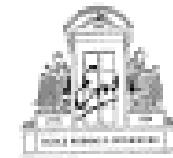
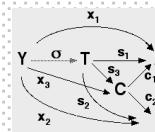
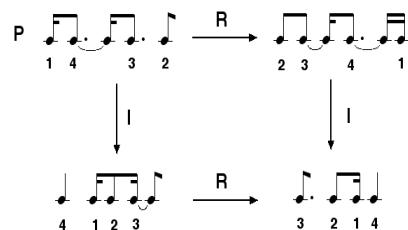


# Séminaire *Musique, mathématiques et philosophie*



## Mathématiques, musique et philosophie dans la tradition américaine : la filiation Babbitt/Lewin



samedi 18 novembre 2006

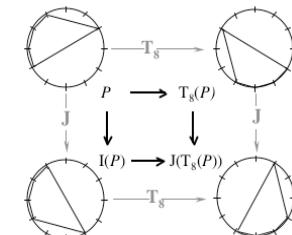
Moreno ANDRETTA

Equipe Représentations Musicales

IRCAM/CNRS UMR 9912

**ircam**  
Centre  
Pompidou

**CNRS**  
CENTRE NATIONAL  
DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



## *Plan de l'exposé :*

---

- La tradition américaine : la démarche théorique de Milton Babbitt et l'« école » de Princeton
- Sur les orientations philosophiques de la tradition américaine
- David Lewin et le « tournant » transformationnel en théorie et analyse musicales
- Une perspective européenne de la théorie transformationnelle et quelques (possibles) implications philosophiques

# Un panorama sur la tradition « set-théorique » américaine

[Ernst Krenek]

Milton Babbitt  
 Benjamin Boretz  
 Michael Kassler  
 John Perle  
 David Lewin  
 Allen Forte  
 ...

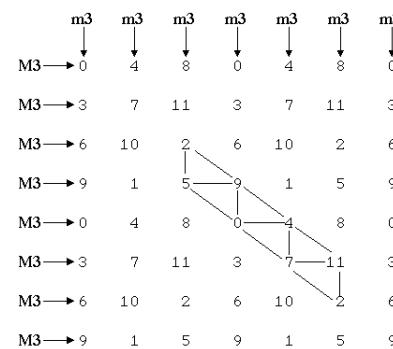
Paul Lansky  
 Robert Morris

John Rahn  
 John Straus  
 John Roeder

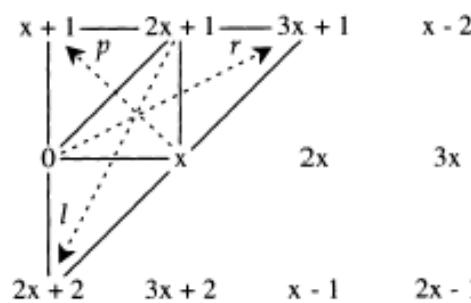
Joseph Dubiel  
 Andrew Mead  
 John Clough

[Gérald Balzano]  
 Richard Cohn  
 ...

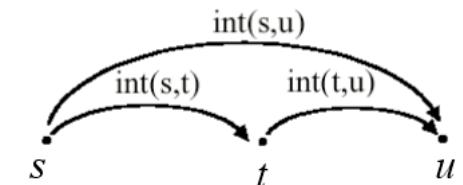
Henri Klumpenhouwer  
 David Clampitt  
 Norman Carey  
 Jack Douthett  
 Edward Gollin  
 Robert Peck  
 Julian Hook  
 Ian Quinn  
 Dmitri Tymoczko  
 ...



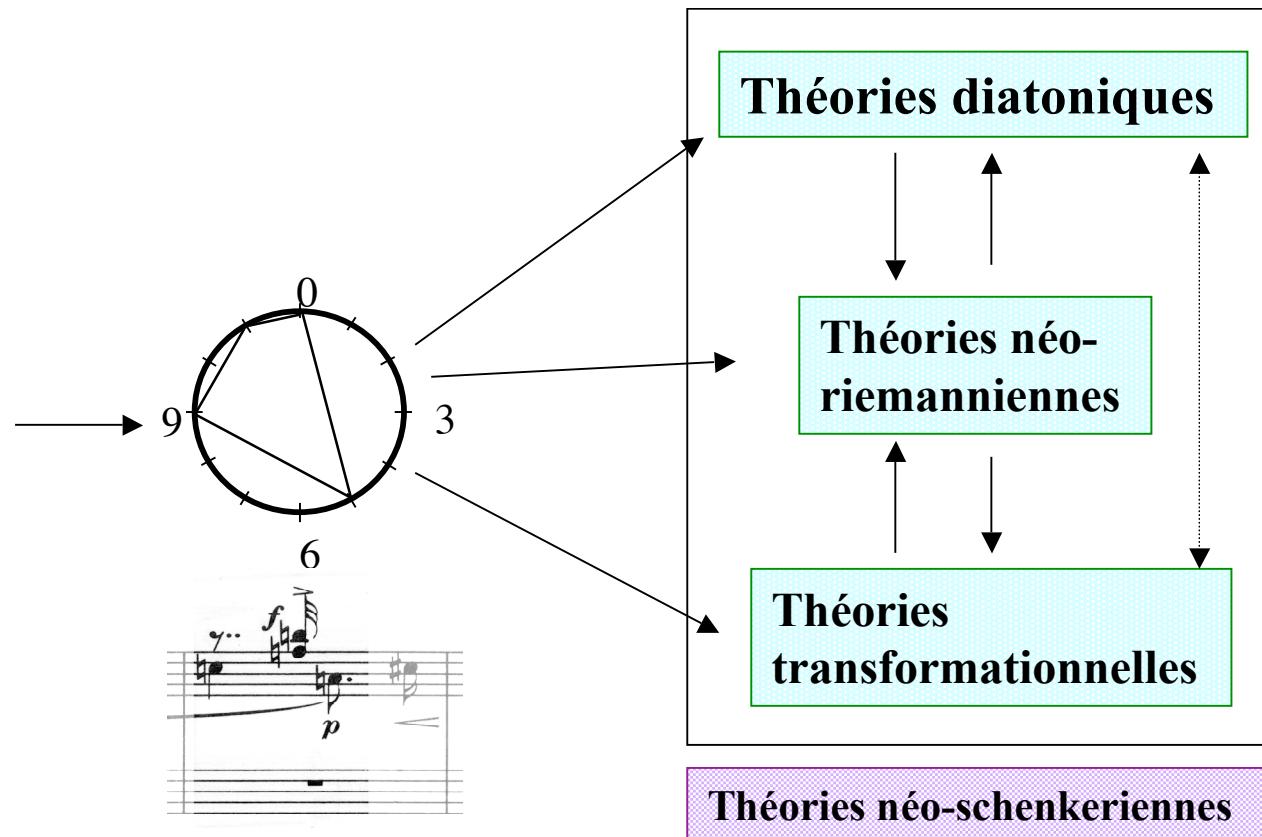
Balzano (1980)



Cohn Parsimonius  
 Tonnetz (1997)



David Lewin's  
 GIS (1987)



## Vers une définition de la théorie musicale [*Musical theory*]

*Ernst Krenek et la méthode axiomatique*

---

- *The Relativity of Scientific Systems*
- *The Significance of Axioms*
- *Axioms in music*
- *Musical Theory and Musical Practice*

Ernst Krenek : *Über Neue Musik*,  
1937 (Engl. Transl. *Music here  
and now*, 1939).

«Physicists and mathematicians are far in advance of musicians in realizing that their respective sciences do not serve to establish a concept of the universe conforming to an objectively existent nature»

«As the study of axioms eliminates the idea that axioms are something absolute, conceiving them instead as **free propositions of the human mind**, just so would this **musical theory** free us from the concept of major/minor tonality [...] as an irrevocable law of nature».

## *Sur les orientations théoriques (et/ou métathéoriques) de la tradition américaine*

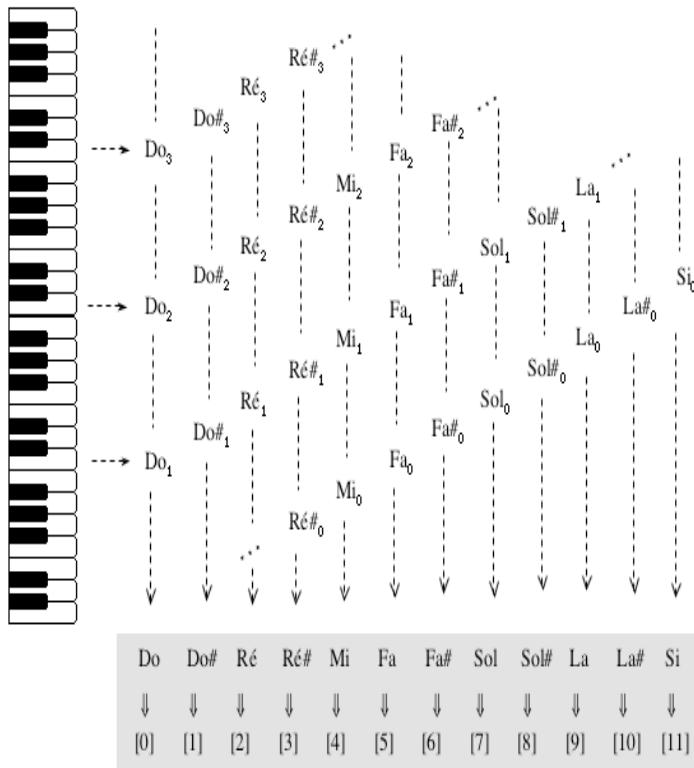
---

B. Boretz et E.T. Cone : *Perspectives on Contemporary Music Theory*, W.W. Norton and Company, New York, 1972.

« The recognition of music-theoretical questions as critical compositional ones is not, of course, unique to the twentieth century, nor to composers. But the uniquely explicit, uniquely consequential, and uniquely exposed contemporary involvement of composers in theory as writers and system builders has given the theoretical-compositional connection unprecedently wide, if not always benign or even accurate, publicity : we live, as every reader of the public musical print knows, in an age of '**theoretical composition**'. »

« Milton Babbitt, in particular, was the first to suggest that the force of any ‘musical system’ was not as universal constraints for all music but as alternative theoretical constructs, rooted in a communality of shared empirical principles and assumptions **validated** by tradition, experience, and experiment »

# L'émergence de la structure de groupe en musique



## *La relation de congruence mod 12*

Camille Durutte:

- *Technie, ou lois générales du système harmonique* (1855)
- *Résumé élémentaire de la Technie harmonique, et complément de cette Technie* (1876)

Le système dodécaphonique est « *un ensemble d'éléments, relations entre les éléments et operations sur les éléments.* [...] Une vraie mathématisation aurait besoin d'une formulation et d'une présentation dictées par le fait que le système dodécaphonique est un **groupe de permutations** qui est façonné [shaped] par la structure de ce modèle mathématique »

(M. Babbitt: *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*, 1946)

# Le système dodécaphonique et la théorie des groupes

« [Le système] peut être caractérisée complètement en explicitant les éléments, les **relations** [...] entre ces éléments et les **opérations** sur les éléments ainsi reliés. [...] Toute considération sur les opérations du système doit procéder de la conscience de leur nature permutationnelle » (Babbitt 1960)

	S	I	R	RI
S	S	I	R	RI
I	I	S	RI	R
R	R	RI	S	I
RI	RI	R	I	S

**S:**  $(a,b) \rightarrow (a,b)$

**I:**  $(a,b) \rightarrow (a, 12-b \text{ mod. } 12)$

**R:**  $(a,b) \rightarrow (11-a,b)$

**RI:**  $(a,b) \rightarrow (11-a, 12-b \text{ mod. } 12)$

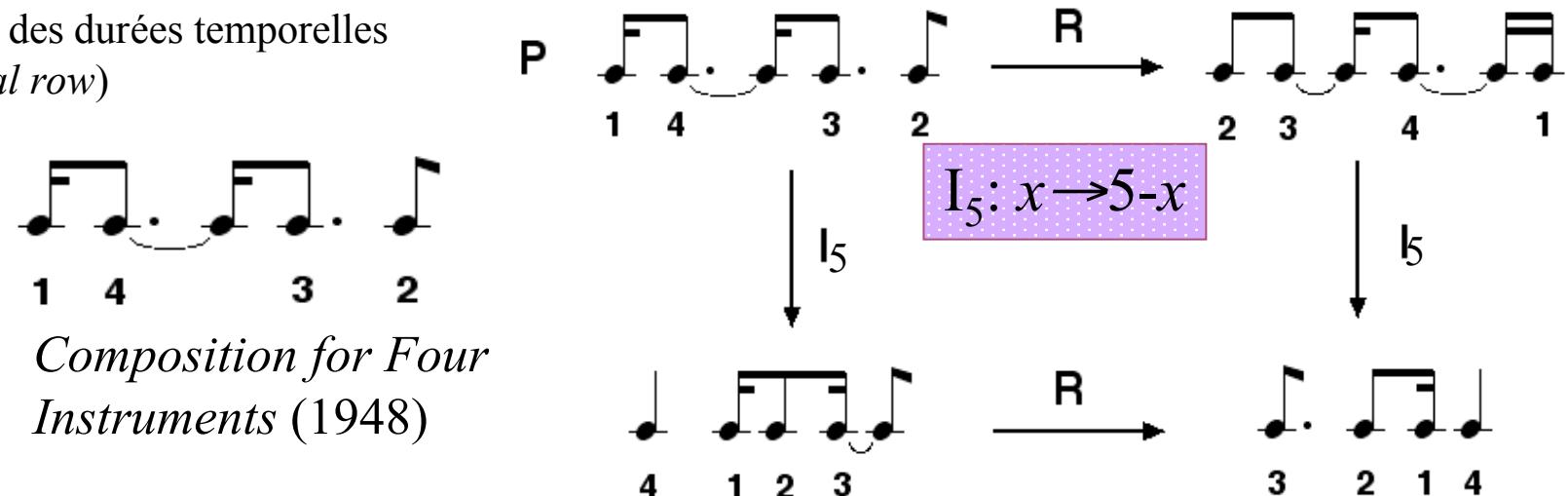
**Staves (S, I, R, IR) Data:**

- S:** (0,0) (1,4) (2,2) (3,5) (4,1) (5,3) (6,11) (7,7) (8,9) (9,6) (10,10) (11,8)
- I:** (0,0) (1,8) (2,10) (3,7) (4,11) (5,9) (6,1) (7,5) (8,3) (9,6) (10,2) (11,4)
- R:** (0,8) (1,10) (2,6) (3,9) (4,7) (5,11) (6,3) (7,1) (8,5) (9,2) (10,4) (11,0)
- IR:** (0,4) (1,2) (2,6) (3,3) (4,5) (5,1) (6,9) (7,11) (8,7) (9,10) (10,8) (11,0)

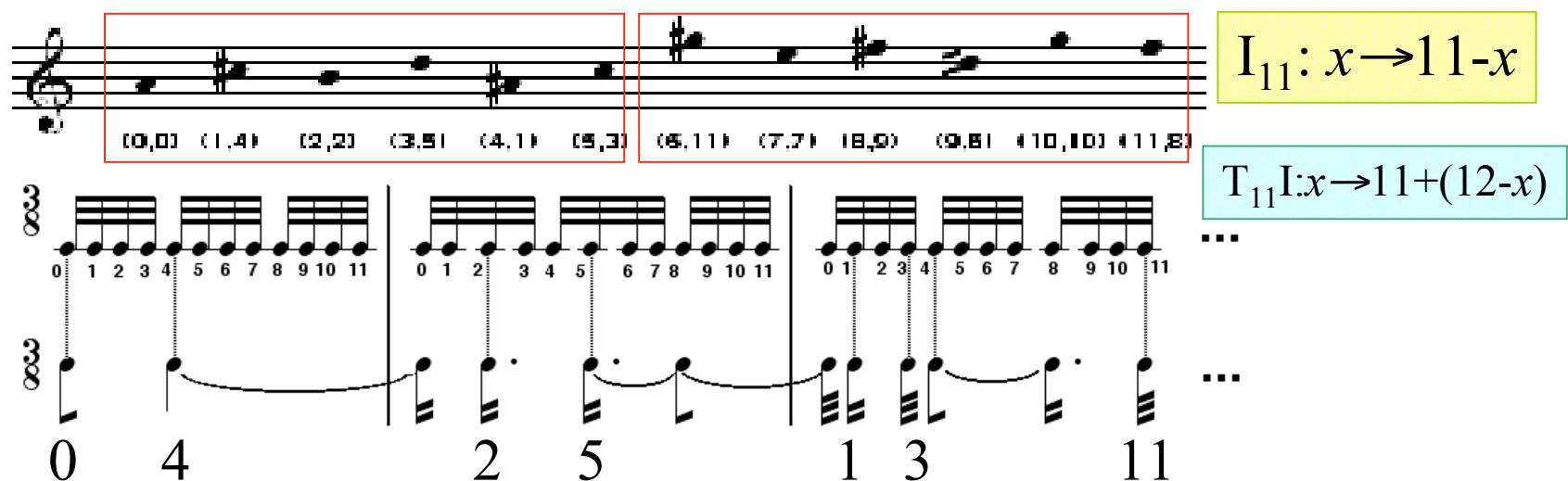
# Vers une formalisation algébrique du sérialisme intégral

« Une compréhension de la structuration dodécaphonique des composantes autres que les hauteurs ne peut que passer par une définition correcte et rigoureuse de la **nature** du système et des **opérations** qui lui sont associées » (Babbitt 1955)

- La série des durées temporelles (*durational row*)



- Le système des points d'attaque (*Time-Points System*)



# Combinatorialité hexacordale chez Messiaen

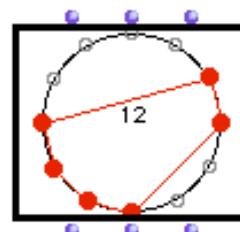
- Mode de valeurs et d'intensités (1950)



Voici le mode:

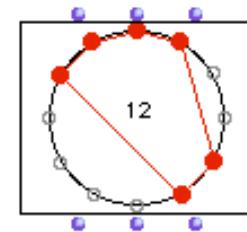
The mode is shown in two staves. The first staff (Division I) has a red box around the first six notes:  $ppp$ ,  $ppp$ ,  $ff$ ,  $f$ ,  $mf$ , and  $ff$ . The second staff (Division II) has a red box around the last six notes:  $f$ ,  $mf$ ,  $ff$ ,  $pp$ ,  $ff$ , and  $p$ . A note in the middle of the second staff is also highlighted with a red box.

(la Division I est utilisée dans la portée supérieure du Piano)



$$\{3, 2, 9, 8, 7, 6\} \longrightarrow \{4, 5, 10, 11, 0, 1\}$$

$$T_7I : x \rightarrow 7-x$$



# Fonction et structure d'une théorie de la musique

« ...rendre possible d'un côté l'étude de la **structure** des systèmes musicaux [...] et la formulation des contraintes de ces systèmes dans une perspective compositionnelle [...] mais aussi, comme étape préalable, une **terminologie adéquate** [...] pour rendre possible et établir un **modèle** qui autorise des énoncés bien déterminés et **vérifiables** sur les œuvres musicales »

M. Babbitt : « The Structure and Function of Music Theory », 1965

« The less a science is advanced, the more its terminology tends to rest on an uncritical assumption of mutual understanding »

William Van Orman Quine, “Truth by Convention”, 1936

Webern,  
Concerto, op. 24

x                    x                    x                    x

M. Babbitt : « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History », 1972

# Fonction et structure d'une théorie de la musique

M. Babbitt : « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History », 1972



Example 2.3: Row Forms in Measures 17-21

John L. Brackett (Jr): *The Philosophy of Sciences as a Philosophy of Music Theory*, PhD, 2003

« If a collection of  $n=pq$  elements is partitioned into  $p$  classes of  $q$  elements each in any two ways, then there is at least one collection of  $p$  elements such that in both partitions each of the  $p$  classes contains one of the  $p$  elements »

« Relative to any musical theory, this is a **formal theory**, since the descriptive terms are musically uninterpreted. But if we interpret ‘elements’ as ‘pitch classes’, and ‘partitioned’ as ‘partitioned instrumentally or timbrally’ then it follows that with  $n=12$  and  $p=4$ , and, therefore,  $q=3$ , any such instrumental presentation of *any* transposition of the set would have the property of maintaining at least one pitch-class in common between trichords »

# Fonction et structure d'une théorie mathématique de la musique

G. Mazzola : *The Topos of Music*, ch. 13 - “What are global compositions ?”

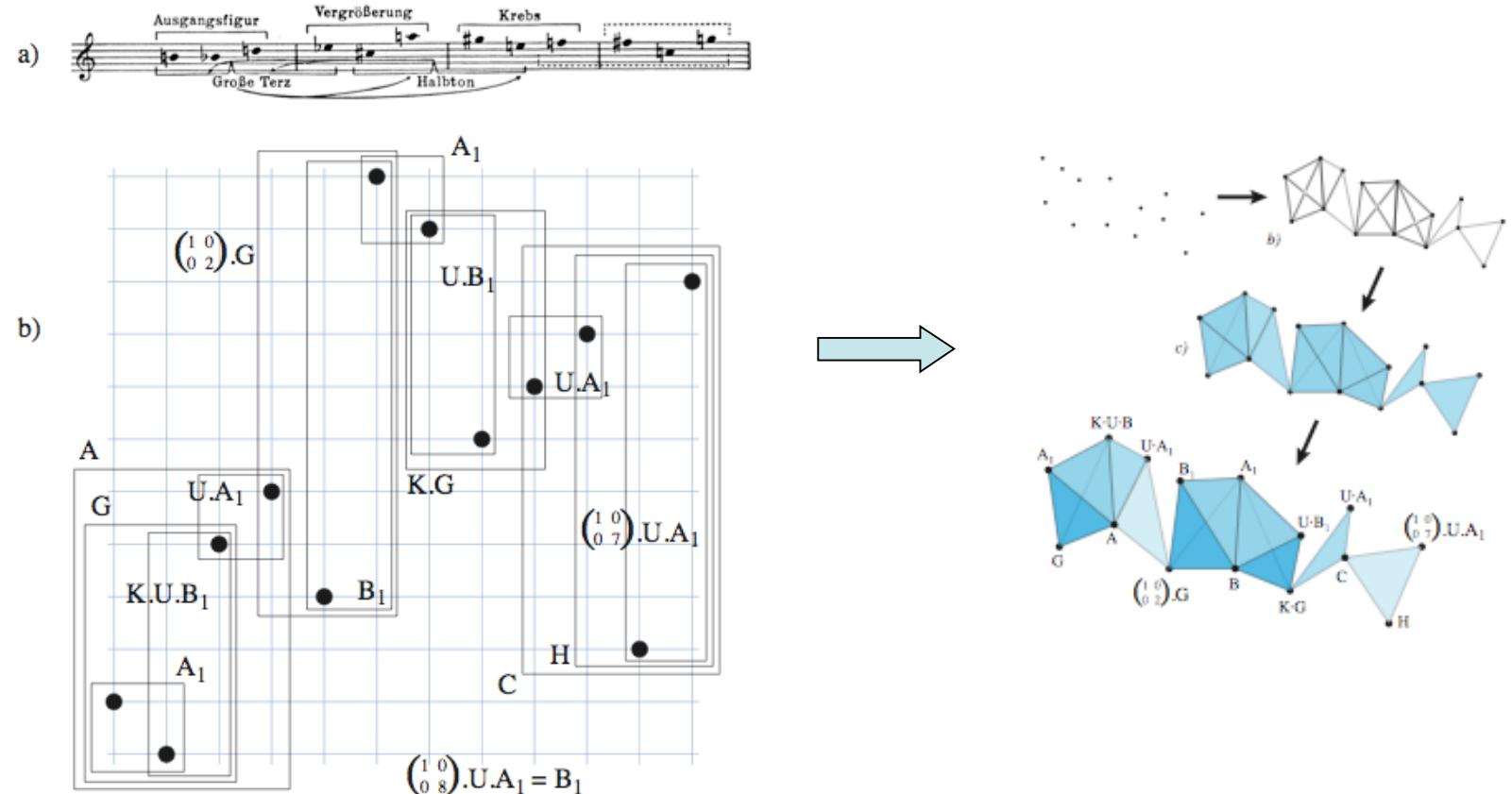


Figure 13.1: a) Internal structure of a dodecaphonic series following Boulez [60, I], with kind permission of Schott-Verlag; b) representation of the series as a local composition in ambient space  $OnPiMod_{0,12}$ . Frames are drawn around partial series as suggested by Boulez (part a) of this figure), which are related to each other by symmetry transformations ( $U$  = inversion,  $K$  = retrograde).

# Quelques traits caractéristiques du positivisme logique

James A. Davis : *Positivistic Philosophy and the Foundation of Atonal Music Theory*, 1993

- Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie
- Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).
- Principe de vérification et reconstruction rationnelle
- Refus de l'interprétation subjective et rejet/élimination de la métaphysique

« There is no field of experience which cannot, in principle, be brought under some form of scientific law, and no type of speculative knowledge about the world which is, in principle, beyond the power of science to give [...] **The propositions of philosophy are not factual, but linguistic in character** – that is, they do not describe the behavior of physical, or even mental, objects ; they express definitions, or the formal consequences of definitions. Accordingly, we may say that **philosophy is a department of logic.** » [AYER, 1952]

« Ce qui caractérise le néopositivisme logistique [...] est la réduction de la philosophie à l'étude syntaxique des énoncés scientifiques »

Albert Lautman : *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, Vrin 2006 (en particulier le compte-rendu du Congrès International de philosophie des sciences, 1935)

# Le transfert des idées du positivisme logique en musique

- Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie
- Rejet ou élimination de la métaphysique
- Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).  
Principe de vérification
- Refus de l'interprétation subjective

« For the essential elements of the above characterizations, involving the correlations of the syntactic and semantic domains, the notion of analysis, and – perhaps most significantly – the requirements of linguistic formulation and the differentiation among predicate types, beyond strongly suggesting that the proper object of our assigned investigation may be – in the light of these criteria – a vacuous class, and strongly reminding us of the systematic obligations attending our own **necessarily verbal presentation** and discussion of the presumed subject, provide the important reminder that **there is but one kind of language, one kind of method for the verbal formulation of ‘concepts’ and the verbal analysis of such formulations : ‘scientific’ language and ‘scientific’ method** »

M. Babbitt : « Past and Present Concepts », 1961

# Le transfert des idées du positivisme logique en musique

- Empiricisme rigide qui mène à une émulation de la science dans sa méthodologie et sa terminologie
- Rejet ou élimination de la métaphysique
- Utilisation de l'analyse linguistique et logique (en particulier le recours à la logique formelle).  
Principe de vérification
- Refus de l'interprétation subjective

« Progressively from the concept to the law (synthetic generality) we arrive at the deductively interrelated system of laws that is a *theory*, statable as a **connected set of axioms, definitions, and theorems, the proof of which are derived by means of an appropriate logic**. A *musical theory* reduces, or should reduce, to such a **formal theory** when uninterpreted predicates and operations are substituted for the terms and operations designating musical observables »

M. Babbitt : « Past and Present Concepts », 1961

# Limites d'une conception logiciste de la tradition américaine

Analyse plus fine des relations entre le positivisme logique et la tradition américaine, e.g. principe de « reconstruction rationnelle »

« What epistemology intends is to construct thinking processes in a way in which they ought to occur if they are to be ranged in a consistent system; or to construct justifiable sets of operations which can be intercalated between the starting-point and the issue of thought-processes, replacing the real intermediate links. Epistemology thus considers a **logical substitute rather than real processes**.

For this logical substitute the term ***rational reconstruction*** has been introduced. »

Hans Reichenbach : *Experience and Prediction*, 1938

« Pour développer le concept de **structure** qui est au fondement de la **théorie de la constitution**, nous partons de la différence entre deux types de description des objets d'un domaine quelconque. Nous appelons ces deux types de description, description de **propriété** et description de **relation**. [...] La description de relation se trouve au commencement de tout le système de constitution et forme ainsi la base de la science dans son ensemble. En outre, le but de toute **théorie scientifique** est de devenir une **pure description de relation** quant à son contenu. »

R. Carnap : *La construction logique du monde*, 1928 (tr. Fr. 2002)

## Vers une relecture « musicale » de *La construction logique du monde*

---

« [C'est la notion de groupe qui] donne un sens précis à l'idée de structure d'un ensemble [et] permet de déterminer les éléments efficaces des transformations en réduisant en quelque sorte à son schéma opératoire le domaine envisagé. [...] L'objet véritable de la science est le **système des relations** et non pas les termes supposés qu'il relie. [...] Intégrer les résultats - symbolisés - d'une **expérience** nouvelle revient [...] à créer un canevas nouveau, un **groupe de transformations** plus complexe et plus compréhensif »

G.-G. Granger : « Pygmalion. Réflexions sur la pensée formelle », 1947

« [Le système dodécaphonique] peut être caractérisée complètement en explicitant les éléments, les **relations** [...] entre ces éléments et les **opérations** sur les éléments ainsi reliés. [...] Toute considération sur les opérations du système doit procéder de la conscience de leur nature permutationnelle »

M. Babbitt : « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », 1960

# Système d'Intervalles Généralisés - Système Généralisé d'Intervalles

David Lewin's *Generalized Interval System* [GMIT, 1987]

---

**GIS = ( $S, G, \text{int}$ )**

$S$  = ensemble

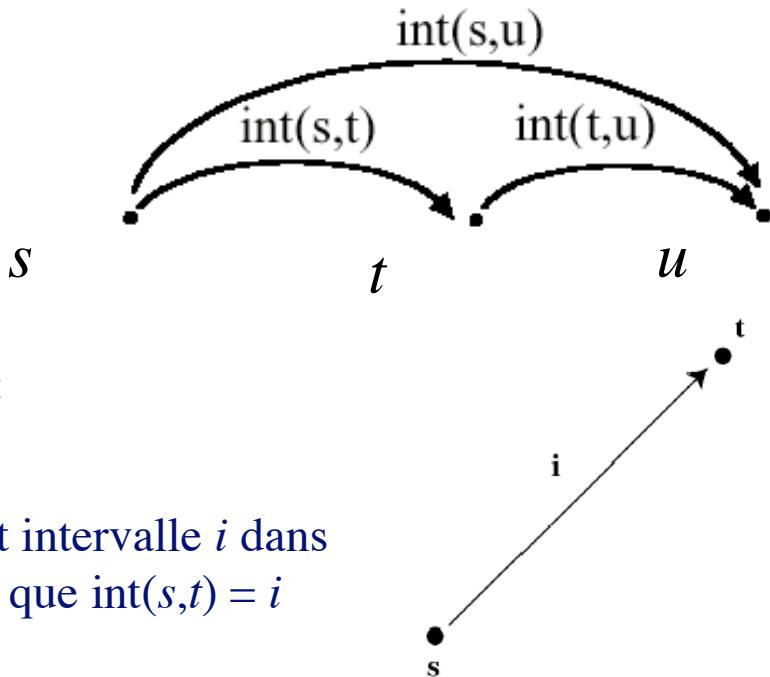
$(G, \bullet)$  = groupe d'intervalles

$\text{int}$  = fonction intervallique

$S \times S \xrightarrow{\text{int}} G$

Action  
simplément  
transitive

- 1. Pour tout objets  $s, t, u$  dans  $S$  :  
 $\text{int}(s,t) \bullet \text{int}(t,u) = \text{int}(s,u)$
- 2. Pour tout objet  $s$  dans  $S$  et tout intervalle  $i$  dans  $G$  il y a un seul objet  $t$  dans  $S$  tel que  $\text{int}(s,t) = i$



*Généralisation de la notion de transposition (musicale)*

Pour tout élément  $i$  dans  $G$ , la transposition  $T_i$  est une application

$T_i : S \rightarrow S$  telle que  $\text{int}(s, T_i(s)) = i$  pour tout élément  $s$  dans  $S$

# Fonction Intervallique IFUNC dans un GIS

*Interval Function IFUNC in a GIS*

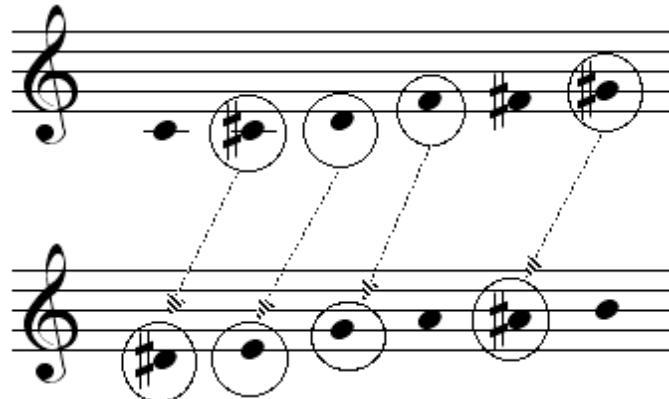
---

$GIS = (S, G, \text{int})$

$S$  ensemble

$H$  et  $H'$  dans  $S$

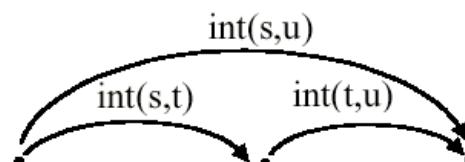
$$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$$



$$H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\}$$

$$\text{IFUNC}(H, H')(i) = \#\{(a, b) \in H \times H' \mid \text{int}(a, b) = i\}$$

$$\text{IFUNC}(H, H')(2) = 4$$



# Vecteur d'intervalles (IV) et fonction intervallique (IFUNC)

**Le vecteur intervallique** (Forte) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles modulo l'équivalence :  $ci(i) = ci(12-i)$

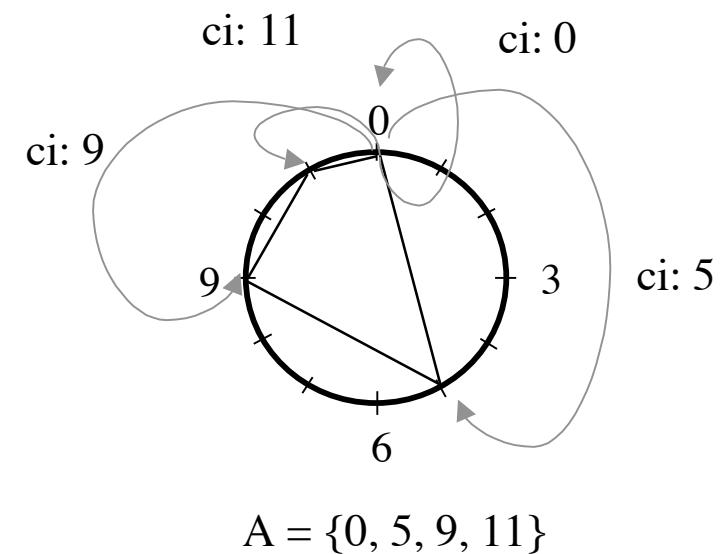
$$IV(A) = [1 1 1 1 1 1]$$

ci 1 ci 2 ci 3 ... ci 6.

**La fonction intervallique IFUNC** (Lewin) répertorie la fréquence d'apparition des classes d'intervalles contenues dans un ensemble

$$IFUNC(A, A) = [4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]$$

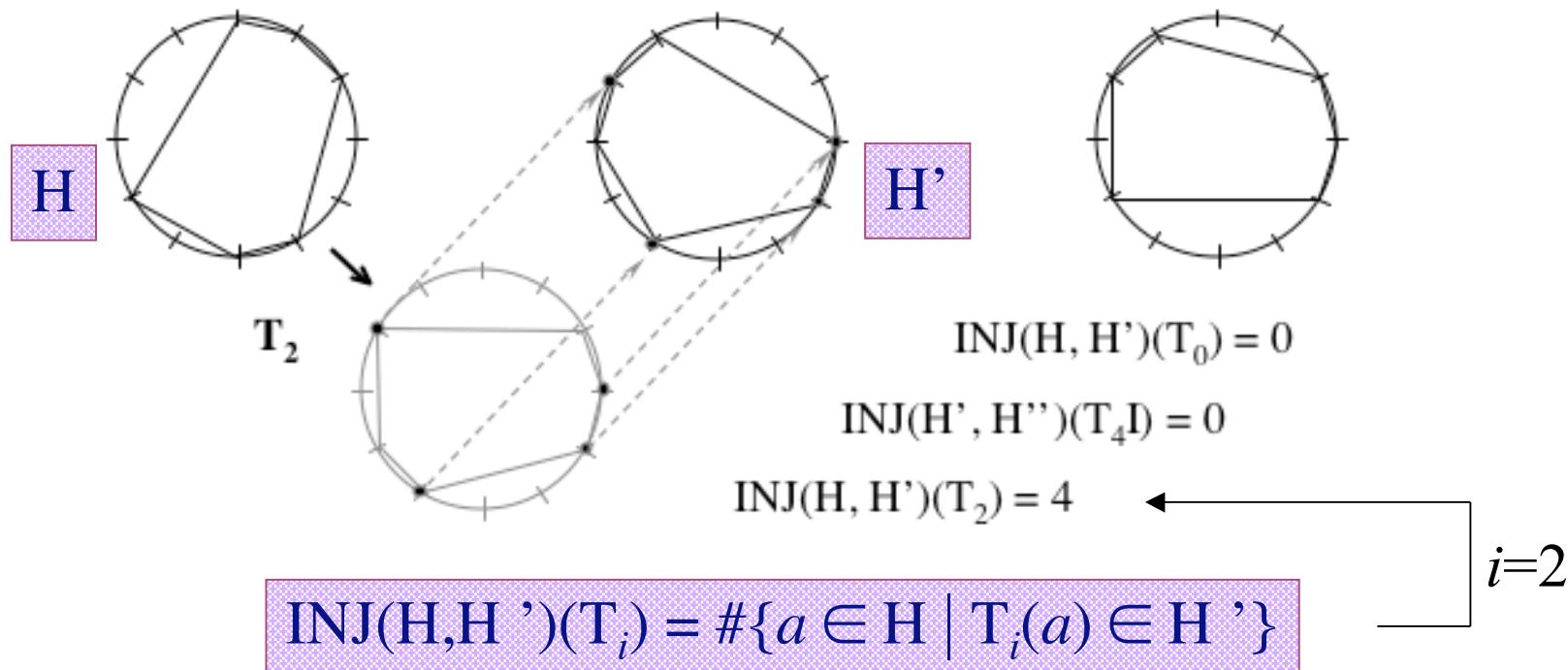
ci 0 ci 1 ci 2 ... ci 11.



## Fonction d'Injection et relation d'inclusion/complémentaire



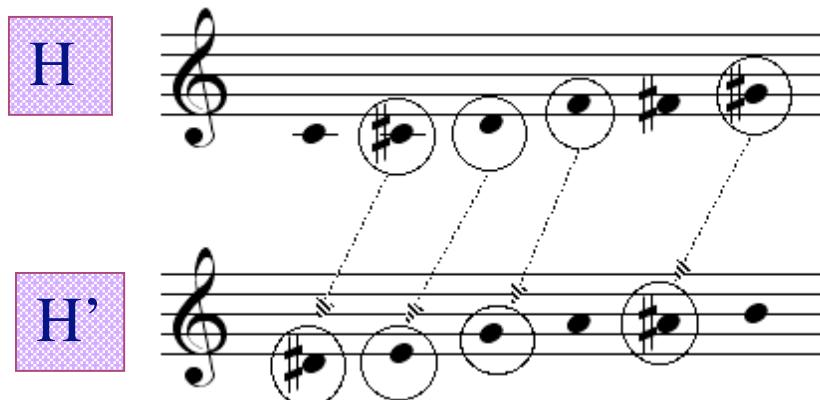
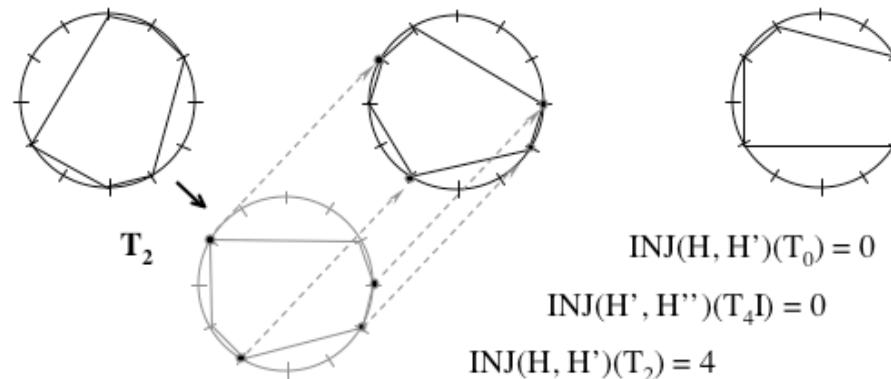
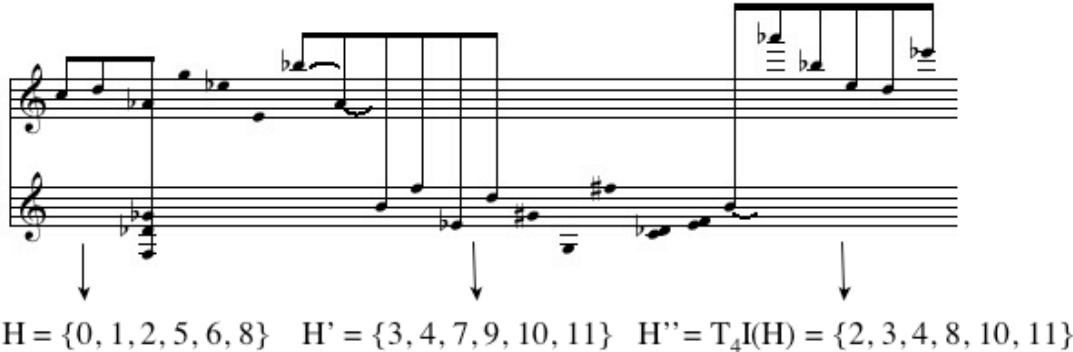
$$H = \{0, 1, 2, 5, 6, 8\} \quad H' = \{3, 4, 7, 9, 10, 11\} \quad H'' = T_4 I(H) = \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$$



# Fonction d'Injection et relation d'inclusion/complémentaire

*Injection function and the inclusion/complementary relation*

---



$INJ(H, H')(T_i) =$   
 nombre d'éléments  $a$   
 de  $H$  tels que  $T_i(a) \in H'$

||

$IFUNC(H, H')(i) =$   
 nombre d'éléments  $(a, b)$   
 dans  $H \times H'$  tels que  
 $\text{int}(a, b) = i$

*« Here the basic hierarchical scope of the (twelve-tone) system is contained essentially in the simple **theorem** that:*

Given a collection of pitches (pitch classes), the multiplicity of occurrence of any interval (...) determines the number of common pitches between the original collection and the transposition by the interval »

(Milton Babbitt, *Past and Present Concepts*, 1961)

**Babbitt**

$\updownarrow GIS = \mathbf{Z}_{12}$

$INJ(A,B)(T_i)$

=

$IFUNC(A,B)(i)$

*« ...on peut remplacer entièrement le concept d'intervalle dans un GIS avec le concept de transposition dans un espace »*

*« ...on peut remplacer le concept même de GIS avec l'idée d'un espace S sur lequel on a un **groupe** d'opérations qui opère »*

(David Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations*, 1987)

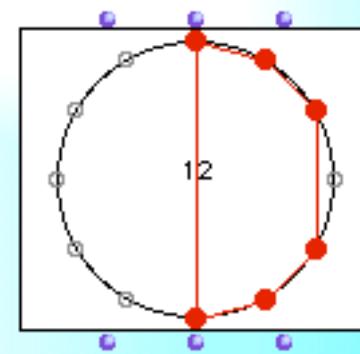
**Lewin**

$\updownarrow GIS$

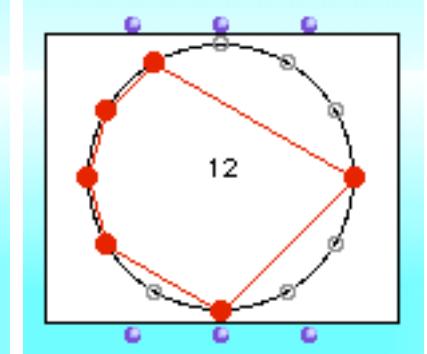
# Théorème de l'hexacorde

(Wilcox, Ralph Fox (?), Chemillier, Lewin, Mazzola, Schaub, ..., Amiot [2006])

A musical score consisting of four staves. The staves are labeled P, RP, I1P, and RI1P from top to bottom. Each staff has a treble clef and four measures. The notes are represented by small black dots on the staff lines. The notes in each measure are: P (B, A, G, F#), RP (A, G, F#, E), I1P (G, F#, E, D), and RI1P (F#, E, D, C#).



*A*



*A'*

« Un hexacorde et son complémentaire ont le même contenu intervallique »

$$\text{IV}(A) = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = [4, 3, 2, 3, 2, 1] = \text{IV}(A')$$

« Un hexacorde et son complémentaire ont la même fonction d 'injection par rapport à toute transformation bijective »

$$\text{INJ}(A, A')(f) = \text{INJ}(A', A)(f)$$

# David Lewin's call for Fourier

JMT, 1958

E. Amiot, T. Noll, M. Andreatta, C. Agon : « Oracles for Computer-Aided Improvisation », ICMC, New Orleans, novembre 2006

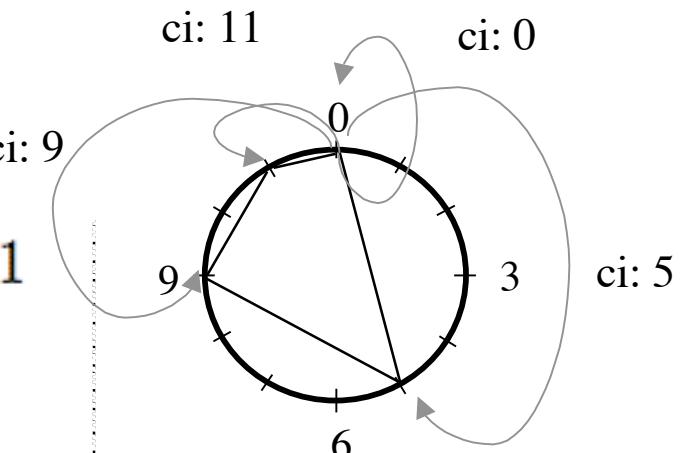
- The Interval Content of two chords  $A$  and  $B$  is the convolution product of their characteristic functions

$$IC_A(k) = \text{Card}\{(x, y) \in A \times A \mid x + k = y\}$$

$$IC_A(k) = (1_A \star 1_{-A})(k)$$

$$1_A * \tilde{1}_B(k) = \sum_i 1_A(i) \times 1_B(i - k) = \sum_{\substack{i \in A \\ i - k \in B}} 1$$

$$\mathcal{F}(1_A * \tilde{1}_B) = \mathcal{F}(1_A) \times \mathcal{F}(\tilde{1}_B)$$



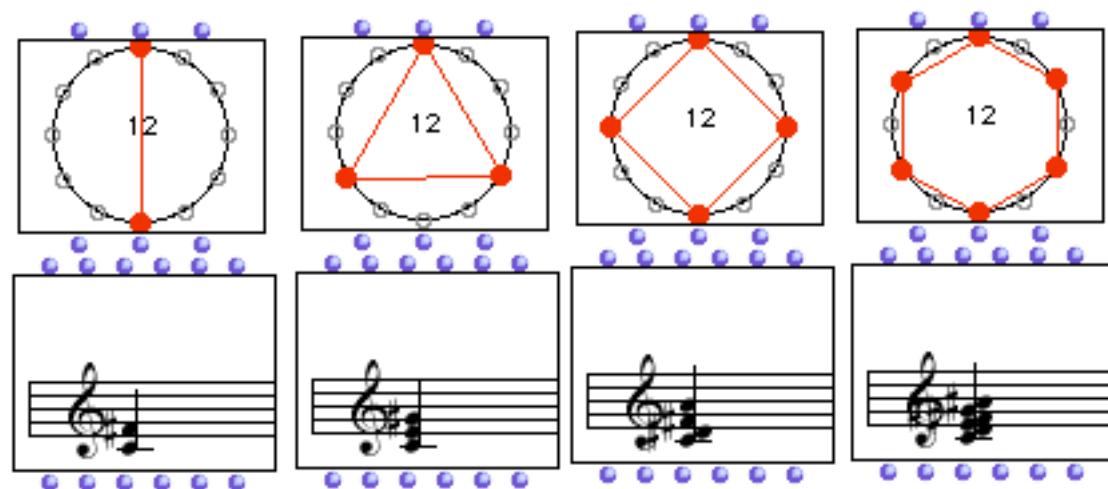
$$A = \{0, 5, 9, 11\}$$

$$IC_A(k) = 1 \quad \forall k = 1 \dots 11$$

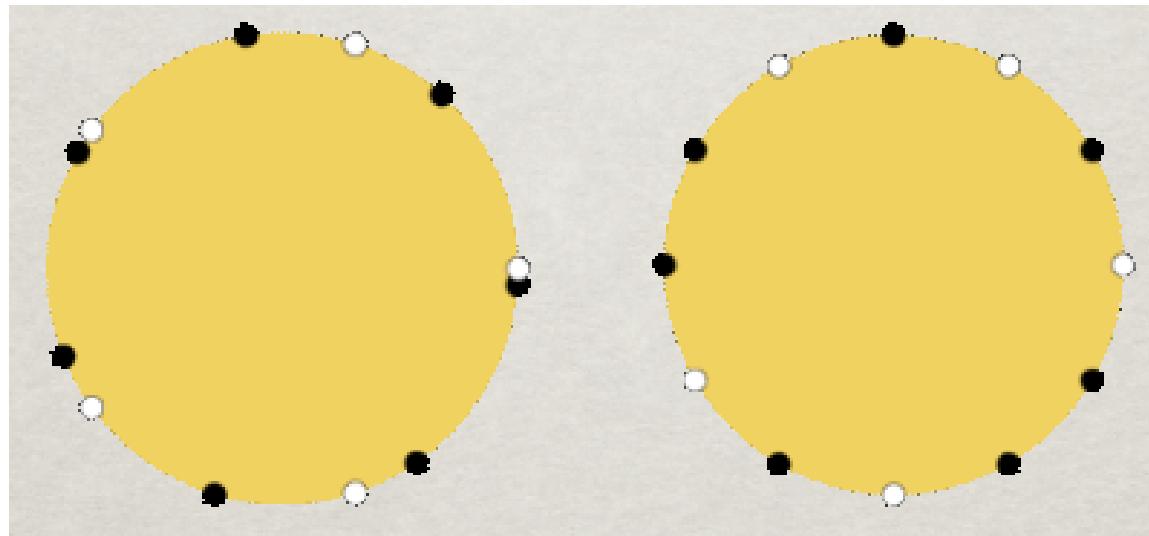
$$\forall k \mathcal{F}(\text{IC}_{\mathbb{Z}_c \setminus A})(k) = \mathcal{F}(\text{IC}_A)(k)$$

# Maximally Even Sets

---



Clough and Douthett



Diatonic scale :  
 $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 10\}$

Pentatonic scale :  
 $\{0, 2, 5, 7, 10\}$

# Fourier Transform and ME-Sets

**Definition** (Clough-Myerson-Douthett) A set  $A$  with cardinality  $d$  in a given equal tempered space  $\mathbf{Z}_c$  is *maximally even* if  $A = \{a_k\}$

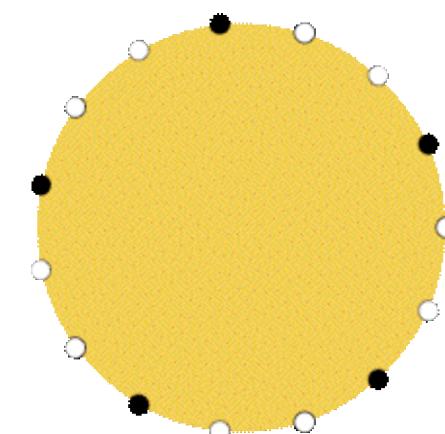
$$a_k = J_{c,d}^\alpha(k) = \left\lfloor \frac{kc + \alpha}{d} \right\rfloor$$

where  $\alpha \in \mathbf{R}$

$[x]$  is the integer part of  $x$

**Definition** (Amiot, 2005) A set  $A$  with cardinality  $d$  in a given equal tempered space  $\mathbf{Z}_c$  is *maximally even* if

$|F_A(d)| \geq |F_B(d)|$  for all subsets  $B$  of cardinality  $d$  in  $\mathbf{Z}_c$ .



$$F_A(5) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

In general,  $|F_A(t)| \leq \#A$

$$\mathcal{F}_A : t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/c}$$

# Un panorama sur la tradition « set-théorique » américaine

[Ernst Krenek]

**Milton Babbitt**

Benjamin Boretz

Michael Kassler

John Perle

David Lewin

**Allen Forte**

...

Paul Lansky

**Robert Morris**

**John Rahn**

John Straus

John Roeder

Joseph Dubiel

Andrew Mead

**John Clough**

[Gérald Balzano]

**Richard Cohn**

...

Henri Klumpenhouwer

**David Clampitt**

**Norman Carey**

**Jack Douthett**

Edward Gollin

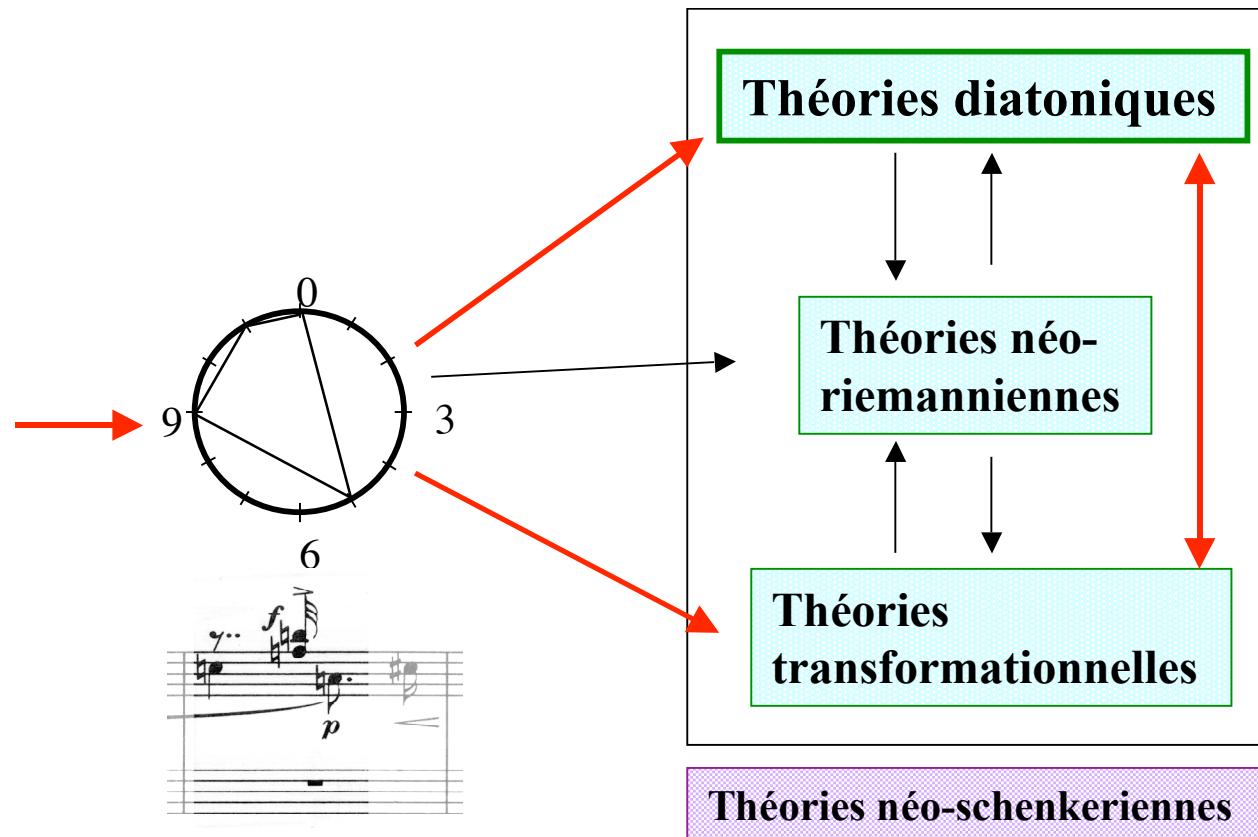
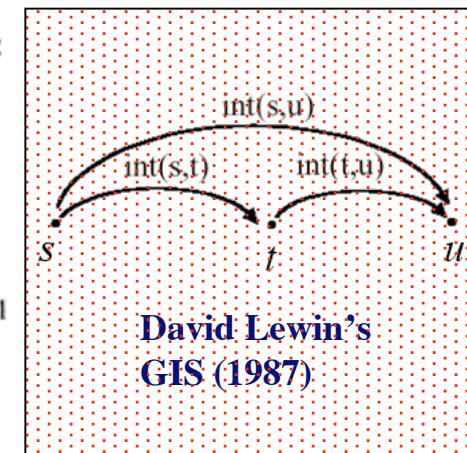
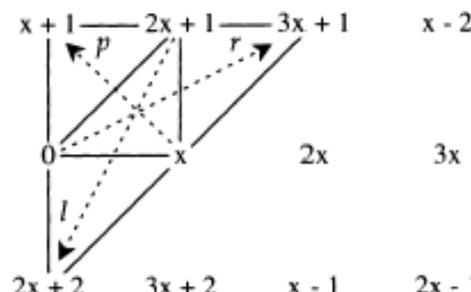
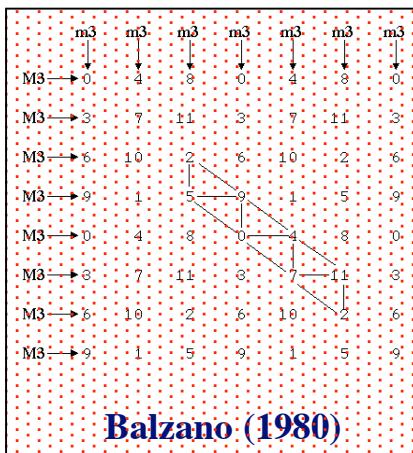
Robert Peck

Julian Hook

**Ian Quinn**

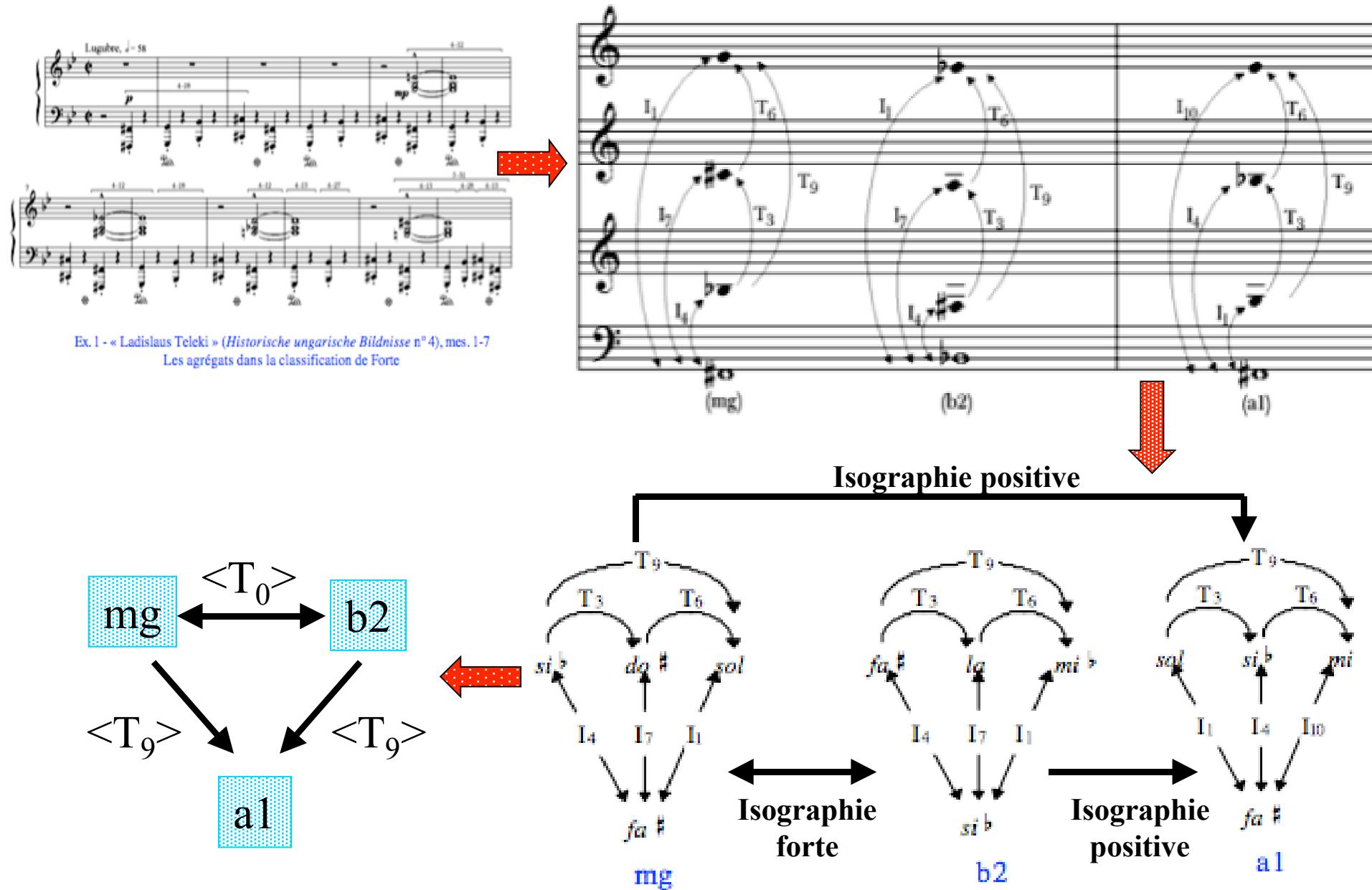
Dmitri Tymoczko

...



# Klumpenhouwer Networks (K-réseaux)

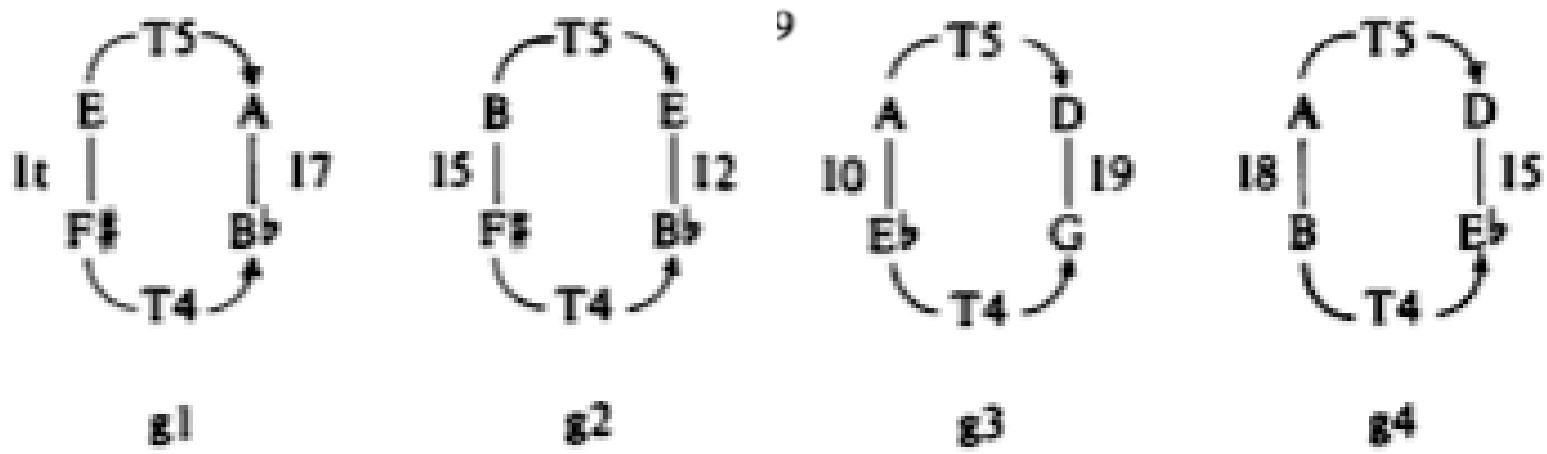
Xavier Hascher: « Liszt et les sources de la notion d'agrégat », Analyse Musicale, 43, 2002



# *Klumpenhouwer Networks (K-réseaux)*

David Lewin: «A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2 », JMT, 1994

A musical score excerpt in two staves. The top staff is treble clef and the bottom is bass clef. Measures 1-5 show chords I, II, III, IV, and V. Measures 6-13 show chords VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, and XIII. Measure 11 has a bracket labeled '(x)'. Measure 13 has a bracket labeled 'bb'.



<T7>

Isographie positive

<T8>

Isographie positive

# Klumpenhouwer Networks (K-réseaux)

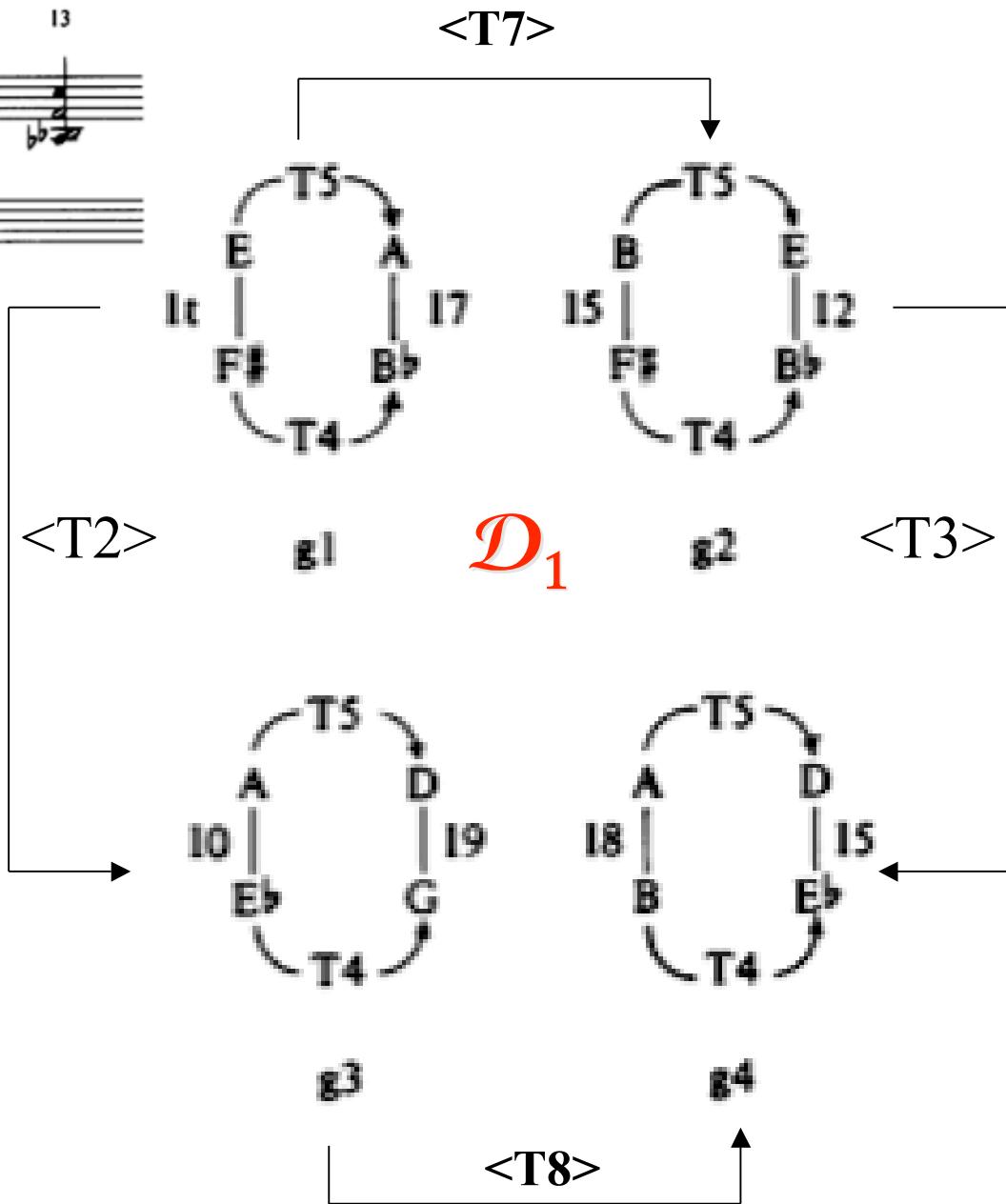
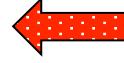
David Lewin: «A Tutorial on K-nets using the Chorale in Schoenberg's Op.11, N°2», JMT, 1994



Example 9

$$\mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$$

$$\mathcal{D}_4 \longrightarrow \mathcal{D}_3$$



Henry Klumpenhouwer: Deep Structure in K-net Analysis with Special Reference to Webern (Opus 16, n°4)

**Gesang**

J<sub>1</sub> [0125]    J<sub>2</sub> [0125]    J<sub>3</sub> [0125]

Sehr lebhaft ( $\text{♩} = \text{ca } 112$ )

1    2    rit. - - - - -

A8 - - - - - par - ges - me,    D9 - - - - -

Baß-Klarinette

J<sub>4</sub> [0134] langsam ( $\text{♩} = \text{ca } 84$ )

3    4    sehr zart

mi - ne,    hys - - - - - so - - - - - tempo I. ( $\text{♩} = \text{ca } 112$ )

Hkl.

pp

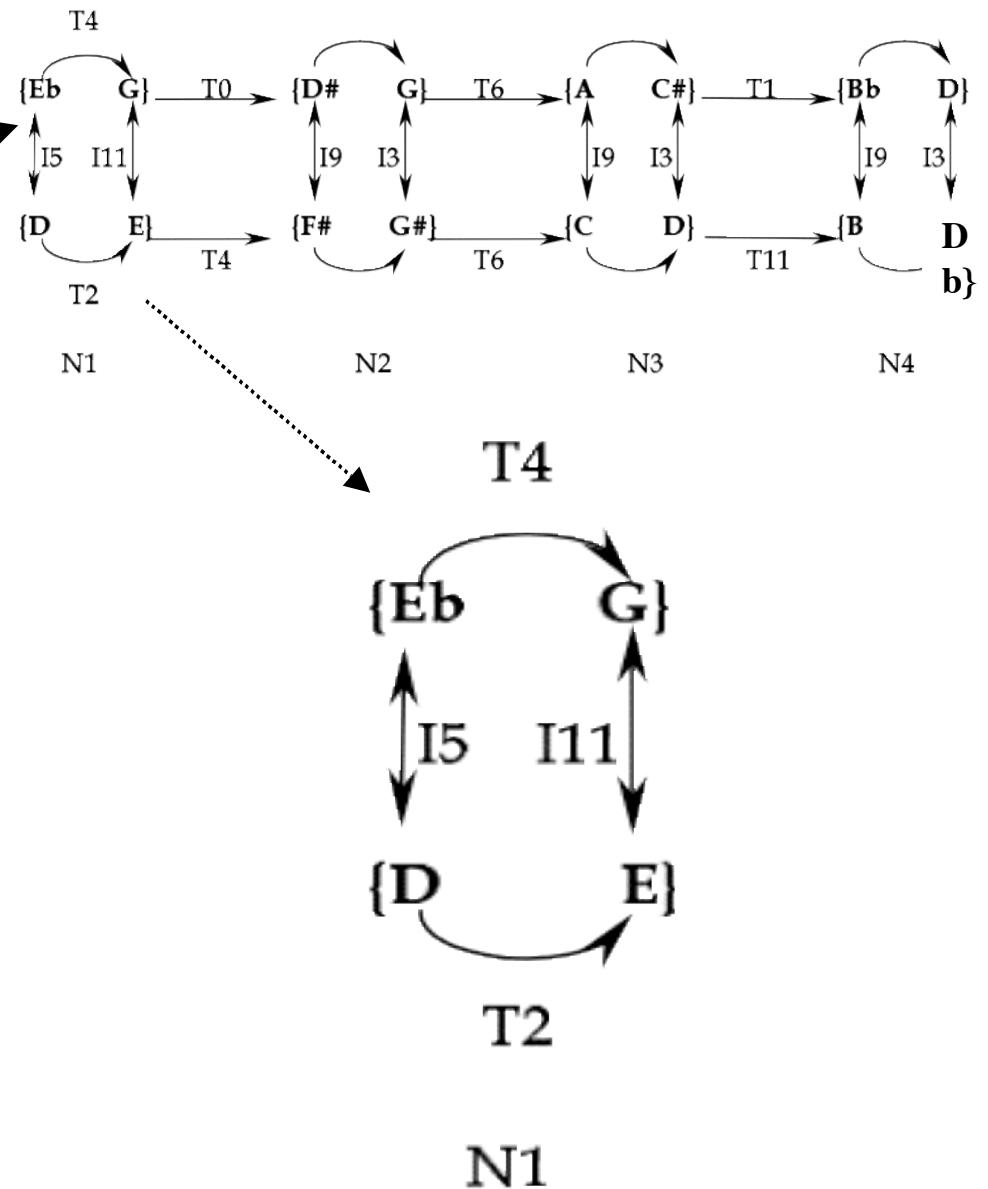
=

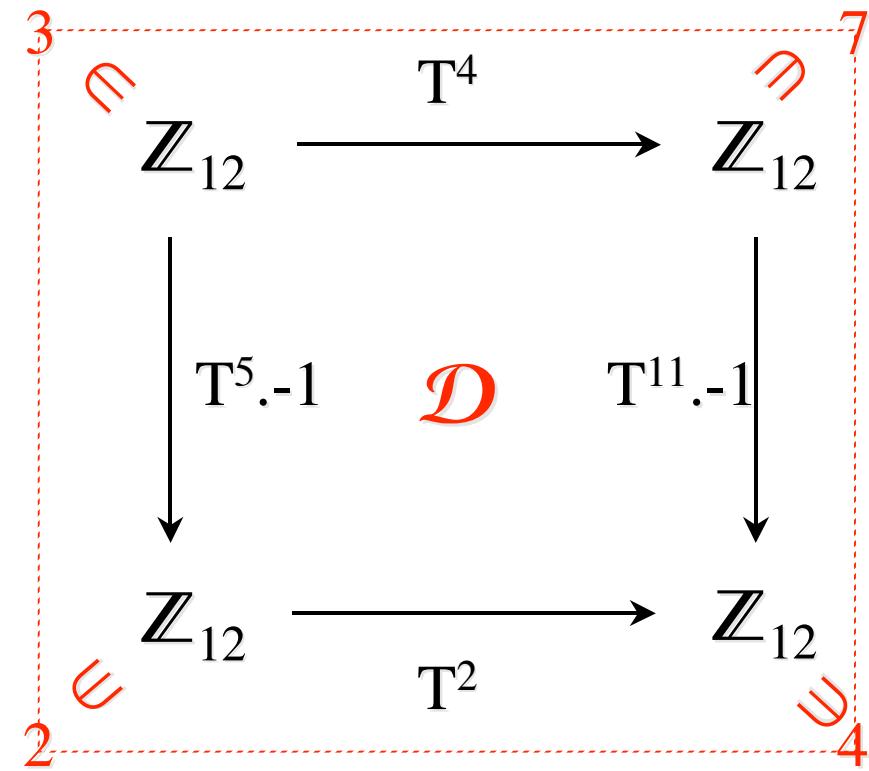
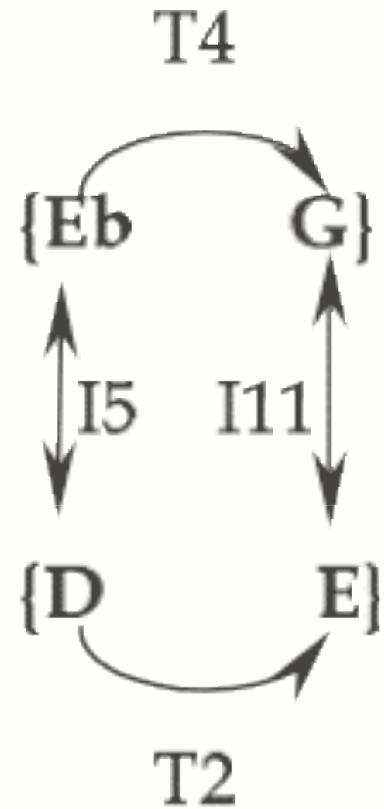
J<sub>8</sub> [0125]

5    6    da - bor:    la - - - - - va - - - - - bis - me,    et

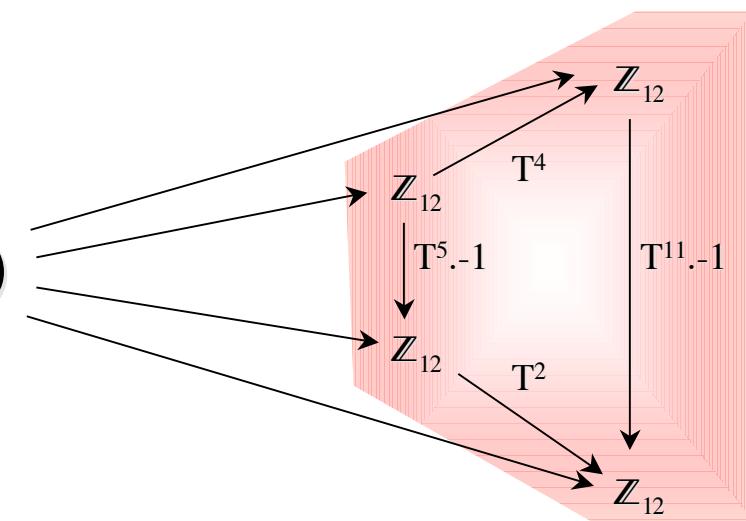
Bkl.

fp





$N1$   
 $(3, 7, 2, 4) \in \lim(\mathcal{D})$



$$\mathcal{Z}_i = \mathbb{Z}_{12}$$

$$f_{ij}^t \in \mathcal{Z}_i @ \mathcal{Z}_j$$

$\lim(\mathcal{D})$  = family of  
strongly-isographic networks

Fact:

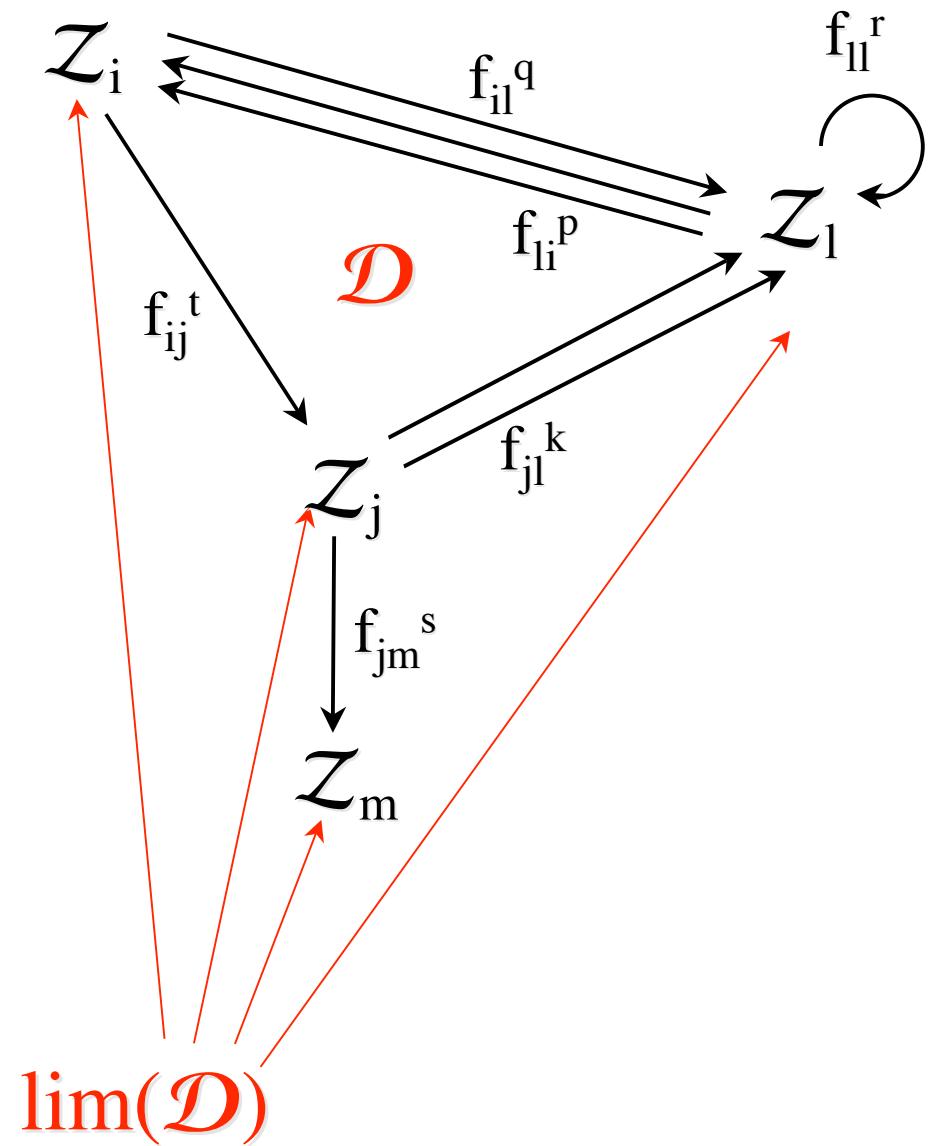
$$\lim(\mathcal{D}) \approx U$$

$U =$  (empty or)  
subgroup of  $(\mathbb{Z}_{12})^n$

If  $f_{**}^*$  = isomorphisms  
 $\text{card}(U)$  (= 0 or)  
 divides 12

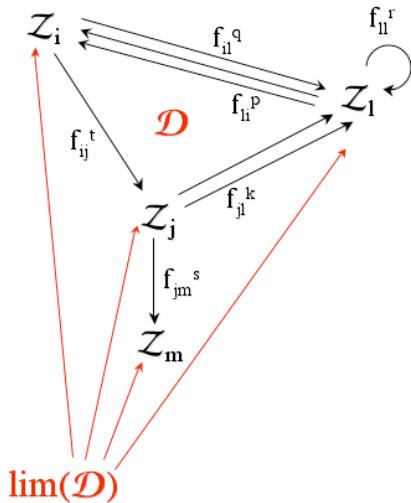


G. Mazzola & M. Andreatta: **From a Categorical Point of View:  
K-nets as Limit Denotators**, PNM, 2006



$$\mathcal{Z}_i = \mathbb{Z}_{12}$$

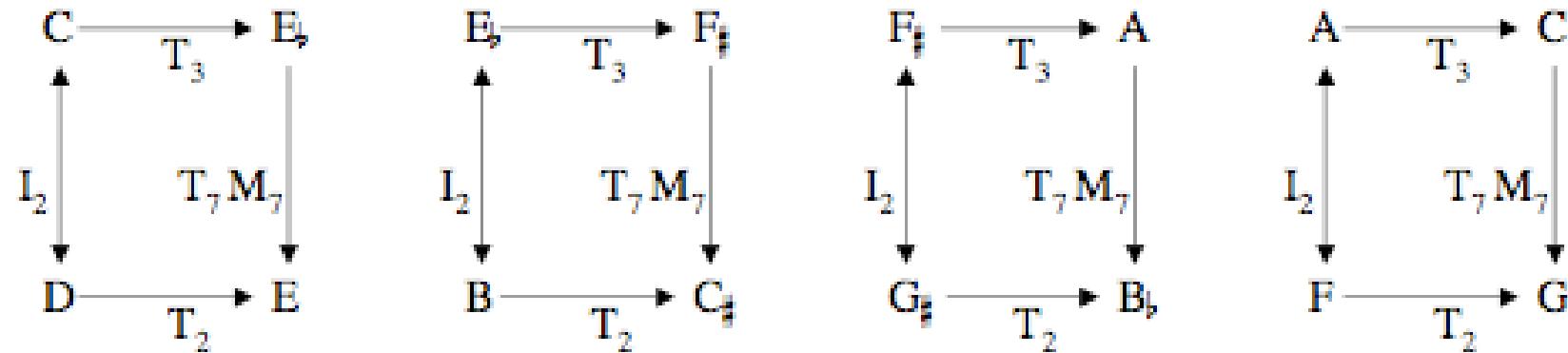
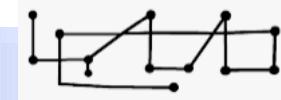
$$f_{ij}^t \in \mathcal{Z}_i @ \mathcal{Z}_j$$



Fact:  
 $\lim(\mathcal{D}) \approx U$

$U =$  (empty or)  
 subgroup of  $(\mathbb{Z}_{12})^n$

If  $f_{**}^*$  = isomorphisms  
 card (U) (= 0 or)  
 divides 12



EXAMPLE 6: THE FOUR SOLUTIONS (STRONGLY ISOGRAPHIC K-NETS) OF THIS DIAGRAM ILLUSTRATE THAT THE CARDINALITY OF THE SOLUTION SET IS A DIVISOR OF 12. HERE, THE OPERATOR  $M_7$  DENOTES THE MULTIPLICATION BY 7

## « Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's Klavierstück III »

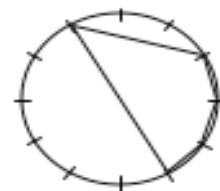
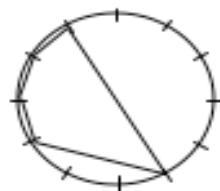
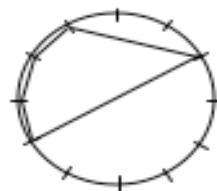
Lewin 1993



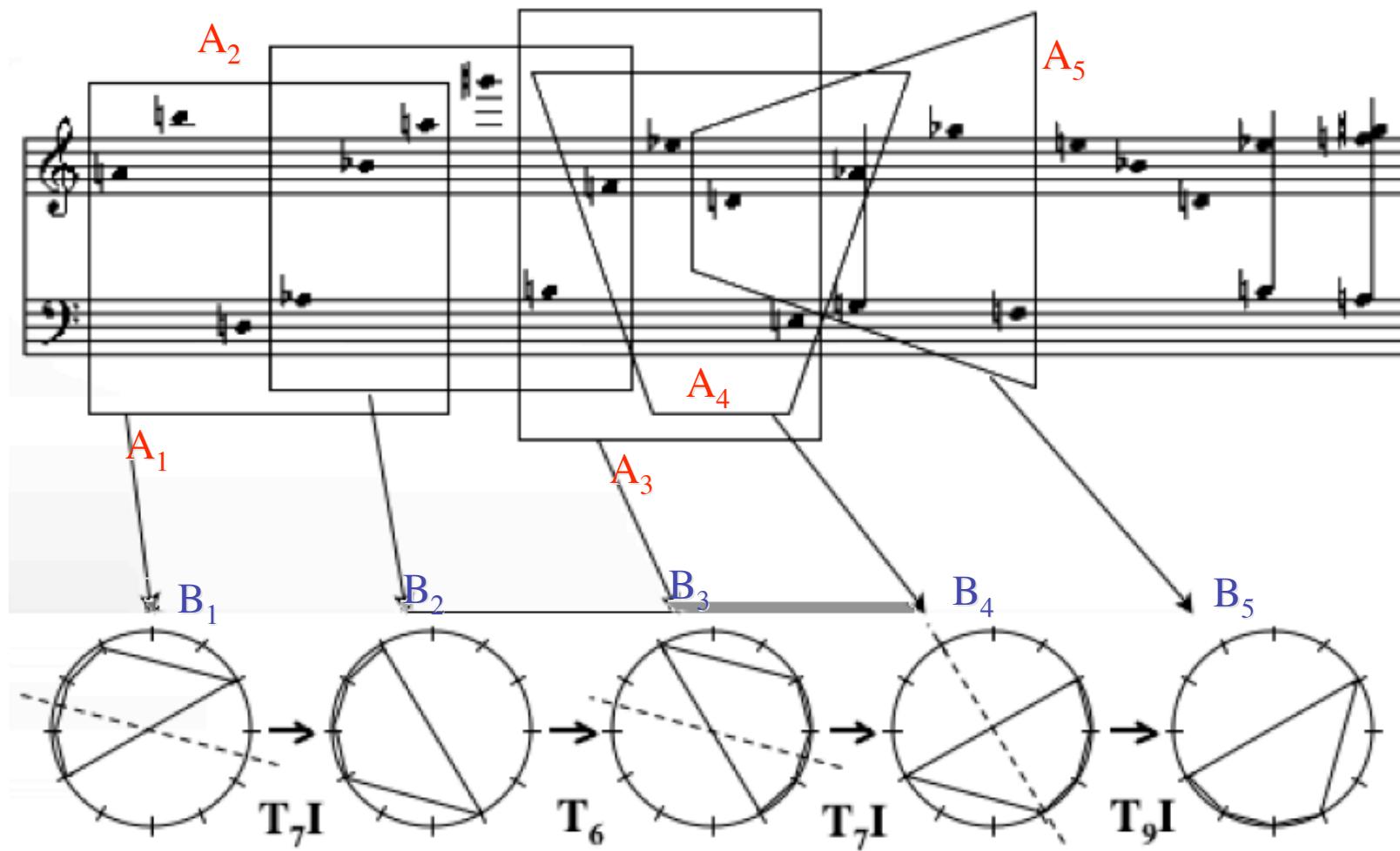
**SI:** (1, 1, 1, 3, 6) (6, 3, 1, 1, 1) (6, 3, 1, 1, 1)

**IFUNC:** [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3] [5 3 2 2 1 1 1 1 1 2 2 3]

**VI:** [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1] [3 2 2 1 1 1]



« The most ‘theoretical’ of the four essays, it focuses on the forms of one pentachord reasonably ubiquitous in the piece. A special **group of transformations** is developed, one suggested by the musical interrelations of the pentachord forms. Using that group, the essay arranges **all pentachord forms** of the music into a **spatial configuration** that illustrates network structure, for this particular phenomenon, over the entire piece. »

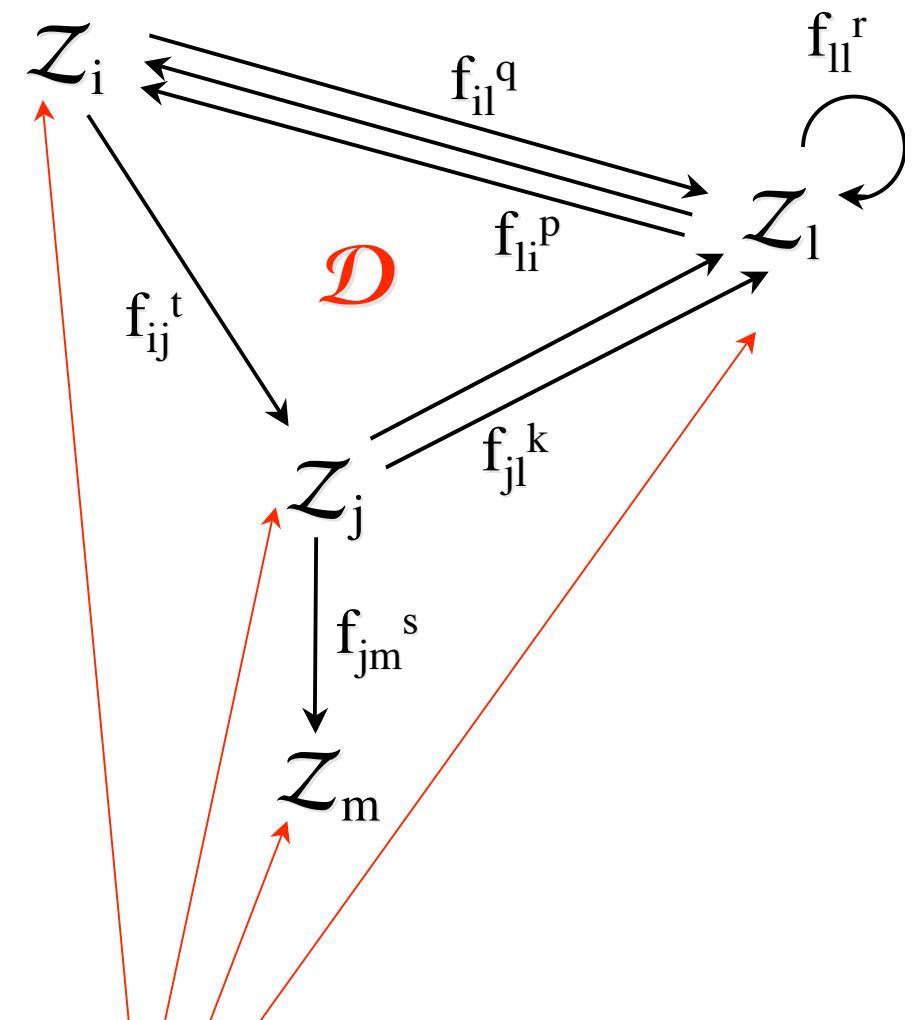
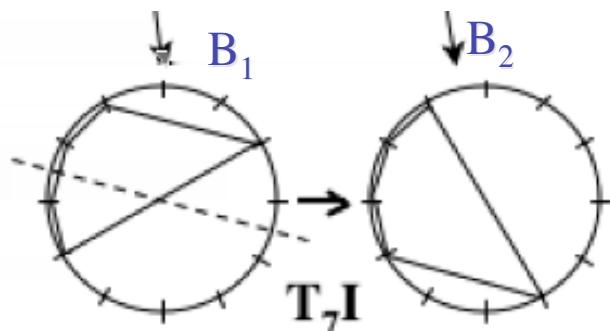


David Lewin: Analysis of Stockhausen's Klavierstück III  
*(Musical Form and Transformation: 4 Analytic Essays, Yale U Press, 1993)*

$\mathcal{Z}_i = P(M_i)$ ,  $M_i$  = module

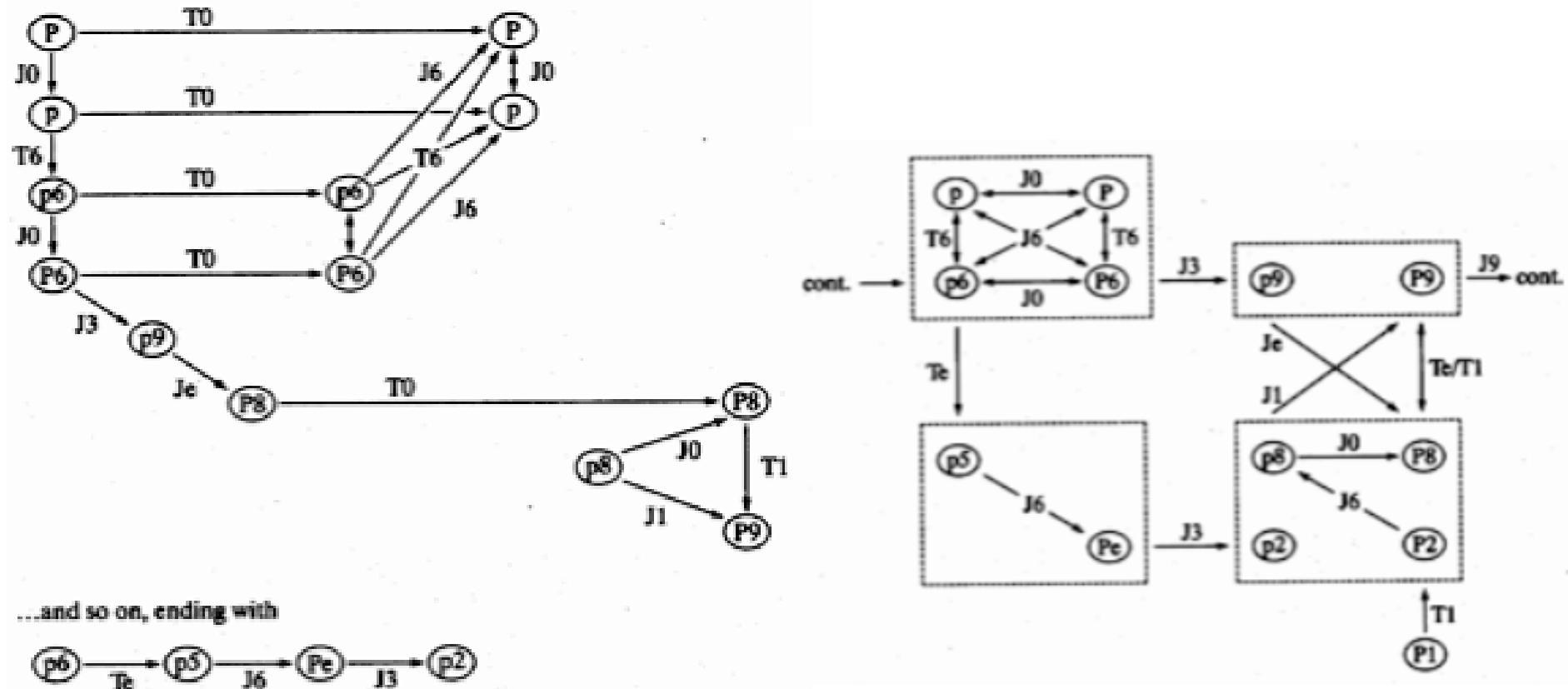
$f_{ij}^t$  = powerset map  $P(g_{ij}^t)$   
induced by  
diaffine morphisms  $g_{ij}^t$

$M_i \rightarrow P(M_i)$ :  $x \sim > \{x\}$   
special case of  
singletons!



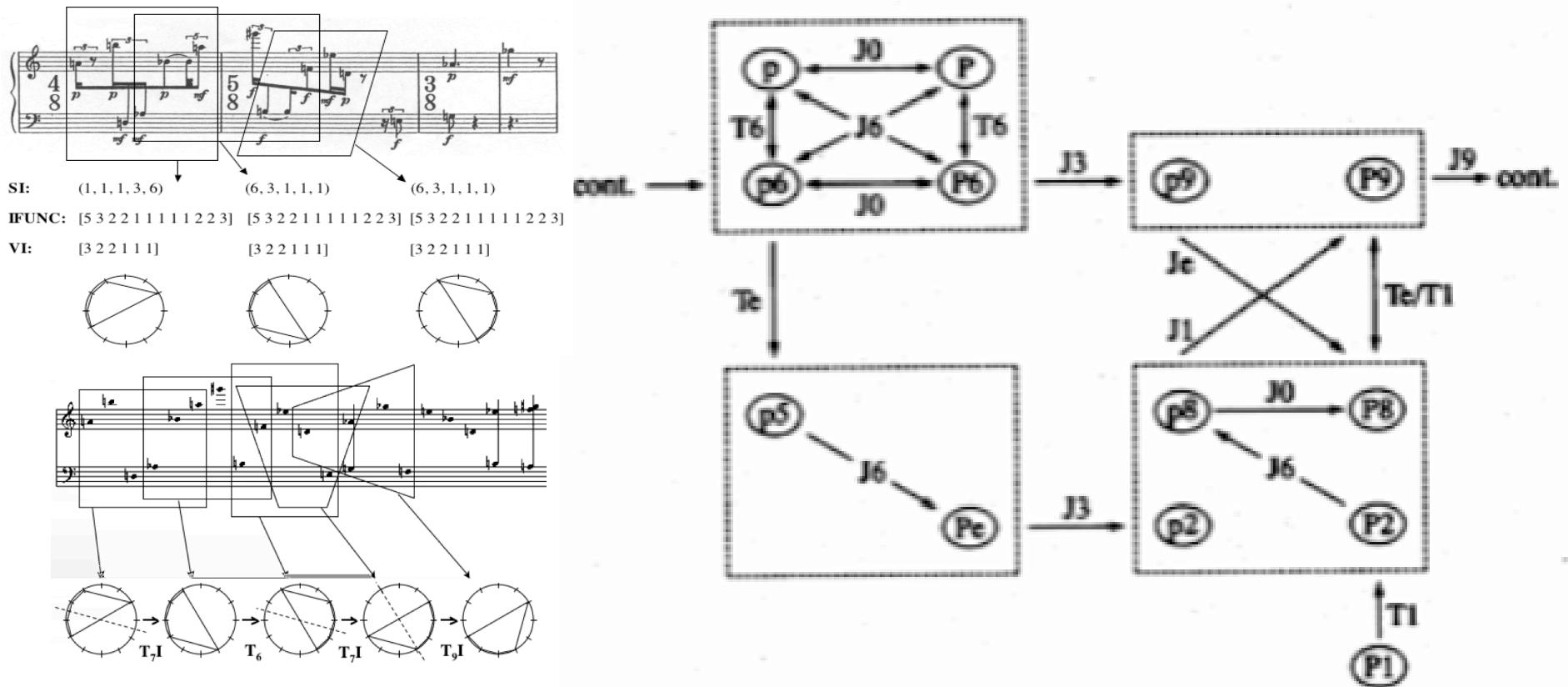
$$(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) \in \lim(\mathcal{D})$$

# Progression transformationnelle vs réseau transformationnel



« Rather than asserting a network that follows pentachord relations one at a time, according to the chronology of the piece, I shall assert instead a **network that displays all the pentachord forms used and all their potentially functional interrelationships, in a very compactly organized little spatial configuration.** »

# Progression transformationnelle vs réseau transformationnel



« *A rational reconstruction of a work or works, which is a theory of the work or works, is an explanation not, assuredly, of the ‘actual’ process of construction, but of how the work or works may be construed by a hearer, how the ‘given’ may be ‘taken’* »

M. Babbitt : « Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History », 1972

# Perspectives...

- Analyse plus fine des relations entre le positivisme logique et la tradition américaine
  - Relecture du principe de « reconstruction rationnelle » et, plus en général, des thèses de *La construction logique du monde* (Dualité de l'objectal et de l'opératoire chez Gaston-Granger)
  - Articulation entre théorie et composition
  - Articulation entre théorie et analyse musicale

« Tous les musiciens s'accordent à penser qu'à la base de l'élément émotionnel de la musique se trouve un **puissant élément formel**. Il se peut qu'il soit susceptible de cette même étude [théorie des groupes] qui s'est révélée si féconde pour l'art décoratif. Mais dans ce cas, nous n'avons sans doute pas encore découvert les outils mathématiques appropriés »

Hermann Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952

