TEMPS ET INCOMPLÉTUDE : GENÈSE ET DÉVELOPPEMENTS DE L'APPROCHE CATÉGORIQUE DES MES

par

Andrée C. EHRESMANN

Université de Picardie Jules Verne
ehres@u-picardie.fr
http://ehres.pagesperso-orange.fr
http://vbm-ehr.pagesperso-orange.fr

MAMUPHI, ENS Paris, Janvier 2014

PREMIERE PARTIE :
APPROCHE DES CATEGORIES PAR CHARLES EHRESMANN[1]

"Au commencement était l'action "

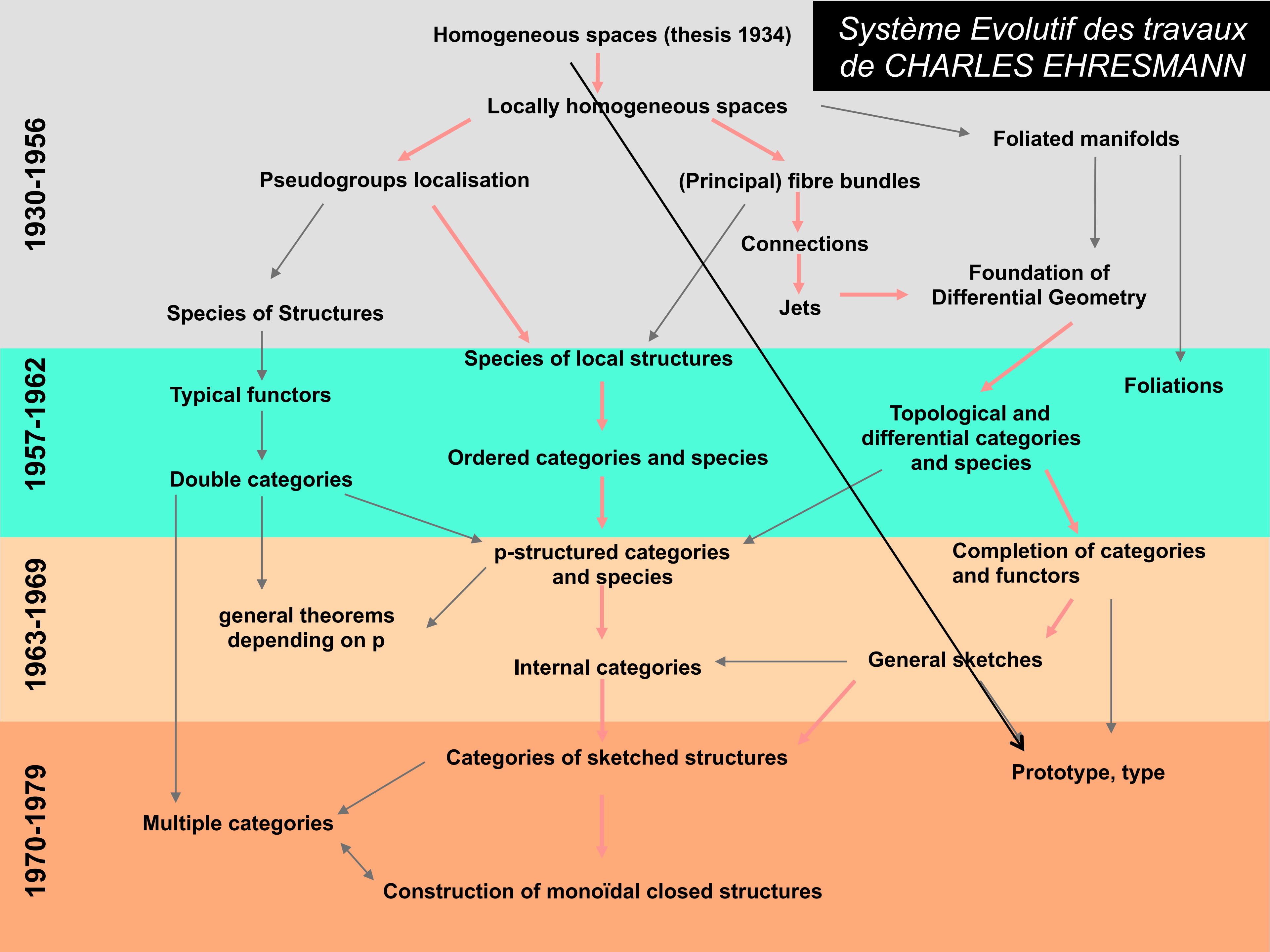
Goethe, Faust

" La Géométrie est la théorie des structures plus ou moins riches, dans lesquelles on discerne en général des structures algébriques et des structures topologiques sous-jacentes. "

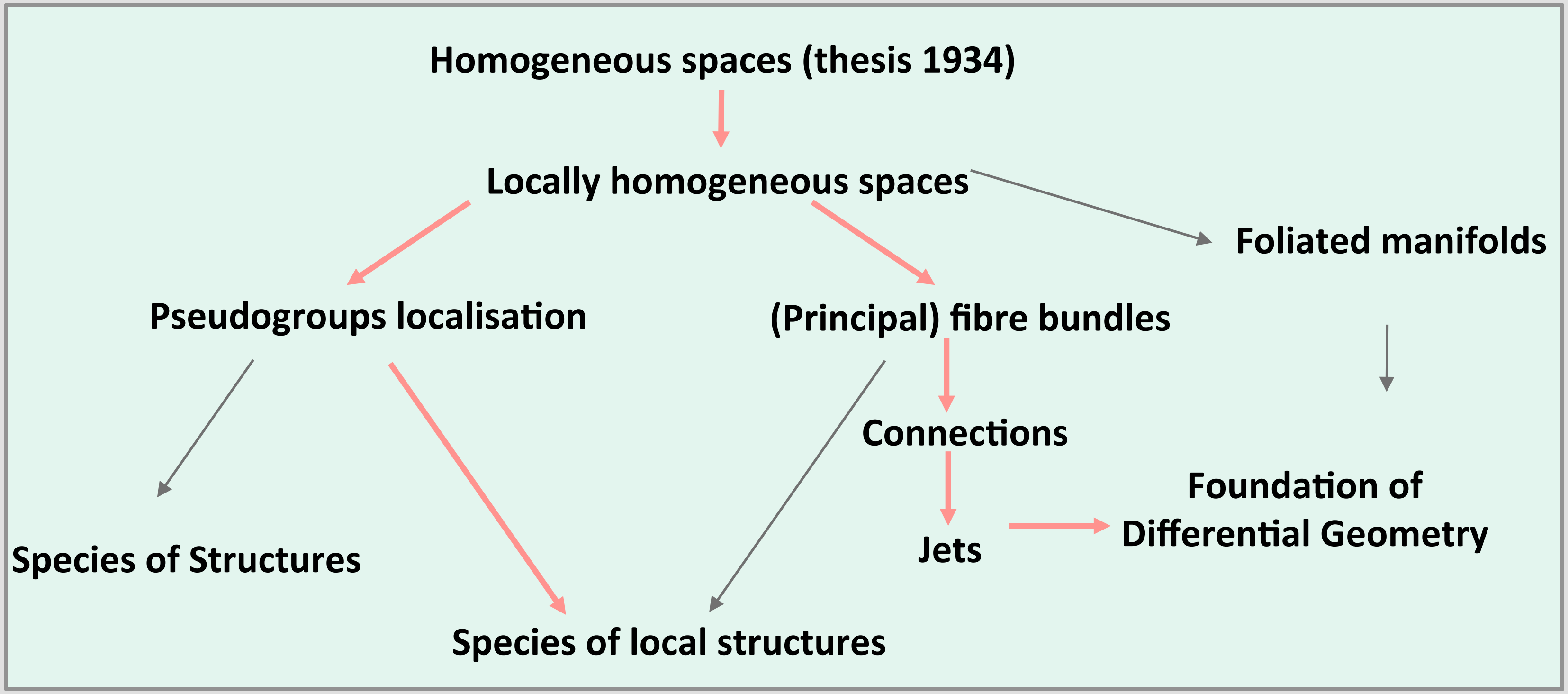
C. Ehresmann, 1955

" l'évolution des Mathématiques ne sera jamais terminée et il ne faudra jamais relâcher les efforts en vue de l'approfondissement et de l'unification de nos conceptions mathématiques. "

C. Ehresmann, 1972


Système Evolutif des travaux de CHARLES EHRESMANN
1930-1956
1957-1962
1963-1969
1970-1979
Homogeneous spaces (thesis 1934)
Locally homogeneous spaces
Foliated manifolds
Pseudogroups localisation
(Principal) fibre bundles
Connections
Jets
Foundation of Differential Geometry
Species of Structures
Species of local structures
Typical functors
Foliations
Topological and differential categories and species
Ordered categories and species
Double categories
p-structured categories and species
Completion of categories and functors
general theorems depending on p
Internal categories
General sketches
Categories of sketched structures
Prototype, type
Multiple categories
Construction of monoïdal closed structures

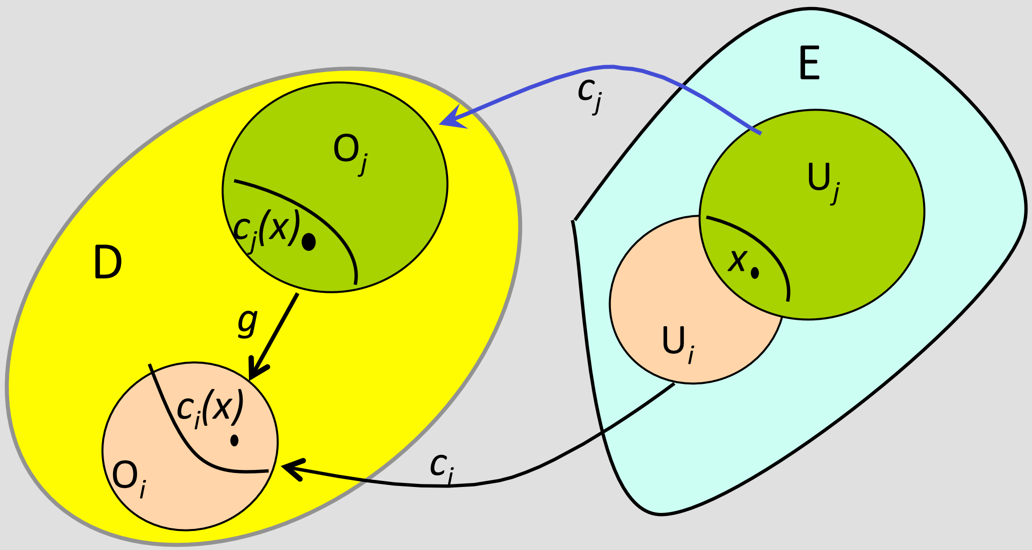
1930 – 1956 : TOPOLOGIE ET GEOMETRIE



Espace homogène = variété sur laquelle un groupe de Lie opère transitivement.

" C'est l'exposé d'Elie Cartan sur les espaces localement euclidiens et le livre de Veblen-Whitehead sur "The foundation of Differential Geometry" qui m'ont conduit à étudier les espaces localement homogènes de Lie et à chercher une définition générale des structures de caractère local. " (C. Ehresmann, 1955)

STRUCTURES LOCALES ASSOCIEES A UN PSEUDOGROUPE



Pseudogroupe de transformations G sur un espace topologique D = sous-groupoïde du groupoïde des isomorphismes entre ouverts O_i de D contenant avec g toutes ses restrictions à des ouverts O_j, et avec une famille compatible (g_i) son union g.

Un espace E est *localement isomorphe* à D pour G sur D s'il existe un atlas (maximal) A = (c_i) : c_i : $U_i \rightarrow O_i$ est une bijection sur un objet de G, E est la réunion des O_i et les 'changements de cartes $g' = c_j c_i^{-1}$ sont dans G.

Les espaces localement isomorphes à D pour G forment *l'espèce de structures locales associée à G.* Exemples : variétés différentiables, espaces fibrés, variétés feuilletées.

1957 – 1966 : CATEGORIES ET ESPECES DE STRUCTURES

Fibre bundles

Category action

Species of local structures

Typical functors

Topological and differentiable categories and species

Ordered categories and species

Double categories

p-structured categories and species

Completion of categories and functors

general theorems depending on p

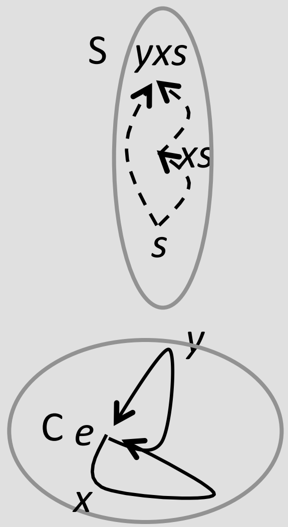
Congrès Nice 1957

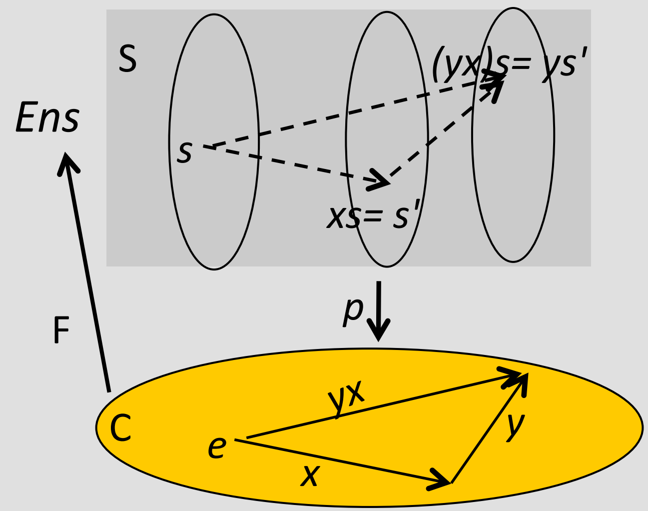
"*Gattungen von Lokalen Strukturen*" (1957) : Premier article où Charles utilise les catégories (générales) pour donner une traduction catégorique :

1. des espèces de structures au sens de Bourbaki ; une construction explicite de l'échelle des ensembles (à l'aide de transformations naturelles) est donnée dans "*Catégorie des Foncteurs Types*" (1960).
2. des espèces de structures locales.

ACTIONS DE CATEGORIES

La notion de groupe d'opérateurs s'étend aux catégories, mais l'action y devient 'partielle' : une flèche n'opére que sur la fibre au-dessus de sa source.





C = groupe opère sur S pour la loi: *k:* CxS → S: (*x*, *s*) |→ *xs* qui vérifie *y(xs)* = *(yx)s* et *es* = *s* D'où un foncteur F: C → *Ens:* F(*e*) = S, F(*x*): S → S: *s* |→ *xs*

C = catégorie, F: C → *Ens* est un foncteur, tel que les F(*e*), pour tout *e*, soient non vides et disjoints. Soit

$S = U_e F(e)$ et p: $S \to C_0$: $s \mapsto e$ si $s \in F(e)$.

Alors C *opère* sur S, l'*action* étant la loi

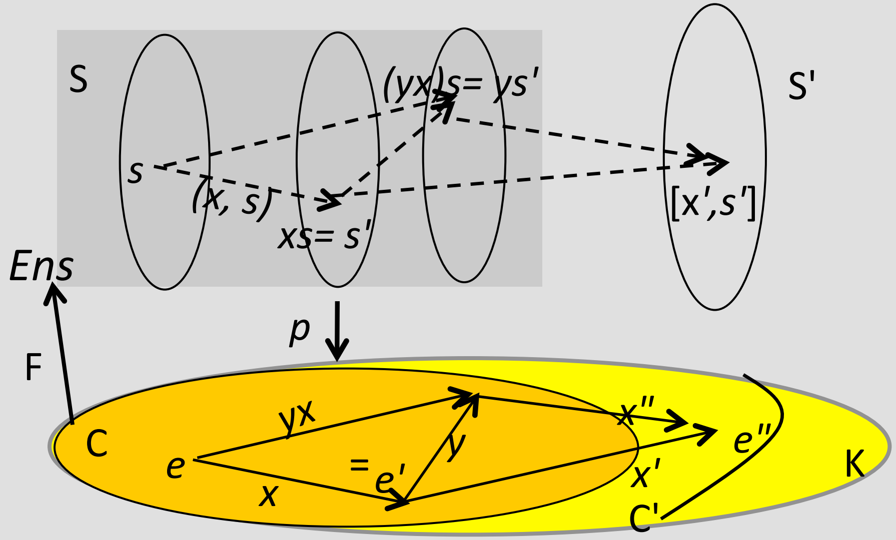
k: C*S → S: (*x*, *s*) |→ *xs* = F(*e*)(*s*)

si *p(s)* = *e* = α*(x)*. Cette action *k vérifie :*

y(xs) = *(yx)s* et *p(s)s* = *s*

ESPECES DE STRUCTURES. ELARGISSEMENT

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.B}"] & C^*S \arrow[l] \arrow[l, bend right, "k"'] \arrow[d, "p^\wedge"] \\ C_0 & C \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$



3 définitions équivalentes :

1. *Foncteur* F: C → *Ens* tel que les 'fibres' F(*e*) pour tout *e* ϵ C_0 soient non vides et disjointes. Soit S = U_eF(*e*) et *p*: S → C_0 associant *e* à tout *s* ϵ F(*e*).

2. (C, S, *p*) est une *espèce de structures* sur C si *p*: S → C_0 et si on a une *action* *k*: C*S → S de C sur S, où *k*(*x, s*) = *xs* et C*S = {(*x, s*)| *x* ϵ C, s ϵ S, α(*x*) = *p(s)*}, vérifiant: *y(xs) = (yx)s* and α(*x*)*s* = *s*.

3. *Fibration discrète p^*: C*S, les morphismes étant (*x, s*)*:* (*e*, s) → (*e'*, *xs*).

Théorème d'élargissement. *Si* C *est une sous-catégorie de* K*, une espèce de structures sur* C *s'étend en une espèce sur la sous-catégorie pleine* C' *de* K *dont les objets e" sont buts d'au moins un x' de source dans* C*.*

CAS PARTICULIERS D'ELARGISSEMENT

1. Soit C un groupoïde. Il est *transitif* si les Hom sont tous non vides. Soit *e* un objet de C et C*e* le sous-groupe plein de C ayant *e* pour unité. Si C*e* est un groupe d'opérateurs sur un ensemble E, le théorème d'élargissement permet d'étendre cette action en une espèce de structures sur C dont toutes les fibres sont isomorphes à E.

Toute espèce de structures sur un groupoïde transitif est obtenue de cette façon.

2. A un pseudogroupe de transformations G sur D on associe l'espèce de structures (G, S, *p*) définie par le foncteur F: G → *Ens* tel que :

$$F(O) = \{(O, o) \mid o \in O\} \text{ pour tout objet } O \text{ de } D,$$

$$F(g): F(O) \to F(O'): (O, o) \mapsto (O', g(o)) \text{ pour tout } g: O \to O' \text{ dans } G.$$

Les structures locales associées à G correspondent à un élargissement (complet) de cette espèce de structures.

ESPECES DE STRUCTURES LOCALES

Classe locale = ensemble ordonné dont toute partie non vide A a un Inf noté $\bigwedge A$ satisfaisant *l'axiome de distributivité* :

$$(\bigvee A) \wedge b) = \bigvee_{a \in A}(a \wedge b)) \quad \text{pour toute partie majorée A, où } \bigvee A = \text{Sup } A.$$

Ind est la catégorie ayant pour objets les classes locales, les morphismes préservant les Sup et les Inf finis. Une *catégorie locale* est une catégorie interne à *Ind* dont l'ordre induit sur les Hom est discret.

Ind

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "p"'] & C^*S \arrow[l] \arrow[l, bend right, "k"'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\text{P.B.}"] \\
C_0 & C \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Une *espèce de structures locales* (C, S, *p*) est déterminée par une *action locale k* d'une catégorie locale C interne à *Ind* : S est une classe locale, et les applications p: S → C_0 et k: C*S → S sont inductives. La fibration discrète associée est locale.

Charles insiste sur le rôle des *covariants* en Géométrie. Ils sont représentés par les morphismes entre espèces de structures (locales), qu'il appelle *applications covariantes*.

ELARGISSEMENT COMPLET

Une espèce de sructures locales est *complète* si elle vérifie une 'condition de faisceau' (relative à la 'topologie sans points sous-jacente à l'ordre).

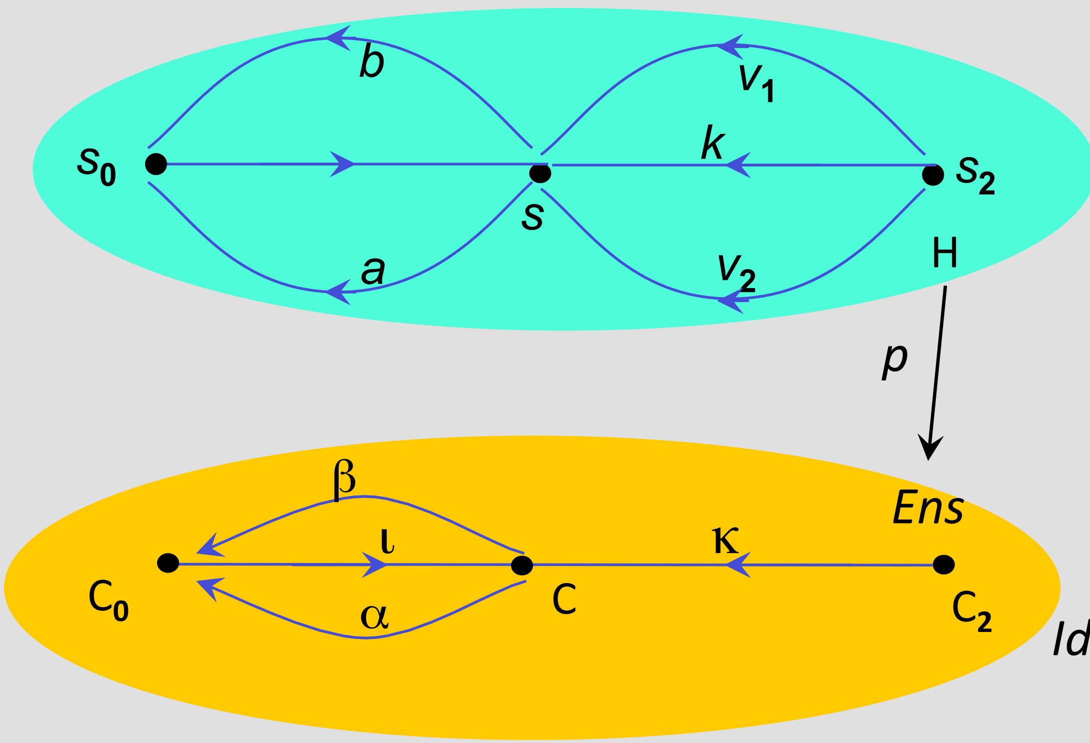
Théorème d'élargissement complet. *Si* (C, S, *p*) *est une espèce de structures locales sur une sous-catégorie C d'une catégorie locale* K *s'étend en une espèce de structures locales complètes.*

Ce théorème correspond à un T*héorème de faisceau associe* pour des topologies sans points (avant les notions de topologie de Grothendieck). En 1957, il est démontré seulement pour des groupoïdes, mais une preuve pour les catégories locales se trouve dans un article de 1969.

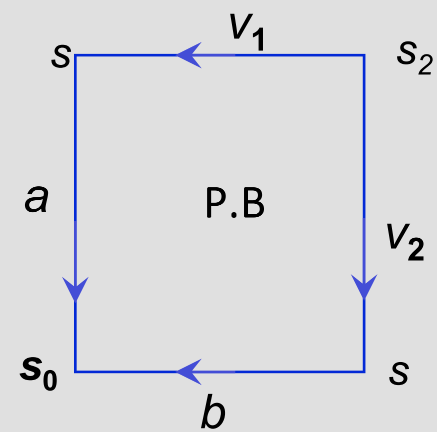
Les catégories et espèces de structures locales, ensuite généralisées en espèces (sous-)préinductives, donnent une approche du problème des "partial maps" qui sera abordé 20 ans plus tard. En particulier les espèces de structures préinductives sont en correspondance avec les catégories avec restriction de Cockett[2] (2002).

CATEGORIES *p*-STRUCTUREES ET LEURS ACTIONS

Après les catégories 'locales' et leurs actions, en 1959, Charles définit de même des catégories topologiques ou différentiables. Ces notions sont unifiées par la notion de catégorie *p*-structurée.



p: H → *Ens* est un foncteur fidèle



Idée d'une catégorie = (α, β, ι, κ)

(C, *s*) *est une catégorie p-structurée* si C est une catégorie, *s* un objet de H tel que *p(s)* = C, et si l'idée de C se relève dans H avec s_2 produit fibré de (*a*, b).

Une action *p-structurée* de (C, *s*) est définie comme dans le cas local.

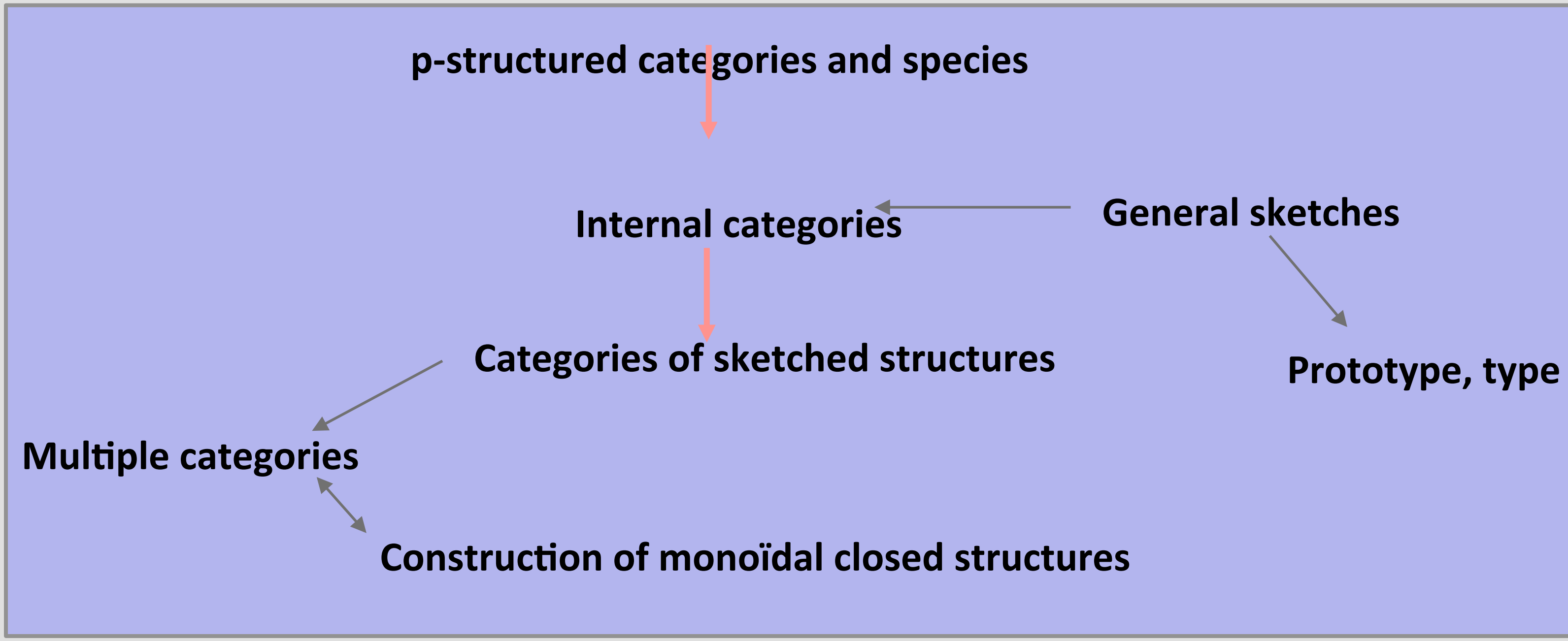
CATEGORIES *p*-STRUCTUREES. EXEMPLES

H = *Top* : *catégories topologiques* et *espèces de structures topologiques.*
H = *Diff* : *catégories différentiables* et *espèces de structures différentiables*
Ces 2 cas sont développés dans un article de 1959 comme généralisation des espaces fibrés localement triviaux. Ces derniers s'identifient à des espèces de structures (C, S, *p*) où C est un groupoïde localement trivial. Un tel groupoïde peut être vu comme le groupoïde des isomorphismes entre fibres d'un espace fibré principal, dont les espaces fibrés associés correspondent à ces espèces de structures.

H = *Cat* : *catégories doubles* dont les 2-*catégories* sont un cas particulier.

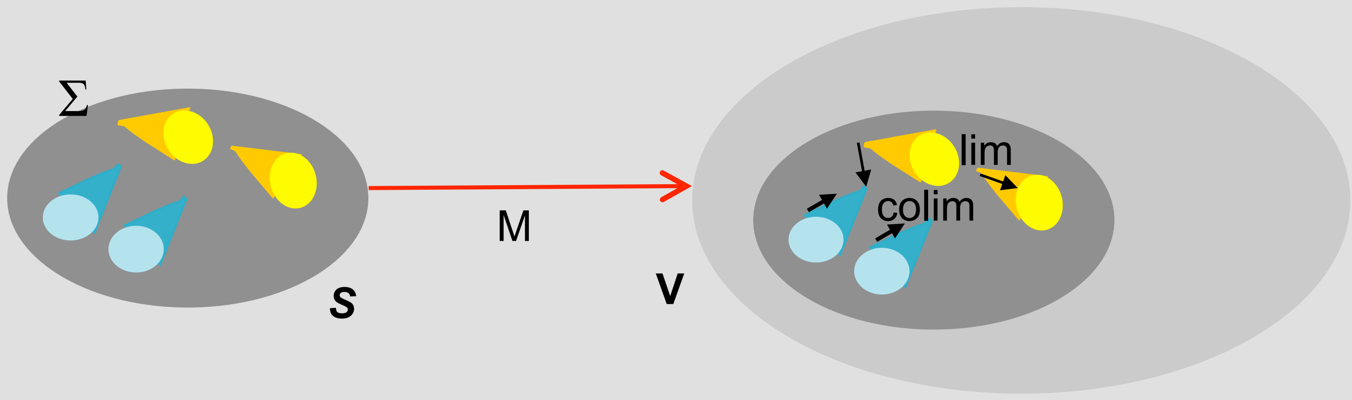
La catégorie *Cat*(*p*) des catégories *p*-structurées a diverses propriétés selon *p.* Ceci a conduit à déterminer des classes de "bons" foncteurs et à obtenir des *théorèmes de complétion* permettant d'étendre *p* en un foncteur ayant diverses propriétés. Par exemple *Diff* n'étant pas à produits fibrés, différentes "convenient categories" ont été proposées pour l'étendre.

1966- 1979 : ESQUISSES. CATEGORIES MONOIDALES FERMEES



La théorie des esquisses étend le cadre des "structures algébriques" en y incluant des structures avec lois partielles, en particulier les catégories conçues comme étant une généralisation des groupes ou des espaces ordonnés. Autrement dit l'accent est sur les 'petites' catégories, ce qui ne restreint pas la portée, puisqu'en utilisant la théorie des univers, on peut considérer des 'petites' catégories de taille croissante.

ESQUISSES ET LEURS MODELES



Une *esquisse inductive* (resp. *mixte) S* est la donnée d'une (néo)catègorie Σ , d'un ensemble de cônes inductifs (resp. et d'un ensemble de cônes projectifs) sur Σ.

Un *homomorphisme* de ***S*** vers une esquisse ***S'*** est un foncteur de Σ vers Σ ' transformant les cônes distingués en cônes distingués.
Les esquisses et leurs homomorphismes forment une catégorie *Esq*.

Un *modèle* M de ***S*** dans une catégorie **V** est un foncteur de Σ vers **V** transformant les cônes inductifs (resp. projectifs) en cônes colimite (resp. limite).

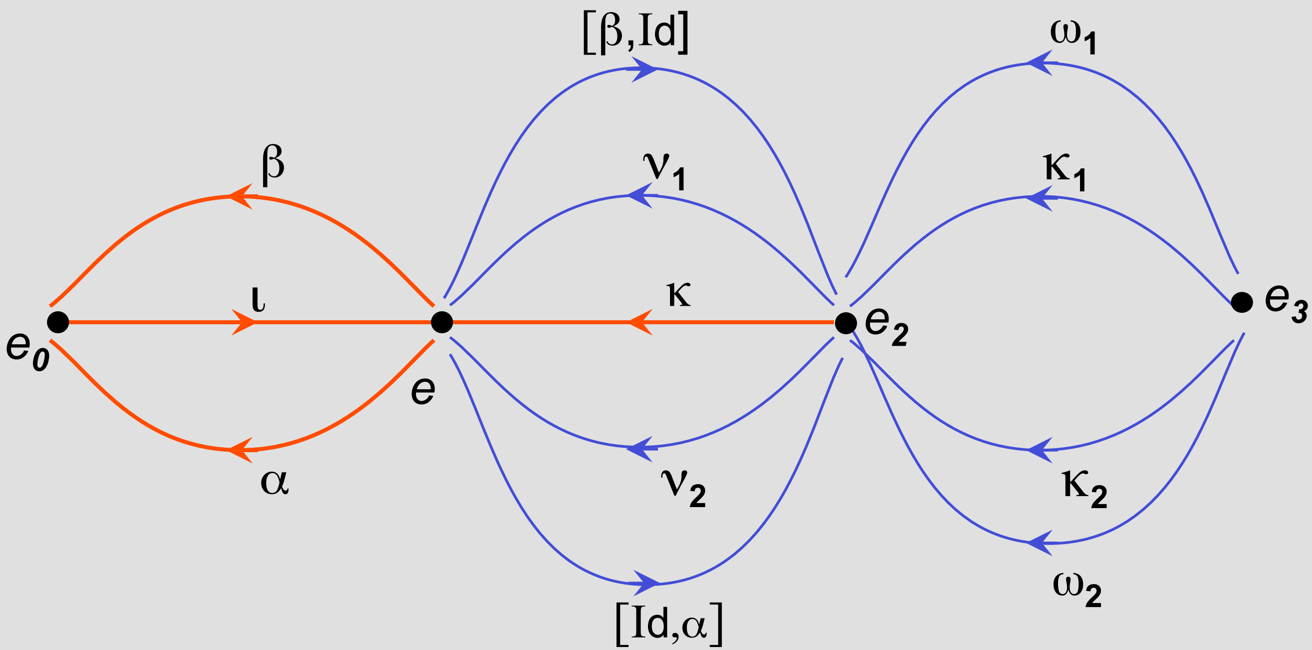
La catégorie $\mathbf{V}^{S}$ des modèles de ***S*** dans **V** est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbf{V}^{\Sigma}$ des foncteurs de Σ dans **V.**

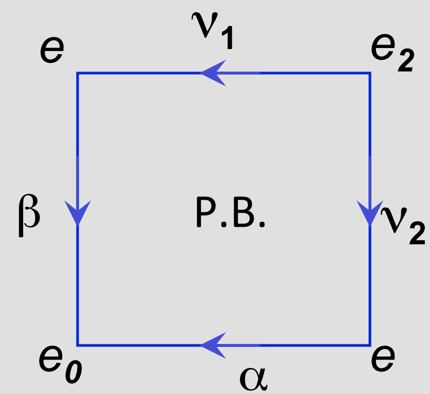
REMARQUES SUR LA DEFINITION DES ESQUISSES

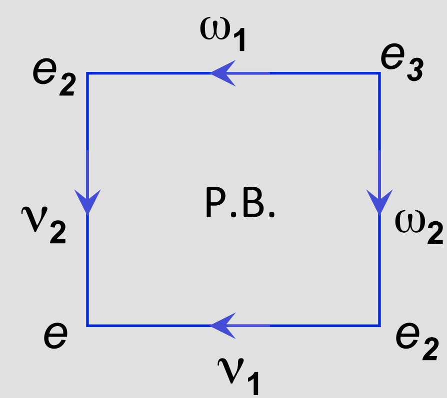
Dans la définition d'une esquisse ***S*** il nest pas nécessaire de supposer que Σ est une catégorie. Il suffit qu'elle soit une néocatégorie (ou graphe multiplicatif dans une terminologie plus ancienne de Charles), à savoir un graphe muni d'une loi de composition partielle associant à un chemin (*x, y*) de flèches successives un composé entre les mêmes objets. C'est ce qui est fait dans les premiers travaux sur le sujet. Toute néocatégorie Σ engendre une catégorie Σ' et l'esquisse ***S'*** obtenue en munissant Σ' des mêmes cônes distingués que Σ a les mêmes modèles que ***S.*** En pratique, quand on décrit une esquisse il est souvent plus pratique de se restreindre à une néocatégorie.

Plus tard Barr et Wells[3] ont un peu modifié la définition, en prenant pour Σ un simple graphe et en ajoutant dans la définition d'une esquisse des 'équations' indiquant que certains chemins entre 2 objets doivent avoir le même composé comme image par un modèle.

L'ESQUISSE DES CATEGORIES



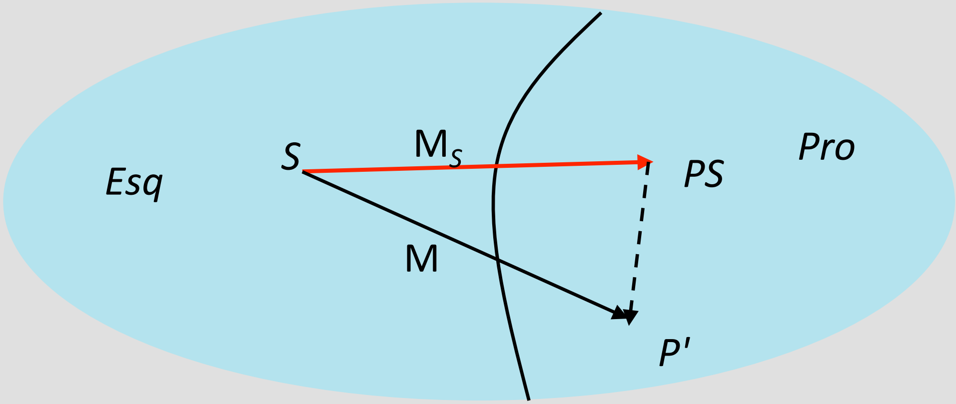




Axiomes : $\kappa_1 = [\kappa\omega_1, \nu_2\omega_2]$, $\kappa_2 = [\nu_1\omega_1, \kappa\omega_2]$, $\kappa\kappa_1 = \kappa\kappa_2$.

L'*esquisse des catégorie* est la catégorie Σ engendrée par le graphe ci-dessus, munie des 2 cônes à transformer en produits fibrés dans les modèles. Elle 'prolonge' l'idée de catégorie en lui ajoutant 'assez' de flèches pour énoncer les axiomes d'identité et d'associativité. e_2 représente l'ensemble des couples composables, e_3 celui des 3-chemins. Σ est une sous-catégorie pleine de la catégorie opposée à la catégorie simpliciale.

PROTOTYPE D'UNE ESQUISSE



Un *prototype* est une esquisse dans laquelle les cônes inductifs (resp. projectifs) sont des cônes colimite (resp. limite).

Théorème (A. & C. Ehresmann[4] 1972)**.** *La catégorie Pro des prototypes est une sous-catégorie réflexive de la catégorie Esq des esquisses. Le prototype PS associé à* S *est son plus petit modèle.*

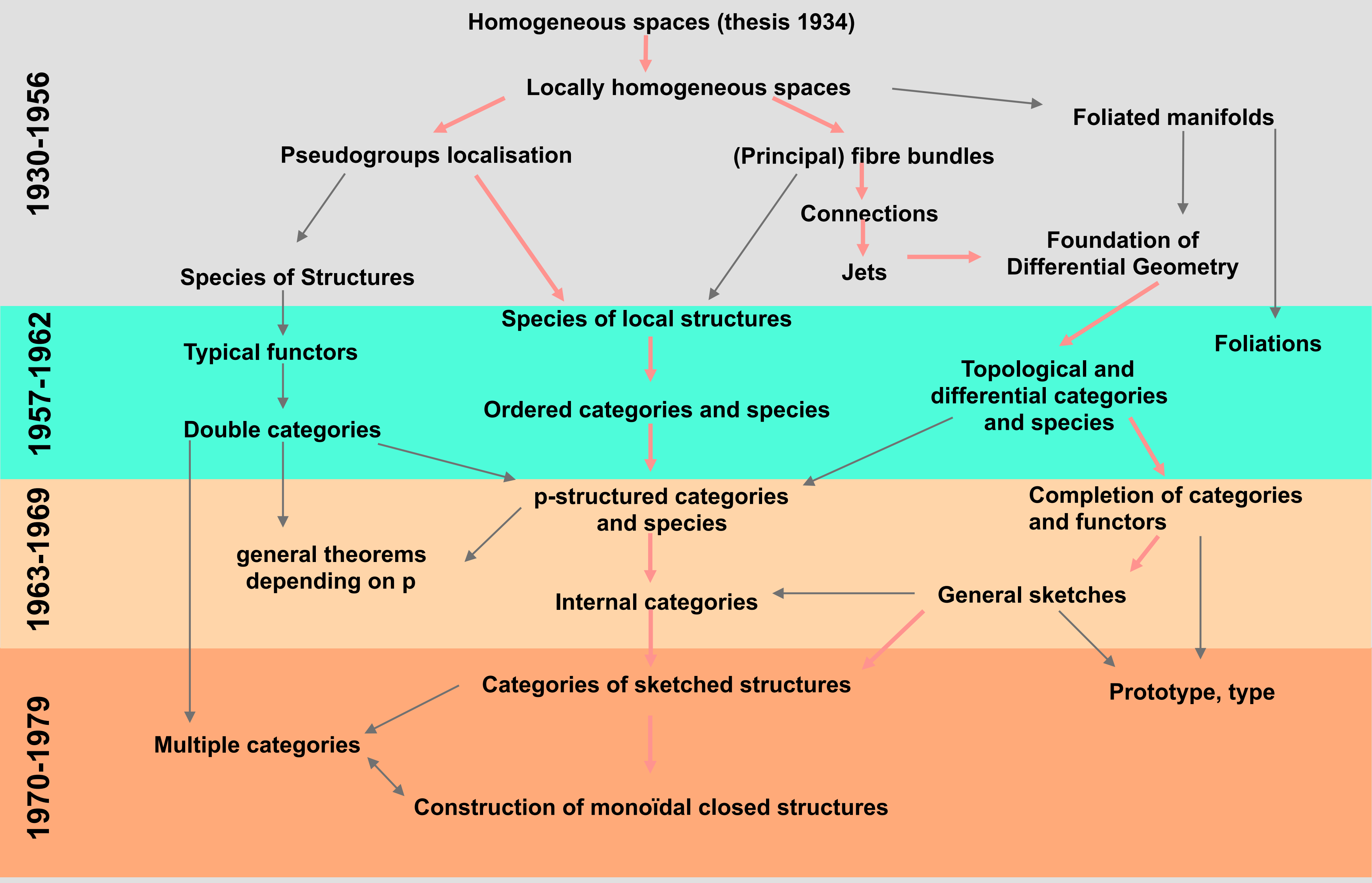
Nous avons construit explicitement le prototype d'une esquisse. La construction, qui ne modifie pas les objets, consiste à "forcer" les cônes distingués à devenir limite ou colimite en ajoutant les flèches qui manquent pour cela. Ceci se fait par récurrence.
Nous y reviendrons, la complexification consistant à la construction d'une esquisse particulière (avec ajout d'objets) puis à celle de son prototype.

INTERPRETATIONS DES ESQUISSES

1. De A. Rodin[5] (2011) : " A sketch doesn't represent a bunch of isomorphic systems but generates non-isomorphic systems (its models). <…> Sketch theory in its existing form uses Set theory and usually doesn't make foundational claims at all. <…> Thus Sketch theory turns Structuralism upside down[3] and in certain aspects reminds of more traditional ways of doing mathematics. "

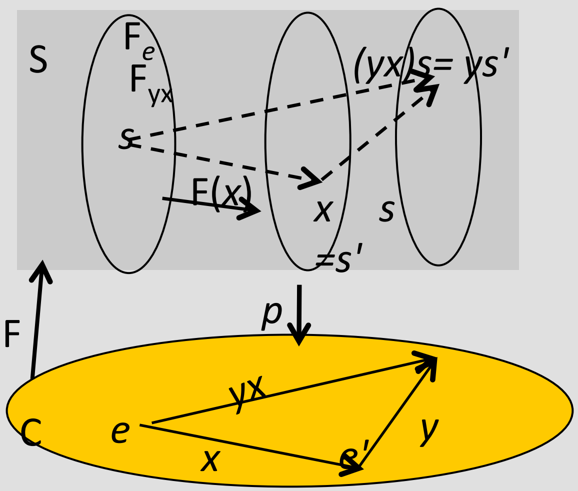
[3] Does this mean that Ehresmann misconceived of his own invention when he thought of Sketch theory as a general theory of structure? I don't think so. A general theory of structure should not be necessarily a structural theory and should not provide a support for Structuralism as a philosophical view about Mathematics.

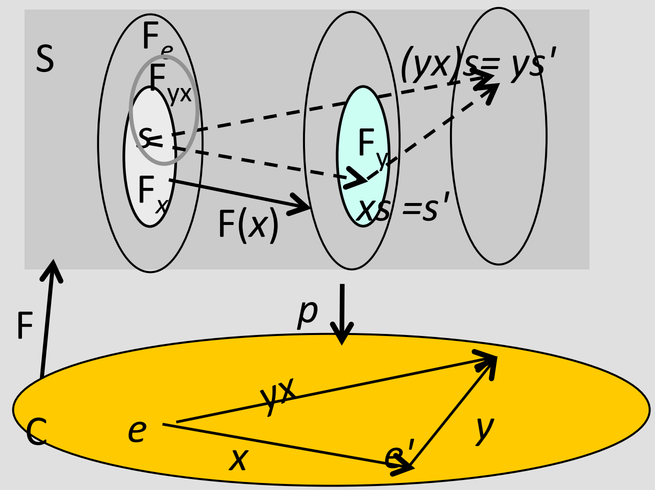
D'un point de vue logique, une esquisse projective (resp. mixte) *S* peut être interprétée comme la *présentation diagrammatique d'une logique* du 1^{er} ordre, Guitart & Lair 1980 (resp. du 2^{e} ordre, Duval & Lair 2002) [6] traduite en formules et contraintes par un modèle de *S* dans *Set.* Le foncteur de *S* dans son prototype correspond à la *spécification de cette logique,* le prototype étant un modèle de la théorie correspondante, de sorte qu'il est "computable" dans un certain sens.

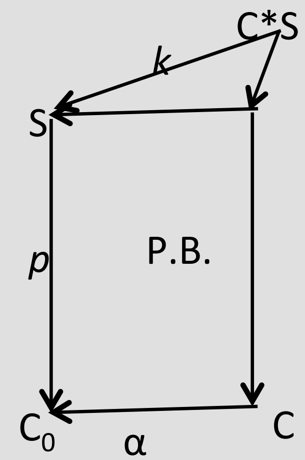

1930-1956
1957-1962
1963-1969
1970-1979
Homogeneous spaces (thesis 1934)
Locally homogeneous spaces
Foliated manifolds
Pseudogroups localisation
(Principal) fibre bundles
Connections
Foundation of
Differential Geometry
Jets
Species of Structures
Species of local structures
Foliations
Typical functors
Topological and
differential categories
and species
Ordered categories and species
Double categories
p-structured categories
and species
Completion of categories
and functors
general theorems
depending on p
General sketches
Internal categories
Categories of sketched structures
Prototype, type
Multiple categories
Construction of monoïdal closed structures

SECONDE PARTIE :
COMPLEMENTS SUR LES MES

SEMI-FAISCEAUX





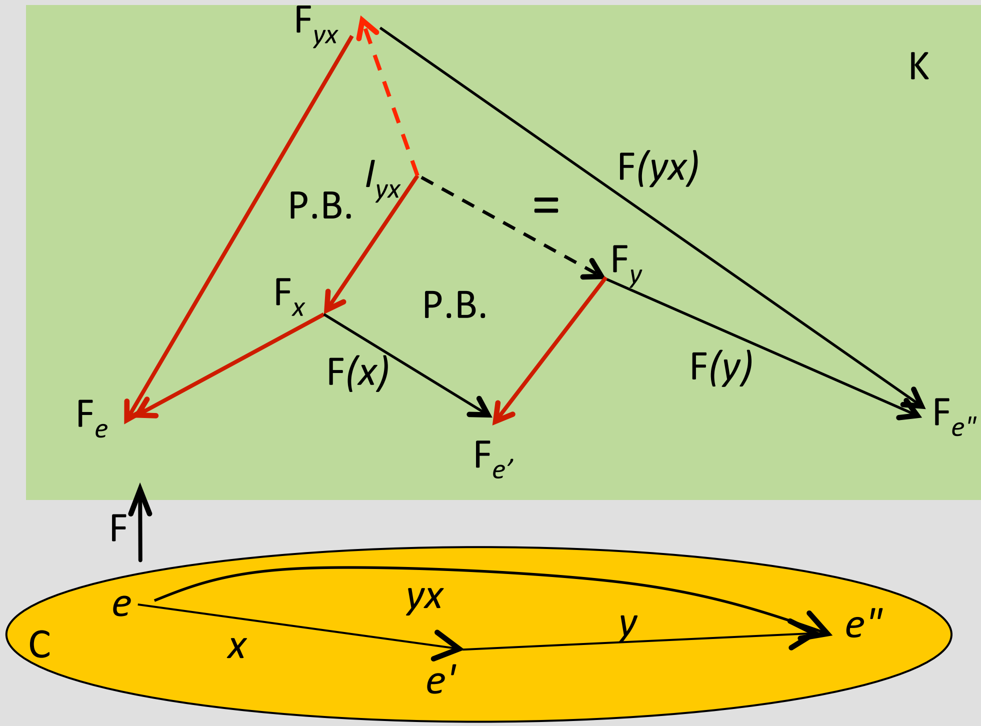


Si un foncteur F: C → *Ens* définit une action de C sur S, une flèche *x: e* → e' opère sur toute la fibre F(*e*), et, si *xs et yx* sont définis, il existe *(yx)s = y(xs)*.

Dès 1961, divers problèmes d'analyse me conduisent à la notion plus 'partielle' de *semi-faisceau* où F est une *simple application* vérifiant : F(*e*) = IdF_e , une flèche *x: e* → *e'* n'opère, via F(*x*): $F_x \to F_{e'}$, que sur une partie F_x de la fibre F_e et la '*transitivité*' devient : si *xs* et *yx* sont définis, alors *(yx)s* est défini si et seulement si *y(xs)* l'est, et alors *y(xs) = (yx)s.*

Dans ces travaux, *Ens* est remplacé par d'autres catégories, e.g. *Cat* ou *Evt*, F_x devenant une sous-catégorie ou un sous-evt de F_e.

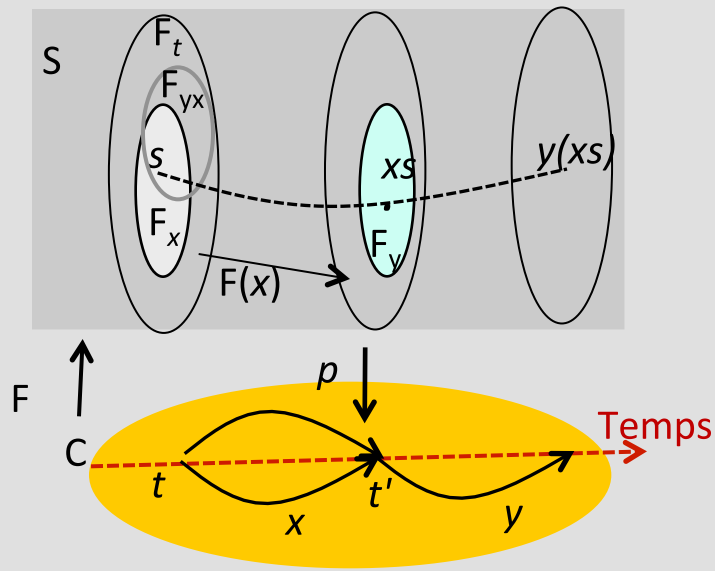
SCHEMA GENERAL D'UN (K, M)-**SEMI-FAISCEAU**



K est une catégorie munie d'une sous-catégorie M de monomorphismes définissant des sous-objets particuliers (*partial map category*). Les flèches en rouge désignent des flèches de M. Par exemple K = *Cat* et M définit des sous-catégories.

Pour qu'un (K, M)-semi-faisceau F: C → K soit un foncteur de C vers la 'catégorie' des spans de la forme (*m, k*) (i.e. il faudrait avoir $F_{yx} = I_{yx}$ ce qui est plus fort que l'axiome de transitivité.

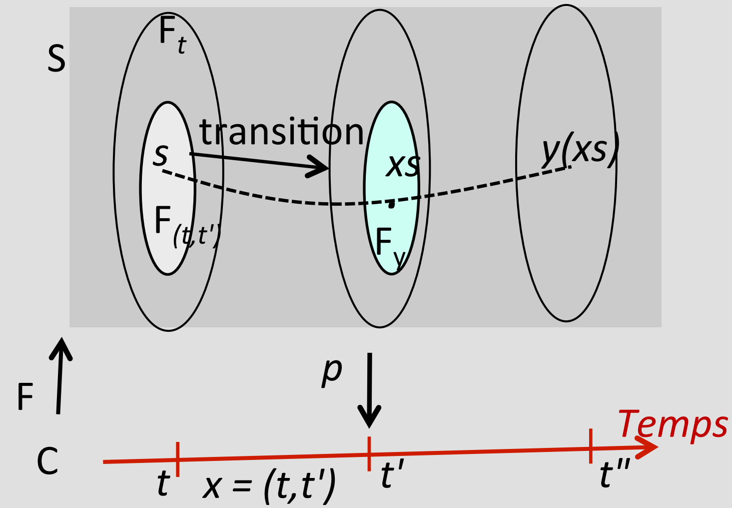
INTRODUCTION DU TEMPS COMME CHANGEMENT



En vue de problèmes de contrôle et d'optimisation (1963-66)[7], j'ai introduit une notion de "système guidable" qui utilise un semi-faisceau topologique F sur une catégorie C dont les objets sont des instants *t* et les flèches x: $t \to t' > t$ représentent des paramètrages, de sorte que F(x) modèlise le changement de *t* à *t'* pour ce paramètre.

En particulier *xs* peut être la valeur en *t'* de la solution d'une équation différentielle dépendant du 'paramètre' *x* et prenant la valeur *s* en *t,* une telle solution n'existant que pour certaines valeurs *s*.

SEMI-FAISCEAUX SUR LE TEMPS



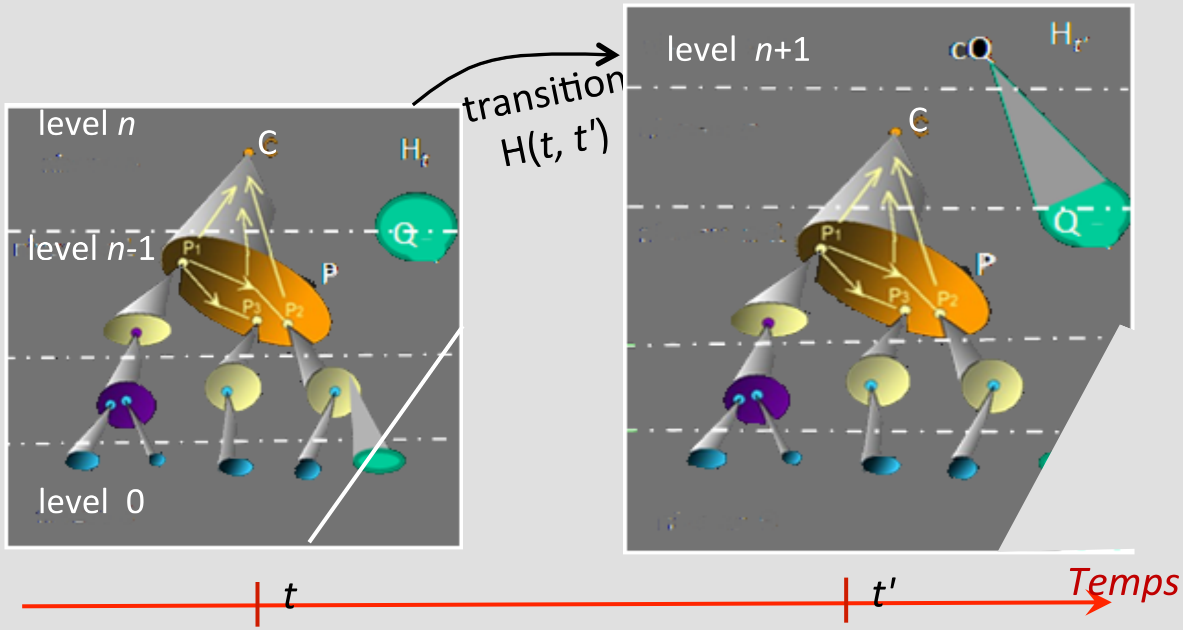
Dans la suite on considérera des semi-faisceaux sur la catégorie T associée à l'ordre sur une partie de **R.** Dans ce cas, F(t, t') est appelé *transition de t à t'.*

Exemple simple montrant le sens de la transitivité : F_t représente l'ensemble des habitants *s* d'une ville V et $F_{(t,t')}$ l'ensemble des habitants restant dans V entre t et t'. La transitivité signifie :

(i) Si *s* reste dans V entre t et t', puis entre t' et t'', on en déduit qu'il est resté dans V entre t et t''.

(i) Si l'on sait que *s* est resté dans V entre t et t' ainsi qu'entre *t et* t'', on en déduit qu'il est aussi resté dans V entre t' et t''.

MES = SEMI-FAISCEAU DE CATEGORIES HIERARCHIQUES

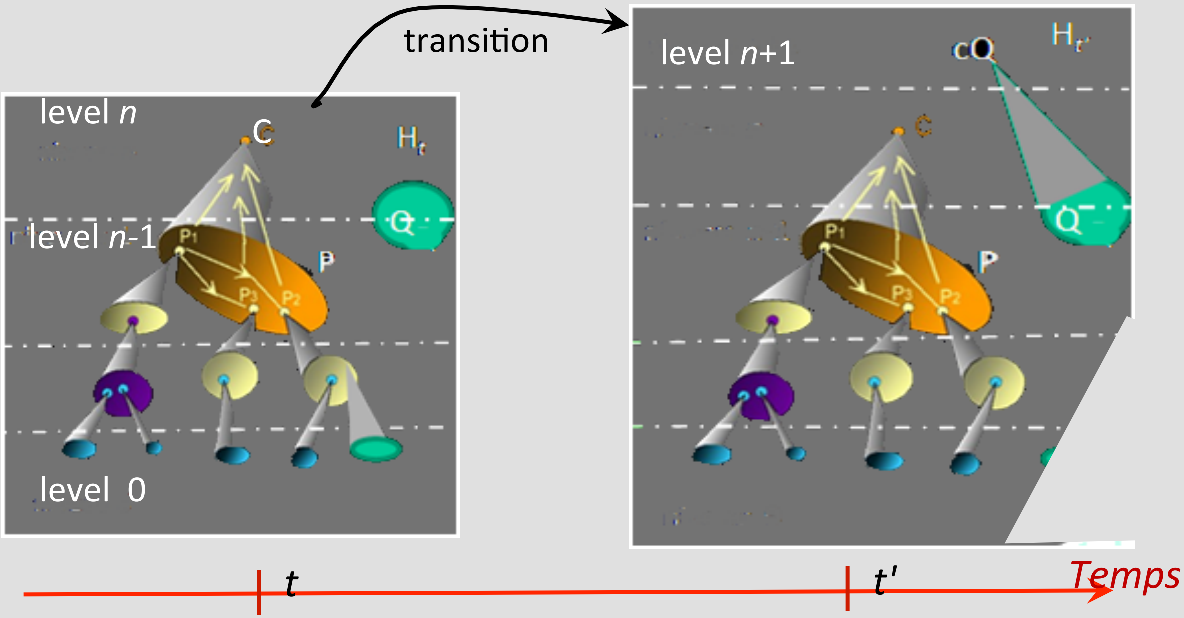


Un MES (Ehresmann & Vanbremeersch[8] 2007) est un semi-faisceau **H** de catégories hiérarchiques sur Temps : (i) Pour tout t la catégorie H_t *configuration* en t a une hiérarchie enchevêtrée d'objets, chacun "recollant" (= est (co)limite) d'un pattern (= diagramme) d'objets liés de niveaux inférieurs.

(ii) La transition H(t, t') est un foncteur d'une sous-catégorie $H_{(t,t')}$ de H_t dans $H_{t'}$ qui représente le changement entre t et t'. Les transitions sont engendrées par des processus de *complexification*.

Un *composant* est une famille maximale d'objets des H_t corrélés par des transitions. Il admet des *ramifications* jusqu'au niveau 0. Son *ordre de complexité* est la plus petite longueur d'une ramification.

COMPLEXIFICATION ET EMERGENCE

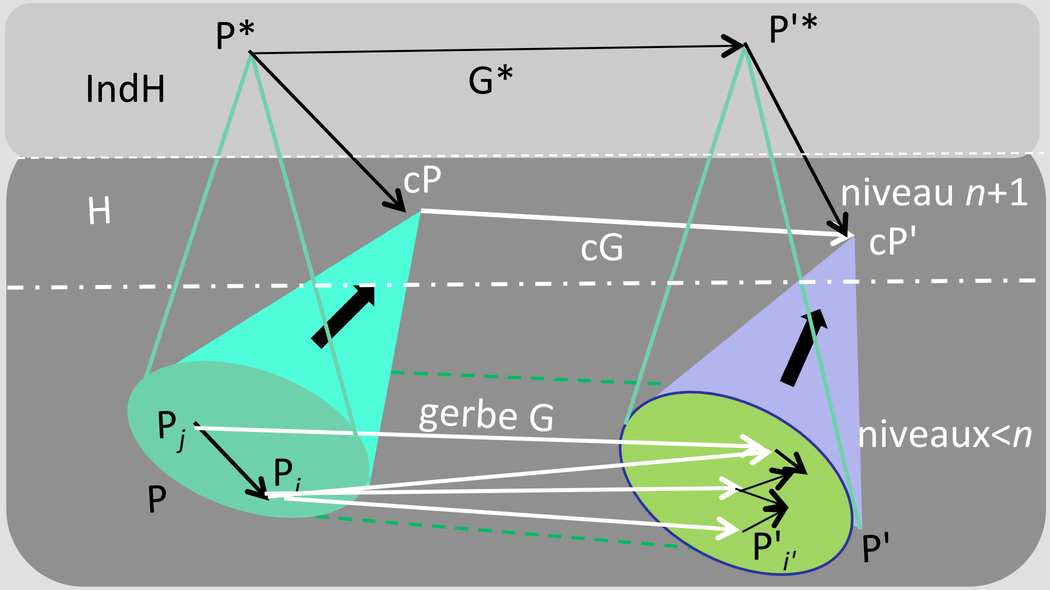


.Les changements types d'un système dnamique (naissance, mort, fusion et scission, d'après Thom) correspondent dans un MES à : adjonction de nouveaux objets, formation (ou préservation, si elle existe) de la (co)limite de certains patterns, suppression ou décomposition d'éléments.

Pour décrire ceci, les transitions seront obtenues par des suites de processus de *complexification* par rapport à des procédures ayant des objectifs de tels types. Ces complexifications permettent l'émergence de composants d'ordre supérieur.

Nous allons d'abord montrer comment construire une complexification.

GERBES. LIENS SIMPLES



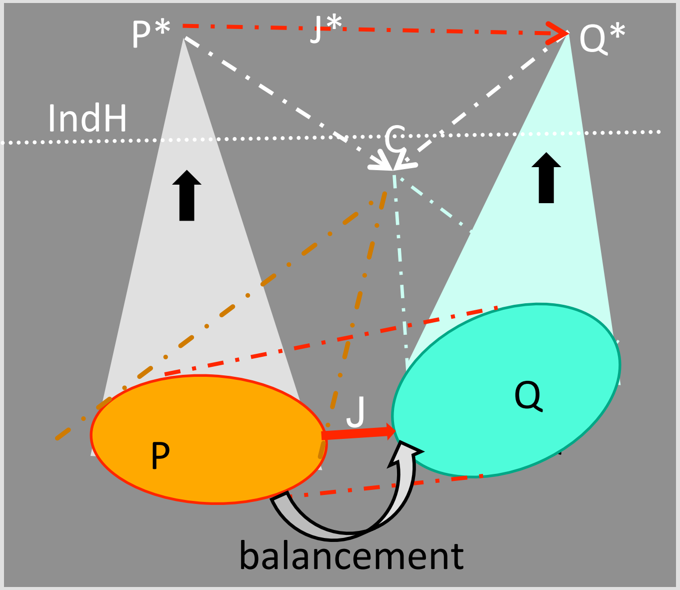
Gerbe G de P vers P' = ensemble maximal de liens entre patterns P et P' tel que: 1. Tout P_i est lié par G à au moins un $P'_{i'}$ et s'il l'est à plusieurs, ils sont liés par un zigzag de liens distingués de P'.

2. Le composé d'un élément de G avec un lien distingué de P ou de P' est dans G.

Si P et P' ont des colimites cP et cP' dans H, G se recolle en un morphisme cG : cP → cP', appelé *lien* (P, P')-*simple,* ou *n-simple* si P et Q sont de niveaux < n +1.

IndH est la catégorie ayant les patterns P dans H pour objets, et les gerbes pour liens. H s'identifie à une sous-catégorie de IndH en identifiant C au pattern réduit à C.

PATTERNS HOMOLOGUES (NON-)CONNECTES

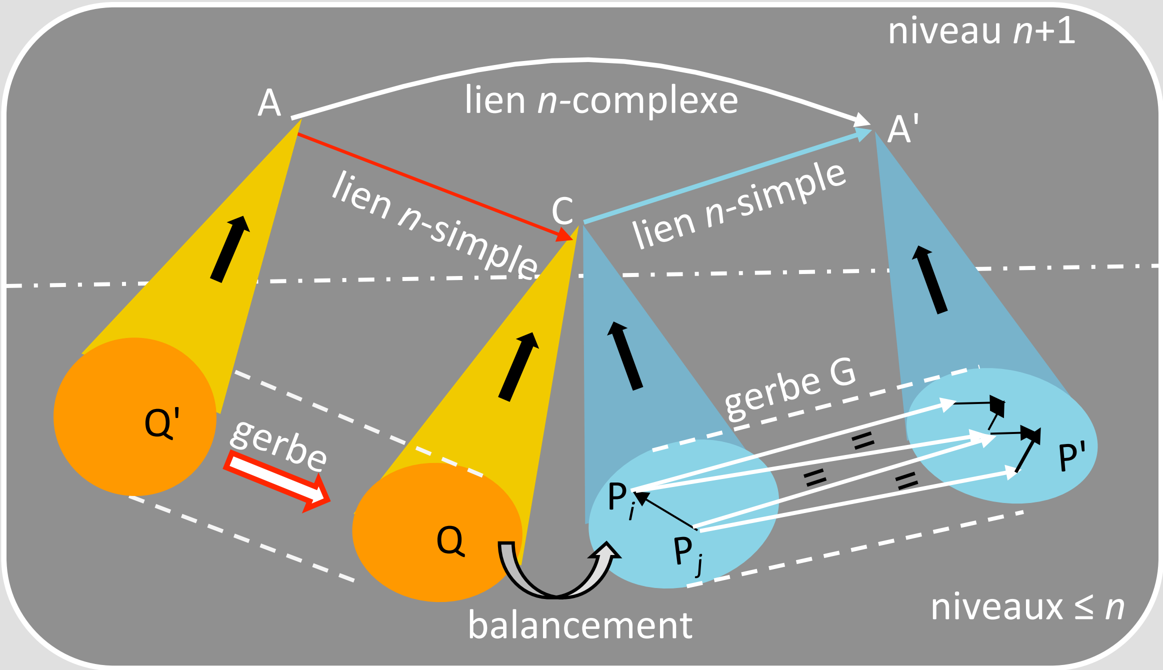


Des patterns P et Q sont *homologues* s'ils ont le même rôle fonctionnel, signifiant : les catégories P*↓H et Q*↓H sont isomorphes. Exemple : si P et Q ont la même colimite C, ou même colimite virtuelle (Bénabou[9]).

Des patterns homologues P et Q sont *connectés* s'il existe une gerbe J de P vers Q telle que l'isomorphisme soit défini par composition avec J* ; sinon ils sont *non-connectés* et on a un *balancement* entre eux. On dit que C est *multiforme* s'il admet 2 décompositions non-connectées P et Q.

Principe de Multiplicité (MP): Il existe des objets *n-multiformes* C colimite de patterns P et Q de niveaux ≤ *n* non-connectés par une gerbe.

MP ---> EMERGENCE DE LIENS COMPLEXES



MP ---> Emergence de *liens n-complexes*

composés de liens n-simples liant des gerbes non adjacentes.

Ces liens traduisent des propriétés globales des niveaux ≤ n qui *émergent* au niveau n+1 car non observables aux niveaux inférieurs bien que dépendant de leur structure globale.
Ils conduisent à ce que Popper appelle *"change in the conditions of change".*

TRADUCTION DANS LE CAS DES ORDRES

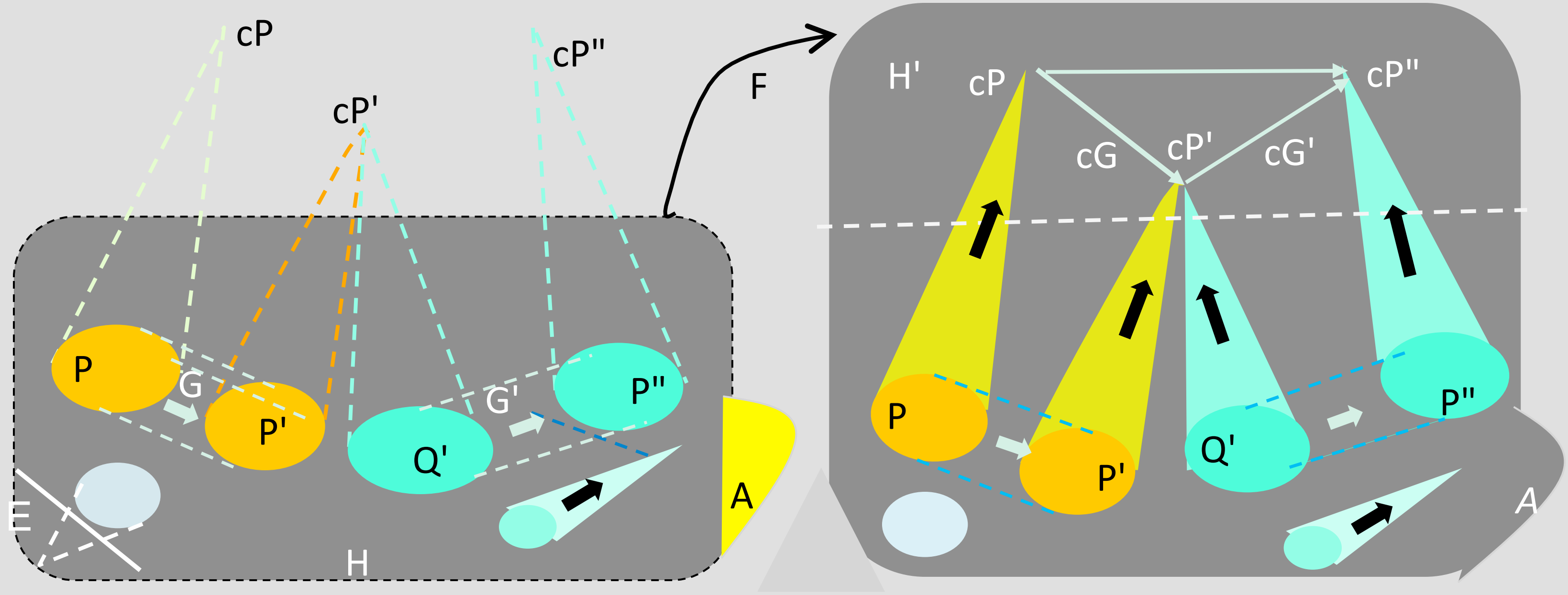
Soit H la catégorie associée à un ordre sur un ensemble (E, <) ; les flèches sont donc les couples (*e, e'*) de ExE tels que *e* < *e'*

Un pattern sera identifié à un sous-ensemble ordonné (P, <). Il admet un lien collectif vers un élément *e* de E ssi *e* est un majorant de P. Et il a une colimite ssi P a un Sup ; la colimite est alors ce Sup VP.

Gerbe de P dans P' : ensemble maximal G de couples (*p, p'*) avec *p* < *p'* tels que si (*p, p'*) et (*p, p"*) sont dans G, alors *p'* et *p"* dans une même composante connexe de (P', <).

P et Q sont *homologues* s'ils ont les mêmes majorants. Dans ce cas, ils sont *non connectés* dès qu'il existe *p* dans P non majoré dans Q ou *q* dans Q non majoré dans P. Dans ce cas un "lien complexe" peut exister dans la catégorie définissant l'ordre.

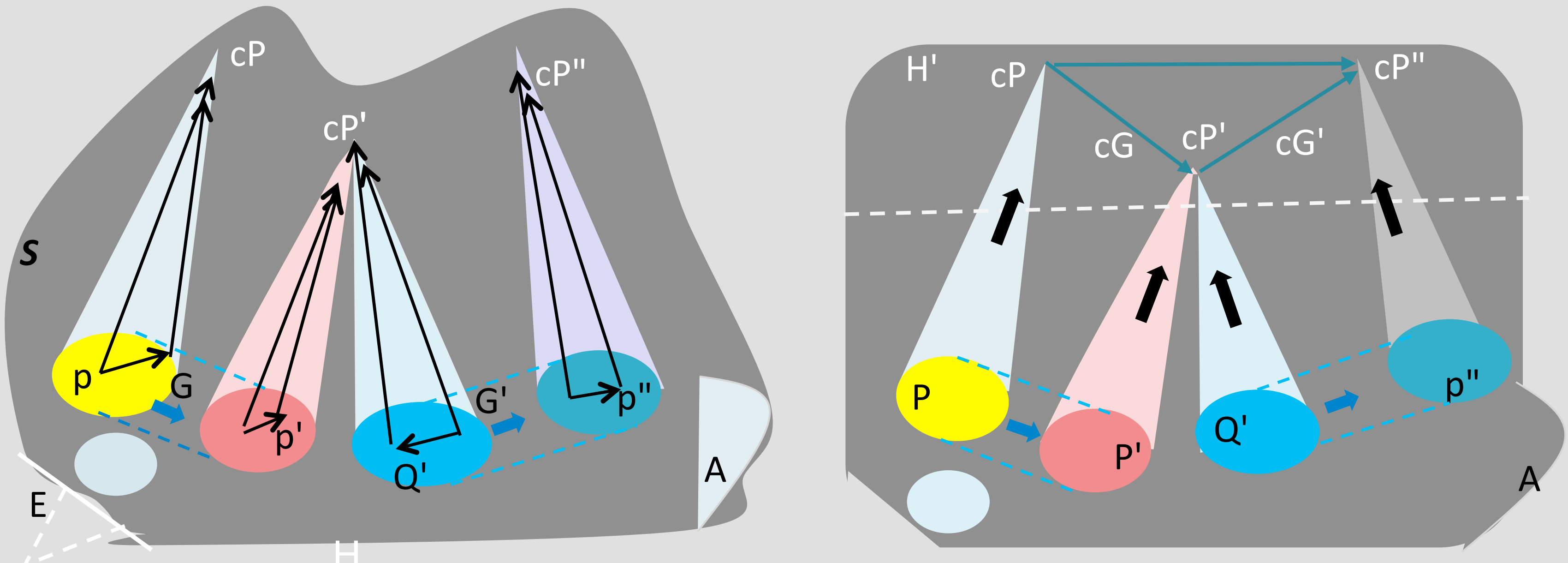
COMPLEXIFICATION POUR UNE PROCEDURE



Procédure Pr sur la catégorie H : Pr = (E, A, U, V) où : E = sous-graphe E de H, A = graphe, U = ensemble de cônes dans H, et V = ensemble de patterns P sans colimite dans H. Objectifs : 'éliminer' E, 'absorber' A, rendre cônes-colimite les cônes de U, et 'ajouter' une colimite cP' à P' ϵ V. On impose que cP' = cQ' si P' et Q' sont homologues. La procédure est *mixte* si on a aussi un ensemble W de patterns Q auxquels ajouter une limite.

La *complexification* de H pour Pr est solution du problème universel : 'plonger' H moins E dans une catégorie H' réalisant ces objectifs.

CONSTRUCTION DE LA COMPLEXIFICATION, I

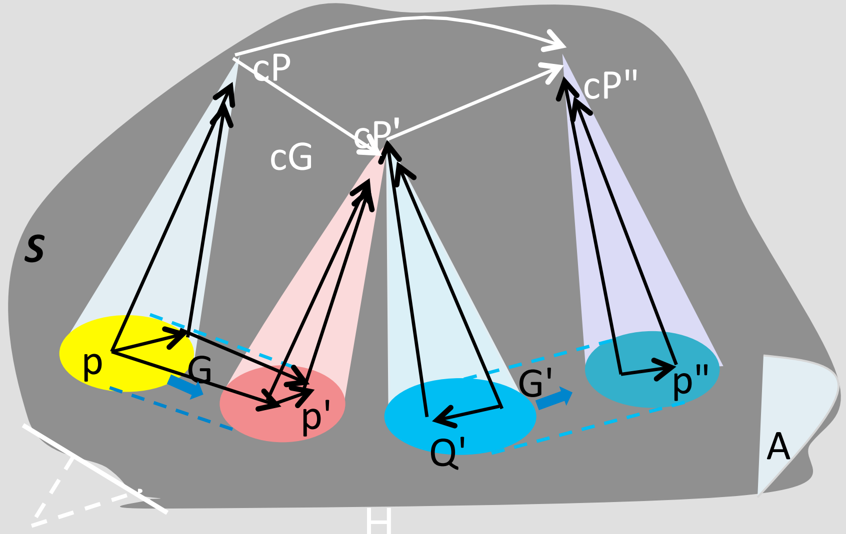


Elle se fait en plusieurs étapes :

(i) A la procédure Pr on associe une esquisse ***S*** sur la néocatégorie Σ contenant A, H sauf E, et un cône de base P et sommet cP pour tout pattern dans V ; ses objets sont donc ceux de H non supprimés, et les cP. On choisit cP de sorte que cP = cQ, si P et Q sont homologues, où P et Q sont dans V ou bases de cônes dans U. Les cônes distingués sont ceux-ci et ceux dans U.

(ii) La *complexification* H' *de* H *relativement à* Pr sera le prototype associé à cette esquisse. Il aura les mêmes objets que Σ. Ses flèches sont construites par récurrence (simple si les P sont finis, éventuellement transfinie sinon).

CONSTRUCTION DE LA COMPLEXIFICATION, II



Il faut 'forcer' chaque cône distingué de base P et sommet cP à devenir cône-colimite. Ceci se fait par étapes en partant de Σ, chacune aboutissant à une catégorie Σ_n.

Partant de Σ_n on 'recolle' chaque gerbe G de P vers un P' distingué en cG: cP → cP' (resp. chaque lien collectif L de P vers A en cL: cP → A) de sorte à rendre commutatifs les diagrammes voulus. D'où une néocatégorie.

Il faut ensuite ajouter des composés pour obtenir une catégorie Σ_{n+1} ; en particulier ceci peut ajouter des liens complexes (cf. figure). L'ajout de ces liens peut conduire à la formation de nouvelles gerbes qu'il faudra alors recoller ; dans ce cas, le processus doit être répété. Si les patterns P sont finis, le processus s'arrêtera. La complexification sera la réunion de la suite croissante des catégories Σ_n.

EXEMPLES DE COMPLEXIFICATIONS

Construction de R. Soit H la catégorie définissant l'ordre sur **Q**. Soit Pr la procédure dont les cônes dans U (à recoller) soient les sections commençantes P de **Q** majorées et sans borne supérieure. La complexification de H pour Pr est la catégorie définissant l'ordre de **R.**
En effet, la construction précédente ajoute, pour chaque P dans U un cône de base P et sommet cP, c'est-à-dire un objet cP et une flèche d'un *p* є P vers cP. Pour un autre P' dans U, l'une des 2 sections commençantes P ou P', disons P', est contenue dans l'autre, d'où une unique gerbe de P' vers P (l'ordre étant total) qui se recolle en une flèche de cP' vers cP. La construction s'arrête après la première étape ; la complexification a pour objets les rationnels et les cP : c'est la catégorie associée à un ordre dans lequel cP = SupP. On retrouve la construction par coupures des réels.

Remarques. 1. Dans la construction précédente U pourrait consister en un ensemble quelconque de parties majorées M dont la réunion soit **Q**. En effet, M et la section commençante engendrée par M sont(homologues donc doivent avoir le même cM.

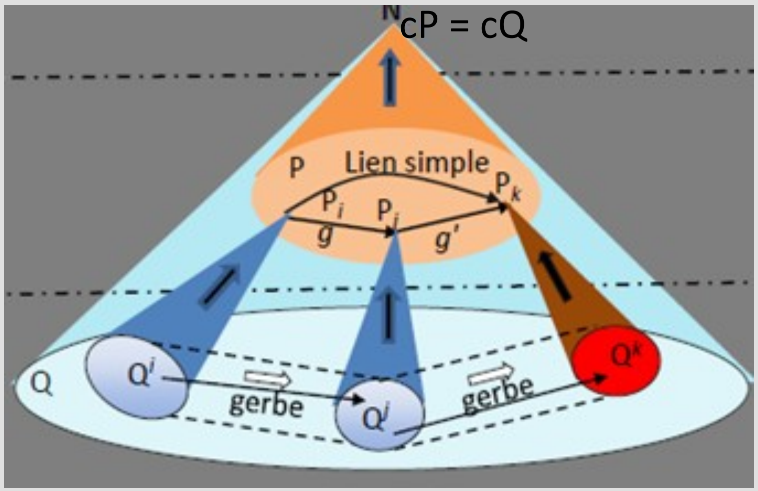
2. La complexification de la catégorie associée à un ordre non total n'est pas nécessairement associée à un ordre, car il peut y avoir 2 gerbes différentes entre deux patterns.

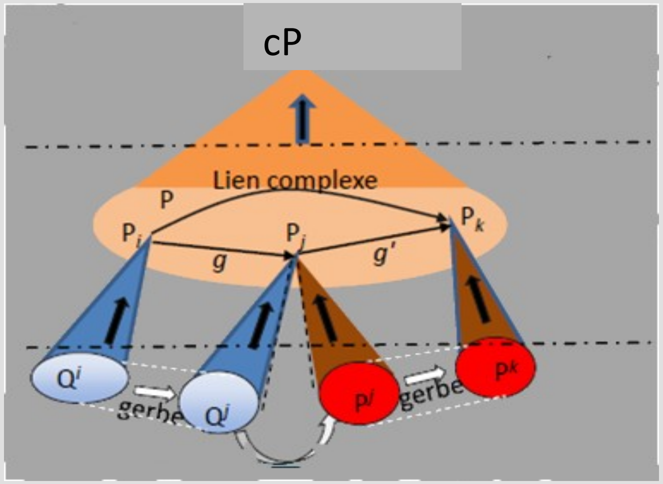
THEOREME D'EMERGENCE

THEOREME D'EMERGENCE [10] **.** *MP est nécessaire pour l'existence de composants d'ordre de complexité > 1. Il est préservé par complexification et, dans un MES il permet l'émergence au cours du temps de composants d'ordre croissant, en particulier développant une mémoire flexible.*

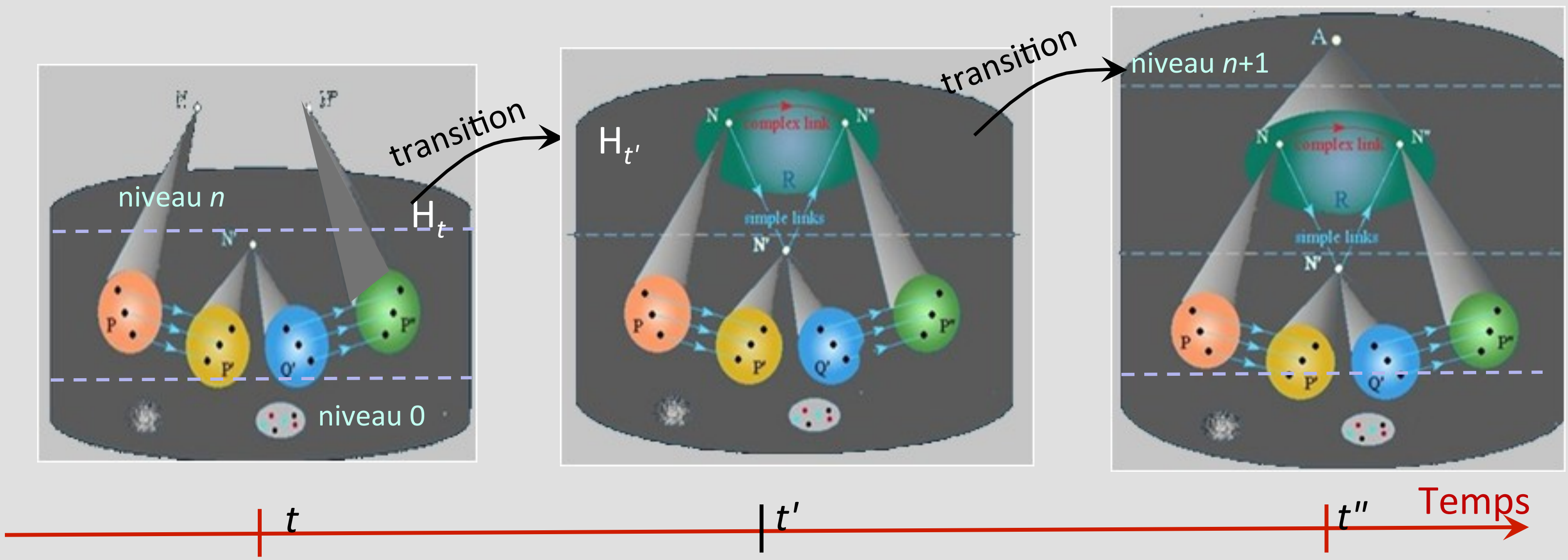
Traduction' de F. Nicolas (2013) : " Comment une superstructure peut-elle émerger d'une infrastructure ? <…> pour que les relations superstructurelles entre collectifs soient émancipées des relations infrastructurelles entre individus, il faut qu'il y ait des collectifs qui collectivisent, sous le même nom, des groupes entièrement différents et disjoints d'individus. " ().

La colimite d'un pattern P dont tous les liens sont simples se 'réduit' à la colimite d'un simple pattern Q de niveaux inférieurs. Mais si P a des liens complexes, l'ordre de complexité de sa colimite cP est plus grand.





THEOREME DE COMPLEXIFICATION ITEREE

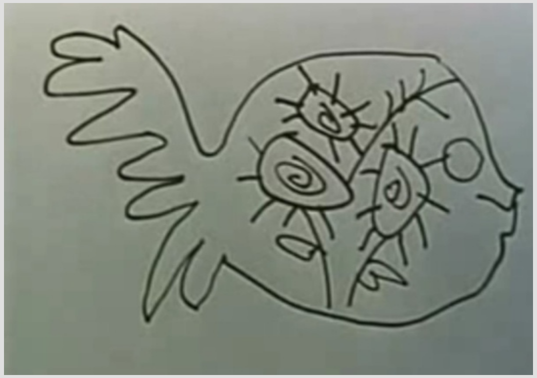


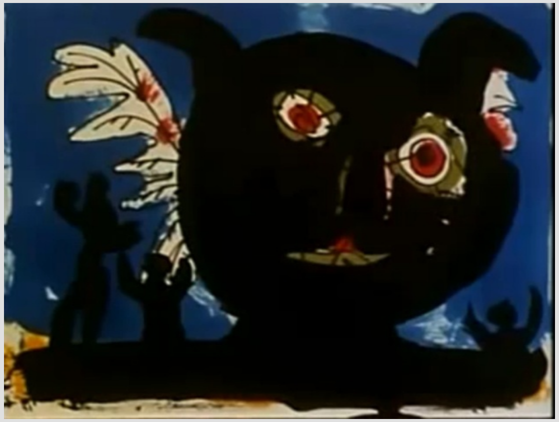
THEOREME DE COMPLEXIFICATION ITEREE [10]**.** *Une double complexification avec liens complexes ne se réduit pas à une seule complexification.de la première catégorie.*

La construction de la complexification nécessite une suite d'opérations dont chacune a une certaine durée, e.g. la formation d'un lien complexe. Le Théorème précédent implique que des complexification itérées peuvent aboutir à des résultats non prévisibles initialement. Les liens complexes introduits dans la 1ère complexification conduisent à de nouvelles "*propensions à changer* » (Popper). Ceci est aussi à rapprocher de la "créativité transformationnelle" de M. Boden.

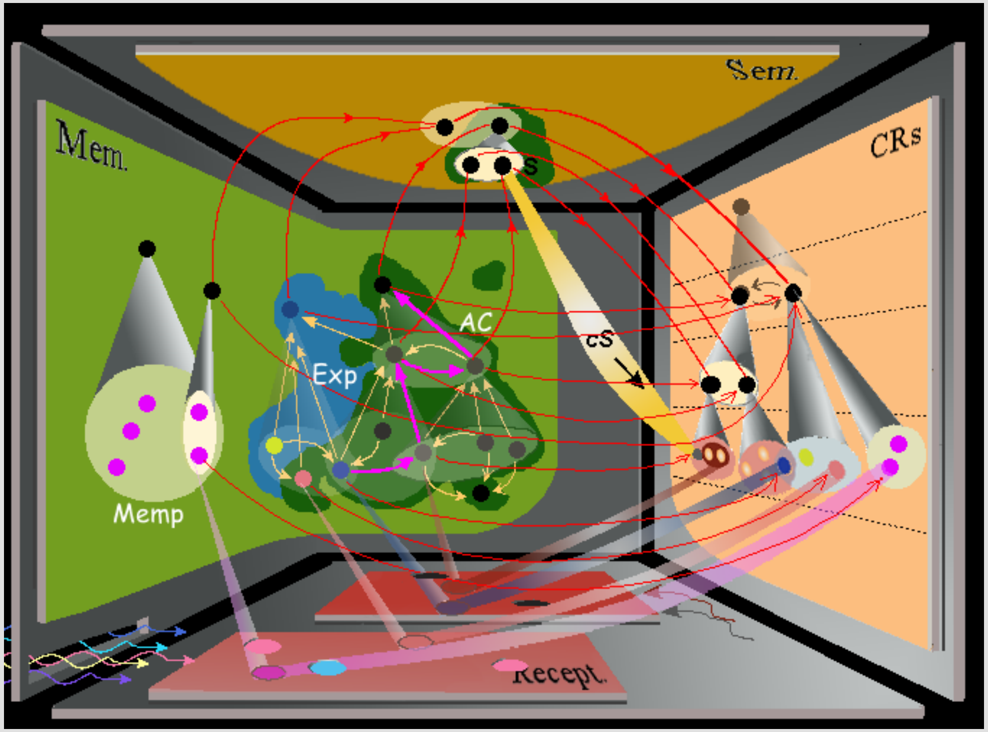
EXEMPLE DE COMPLEXIFICATION ITEREE

Ces images représentent différentes vues d'un tableau créé par Picasso dans le film de Clouzot "Le mystère Picasso" (1958). Elles montrent comment la complexité du tableau augmente tout au long de sa composition pour aboutir à un résultat imprévisible, nombre de changements intermédiaires durant peu mais donnant une nouvelle orientation.





DES DYNAMIQUES LOCALES AU MACROPAYSAGE

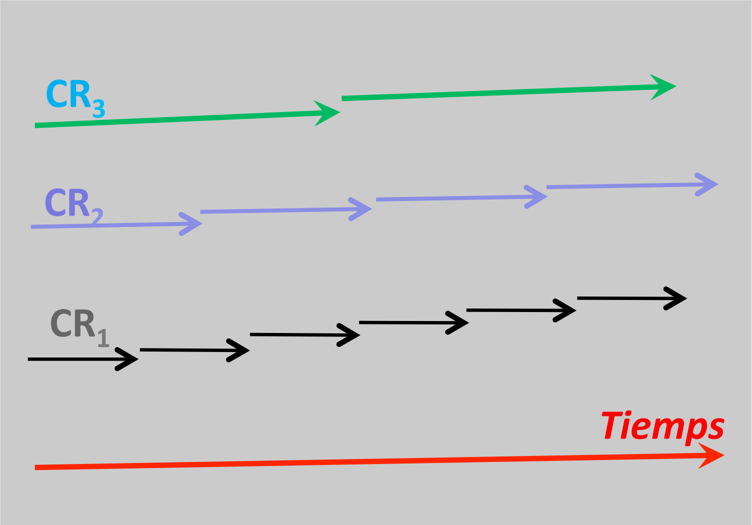


Un MES (exemples : MENS[8], D-MES (Béjean & Ehresmann)[11] est *auto-organisé* : sa dynamique est modulée par la coopération/compétition entre un réseau de sous-semi-faisceaux spécialisés, les *Co-Régulateurs*, chacun développant une dynamique opérative locale à son propre rythme. Ils opèrent avec l'aide du sous-semi-faisceau **Mem** représentant une *mémoire* flexible qu'ils peuvent mobiliser réciproquement contribuer à façonner.

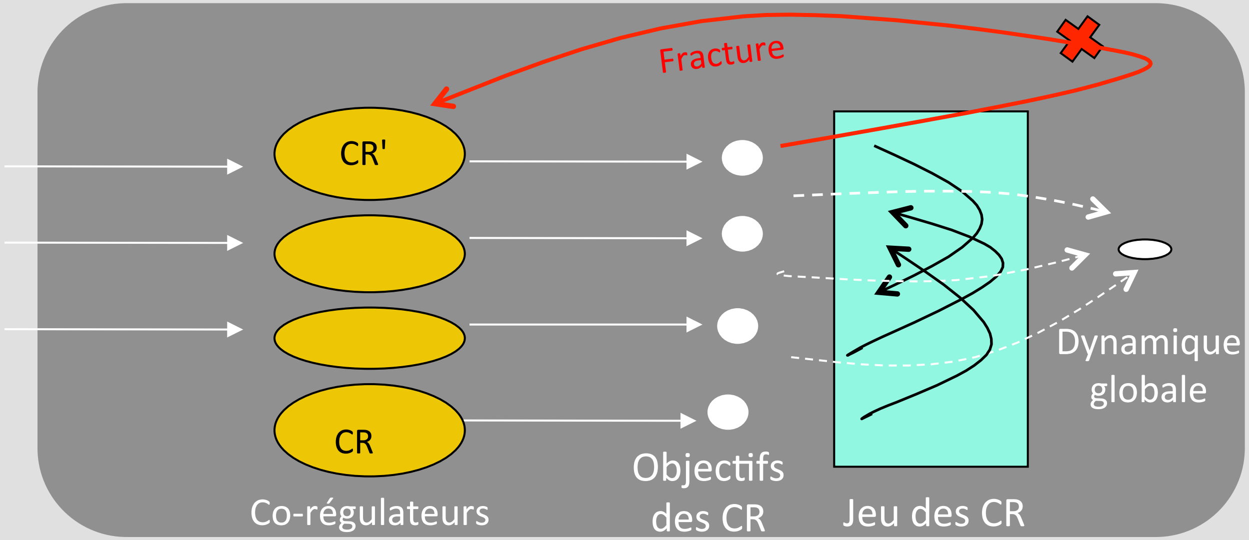
PROBLEMES TEMPORELS DANS MES

Un MES est soumis à des contraintes matérielles et temporelles.
= A la base, on a le *temps continu* 'objectif' des horloges qui permet de coordonner tout le système. En particulier on suppose que chaque lien f entre composants a un *délai de propagation* d_f et une force w_f qui sont des fonctions à valeurs réelles, définies sur la durée de vie de f. J'ai montré comment la propriété universelle de la complexification permet d'étendre ces fonctions à la complexification.

= Chaque co-régulateur CR opère avec 2 temporalités : il hérite le temps continu de MES (dont il est un sous-semi-faisceau) ; par ailleurs il opère par étapes, délimitées par sa propre échelle de temps discrète. La longueur d'une étape couvre le "présent actuel" du CR (cf. Bergson). Les durées des étapes des différents co-régulateurs sont très différentes.



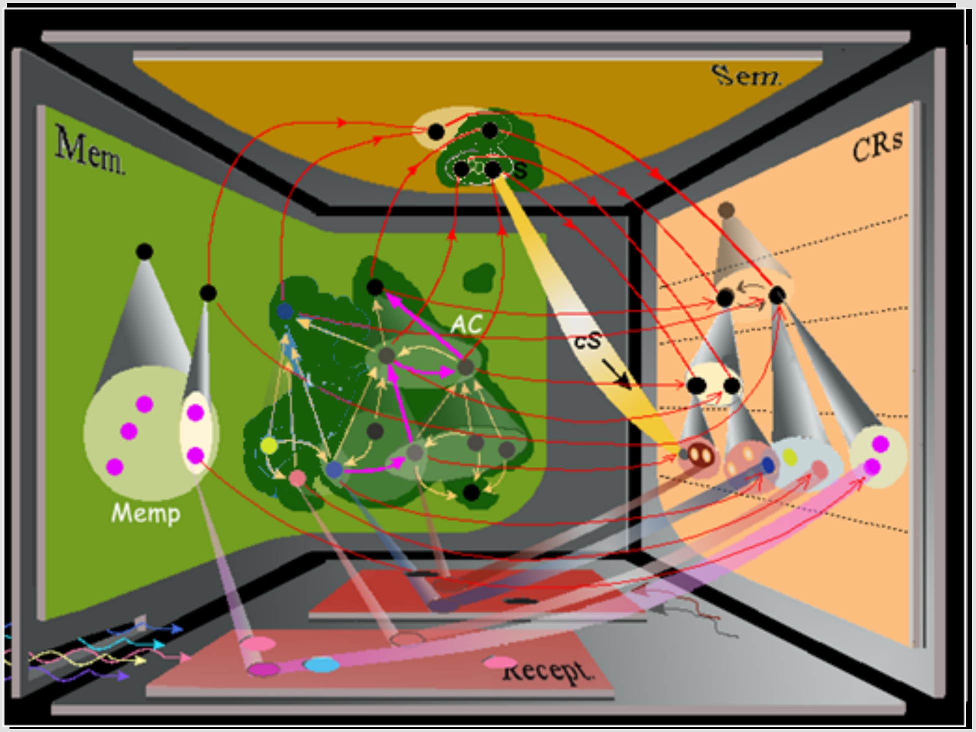
DYNAMIQUES OPERATIVES LOCALES ET LEUR JEU



Un co-régulateur CR opère par étapes, à son rythme, selon sa fonction. A chaque étape, il forme son *paysage* avec les informations partielles qu'il reçoit, choisit une procédure à l'aide de **Mem,** et en envoie les commandes aux opérandas. ce qui déclenche un processus dynamique 'classique' s'étendant jusqu'à la fin de l'étape (calculable e.g. via EDP).

Mais les commandes envoyées par les différents co-régulateurs en *t* peuvent ne pas être cohérentes, chacun ayant sa propre logique. La dynamique globale résulte d'un processus flexible d'équilibration (non calculable ?), le *jeu entre co-régulateurs CR*, pouvant négliger les objectifs de certains co-régulateurs CR', leur causant ainsi une fracture.

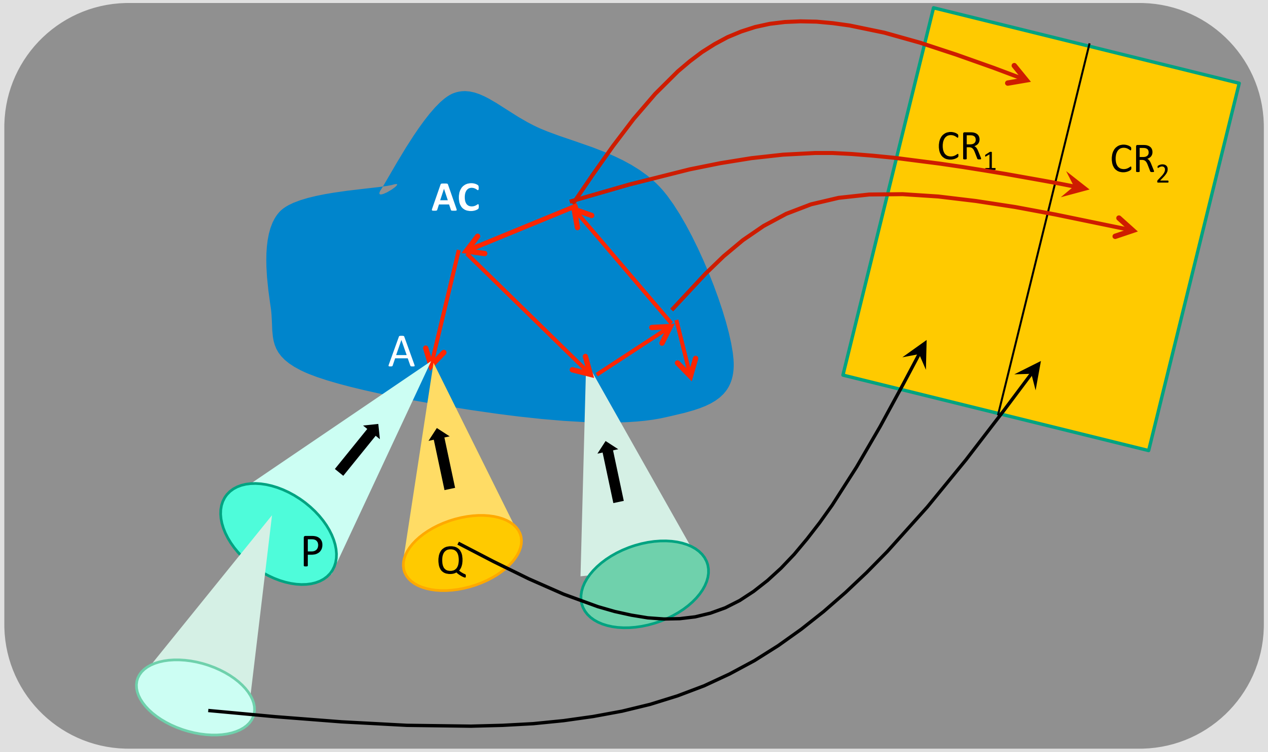
LE NOYAU ARCHETYPAL AC



Par complexifications itérées, il se développe un sous-semi-faisceau **AC** de **Mem,** appelé *Noyau Archetypal.* Il est formé de composants d'ordre supérieur multi-facettes, ayant de nombreuses ramifications, fortement connectés (basés sur le noyau sructural du cortex pour MENS). **AC** intègre des mémoires significatives de diverses modalités. Ses liens rapides et forts forment des *boucles* qui auto-entretiennent leur activation longtemps.

AC engendre un *modèle interne flexible* des connaissances du système, personnifiant son identité ('Self'). Un CR relié à **AC** est dit *intentionnel.*

MACRO-PAYSAGE



L'activation d'une partie de **AC** se diffuse via des boucles archétypales auto-entretenues et se propage aux niveaux inférieurs.

Retransmise à des co-régulateurs intentionnels, il se forme un *macro-paysage* MaP unissant et étendant leurs paysages et de plus longue durée. Il groupe toutes les informations accessibles à ces CR, de tous niveaux et s'étendant du passé au futur ; des macro-paysages successifs se chevauchent. Ces CR peuvent alors développer des procédures communes, et former de nouveaux objets archétypaux. Ceux-ci pourront ensuite se diffuser à d'autres CR.

APPLICATION : NAISSANCE DU CUBISME[13]

Soit P-MES un MES de type D-MES particulier (cf. exposé de M. Béjean[12], Mamuphi 2013), qui représente le monde artistique en France au début du XXème siècle, le but étant de montrer l'émergence du cubisme à cette époque. Parmi les co-régulateurs nous avons des artistes isolés, des groupes d'artistes ayant des affinités, d'autres groupes liés à l'art (galéristes, conservateurs de musée, amateurs d'art,…).

Braque, Houses at l'Estaque 1908

Picasso Guitar Player 1910

2 artistes se stimulant, formation d'un Co-régulateur G les regroupant. Petit à petit d'autres artistes se joignent à eux.

2. Dans G l'émulation conduit au développement d'objets archétypaux représentant une conception particulière de l'Art. Ceci permet la formation d'un macro-paysage qui rétroagit sur les œuvres de ses membres. Ainsi le style du sculpteur Csaky se modifie lentement, par complexifications successives.

3. Différents groupes de critiques ou peintres ont des opinions divergentes. Le mot "cubisme" est introduit par dérision par Matisse, mais il rend le groupe plus visible. Des galéristes les remarquent et vont leur permettre de se développer. Au cours des ans, le cubisme s'impose comme une nouvelle tendance artistique.

MERCI

Notes-Références

[1] *Charles Ehresmann : Œuvres Complètes et Commentées*, 7 volumes (Ed. A. Ehresmann), Amiens 1980-83. Version pdf téléchargeable online http://carlossicoli.free.fr/E/

[2] Cockett J.R.B. & Lack S., Restriction categories I: categories of partial map, *Computer Science* 270, 2002, 223–259.

[3] Barr M. & Wells C., *Toposes, Tripes and Theories*, 1985, Springer. Online dans : *Theory and Applications of Categories*, 12, 2005, pp. 1–288.

[4] Bastiani(-Ehresmann) A & Ehresmann C., Categories of sketched structures, *Cahiers de Top. et Géom. Diff* XIII-2, 1972. Online sur NUMDAM

[5] Rodin A., Categories without structures, *Philosophia Mathematica* 19(1), 2011, 20-46.

[6] Guitart R. & Lair C., Calcul syntaxique des modèles et clacul des formules internes, *Diagrammes* 4, 1980.

[7] Bastiani A., Sur le problème général d'optimisation, in *Actes Congrès d'Automatique Théorique*, Dunod, Paris 1965, 125-136.

[8] Ehresmann A. & Vanbremeersch J.-P., *Memory Evolutive Systems : Hierarchy, Emergence, Cognition,* Elsevier 2007.

[9] Bénabou J., Structures algébriques dans les catégories. *Cahiers Top. et Géom. Diff.* X-1, 1968, 1-126.

[10] Ehresmann A. & Vanbremeersch J.-P., Multiplicity Principle and emergence in MES, *SAMS* 26 ,1996, 81-117.

[11] Béjean M. & Ehresmann A, D-MES : conceptualizing the working designer, 8th Intern. Conf. on Design Principles and Practices, Vancouver, January 2014. Online :

[12] Béjean M., Approche catégorique des processus de conception et d’innovation collectives, Séminaire Mamuphi, ENS Paris, 7/12/2013.

[13] Ehresmann A. & Vanbremeersch J.-P., Petite mathématique de la création, *L'Etincelle* 6, Nov. 2009, IRCAM , Centre Pompidou.