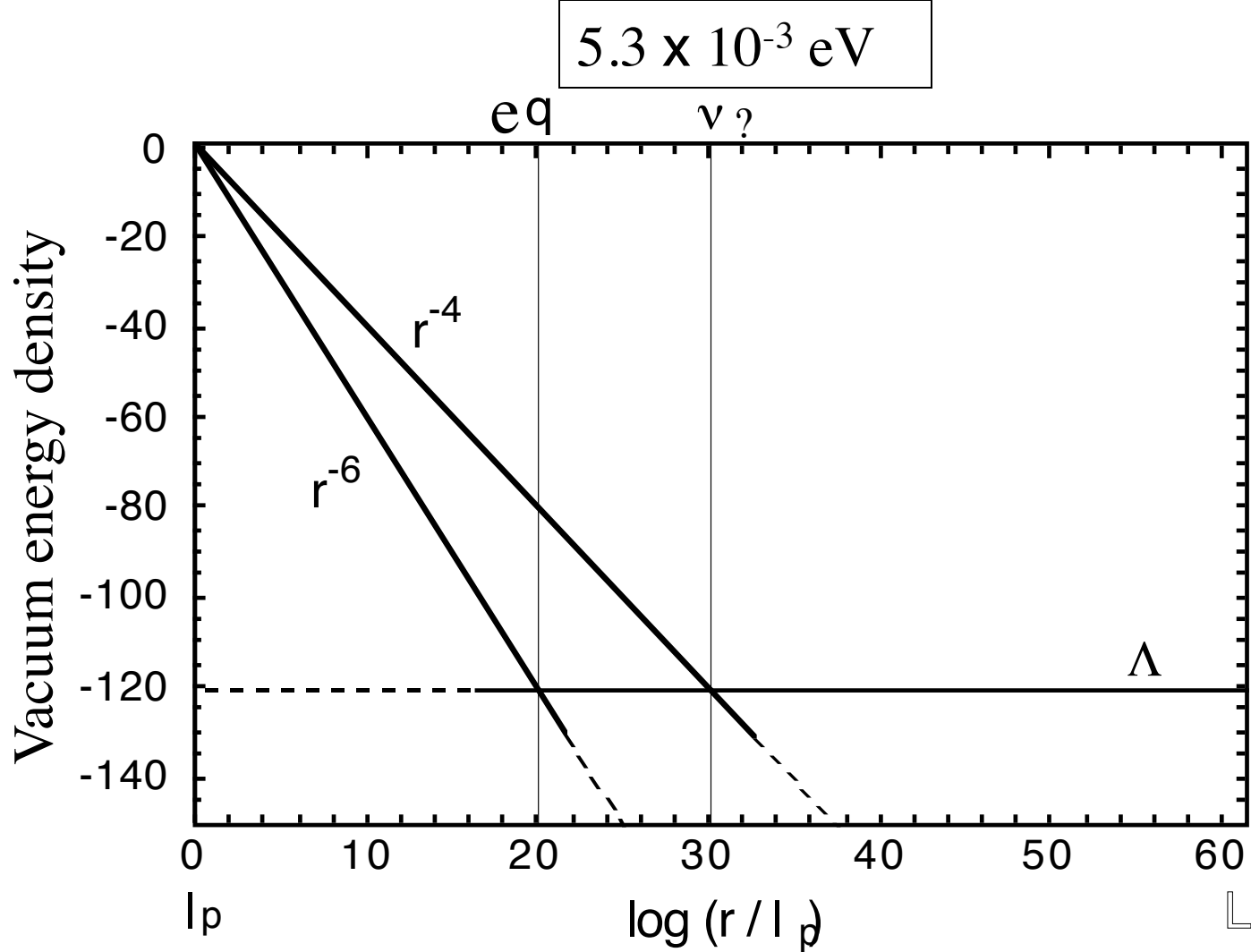
$$\rho = \rho_\Lambda \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^{-b} \right] \quad (\rho \rightarrow \rho_\Lambda)_{r \rightarrow \infty}$$

Pour  $b = -6$ , on retrouve la somme des deux termes, géométrique + vide quantique

Conséquence:  $\exists$  échelle de transition  $r_0$  telle que

$$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{L}}{l_{\mathbb{P}}} = \left( \frac{r_0}{l_{\mathbb{P}}} \right)^3 = \left( \frac{m_{\mathbb{P}}}{m_0} \right)^3$$

i.e., la relation des grands nombres de Eddington-Dirac est établie<sup>7</sup>



Nottale L. 1993, *Fractal Space-Time and Microphysics* (World Scientific), chap. 7  
 1996, *Chaos Solitons & Fractals* 7, 877

Nottale L., 2003, *Chaos Solitons and Fractals*, 16, 539. "Scale-relativistic cosmology" <http://www.luth.obspm.fr/~luthier/nottale/arScRCosmo.pdf>

# Constante cosmologique et densité d'énergie du vide. 5.

Valeur de  $r_0$  ?

Conjecture (LN1993): transition quark-hadron durant l'univers primordial.

Justification: impossibilité d'expansion de la « mer de Dirac » (vide quantique) au delà de  $r_e$

Distance maximale interquarks:

—> Longueur de Compton liée à la masse effective des quarks dans le pion:

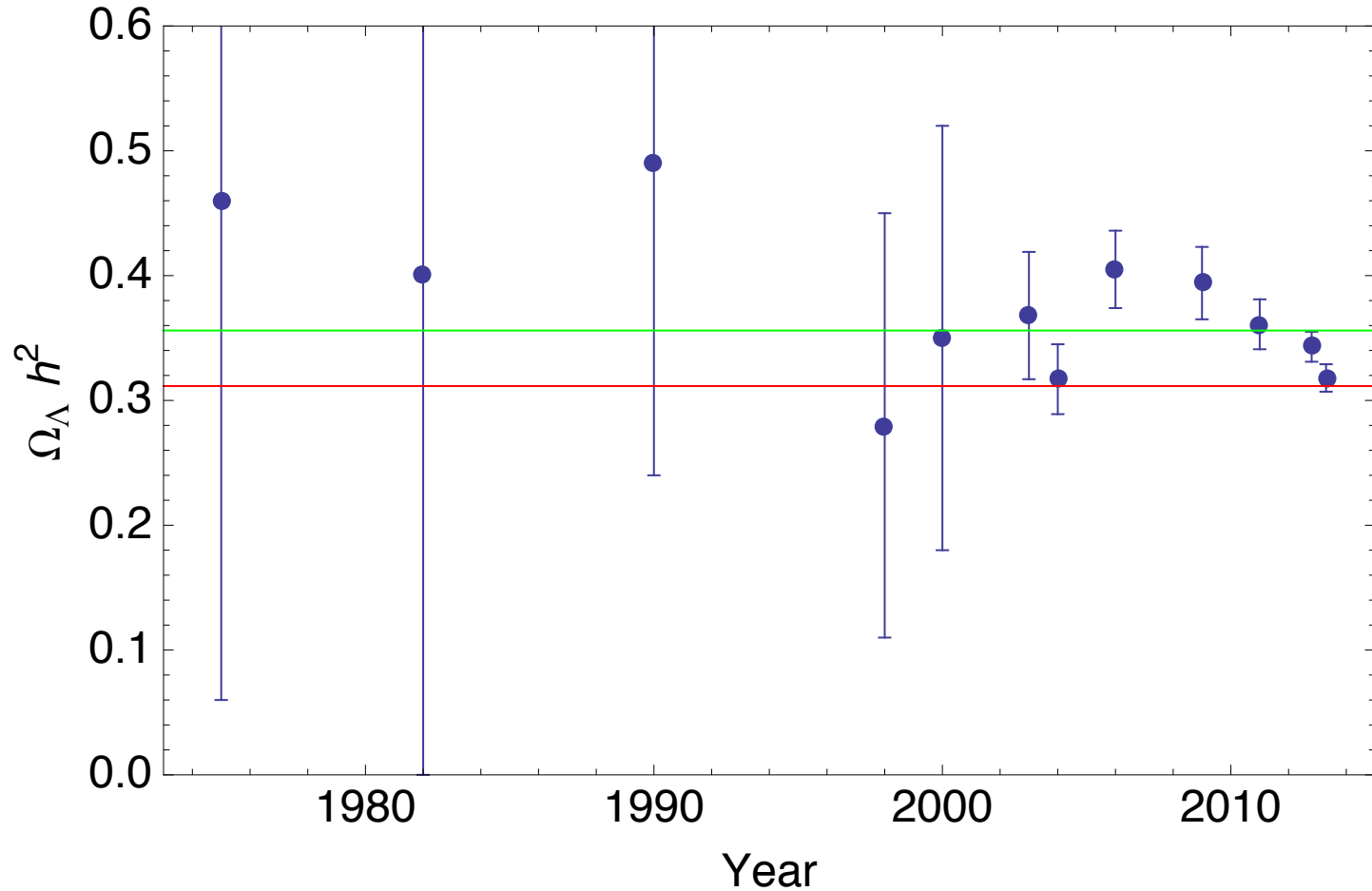
$$m_{\pi^0} / 2 = 67.4883 \pm 0.0003 \text{ MeV}$$

$$\text{Prédiction: } \Omega_\Lambda h^2 = 0.31154 \pm 0.00014$$

Prédit (LN93):

$$\Omega_\Lambda h^2 = 0.36$$

# Mise à jour 2013: résultat WMAP-9yr PLANCK



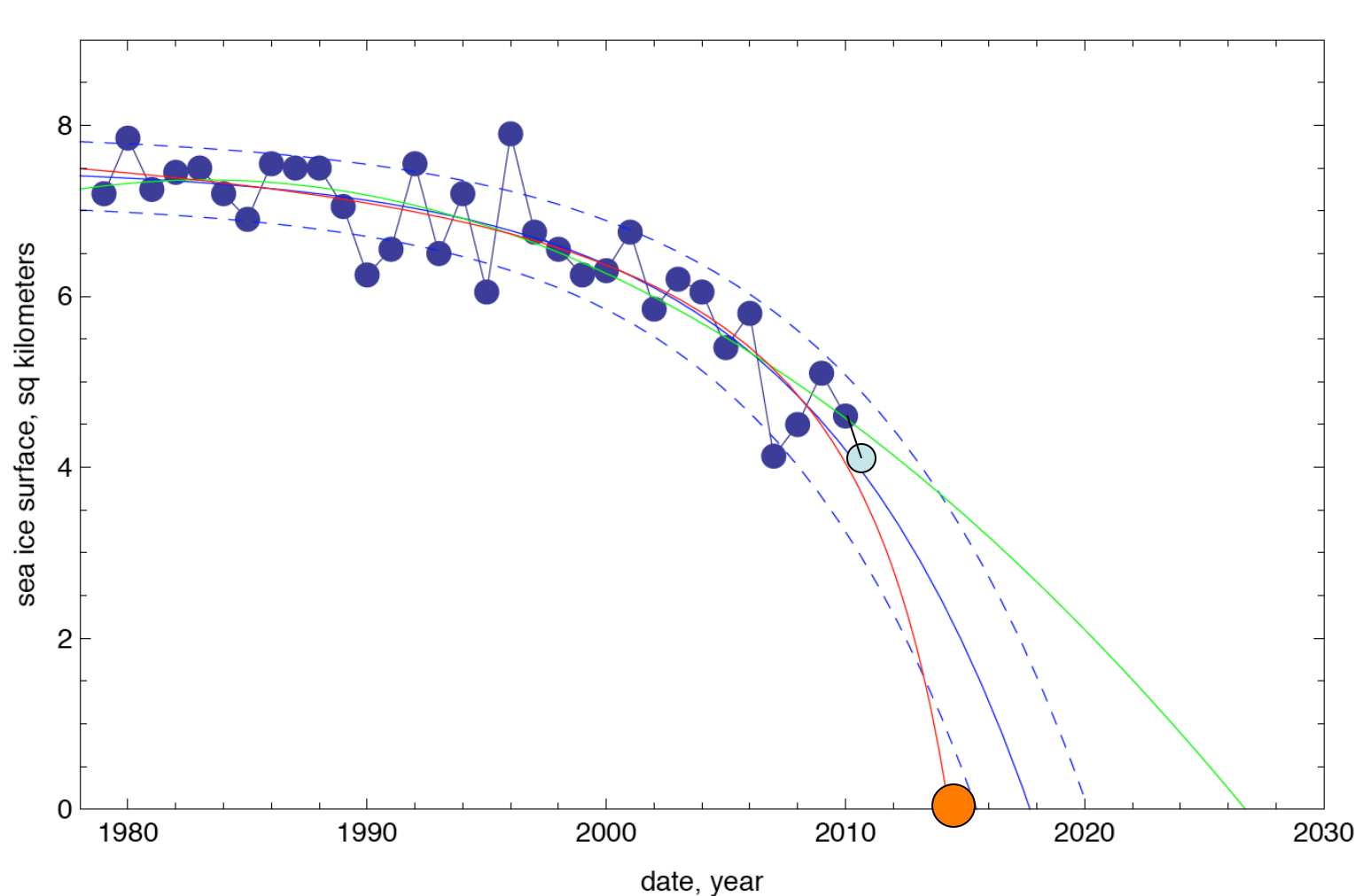
$\Omega_\Lambda h^2 = 0.317 \pm 0.012$  vs  $0.311$  (pred)

# Géosciences

# Banquise Arctique 1979-2011

\*Loi exponentielle :  $t_{\text{Student}} = 14.6$ ,  $\text{var} = 0.198$ ;  $t_0 = 2018$ ,  $S = 7.92 - 0.34 \exp(0.075 t)$

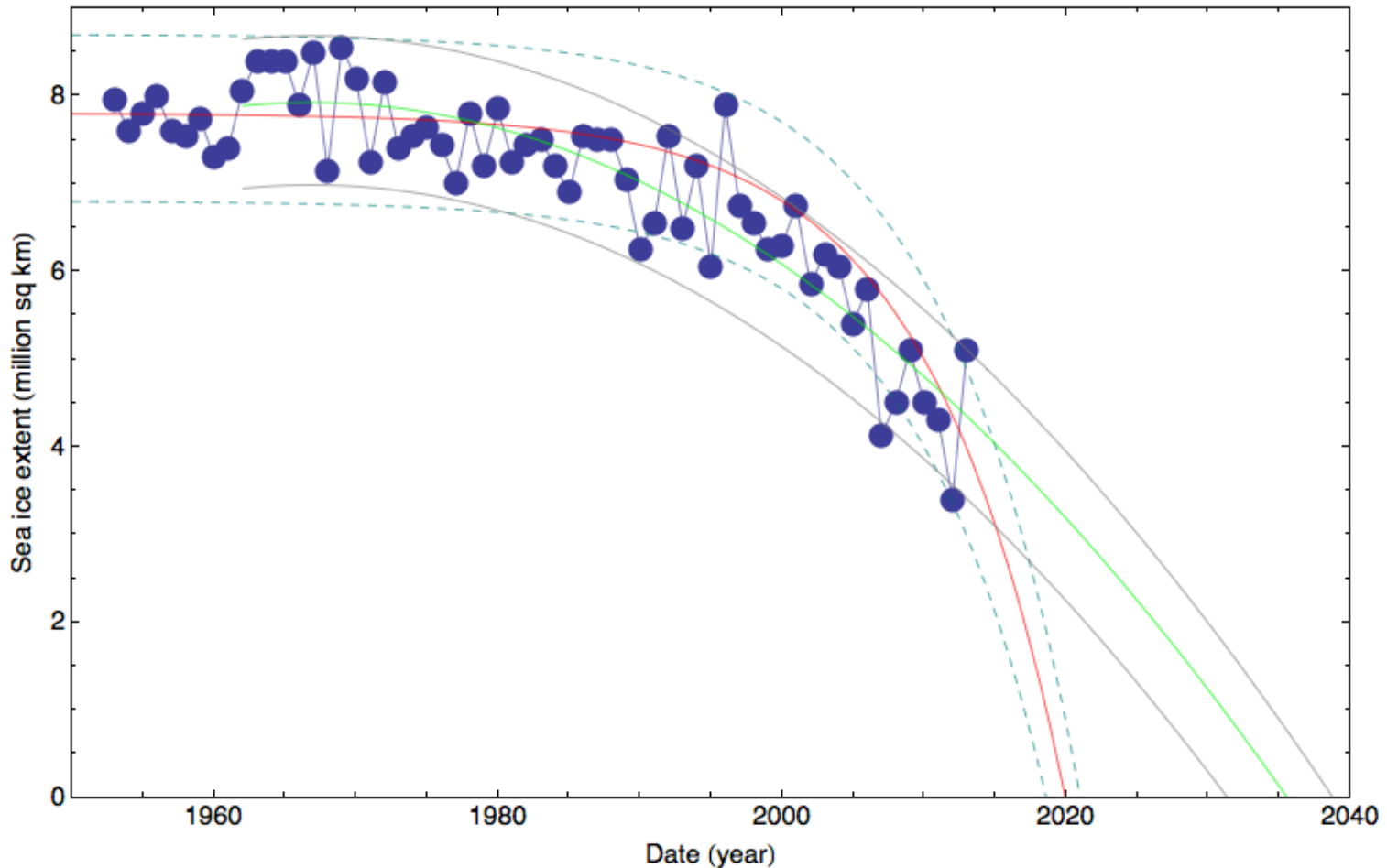
\*Loi critique :  $t_{\text{Student}} = 14.7$ ,  $\text{var} = 0.195$ ;  $t_0 = 2014$ ,  $S = 8.61 - 59.8 (2020.5 - t)^{-1.03}$



# Update Septembre 2013

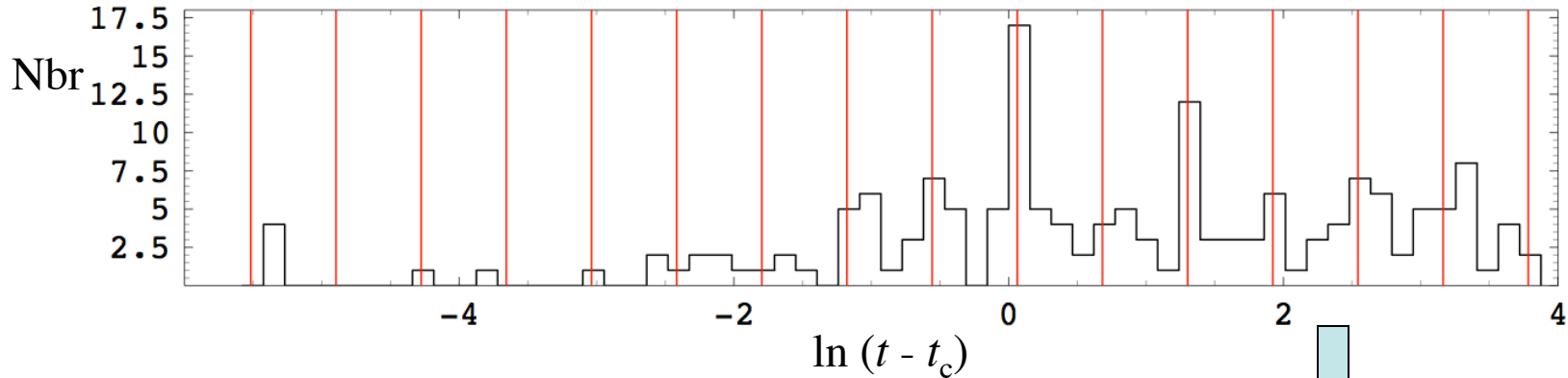
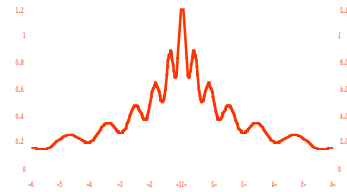
Point 2013 au niveau 2009 (5.1 millions km<sup>2</sup>)

--> Modèle quadratique ( $t_f=2032-2038$ )vs exponentiel ( $t_f=2019-2021$ )



# Séismes

**Sichuan 2008:** distribution du taux de répliques.

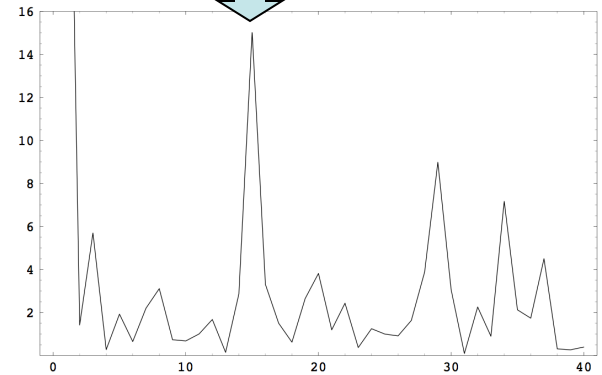


$t_c = 12.265$  (12 mai 2008)

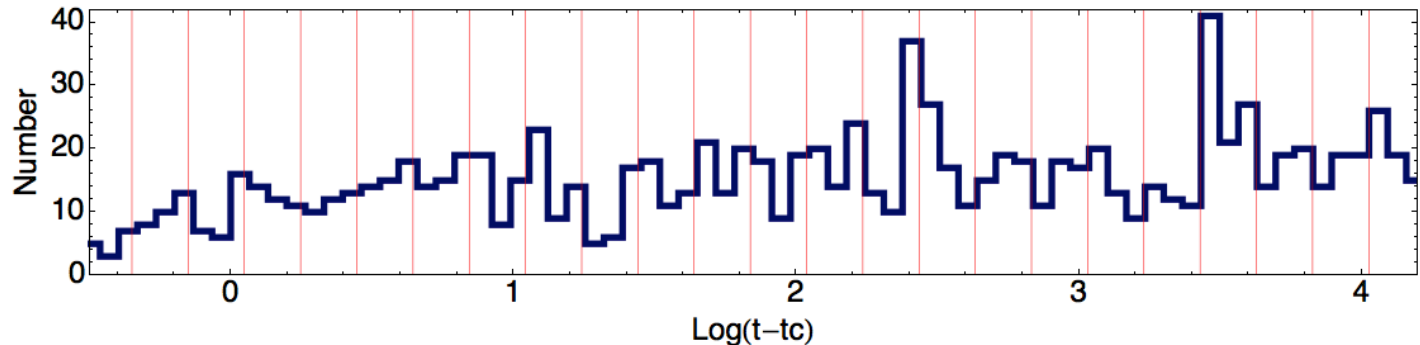
Proba d'accord pic / creux : 0.0001

**Analyse par spectre de puissance:**

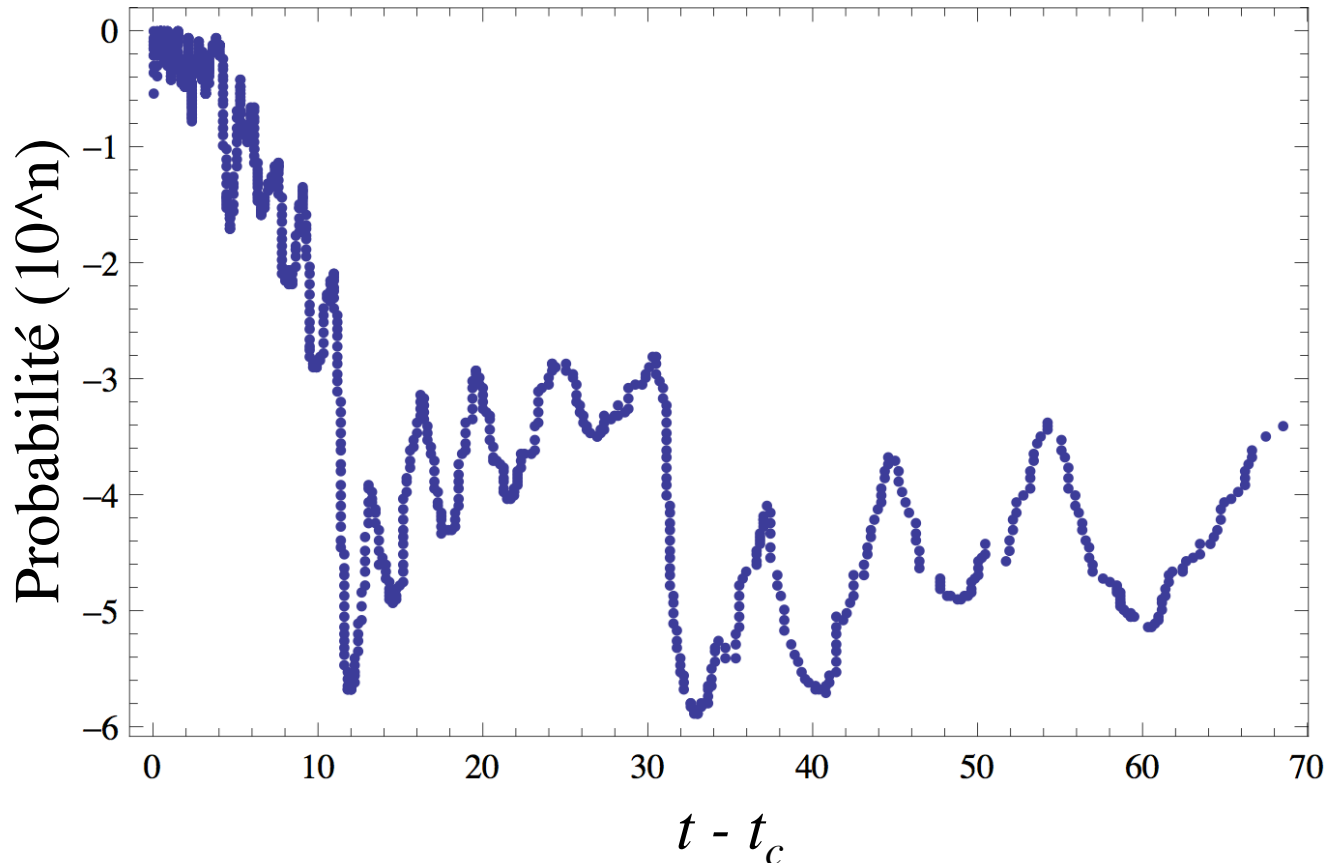
power = 15.01 (proba  $6 \times 10^{-6}$ )



**Japon 2011:**  
Répliques →  
(proba  $< 10^{-6}$ )



# Japon: Spectre de puissance au cours du temps



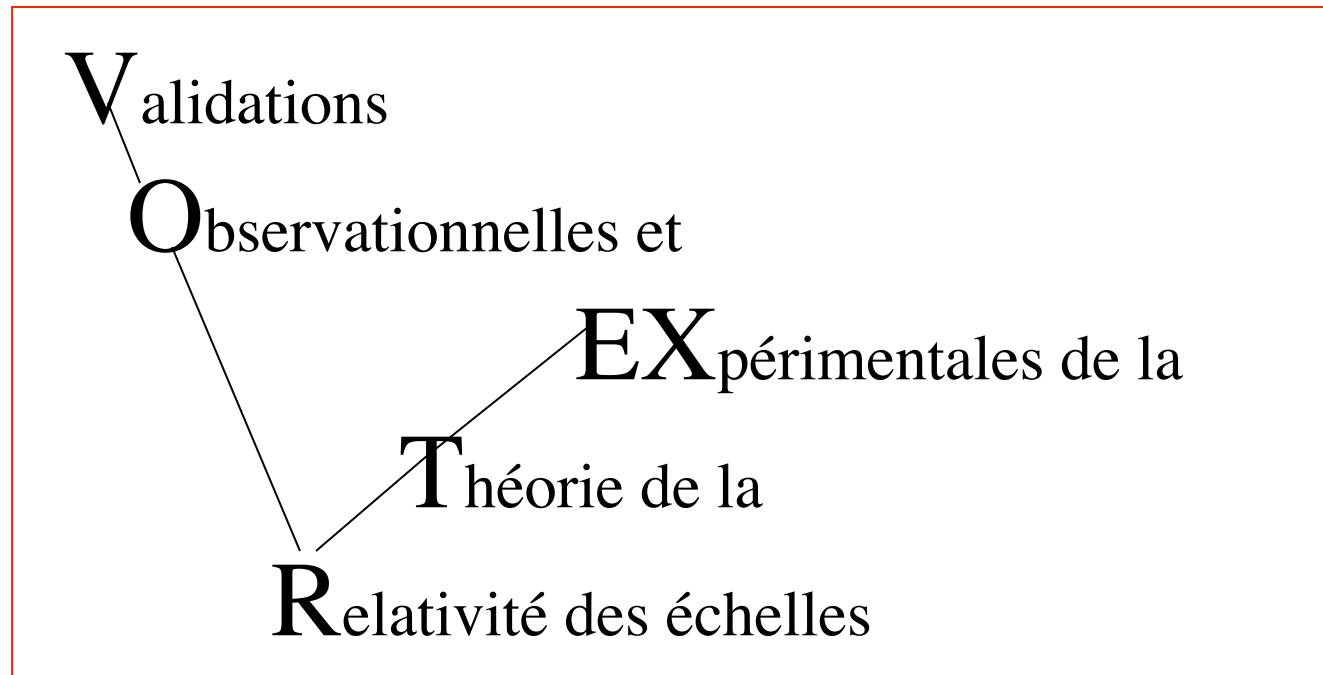
- \* Devient significatif (pic non prévu) au bout de 10 jours ( $P < 10^{-3}$ ) et le demeure
- En tenant compte de la stabilité : significativité augmentée (pic prévu) -->dès les premiers jours
- Pics de probabilité pour chaque nouveau pic du taux de répliques : validation de la prédictivité et visualisation directe de la log-périodicité !
- \* Evènements spéciaux à 12 ( $m=6.5$ ) et 33 jours ( $m=7.1$  et ses propres répliques !)

# Expérimentation

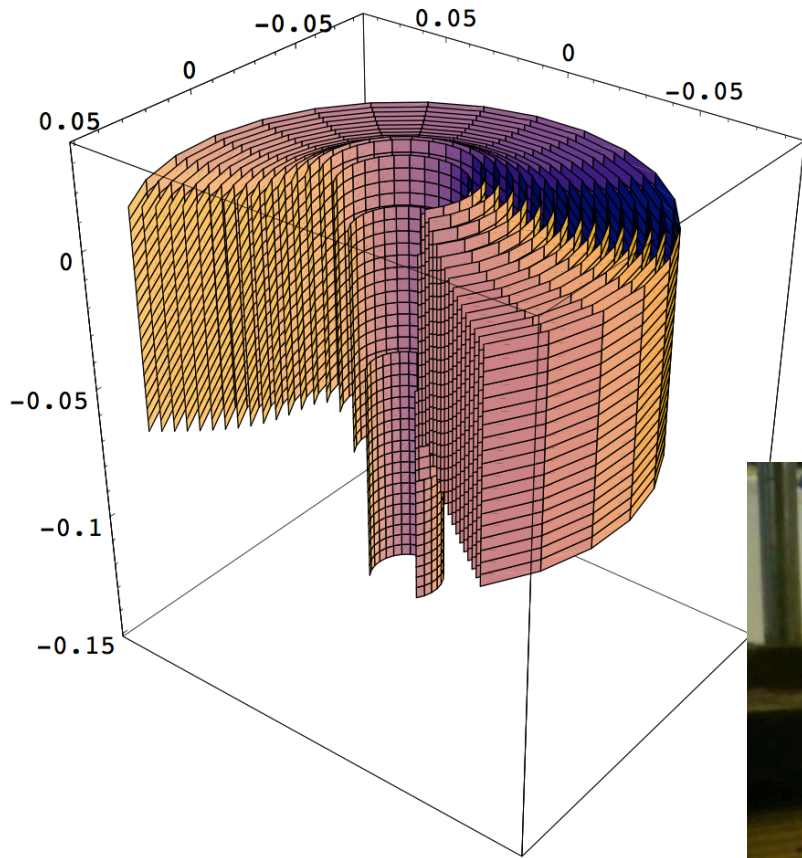
(Astrophysique de laboratoire)

*VORTEX: Simulation de la formation de structures gravitationnelles (équations de l'hydrodynamique) :*

- hauteur de la surface du fluide = analogue 2D de la densité 3D
- forme du fond (courbe, déformable) = analogue du potentiel



# Simulation d'un potentiel « quantique » macroscopique



Transition  
1- $\rightarrow$ 2 vertex

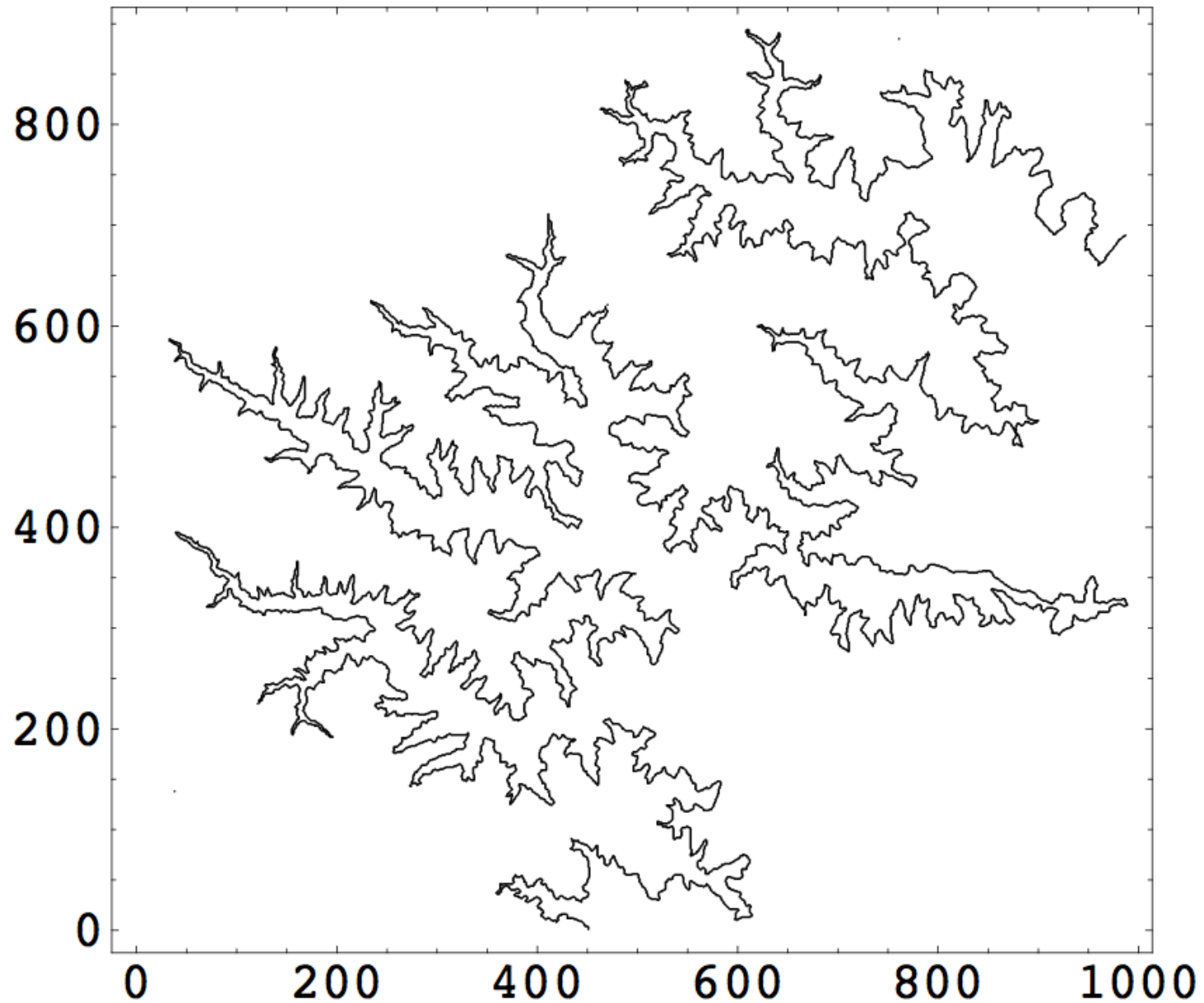
# Géographie: Bassin versant du Gardon

Laurent Nottale<sup>1</sup> et Philippe Martin<sup>2</sup>

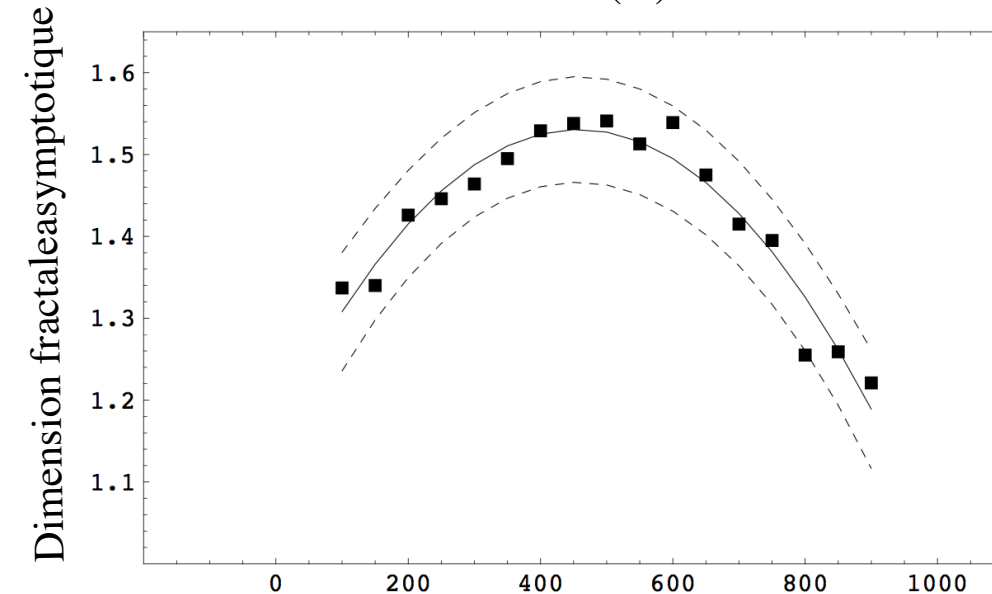
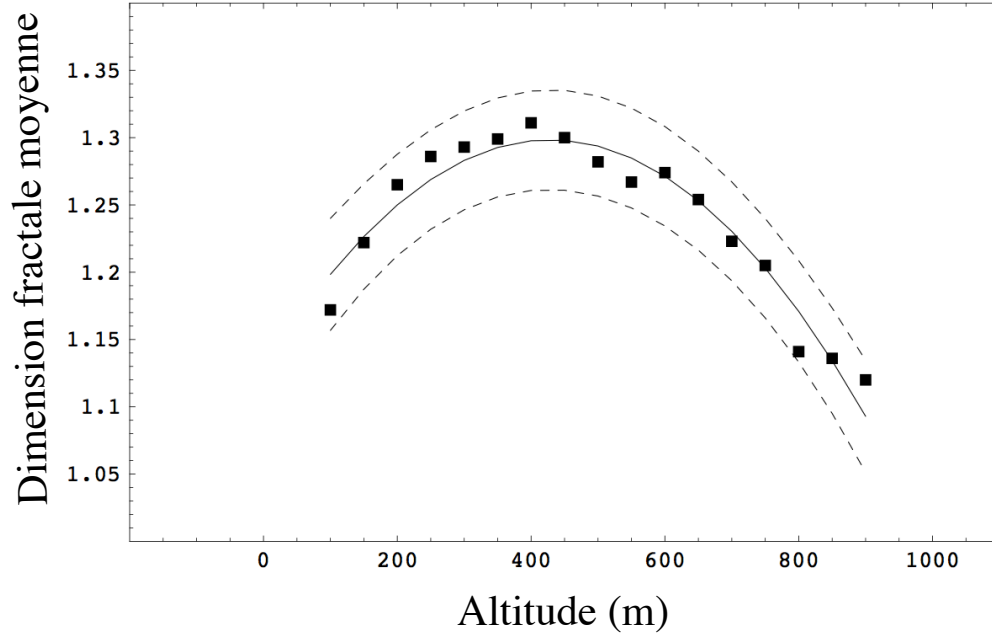
<sup>1</sup> Observatoire de Paris-Meudon,    <sup>2</sup> UAPV

Infos, articles et réfs.: <http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale>  
<http://www.geo.univ-avignon.fr/Personnel/MartinP.htm>

# Gardon: courbe de niveau 450 m



# Gardon: Dépendance de la dimension fractale en fonction de l'altitude

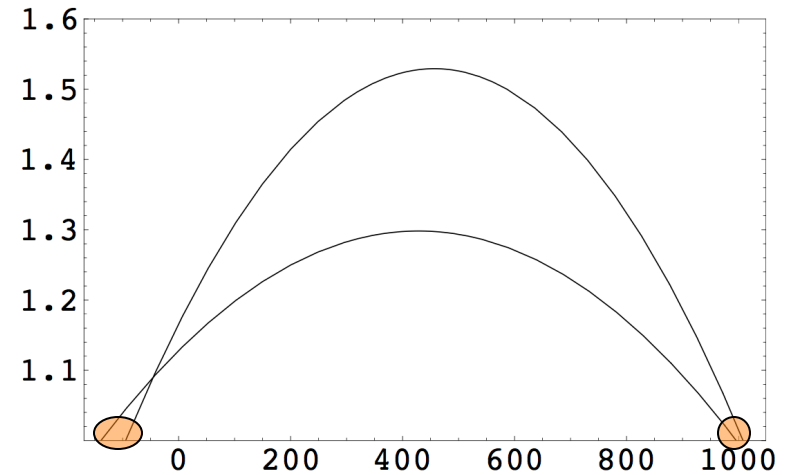


*Modélisation:*

$D = 1$  : non fractal, lisse  $\rightarrow$

(i) plaine:  $h \approx -120$  m (littoral au Würm)

(ii) sommet:  $h \approx 1000$  m



Deux points fixés  $\rightarrow$  parabole

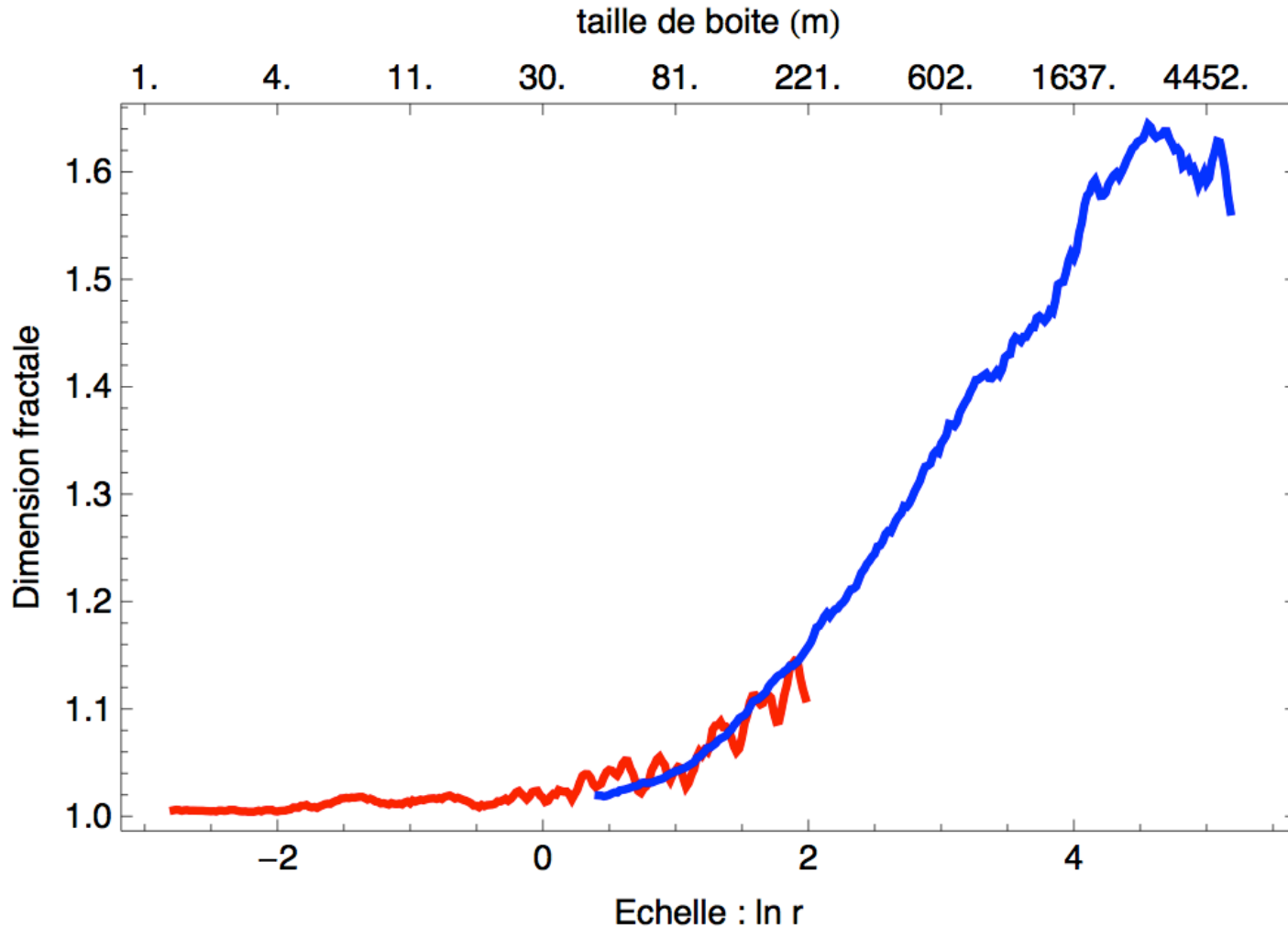
$$D(h) = 1 + a (h - h_1)(h - h_2)$$

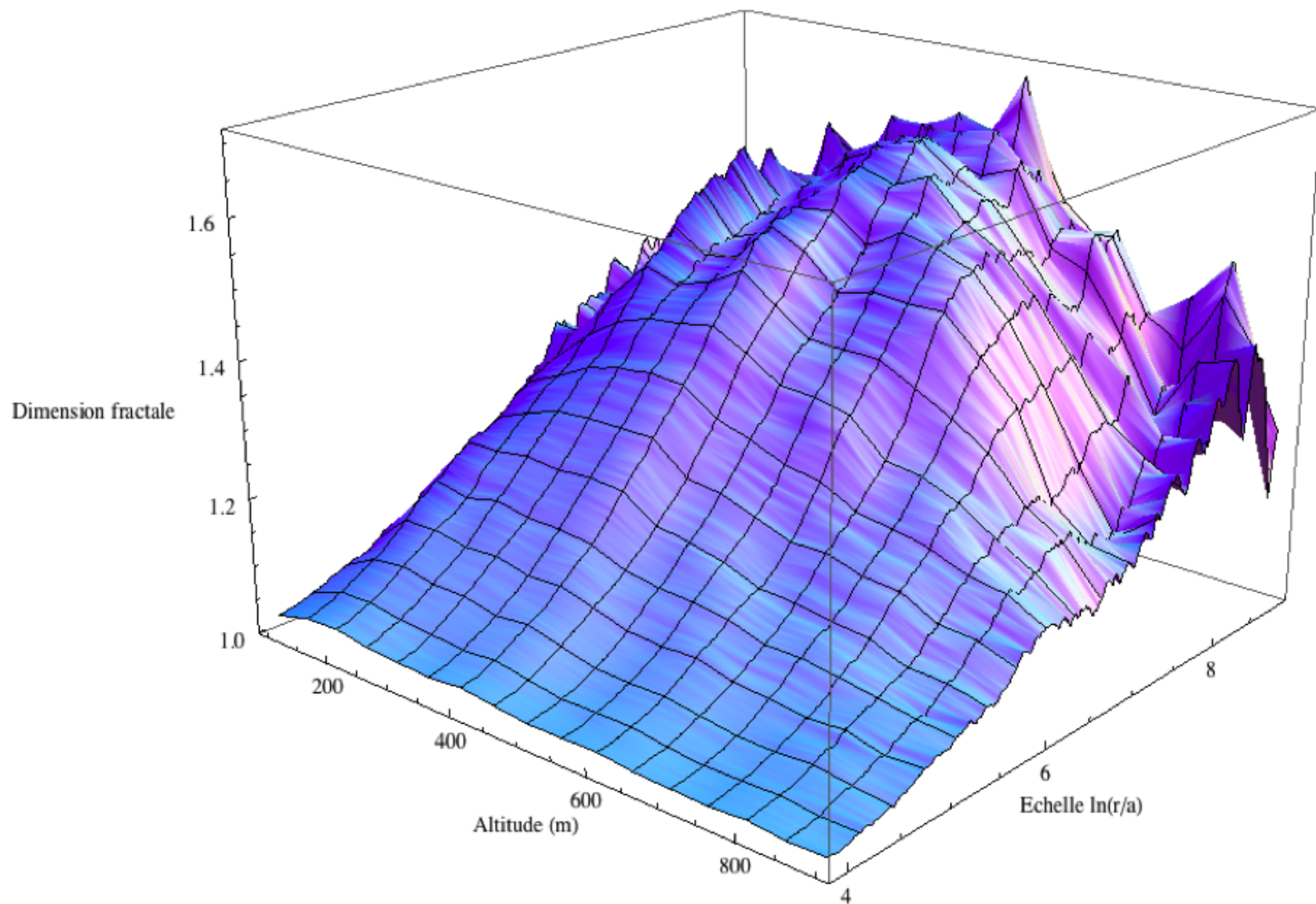
Mesuré:

$$h_1 = -(117 \pm 30) \text{ m}$$

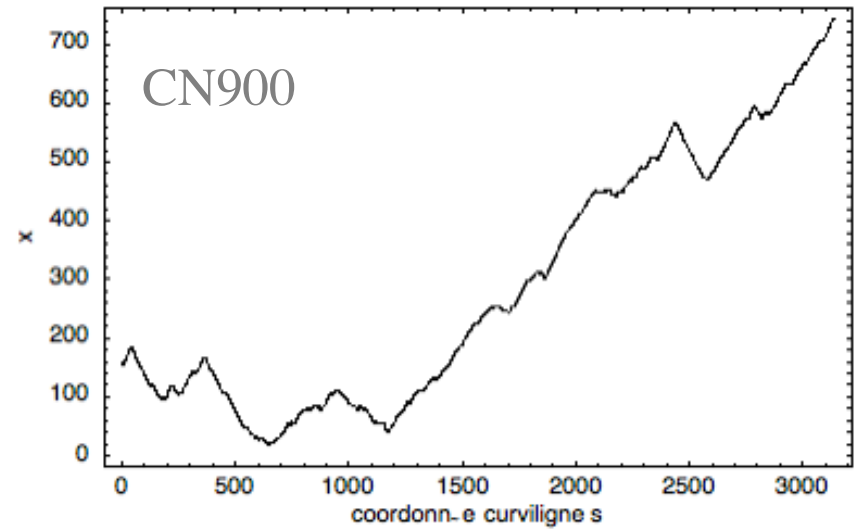
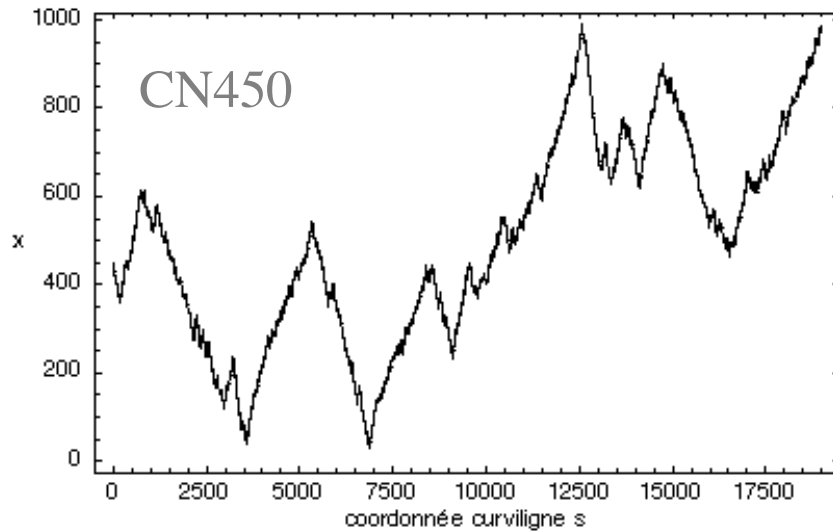
$$h_2 = (1002 \pm 28) \text{ m}^{30}$$

# Gardon ( $r = 50$ m) et Cartaou ( $r = 1$ m) : CN500, biais corrigé, raccordement

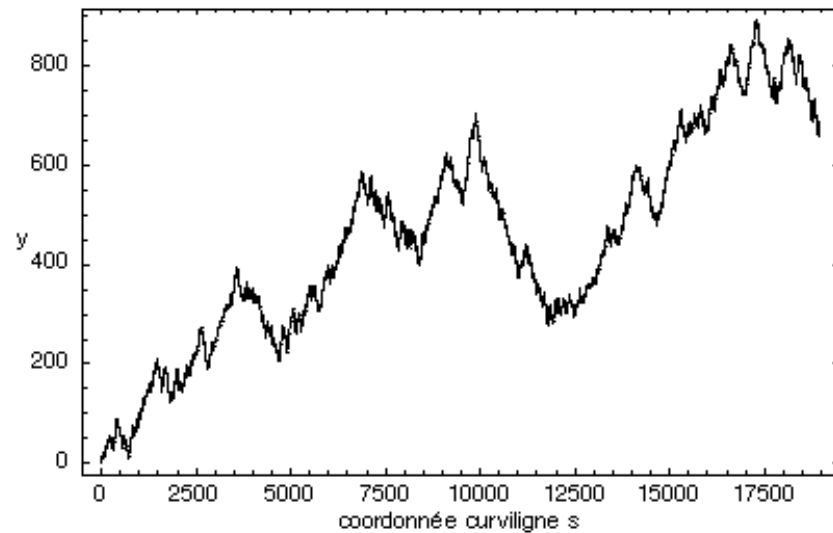




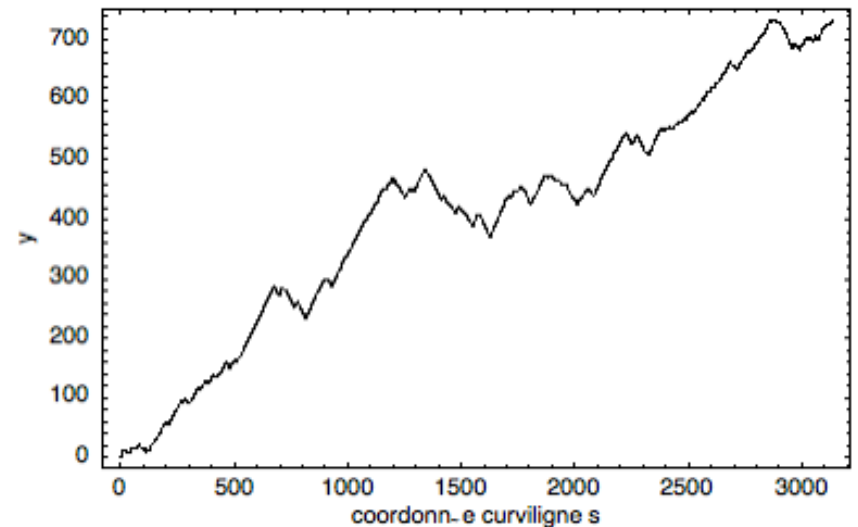
# Coordonnées curvilignes. 3 : $x(s)$ et $y(s)$



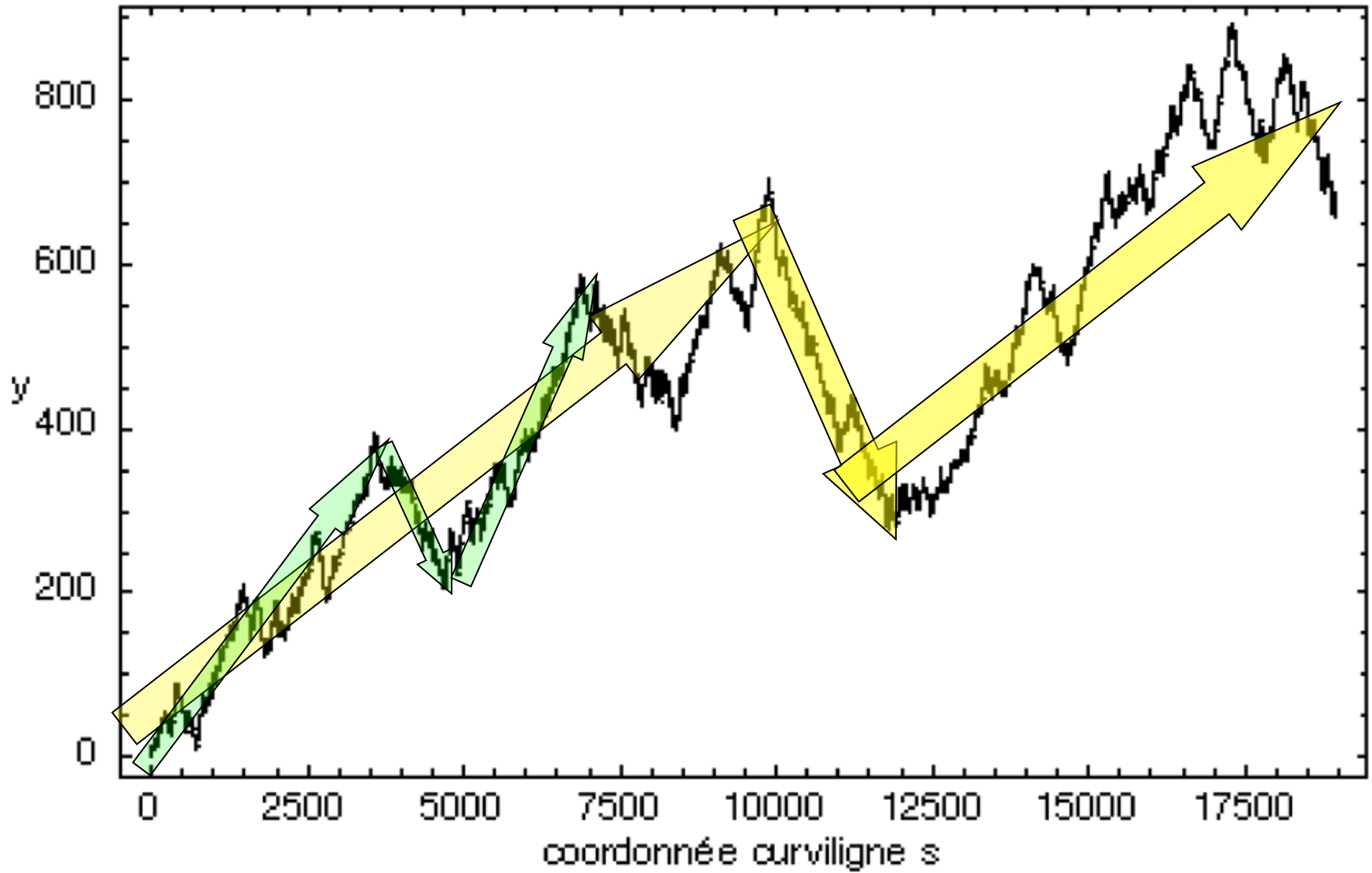
- Graphics -



- Graphics -



# Projection sur l'axe des y (latitude)



# GARDON : MODELE YZ

Réseau hydro :

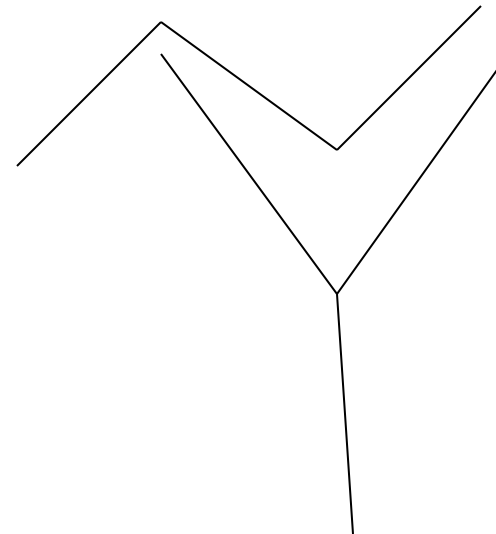
\* creuse la surface

\* suit les géodésiques de cette surface

→ cf Relativité généralisée:

- Matière : courbe l' espace-temps
- suit les géodésiques de l' espace-temps courbé par elle

Modèle d' érosion /  
creusement : couplage  
bassin versant (Z) / réseau  
hydrographique (Y)



## Application : compréhension de Das ?

Mesure de Das :  $Das(\max) = 1.585 \pm 0.005$

Conjecture :  $D_{\max} = \ln 3 / \ln 2$

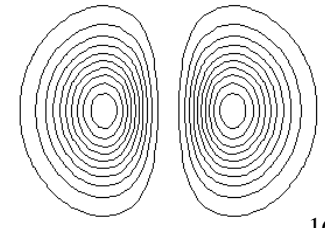
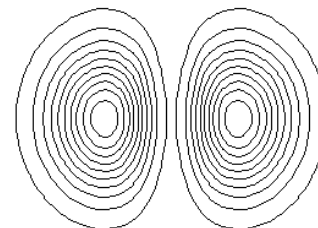
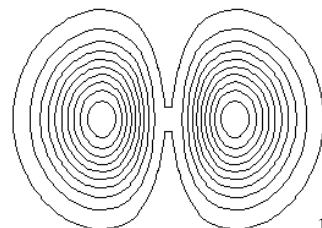
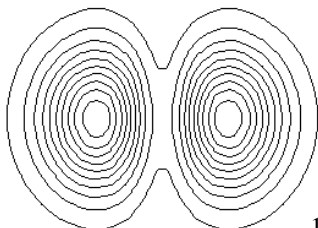
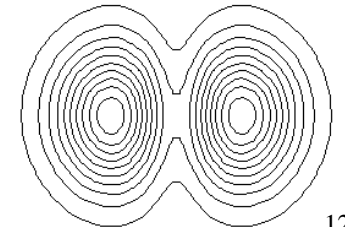
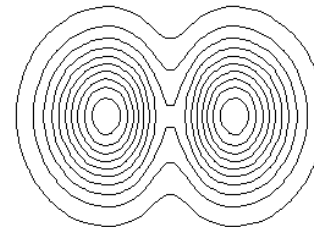
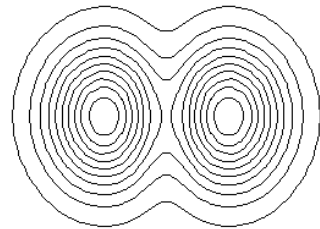
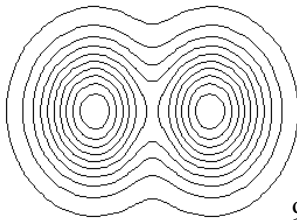
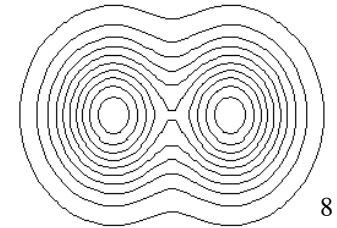
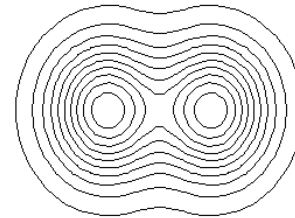
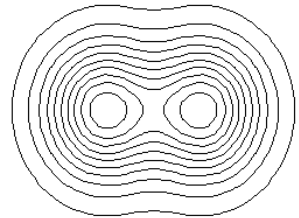
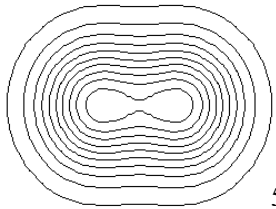
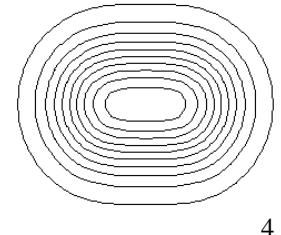
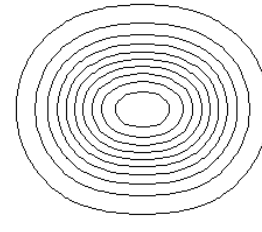
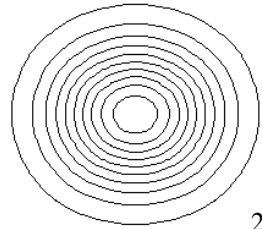
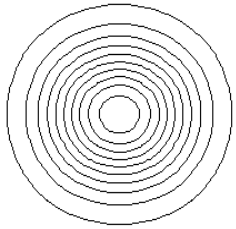
Rappel : fractal itérés formés de  $p$  segments de longueurs  $1/q$  -->  
 $D_f = \ln p / \ln q$ ,  $g = p/q$

$q = 2$  et  $p = 3$  ?

--> cf Max Forriez : facteur d' échelle  $g = 1.5 = 3/2 \dots$

# Biologie, sciences de la vie

MODELE de DUPLICATION (saut d'énergie)  
Solution dépendant du temps de l'équation de Schrödinger macroscopique



# MODELE de DUPLICATION

Solution dépendant du temps de l'équation de Schrödinger généralisée

Potentiel: oscillateur harmonique 3D isotrope

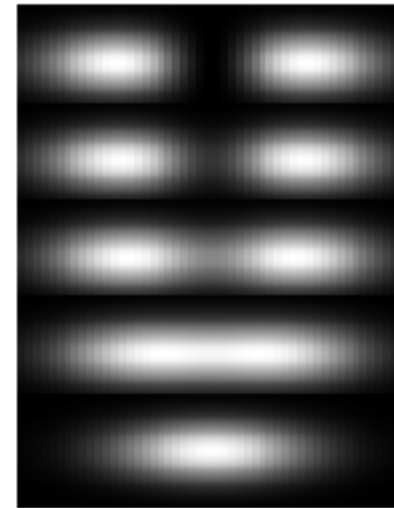
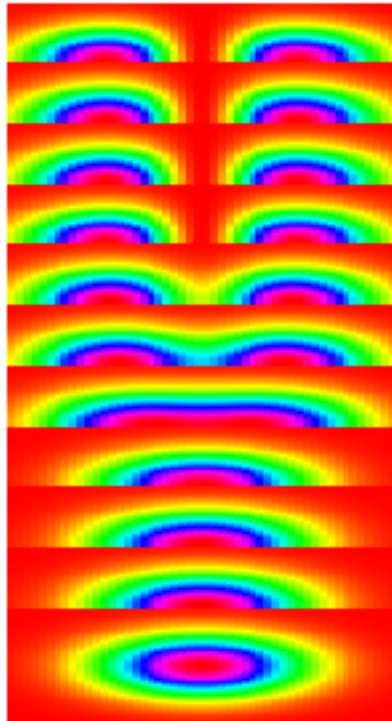
Passage de  $n = 0$  ( $E = 3mD\omega$ ) à  $n = 1$  ( $E = 5mD\omega$ )



Représentation : 2D, niveaux de densité

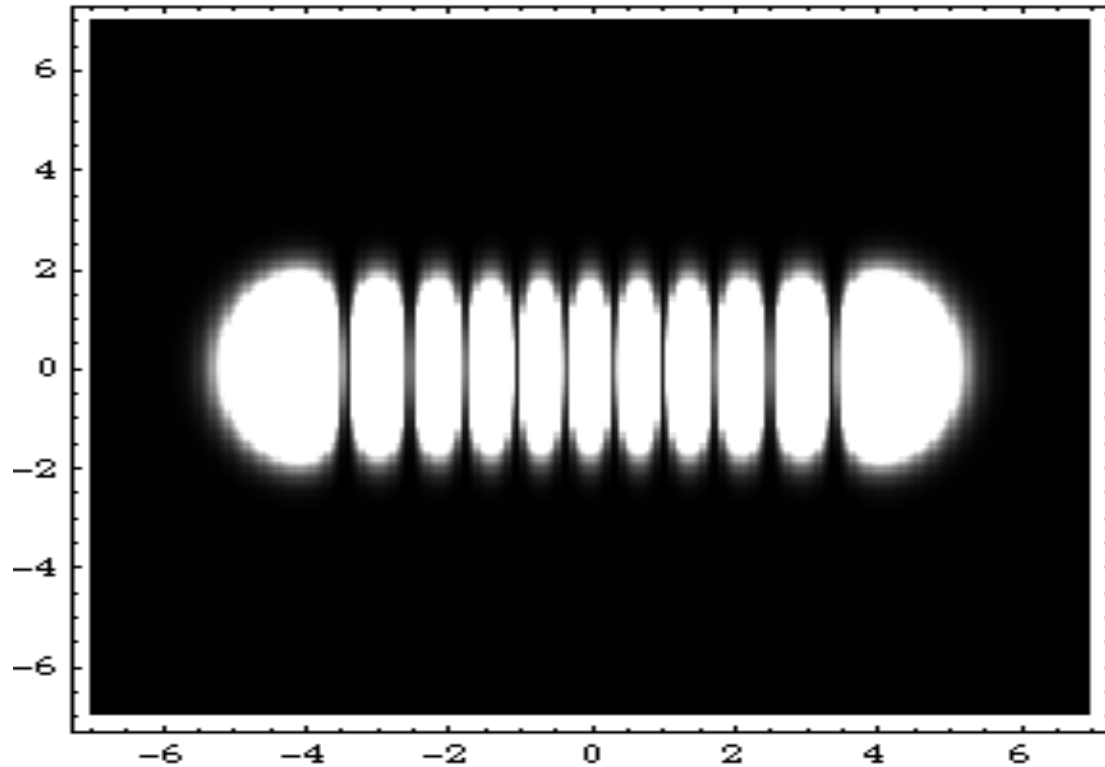
# Croissance, arborescence, bifurcation

## Solutions de Schrödinger (oscillateur 2D) avec sauts d'énergie



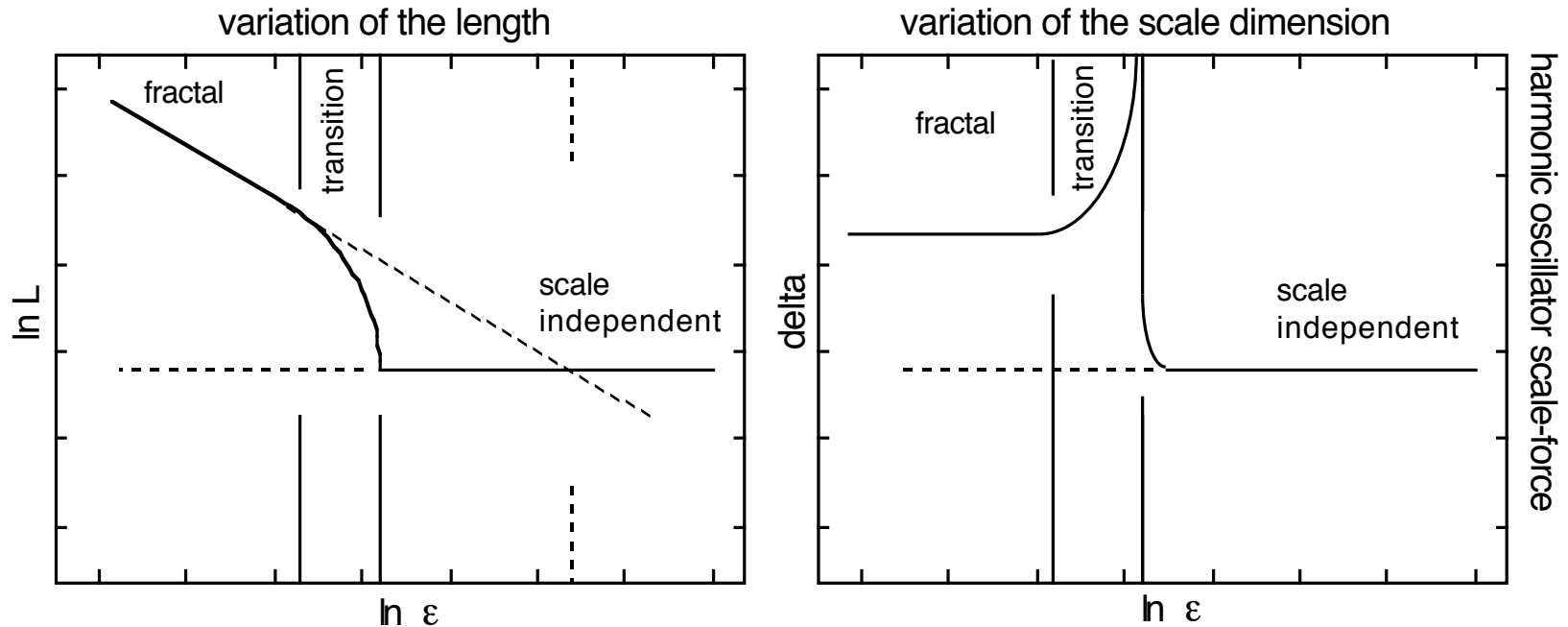
$n=0$  à  $n=1$

# Segmentation: annélides?



Oscillateur harmonique:  $(10,0,0)$

# Modèle de confinement (paroi, membrane)



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'un potentiel d'oscillateur harmonique (dans l'espace des échelles)

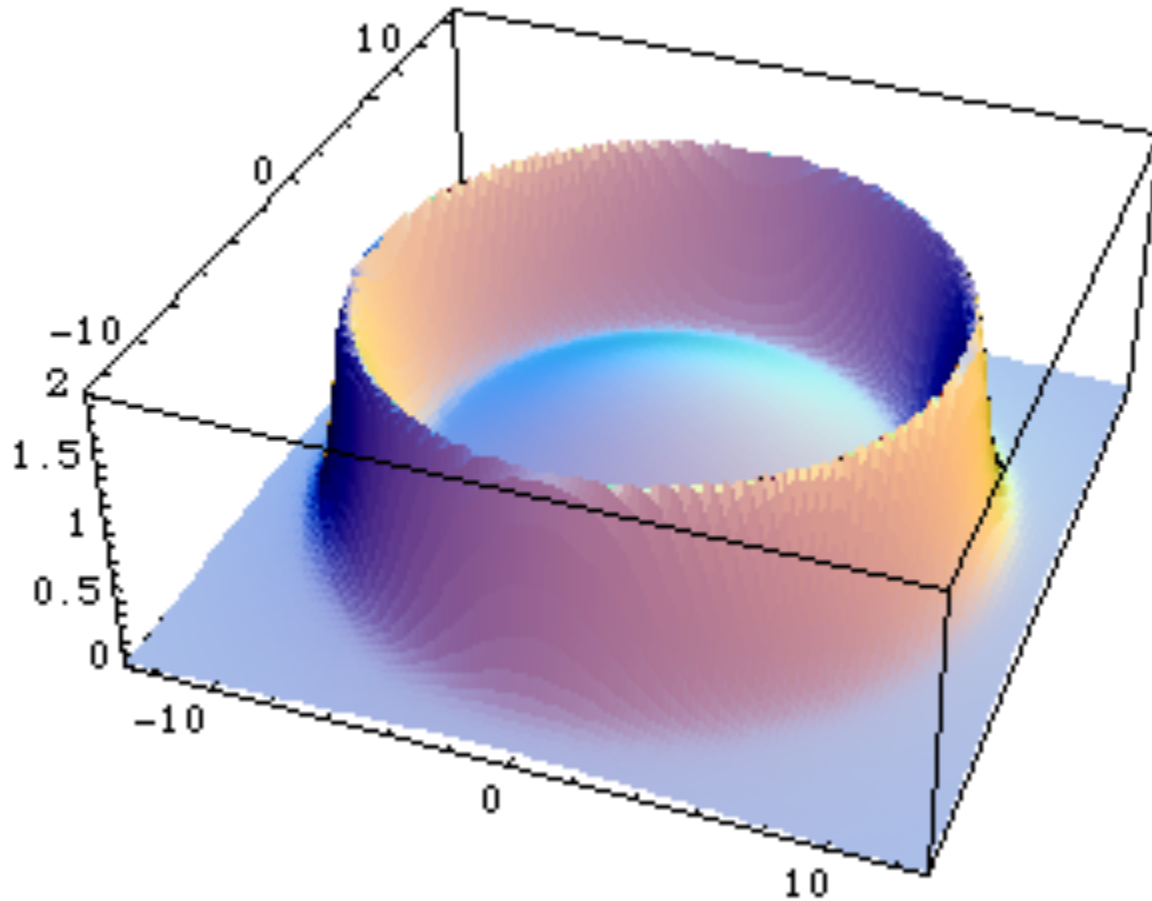
$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d \delta^2} = \frac{1}{\delta_0^2} \ln \mathcal{L}$$

→

$$\ln \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} = \delta \sqrt{\ln^2 \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\delta^2}}$$

# Modèle de paroi

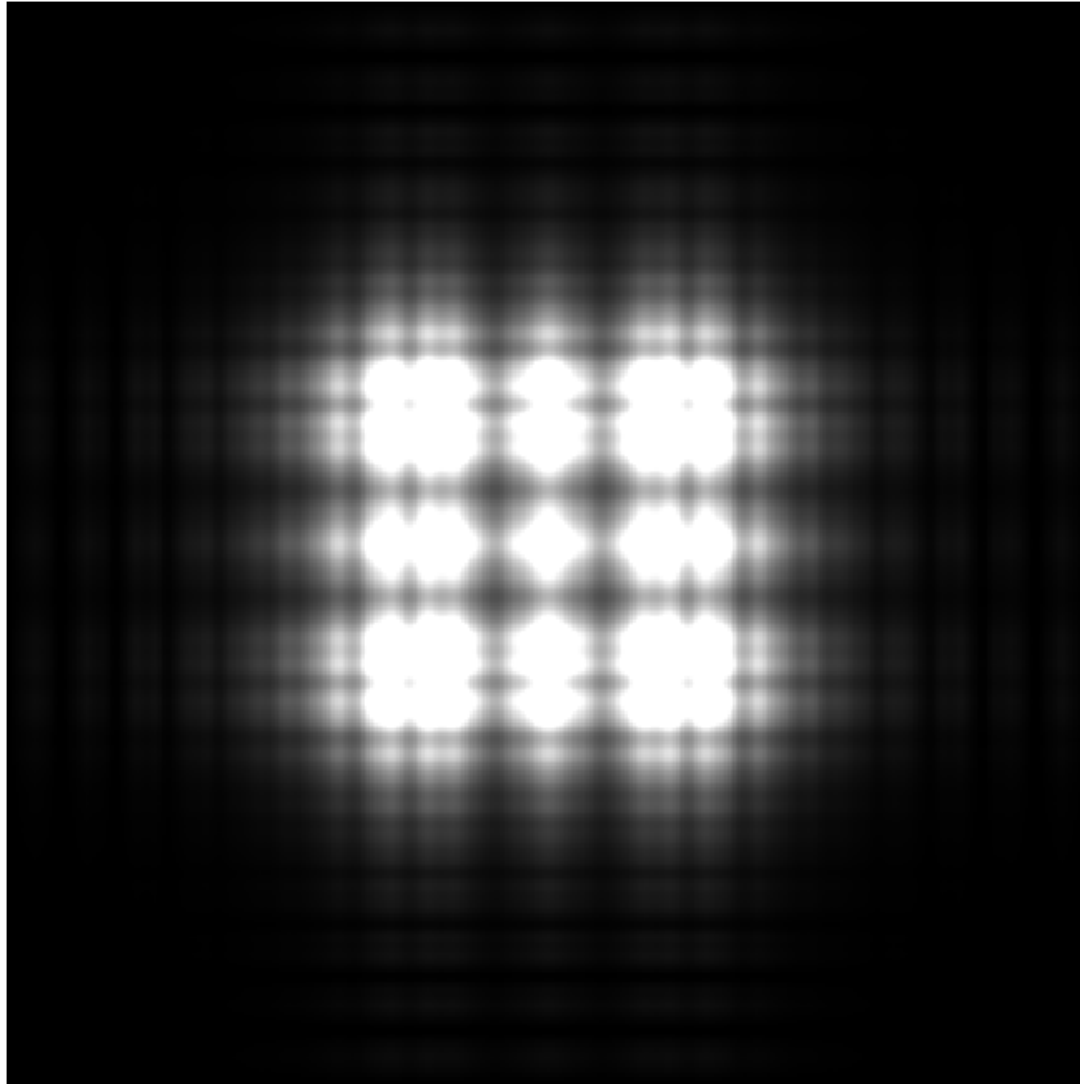
## Séparation intérieur / extérieur



Solution  
d'une équation de  
Schrödinger  
généralisée

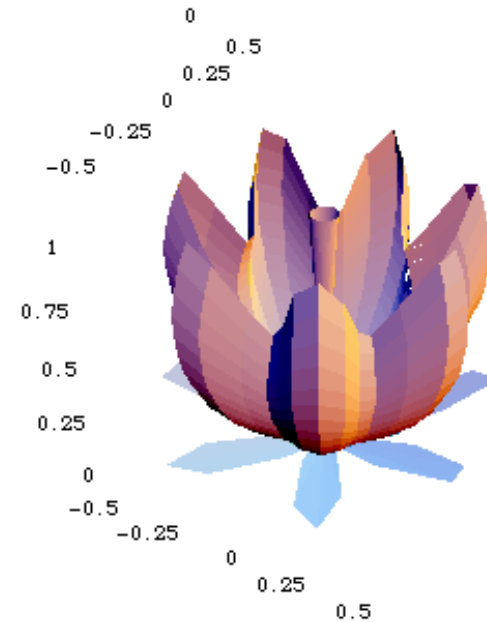
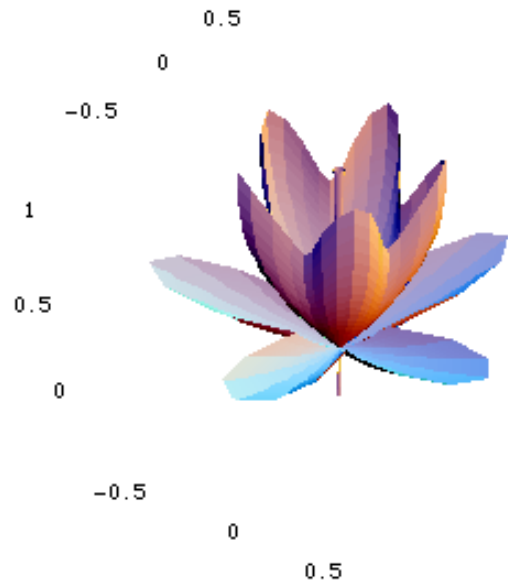
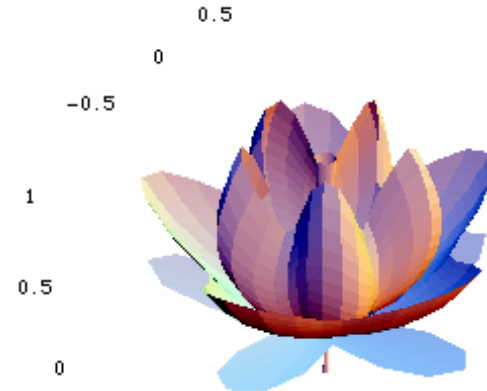
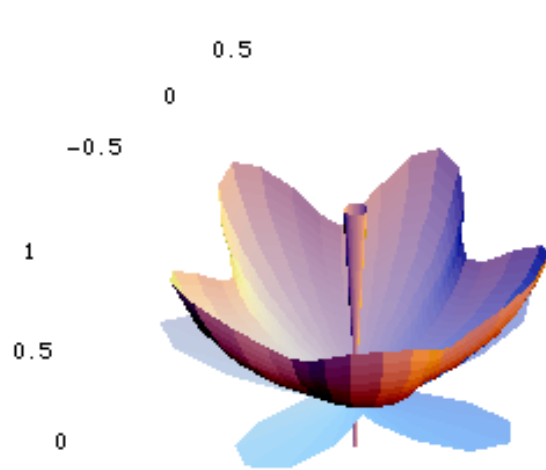
Représentation 2D en niveau de densité

# Solutions fractales (nondifférentiables) de l'équation de Schrödinger dans une boîte

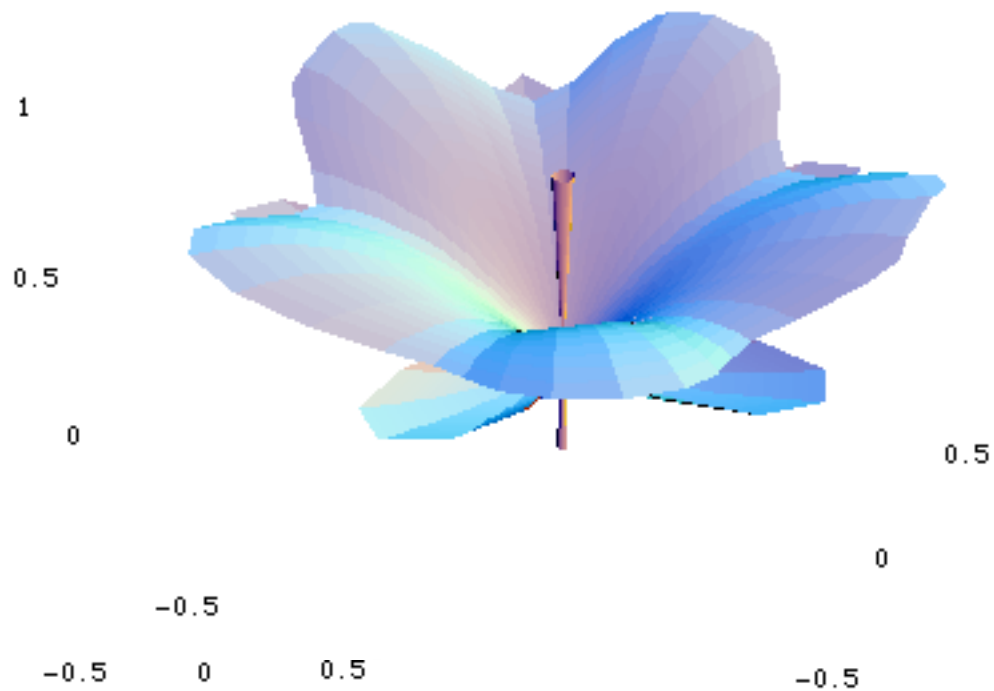


# Morphogénèse. Formes florales.

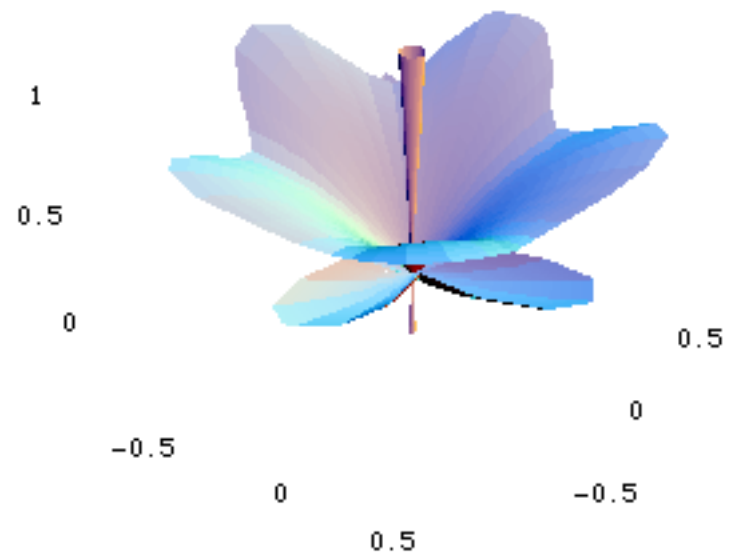
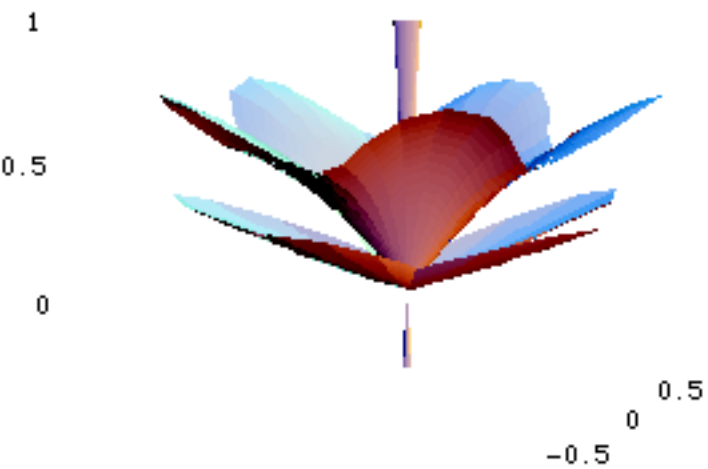
Solution de l'équation de Schrödinger généralisée pour un processus de croissance à partir d'un centre (diffusion, onde sphérique sortante)

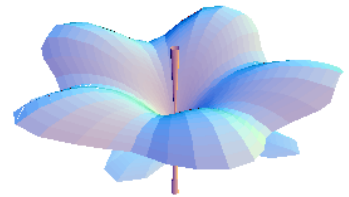
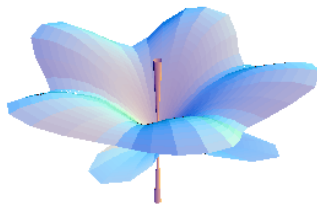
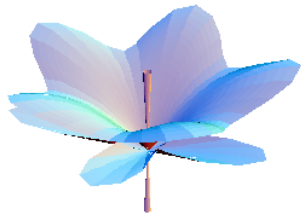
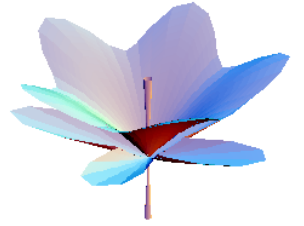
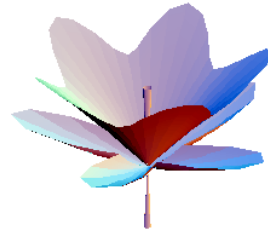


# FLEURS de Schrödinger ...



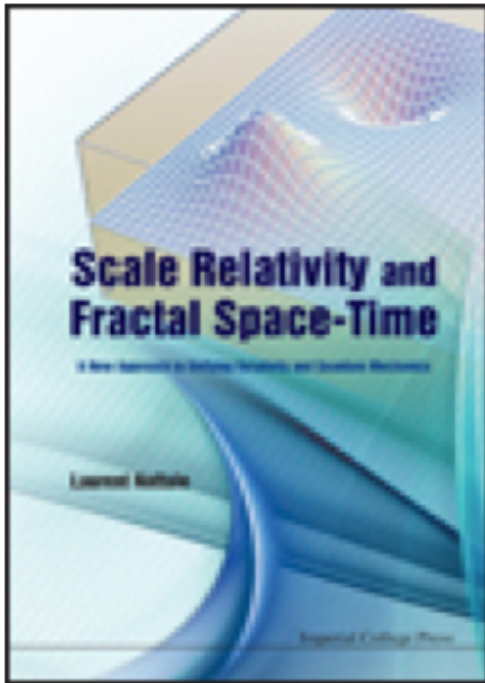
# Platycodon (campanulacée)!







# Nouveau livre sur la Relativité d'échelle (2011)



## **SCALE RELATIVITY AND FRACTAL SPACE-TIME**

A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics

by **Laurent Nottale** (*Paris-Meudon Observatory, France*)

This book provides a comprehensive survey of the development of the theory of scale relativity and fractal space-time. It suggests an original solution to the disunified nature of the classical-quantum transition in physical systems, enabling the basis of quantum mechanics on the principle of relativity, provided this principle is extended to scale transformations of the reference system. In the framework of such a newly generalized relativity theory (including position, orientation, motion and now scale transformations), the fundamental laws of physics may be given a general form that unifies and thus goes beyond the classical and quantum regimes taken separately. A related concern of this book is the geometry of space-time, which is described as being fractal and nondifferentiable. It collects and organizes theoretical developments and applications in many fields, including physics, mathematics, astrophysics, cosmology and life sciences.

