LES ONTO(PO)LOGIES MUSICALES

FRANCK JEDRZEJEWSKI

Résumé. L'exposé que voici est la transcription des notes que j'ai écrites lors de mon intervention au séminaire Mamuphi. Le plan n'a pas été remanié. Parfois, j'ai simplement intégré des réponses à des questions qui ont été posées ou qui se sont posées implicitement. J'ai aussi ajouté quelques commentaires ainsi que quelques références que je n'ai pas donnés lors de la présentation orale. Le point central de cette intervention est de se demander s'il existe des structures catégorielles pertinentes utiles aux sciences humaines et de montrer mon scepticisme à l'égard des topoi. En somme il s'agit de se demander si les topoi ne sont pas trop riches pour être honnêtes ?

Comme point de départ à cette discussion, je voudrais partir du *Topos of music* de G. Mazzola et de ses collaborateurs, mais aussi de quelques articles publiés autour des mathématiques, musique et philosophie, dans cette interaction transdisciplinaire que j'appellerai la *relation mamuphique* (du nom de ce séminaire *MaMuPhi*). La première utilisation de la notion de catégories appliquées à la musique (et musicologie) est due à Mazzola[1]. Depuis les notions se sont informatisées, mais l'idée de ce que Mazzola appelle *une catégorie des compositions locales* (ou *globales*) est restée sans changements. Ces catégories peuvent-elles formées une *ritournelle*, au sens où Deleuze employait ce terme comme l'expression d'un territoire où les forces convergent et les fonctions se réorganisent[2], est la question que nous aimerions poser.

1. La relation mamuphique

L'adjonction des mondes. Dans l'article qu'ils publient en commun dans le *Journal of Mathematics and Music*[3], Guerino Mazzola et Moreno Andreatta cherchent, disent-ils, à développer à un méta-niveau les relations entre les activités mathématiques et musicales en termes de foncteurs adjoints. D'emblée, l'introduction de l'adjonction pose problème. Elle suppose qu'il existe une catégorie des mathématiques et une catégorie de la musique entre lesquelles s'opèrent des transferts de structure par l'intermédiaire de foncteurs. Il ne s'agit pas seulement de correspondances, mais d'adjonction, qui est une propriété bien plus forte qu'une simple correspondance. Cette adjonction signifie que si F est un adjoint à gauche de G

Date: ENS, Paris, 6 décembre 2008.

[1] G. Mazzola, *Gruppen und Kategorien in der Musik. Entwurf einer mathematischen Musiktheorie*, Berlin, Heldermann Verlag, 1985. *The Topos of Music*, Basel, Birkhäuser, 2002.

[2] G. Deleuze : « En un sens général, on appelle *ritournelle* tout ensemble de matières d'expression qui trace un territoire, et qui se développe en motifs territoriaux, en paysages territoriaux. » in *Mille Plateaux,* Editions de minuit, 1980, p. 297

[3] G. Mazzola, M. Andreatta, "Diagrams, gestures and formulae in music", *Journal of Mathematics and Music,* 1 **1** (2007) 23-46.

et si X est un objet de la catégorie $\mathcal{A}$ et Y un objet de la catégorie $\mathcal{B}$ alors dans la catégorie $\mathcal{A}$, les morphismes entre X et $G(Y)$ sont isomorphes aux morphismes dans la catégorie $\mathcal{B}$ entre $F(X)$ et Y.

$$Hom_{\mathcal{A}}(X, G(Y)) \cong Hom_{\mathcal{B}}(F(X), Y)$$

Non seulement il y a un transfert entre catégories, mais il se passe quelque chose de plus entre les éléments de chaque catégorie qui pose une isomorphie entre les morphismes qui se constituent entre les objets X et $G(Y)$ et les morphismes qui agissent entre les objets $F(X)$ et Y. Nous sommes avertis dès les premières lignes : par adjonction, tout ce qui se passe dans la "catégorie" des mathématiques induit les mêmes résonances dans la "catégorie" de la musique, et inversement. Si tel est le cas il faudrait préciser les termes de cette adjonction. N'y a-t-il pas là une attitude *scientiste* qui consisterait à croire que les mathématiques, et en particulier la théorie des catégories, pourraient expliquer les enjeux du musical ? Si je reviens à la belle définition que donne Alain Badiou qu'un monde est ce qui est ontologiquement clos, l'adjonction des mondes musico-mathématiques revient à nier l'existence du monde-musique (puisque l'Être d'un objet musical se prolonge par adjonction dans l'Être d'un objet mathématique. Ce qui est le propre d'un *prolongement fonctoriel*, qui n'est pas nécessairement un *prolongement analytique*).

Le calcul dans les catégories. Identifier des catégories, c'est déjà poser des équations (A chaque morphisme, on peut associer une équation. Entre deux objets distincts $A \rightleftharpoons B$ liés par un morphisme a, on peut associer l'équation $a^2 = 1$). Identifier des catégories, c'est donc poser les prémices d'un *calcul des relations* et s'éloigner de la nature même de la musique. Cette idée de *calculer les structures*, on la trouve très présente dans les années 60-70 dans l'Ecole d'Ehresmann (Burroni, Conduché, Coppey, Foltz, Guitart, Lair, etc.) et dans ce "*constructivisme structural*" où chaque diagramme est l'occasion d'un calcul. Si cela est parfaitement justifié dans le domaine mathématique, cela demande à être nuancé lorsqu'on applique ces théories aux sciences humaines. Si la musique diagrammatise, ce n'est pas pour nouer un calcul, mais dans la plupart des cas, pour topographier des relations, relation de dominantes, relation de timbres, d'espaces et de mouvements (pour paraphraser le titre d'un œuvre de Dutilleux). Naturellement, la question qui est derrière est de savoir ce qu'est la théorie des catégories : de la géométrie algébrique ? de l'algèbre homologique ? ...

Le titre de l'article de René Guitart[4] résume parfaitement la situation : *Que peut-on écrire et calculer de ce qui s'entend ?* Faut-il nécessairement calculer ce qui s'entend ? Non. D'ailleurs René Guitart ne s'y trompe : on peut aussi l'écrire. Si la pertinence est ce qui se singularise, ne suffit-il pas de topographier de manière diagrammatique ces singularités musicales ? Faire éclore les points, disait Châtelet, pour exprimer la puissance des choses. Car c'est bien dans la machinerie diagrammatique que les singularités émergent. « Pour ceux qui savent être attentifs ce sont les *sourires de l'être.* »[5].

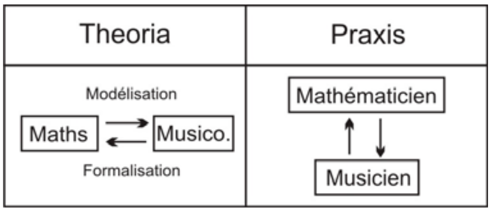
Faire un calcul, ce n'est pas nécessairement attribuer des nombres. Dans le calcul du groupe fondamental, le mathématicien détermine ce que sont les classes d'équivalence pour la relation d'homotopie. Dans ce cas, le calcul conduit à une

[4]R. Guitart, Que peut-on écrire et calculer de ce qui s'entend ? , in *Penser la musique avec les mathématiques ?* éd. Ircam-Delatour, 2006.

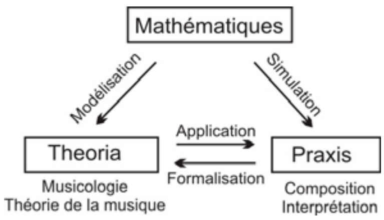
[5]G. Châtelet, *Les enjeux du mobile*, p. 33.

caractérisation de l'espace qui se joue dans la détermination des types d'homotopie des lacets que l'on peut construire sur une surface. Comment caractériser simplement l'espace musical et ses singularités autrement que par une topographie ? La question serait plutôt de déterminer une relation équivalente à l'homotopie pour l'espace musical à la manière dont Lawvere[6] a introduit la notion de *cohésion* pour comprendre la nature du continuum spatio-temporel en physique. C'est sans doute l'équivalent d'une notion de ce type que nous cherchons. Une force *cohésive* qui expliquerait ou caractériserait l'espace musical au même titre que l'homotopie topographie les surfaces. C'est en ce sens qu'il faut penser la notion de *topos*, au sens étymologique premier de *lieu,* sans référence aucune aux mathématiques, pour donner accès à cet espace d'entrelacement des singularités diagrammatiques.

Pratiques musiciennes. François Nicolas[7] propose de préciser la ligne de partage entre *pratiques théoriques musiciennes et théories musicologiques*. Il pose une double dichotomie : l'une entre *theoria* et *praxis*, l'autre entre *musique* et *musicologie*, assignant la théorie musicale à la musicologie.



Dans les deux cas (théoriques et pratiques) les mathématiques pourraient s'enrichir d'éléments apportés par la musique. Je crois au contraire que musique et musicologie n'apportent rien aux mathématiques, que la musique ne permet pas de *faire* des mathématiques. Mais qu'à l'inverse, il existe de nombreuses applications des mathématiques à la musique, tant dans la modélisation (Conception d'un modèle à l'aide d'outils mathématiques destiné à une meilleure compréhension des phénomènes de musique et musicologie) que dans la simulation (Implémentation dans le geste compositionnel ou l'écriture musicale d'événements, de processus ou d'objets mathématiques). Si on conserve la distinction entre *theoria* et *praxis*, le schéma est plutôt le suivant.



Si la musique et la musicologie ne sont pas les sciences physiques qui au contraire, alimentent les mathématiques (e.g. théorème de Fourier, distributions, travaux de Witten, etc.), cela ne veut pas dire pour autant que musique et musicologie seront

[6] F.W. Lawvere, Axiomatic Cohesion in *Theory and Applications of Categories*, 19, **3** (2007) 41–49.

[7] F. Nicolas, Théoriser aujourd'hui la musique à la lumière des mathématiques : un point de vue musicien, *Gazette des mathématiciens*, 2008.

toujours incapables de faire des mathématiques, mais nous devons admettre que ce n'est pas le cas aujourd'hui.

Si la musique n'a pas de signification, elle a toutefois un sens. Et ce sens est déterminé par des considérations de lieux. Si le zéro a un sens, dit Gilles Châtelet, c'est parce qu'il est au centre de deux séries d'entiers (les entiers positifs et les entiers négatifs) qui s'annihilent précisément au point zéro. En peinture, les formes, les tensions, les résonances sont de la même façon prises dans une topologie signifiante que l'artiste organise, mais qui ont aussi leur vie propre, poussée par une nécessité intérieure. Kandinsky disait que « l'œuvre d'art se reflète à la surface de la conscience »[8]. C'est pourquoi cette question du sens et de lieux est aussi une question d'ontologie. Pour découvrir ce sens, une des voies possibles est de chercher ce qui se donne diagrammatiquement dans la musique. Car il s'agit bien d'une question de *topoi*, mais prise, non pas au sens mathématique, mais au sens premier du mot, étymologique, une *question de lieux, une question de topologie*. Là est la vraie nature de l'être musical. Le titre de mon intervention résume cette idée. De la même façon que pour Heidegger l'*onto-(théo)-logie* étudie la question de l'Être relativement à la théologie, l'*onto(po)logie* est un mot valise pour désigner le croisement de l'ontologie et de la topologie, l'étude de la question de l'Être relativement aux lieux, aux topoi. A cet égard il est remarquable que dans son commentaire du chant des sirènes, Sloterdijk explique que si l'auditeur se laisse envouter par cette musique, « c'est parce qu'elles chantent depuis le lieu de celui qui écoute »[9] Elle chantent là où se produit l'envoûtement, dans l'oreille même d'Ulysse.

2. **L'oubli de l'Être, l'oubli des morphismes**

Dans le domaine mathématique, les morphismes sont intrinsèquement liés aux objets. Dans la catégorie des ensembles, les objets sont les ensembles et les morphismes les applications entre ensembles. Dans la catégorie des espaces topologiques, les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications continues. Mettre une topologie c'est choisir parmi les applications continues, car une topologie se définit de manière équivalente par ses ouverts, par ses fermés, par ses voisinages, mais aussi par ses applications continues, car l'inverse d'un ouvert par une application continue est encore un ouvert. Dans la catégorie des groupes, les objets sont les groupes, les morphismes sont les homomorphismes de groupes. Dans tous les cas, les morphismes sont intimement liés aux objets sur lesquels ils agissent. Si on ajoute à cela que les objets eux-mêmes peuvent être vus comme des morphismes, on voit que l'importance catégorielle des morphismes est leur immanence. C'est sans doute la raison pour laquelle en théorie des catégories l'objet ne reçoit pas de définition précise. Il est *canonique* comme tout ce qui ne se définit pas.

Dans les applications de la théorie des catégories aux sciences humaines, et ici dans les applications à la théorie musicale et à la musicologie, les morphismes perdent leur spécificité vis-à-vis des objets. Si les objets tombent facilement sous la main, il en va autrement des morphismes. Quels morphismes choisirons-nous entre deux œuvres musicales ? entre une œuvre de Monteverdi et une de Boulez ? quels morphismes choisirons-nous entre deux interprétations d'une même sonate ? entre une interprétation de Gould et une de Brendel ? On voit que la question de ce choix, si elle est pertinente pour des structures mathématiques, perd toute caractérisation

---

[8]W. Kandinsky, *Point, Ligne, Plan. Pour une grammaire des formes*, p 25.

[9]P. Sloterdijk, *Bulles. Sphères I*, Pluriel, p. 531.

pour des objets de sciences humaines. Seule reste la notion d'ensemble. Toutefois, si la question est restreinte à des objets plus techniques des morphismes semblent plus adaptés. C'est le cas des accords dont la transposition (c'est-à-dire au plan mathématique, la translation modulo 12) définit des morphismes entre accords. De la même façon, l'ensemble des séries dodécaphoniques a des morphismes qui sont les éléments du groupe diédral (qui se lisent musicalement comme les transpositions et inversions). Il existe donc des transpositions de notions mathématiques au champ musical, mais il semble difficile d'en tirer des conséquences au niveau de la théorie des catégories. Seule domine la structuration qui est obtenue par une sorte de *pattern maching* des notions mathématiques vers l'organisation architectonique du musical. Pourquoi convoquer des outils mathématiques comme la notion de faisceau ou les topologies de Grothendieck si on ne peut réellement les utiliser ?

Le mathématicien cherche à comprendre comment se comporte une structure localement. Par exemple, la question qu'il se pose est : est-ce que l'ensemble de tous les sous-groupes d'un groupe donné forme un groupe ? La collection des sous-catégories d'une catégorie donnée est-elle une catégorie ? Pourquoi ces questions lorsqu'on les transpose aux sciences humaines dégénèrent-elles ? La réunion de tous les sous-morceaux de musique forme-t-elle un nouveau morceau de musique ? Oui, trivialement. D'où vient cette trivialité ? Simplement du fait que la réunion des sous-ensembles d'un ensemble est encore un ensemble, car la structure que l'on prend sur ces éléments musicaux n'est pas suffisamment fine.

Le plein épanouissement des catégories musicales suppose donc de reconsidérer l'oubli des morphismes et la trivialité de la notion d'ensemble. Pour éprouver la relation mamuphique, je mettrais cela en relation avec l'oubli de l'Être. Pour Heidegger, la question de l'Être est tombé dans l'oubli et la trivialité. La tradition philosophique doit être repensée à partir du *Dasein*, et c'est aussi dans ce sillage que des philosophes ont avancé l'idée d'une *déconstruction*. C'est cela qui justifie le titre de ce paragraphe et ouvre de nouvelles perspectives.

3. **L'ensemblisme**

Les mathématiques actuelles ne sont pas adaptées aux sciences humaines. Elles reposent sur le concept largement répandu d'ensemble qui est souvent insuffisant pour les modèles. Ne pas considérer d'autres structures que la notion d'ensemble est aussi une critique que j'ai déjà formulée à propos de la philosophie d'Alain Badiou – qui a bien d'autres attraits, par ailleurs – mais comment peut-il en être autrement après avoir écrit *Le Nombre et les nombres* ? Qu'est-ce qu'une structure qui n'est pas un ensemble ? Ou posé autrement, qu'est-ce qui pourrait constituer une gêne pour l'application de la notion d'ensemble à des domaines hors mathématiques ? (Nous ne considérons pas ici certaines structures en relation avec les axiomes de refondation des mathématiques comme les *hypersets* de Peter Aczel).

L'ensemble n'admet pas le clone. Une collection du type $\{1, 2, 1, 3\}$ n'est pas un ensemble. Elle a bien une structure ensembliste sous-jacente $\{1, 2, 3\}$ mais n'admet pas qu'il puisse exister deux éléments identiques, deux clones dans un même ensemble. Cette structure est aujourd'hui connue sous le nom de multi-ensembles (*multisets*). Ne pas accepter le clonage, revient pour le physicien à ne pas accepter l'*indiscernabilité* : deux particules indiscernables ne peuvent appartenir à un même ensemble, bien qu'elles peuvent se trouver dans les mêmes états quantiques et à une même énergie.

La visibilité des éléments. Dans un ensemble, tous les éléments se voient mutuellement, ce qui n'est pas le cas dans de nombreuses situations hors des mathématiques. On pourrait envisager une structure dans laquelle 1 voit 1 et 2 mais pas 3, 2 voit uniquement 3 et 3 ne voit que 2. Cette structure correspond à un ensemble muni d'une relation R qui n'est ni réflexive, ni symétrique, ni transitive. Certes, les éléments 1, 2 et 3 forment un ensemble mais la relation "voir" est constitutive de la structure de données $\{1R1,\ 1R2,\ 2R3,\ 3R2\}$. Dans d'autres contextes, cette structure est connue sous le nom de *graphe orienté*. Les opérations ensemblistes et algébriques sont remises en cause. Imaginons que les entiers pairs ne voient pas les entiers impairs, la notion d'addition de deux entiers impairs devient une opération externe et n'a pas de sens, mais elle conserve tout son sens pour les entiers pairs (puisque la somme de deux entiers pairs reste une opération interne). La visibilité est aussi à l'origine des *ensembles observés* de Jean Bénabou (autrefois appelés *ensembles empiriques*) qui inclut l'observateur dans la structure même de l'ensemble.

Les ensembles enrichis. Dans un ensemble classique, tous les points sont du même type et ont la même taille. Dans un ensemble enrichi, on suppose que les points ont chacun un type T_i et que tous les points de type T_i ont même taille. Les points sont infiniment petits, mais cette infinitude est graduée. Dans un groupe G, le point $g \in G$ est de type n si l'ordre de g est n.

4. L'interprétation toposique

Le faisceau des interprétations. Voici un exemple de transposition d'un résultat mathématique à la musique. Considérons la proposition suivante. Soit E un ensemble (resp. un espace topologique) et soit P un espace topologique. Le préfaisceau qui à U ouvert de P associe l'ensemble des applications (resp. des applications continues) $\{f \text{ tq } f : U \to E\}$ est un faisceau. Appliquons ce résultat à la musique. Si E est une représentation sonore et P une partition de musique (munie d'une topologie, celle de $\mathbb{R}^n$ par exemple) alors la proposition mathématique dit simplement qu'*un opus musical est le faisceau des interprétations d'une partition donnée.* Cela avait déjà été noté par René Guitart dans l'article cité, puis redécouvert récemment par François Nicolas. Remarquons que dans cette transposition des mathématiques à la musique, il est inutile de tout indexer par rapport au temps. Dans ces conditions, nous ne pouvons recoller que des segments temporels, alors que nous avons besoin de recoller des segments selon toutes sortes de paramètres (e.g. des segments de timbres dans les œuvres de Grisey ou de Murail).

L'Un de l'œuvre. L'œuvre ouverte comme les *Archipels* de Boucourechliev offre plusieurs parcours d'exécution possible et a donc plusieurs "partitions canoniques". Mais ces partitions ne peuvent être séparées si on veut conserver le caractère unitaire de l'œuvre. "Formaliser l'ensemble des exécutions-interprétations auxquelles une même partition peut donner lieu" dans le but d'en dégager, dit François Nicolas, l'*un* d'un morceau. Dans le cas d'une œuvre ouverte, il est plus difficile de comprendre ce qu'est l'Un d'un morceau que dans le cas d'une œuvre dont la partition a un seul parcours linéaire. Ce qui ce complique d'autant plus qu'à l'ombre de la philosophie d'Alain Badiou, l'Un n'a pas d'existence[10] (Il n'existe que le *compte-pour-un*). Dans une perspective deleuzienne affirmant l'univocité de l'Être, tous les éléments s'assemblent dans le même *plan de consistance*. C'est ce plan que la théorie musico-mathématique doit chercher à comprendre, en particulier, en exhibant ses éléments invariants.

Recomposer le topos musical. Si la catégorie des morceaux de musique est selon François Nicolas un topos (de Grothendieck), alors il existe un objet initial (le morceau vide $\varnothing$), un objet terminal (le silence dont l'archétype est la partition de Cage 4'33) et un classificateur de sous-objets (le continuum sonore ou le glissando du grave à l'aigu ou le bruit blanc ?). Comme un topos de Grothendieck a un ensemble de générateurs qui sont les familles des sous-objets de l'objet terminal, on doit pouvoir reconstruire le monde-musique (i.e. la catégorie des morceaux de musique) à partir de silences (les sous-objets de l'objet terminal). La question est donc de générer du son à partir de (*purs*) silences. L'idée de construire les sons comme on construit les nombres $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$, etc. ne marche pas, en ce sens qu'elle ne permet pas d'attribuer une fréquence à un son (ce qui est son paramètre minimal). Pour reconstruire le monde-musique à partir du silence, il faudrait pouvoir créer une particule sonore q de fréquence donnée et son antiparticule $\overline{q}$ de sorte que les deux s'annihilent dans le silence, autrement dit en termes mathématiques, avoir un monde-musique et son dual.

Logiques internes des topoi. Dans les modèles musicaux, les topoi sont partout. Sans doute, un peu trop partout ! Un *topos* est une catégorie qui a des limites finies, cartésienne fermée (qui a des produits cartésiens, des limites, des colimites, un ensemble de parties), un classificateur de sous-objets. En somme, un topos est une *bonne* catégorie où tout se passe bien, riche et non pathologique. On démontre qu'un topos a une logique interne intuitionniste (sauf dans le cas où le topos est booléen, auquel cas la logique est classique). Dire qu'un topos a (en général) une logique intuitionniste, c'est dire que le tiers exclu n'a pas lieu : on ne peut pas discriminer A et *non* A. Si φ est une formule, on n'a pas $\varphi \vee \neg\varphi$. Par conséquent, on n'a pas non plus

$$\neg\neg\varphi \Longrightarrow \varphi$$

ni

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \Longrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

Le raisonnement par l'absurde n'est plus valable. Pour certains objets, comme les morphismes vrai (t) et faux (f), les règles usuelles s'appliquent : le faux reste la négation du vrai :

$$\models t = \neg f \qquad \models f = \neg t$$

Cette logique intuitionniste se retrouve à l'œuvre dans la philosophie de Badiou qui pose que le *transcendantal d'un monde* est une algèbre de Heyting complète.

Logiques des topoi et axiome du choix. Lorsque le topos est booléen, sa logique est classique. Toute formule φ vérifie le tiers exclu

$$\models \varphi \vee \neg\varphi$$

[10]Voir aussi, A. BADIOU, *La scène du Deux*, dans *De l'amour*, Flammarion, 1999.

Dire qu'un topos est booléen équivaut à dire que tout sous-objet a un complément. Remarquons le tour de force qu'en théorie des catégories (dont les objets ne sont pas nécessairement des ensembles), la notion de sous-objet est définie sans faire appel à la notion d'inclusion (qui est une notion ensembliste).

Arrêtons nous un instant sur ce théorème qui affirme que si l'axiome du choix est vérifié dans un topos alors ce topos est booléen (et par conséquent sa logique est classique). L'axiome du choix a de nombreuses formulations équivalentes. La formulation catégorielle "Tout épi a une section" ne nous renseigne pas beaucoup. Sa formulation ensembliste "Sur tout ensemble, il existe une fonction de choix" qui équivaut à "De toute famille d'ensembles non vides, on peut extraire une famille de singletons" est aussi équivalente à Zermelo ou au lemme de Zorn, ce qui revient à poser un ordre sur un ensemble "Sur tout ensemble, il existe un bon ordre" (i.e. "Tout ensemble non vide de $\mathbb{N}^*$ contient un plus petit élément"). Il existe encore une autre équivalence de l'axiome du choix qui l'identifie au postulat de Dedekind : "Tout ensemble infini a un sous-ensemble dénombrable". C'est cette dernière formulation qui nous interroge car elle pose que la texture même du topos conditionne sa logique. Si dans un topos, les ensembles infinis ont des sous-ensembles dénombrables, l'axiome du choix est vérifié, et par conséquent la logique du topos est classique.

Dans les applications des topoi à la théorie musicale, les modèles sont la plupart du temps finis. Lorsqu'ils sont infinis, ils se construisent sur des sous-ensembles isomorphes à $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des entiers étant dénombrable, tous ces topoi vérifient le postulat de Dedekind. L'axiome du choix est donc vérifié. Ce qui implique que la logique interne des topoi du monde musical est classique. Que faire alors d'un modèle mathématique toposique qui nous impose une logique classique (ou à défaut intuitionniste) ? Et en premier lieu, peut-on penser qu'il existe une logique interne à l'œuvre musicale ?

5. **Par delà les topoi**

Voir le monde-musique comme un topos qui aurait une logique interne classique ou intuitionniste n'a pas de sens au plan de la musique et de la musicologie. Pour autant, faut-il renoncer à trouver dans la théorie des catégories une inspiration qui permettrait d'approcher au plus près le sens musical ? Assurément non. Mais il faut bien comprendre que le problème n'est pas lié aux *Logiques des mondes* (je fais allusion au livre de Badiou car le problème est le même), mais au topologique (au sens étymologique de *locologie*, science du lieu, et non au sens mathématique), à l'agencement des plans de *cohésion*, à l'entrelacs des petites structures qui agissent localement, au foisonnement des multiples singularités nodales et à leurs actualisations, aux replis de l'infini sur des fragments mesurables, à l'errance des affects. Car en somme, le territoire de l'œuvre musicale ne peut être approché que dans l'instance du lieu, que Žižek appelle l'*événement* qui est *la torsion intérieure au moyen de laquelle la forme elle-même est incluse (ou plutôt, s'inscrit elle-même) au sein du contenu*[11].

Pourquoi ne pas chercher d'autres structures que les topoi qui dispenseraient d'une logique étrangère à l'ordre musical ? Par exemple, une *néo-catégorie* (= une catégorie dans laquelle on n'impose pas la composition de morphismes), une *esquisse* (= une catégorie munie d'une famille de cônes projectifs distingués et d'une

[11] S. Žizek, *Organes sans corps. Deleuze et conséquences*, éditions Amsterdam, 2008, p. 100

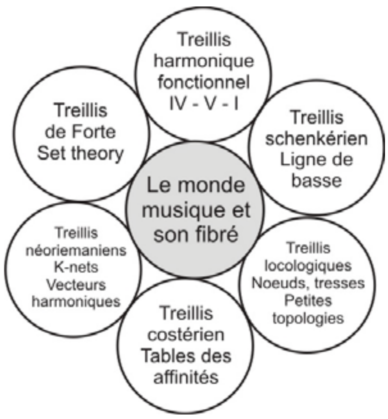
famille de cônes inductifs distingués), un *prélogos* (= une catégorie régulière dans laquelle la famille $sub(A)$ des sous-objets de chaque objet A est un treillis et pour chaque morphisme $f : A \to B$, le morphisme induit $f^{\#} : sub(B) \to sub(A)$ est un homomorphisme de treillis), une *catégorie fibrée* (proposition de Jean Bénabou), des *catégories monoïdales* (si le produit tensoriel a un sens pour les objets musicaux), des *n-catégories* (i.e. des catégories de catégories ...), etc. Ces structures sont-elles mieux ou moins bien adaptées à l'analyse ou à la création musicale que les topoi ?

Sur le treillis des sous-ensembles mesurables par la mesure de Borel sur une région Ω de l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la topologie de Grothendieck on considère les recouvrements de mesure strictement positive. Les faisceaux sur ce site forment le *topos de Scott*. Ce topos n'a pas de point : les nombres réels sont des fonctions mesurables. La notion de mesurabilité y joue un rôle important puisqu'elle écarte les ensembles de mesure nulle. Si on admet que les ensembles non-mesurables n'ont pas de réalité physique, alors une telle structure serait-elle mieux adaptée pour approcher l'espace physique ? Transposée à la musique et la musicologie, on s'interroge sur le rôle et l'importance de la mesurabilité ?

Les physiciens cherchent à comprendre la structure de l'espace temps quantique. On sait que la théorie des supercordes unifie les quatre interactions fondamentales dans un espace à 10 dimensions (4 pour l'espace temps classique + 2×3 petites dimensions enroulées sur elles-mêmes). Mais cette théorie ne fait pas l'unanimité parmi les physiciens théoriciens et des études sur la gravitation quantique cherchent de nouveaux modèles. Un des voies est d'approcher l'espace temps quantique en utilisant la théorie des catégories. De là est née la notion de *quantaloïde*. Un quantaloïde est une catégorie dans laquelle les morphismes $Hom(A, B)$ entre objets forment un treillis sup-complet et qui respectent la composition du produit tensoriel

$$Hom(A, B) \otimes Hom(B, C) \to Hom(A, C)$$

A la manière du physicien, le *mamuphien* doit réfléchir à la structure de l'espace sonore et inventer une structure adéquate dont le modèle idéalisé pourrait être le *musicaloïde*.



La plupart des analyses musicologiques sont modélisables par des treillis qui sont autant de plans de tangence au monde-musique. Le fibré musico-mathématique pourrait être en quelque sorte une composante de ce musicaloïde.