IMAGES ET MODALITÉS

[Résumé d'une conférence au SIC à Amiens, le samedi 10 novembre 2001]

René GUITART

Ce que nous proposons de neuf ici est — pour le dire d'abord dans sa portée la plus générale — ceci : une démarche unificatrice est possible qui permette l'échange entre les intuitions sur les formes [FIGURES] et celles sur les modalités discursives [DISCOURS], jusqu'à un point où il n'y aurait plus lieu de distinguer entre le géomètre et le logicien, entre les calculs visant la détermination des formes et ceux garantissant la logique des démonstrations, plus de différence entre les courbures géométriques et les modalités logiques.

Précisons, d'un côté technique abstrait, dans la mathématique moderne d'aujourd'hui, que l'on peut interpréter l'unification envisagée entre les questions des figures et des discours, de la courbure et des modalités, comme ce dont traite justement la cohomologie si elle est bien déterminée comme concept — et non pas seulement comme algorithme — et comme concept logico-géométrique justement.

Précisons, d'un autre côté, philosophique, que la proposition ne se peut réellement bien entendre et prendre son poids que si l'on comprend le principe épistémologico-sémiotique suivant pour la lecture des textes mathématiques : dans l'acte de pensée mathématique, le voir, le dire et le toucher, se disposent suivant un nœud original, distincts *et* inséparables. Notamment, on peut penser la géométrie, voire la mathématique entière, comme une sorte d'acte de résolution indéfinie de la pulsation de pensée entre le voir et le dire[1]. Et aussi il faut comprendre comment la saisie de cet acte au plan mathématique, quoi qu'excédant la portée de la logique classique, est possible[2].

Ces deux précisions marquent qu'une articulation entre sémiologie et cohomologie existe. On sait d'ailleurs l'importance de l'homologie et l'analogie dans la question du signe chez Peirce. Dans notre approche ce sera la question des assimilations.

Mais, dans une première façon plus délimitée, vers une technique plus circonscrite, nous affirmons que l'on peut construire — via les conceptions en termes de topos et d'univers algébriques, et en un calcul général d'*assimilations* et de variations — une *unification* entre, d'une part, la méthode morphologique en analyse d'images, et, d'autre part, la méthode des mondes possibles en analyse logique.

Les développements proprement mathématiques de la démarche du calcul d'assimilations et en particulier de la manière dont s'y unifient les questions de logique relationnelle et de modalités du voir sont déjà annoncés ailleurs[3]. Indiquons simplement que les adjonctions et les correspondances de Galois associées aux relations binaires y jouent un rôle de base, via lequel aux érosion et remblai du côté de l'analyse d'image correspondent les nécessité et possibilité du côté de l'analyse de discours. L'idée-clé est alors celle de régime d'assimilation, où l'*axiome de passage* permet de déterminer comment les divers niveaux d'analyse se superposent.

Et enfin, dans une seconde façon plus délimitée, vers une analyse textuelle précise de l'histoire de notre intrigue — la liaison entre images et modalités, entre figures et discours — nous pouvons dessiner *une* ligne historique significative. Nous

[1] Voir ce que l'on dit, dire ce que l'on voit, *Bulletin de l'APMEP*, n°431, nov-déc 2000, pp. 793-812.

[2] L'assimilation et l'excès de l'acte sur le logique, in *Forme & mesure. Cercle Polivanov : pour Jacques Roubaud/Mélanges*. Mesura 49, juin 2001, pp. 209-227.

[3] Calcul d'assimilations, modalités, analyse d'images, in *Mathématiques : calculs et formes*, Ellipse, à paraître (Actes du Colloque « Mathématiques : calculs et formes », Université Toulouse le Mirail, septembre 2000).

repérons dans l'histoire des mathématiques *une* façon dont les pensées mathématiques du voir et du dire sont deux fils qui se tissent l'un à l'autre.

Nous partons de deux thèmes disjoints du 17ème siècle, celui de la propagation des ondes de Huygens et celui de l'art de combinatoire arithmétique des propositions de Leibniz, avec des poursuites, au 19ème siècle, de Steiner sur les courbes parallèles, et de Boole sur la portée en logique discursive du calcul ordinaire ; avec aussi à souligner, au passage, les travaux de Gergonne d'une part sur les caustiques et d'autre part sur la dialectique rationnelle, des deux quels nous montrons en détail qu'ils peuvent s'exprimer en termes exclusivement de calcul des relations ou encore d'augmentations et diminutions dans un régime d'assimilation. Il faut aussi relever, en 1880, après les diagrammes d'Euler, ce que nous appellerons le « théorème de John Venn », suivant lequel l'organisation logique possible de n propositions peut se représenter fidèlement dans l'organisation géométrique de n zones du plan. Par quoi, comme il dit, la syllogistique est remplacée par le calcul « d'un coup d'œil ».

Disons alors que deux idées ont émergé, de façons encore complètement disjointes, dans la première moitié du 20ème siècle. L'une est essentielle à la théorie de la perception visuelle, c'est le calcul des *convexes* à la Brunn-Minkowski, faisant suite, pour ce qui nous intéresse, aux travaux de Huygens et de Steiner, et de Gergonne aussi, et par quoi l'étude des formes reçoit, comme outil suffisant, les calculs algébriques d'ajouts et retraits de convexes, en lieu et place du calcul différentiel de la courbure. L'autre est essentielle à la théorie de la logique discursive, c'est le calcul des systèmes de *logiques modales* à la Lewis, lié bien sûr aux avancées logiques de Boole. Par là, aux questions des modes de la syllogistique est, pour une part, substituée la question d'opérateurs dans les algèbres de Boole (pour l'autre part, c'est la question des quantificateurs à la Peirce et à la Frege — ce qui plus tard sera aussi saisissable comme modalités). Les travaux de Tarski étendent le « théorème de Venn » à ce calcul modal.

À partir des années 50-70, nos deux fils vont se continuer en l'analyse morphologique d'image d'un côté, à la Matheron et Serra, et la théorie des mondes possibles de l'autre, à la Kripke et Hintikka. Ce à quoi l'on doit ajouter aussi les travaux à la Bouligand, Choquet et Michael sur les contingents et paratingents, et sur les topologies sur les espaces de parties.

Désormais, il suffit de penser à rapprocher les deux fils, et les questions topologiques, pour en voir l'analogie, et de fait il est possible de substituer à l'analogie un résultat mathématique qui énonce une isomorphie. Pour cela, on use du calcul dans la catégorie des relations[4] (et on n'oublie pas ce que l'idée de relation et de logique relationnelle doit à Peirce, Schröder et Tarski entre autres), des univers algébriques, et notamment des opérateurs π et ψ, avatars des augmentations et diminutions ⬀ et ⬂ ; et donc l'on met en place la théorie des assimilations, comme nous l'évoquions plus haut, qui vaut autant pour analyser les caustiques que pour développer la syllogistique.

Alors, par cette voie, ce à quoi l'on peut arriver, ce n'est pas seulement à une compréhension de comment on pourrait se servir des outils de l'analyse d'image en logique modale ou, inversement, des outils de la logique modale en analyse d'image, mais c'est bien, pour les deux champs ensemble, un seul et même calcul, celui des augmentations et diminutions dans les régimes d'assimilation, qui les fond littéralement. Un calcul par où s'abrège la pulsation entre voir et dire, entre images et modalités.

`guitart@math.jussieu.fr`

[4] Calcul des relations inverses, *Cahiers Top. Géo. Diff.* XVIII, 1 (1977), pp. 67-100.