Chapitre 7

« Des infinis subtils ».

« Nous buvons la hantise des causes
dans le pétillement vénéneux de nos coupes
et nous frôlons de nos crochets
des infinis subtils comme une mort légère.
Mais où les jonchets s'entremêlent
l'enfant reste sans mots :
l'univers dort dans le berceau
d'une petite éternité. »

O. Mandelstam (1933) *Simple promesse*[1].

Les Mathématiques passent, pour de bonnes et de mauvaises raisons, pour la science de l'infini.

Il est indéniable que l'infini est, de nos jours, le pain quotidien du mathématicien. Sa mie n'est pas toujours tendre, mais il a perdu sa croûte métaphysique, et avec elle la méfiance et la répugnance qu'il a inspirées aux mathématiciens, de l'antiquité jusqu'au début du XX^e siècle.

7.1 L'infini(tésimal) et son calcul.

7.1.1 L'infini à penser - à propos du mouvement.

Durant près de deux millénaires en effet, les mathématiciens, échaudés par les fameux paradoxes de Zénon, sont restés fidèles à la conception essentiellement négative de l'infini portée par la tradition philosophique grecque. En reprenant la distinction aristotélicienne, on peut dire qu'ils se sont prudemment rangés du côté du fini et de l'« infini en puissance », et ont constamment rejeté l'« infini en acte » (gouffre de perdition pour l'« évidence géométrique », voire pour la raison).

Ainsi, par exemple, Euclide n'énonçait pas : « il existe une infinité de nombres premiers », mais « les nombres premiers sont plus nombreux que toute multiplicité donnée (sous-entendu : finie) de nombres premiers ».

[1] La Dogana, trad. L. Martinez, J.-C. Schneider, P. Jaccottet. « Des infinis subtils » est aussi le titre d'une œuvre pour piano de F. Nicolas, qui nous a fait découvrir ces vers de Mandelstam.

Ce qui fit entrer « le loup dans la bergerie », dans la première moitié du XVII^e, ce fut le problème galiléen de la géométrisation du mouvement. La question du passage graduel du repos au mouvement et *vice-versa*, celle plus générale de l'indivisibilité de l'espace, du temps et du mouvement, semblaient faire ressurgir inexorablement les apories de l'infini en acte et le spectre des paradoxes de Zénon. Les savants de l'époque entreprirent alors de répondre à l'exigence qui se posait de (re)penser l'infini, dans le cadre d'une intelligibilité géométrique.

Tandis que Pascal admettait dans la nature, en les soulignant,

> les merveilleuses infinités qu'elle a proposées aux hommes, non pas à concevoir mais à admirer ;

tandis que Descartes préconisait dans ses *Principes de la philosophie* (§26)

> qu'il ne faut point tâcher de comprendre l'infini, mais seulement penser que tout ce en quoi nous ne trouvons aucunes bornes est indéfini ;

Leibniz, dans sa *Théorie du mouvement abstrait*[2], expliquait quant à lui que le mouvement est un continu et qu'

> il y a des parties données en acte dans le continu. [...] Celles-ci sont infinies en acte. [...] Des indivisibles ou inétendus sont donnés, sans quoi ni le commencement, ni la fin du mouvement et du corps ne sont concevables[3] .

C'est sur fond de tels débats philosophiques, et dans le prolongement d'une intense activité autour de calculs de tangentes et d'aires, que Newton et Leibniz élaborèrent dans les dernières décennies du XVII^e leurs « calculs de l'infini »[4]...

> des œuvres où le futur souligne à nos yeux des manques, ceux des concepts de fonction, de variable, de continuité, de limite, de nombre réel, mais où la confiance dans un symbolisme tout neuf pour Leibniz, l'extraordinaire habileté arithmétique et algébrique pour Newton et l'unification des recherches antérieures pour les deux ont permis qu'une nouvelle étape soit franchie et vienne justement combler ces manques. C'est l'ambiguïté même de leurs positions, les lacunes de leurs concepts qui ouvrent un champ de recherches propres à les faire disparaître à leur tour[5].

7.1.2 Calcul et écriture de l'infini.

Il est très remarquable que la confrontation des mathématiciens à l'exigence de penser l'infini ait fait éclore, non pas un *concept* mathématique de l'infini, mais

[2] antérieur de cinq ans environ à son invention du Calcul infinitésimal.

[3] plus tard, Leibniz en rabattit un peu sous le feu de la critique, et ne défendit plus qu'au titre de « fictions » ces infinitésimaux.

[4] « calcul des fluxions » et « calcul différentiel » respectivement, assez différents d'esprit. Si le calcul de Leibniz (et de ses successeurs les Bernoulli) fait la part belle à l'algorithme, celui de Newton invoque une analyse des « premières et dernières raisons », ancêtre des limites. Sur tout cela, voir l'ouvrage *Reading the Principia* de N. Guicciardini (Cambridge 1999), qui mène le lecteur par la main, avec douceur, à travers les textes originaux de Newton, Leibniz et des Bernoulli, en faisant percevoir leurs échos réciproques.

[5] P. Raymond, La naissance du calcul infinitésimal, *Philosophie et calcul de l'infini* (Maspéro 1976), p. 72.

un *calcul* et une *écriture* de l'infini (de l'infiniment petit comme de l'infiniment grand).

Le symbole ∞ lui-même, dû à Wallis (*Arithmetica infinitorum*, 1655), inaugure cette écriture opératoire et survivra jusqu'à aujourd'hui, tout comme les symboles leibniziens pour les différentielles dx et pour les intégrales $\int$ (pensées comme sommations d'une infinité d'éléments), et le symbole $\sum$ de sommation d'Euler. L'écriture ouvre et jalonne la voie du progrès conceptuel.

Écrire $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = 1,\ \sum_1^\infty \frac{1}{n} = \infty,\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1,\ \int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty,\ etc...$ suppose déjà qu'on distingue clairement entre *processus opératoire infini* [ou non] (indiqué par le ∞ en haut du signe somme), et *résultat infini* [ou non] de l'opération (indiqué au membre de droite), et marque en particulier le dépassement des paradoxes de Zénon.

Euler place au cœur de l'Analyse la notion de *fonction*, et

> c'est avec une passion d'entomologiste qu'[il] consacre la plus grande partie de son œuvre en Analyse à découvrir sans cesse de nouvelles et surprenantes propriétés de fonctions particulières, qui excitent encore aujourd'hui notre admiration[6],

à commencer par la fonction exponentielle[7], dont la notation e^x absorbe et étend

[6]Dieudonné, L'Analyse mathématique au dix-huitième siècle, *Abrégé d'Histoire des Mathématiques*, I, V.

[7]cette fonction apparaît « toutes les fois que la pesanteur et la flexibilité agissent de concert » : comme l'ont montré simultanément Leibniz, Joh. Bernoulli et Huygens (1691), la courbe suivant laquelle s'infléchit une chaîne suspendue en deux de ses points non situés sur la même verticale est, non pas un arc de parabole comme le croyait Galilée, mais un arc de *chaînette*, dont l'équation peut s'écrire $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Elle a inspiré au célèbre entomologiste J.-H. Fabre cette page pittoresque (*Souvenirs entomologiques*, IX, 10, Les épeires. Géométrie de la toile.) :

> C'est la forme d'un cordon souple que l'on abandonne à lui-même en tenant les deux bouts ; c'est la ligne qui régit la configuration d'une voile gonflée par le vent ; c'est la courbure de la sacoche à lait de la bique revenant de remplir sa traînante mamelle. Et tout cela fait appel au nombre e.
>
> Que de science abstruse pour un bout de ficelle ! N'en soyons pas surpris. Un grain de plomb qui oscille à l'extrémité d'un fil, une goutte de rosée qui ruisselle le long d'une paille, une flaque d'eau qui se ride aux caresses de l'air, un rien, en somme, exige un échafaudage de Titans lorsqu'il faut y plonger le regard du calcul. [...] Certes, nos méthodes d'investigation mathématique sont ingénieuses ; on ne saurait trop admirer les puissantes cervelles qui les ont inventées ; mais combien lentes et pénibles en face des moindres réalités ! Ne nous sera-t-il jamais donné de scruter le vrai de façon plus simple ? [...]
>
> Voici que l'abracadabrant nombre e reparaît, inscrit sur un fil d'araignée. Considérons, par une matinée brumeuse, le réseau qui vient d'être construit pendant la nuit. À cause de leur hygrométrie, les gluaux se sont chargés de gouttelettes et, fléchissant sous le poids, sont devenus autant de chaînettes, autant de chapelets de gemmes limpides, gracieux chapelets rangés en ordre exquis et retombant en courbes d'escarpolette. Si le soleil perce le brouillard, l'ensemble s'illumine de feux diaprés et devient splendide girandole. Le nombre e est dans toute sa gloire. La géométrie, c'est-à-dire l'harmonie dans l'étendue, préside à tout. Elle est dans l'arrangement des écailles d'un cône de pin comme dans l'arrangement des gluaux d'une épeire, elle est dans la rampe d'un escargot, dans le chapelet d'un fil d'araignée, comme dans l'orbite d'une planète ; elle est partout, aussi savante dans le monde des atomes que dans le monde des immensités.

toute l'efficace souplesse de l'écriture algébrique des exposants.

Le lien entre calcul différentiel et calcul intégral s'écrit sous la forme compacte : $f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{df}{dx} \cdot dx.$ Si, suivant Lagrange, on pense à $\frac{df}{dx}$ comme à une nouvelle fonction, la *dérivée* de f, toute référence à l'infini a disparu de cette formule[8]. Le calcul s'oriente alors vers celui des dérivées et des primitives, et vers la résolution des équations différentielles, porté par un symbolisme affuté, aussi élégant qu'efficace.

7.1.3 L'Analyse du XVIII^e et la maîtrise du calcul.

Le développement de la puissance et de la cohérence opératoire du Calcul infinitésimal au XVIII^e s'accompagne d'un double mouvement de conquête de nouveaux territoires en aval et d'élucidation de ses propres fondements en amont.

Longtemps, en effet, on a louvoyé avec l'infini, comme en témoignent les traités successifs encombrés d'avertissements, explications et réponses aux objections à propos des infinitésimaux, bien plus proches en cela de la tradition métaphysico-théologique que du grand style géométrique hérité des grecs, comme le fait remarquer non sans malice l'évêque G. Berkeley dans son pamphlet *The Analyst* (1734).

Le nouveau calcul essuie, à son grand profit, les critiques de théologiens[9], de philosophes, et aussi et surtout de géomètres. Voici par exemple la critique bien sentie de MacLaurin[10] à propos de la « Géométrie de l'infini » de ses prédécesseurs (parfois appelée « Géométrie sublime » par ses thuriféraires !) :

> En voulant ainsi élever la Géométrie, il peut bien se faire qu'on la dégrade et qu'on la dépouille du caractère qui lui est propre, et qui consiste dans l'évidence la plus parfaite. Car une idée aussi arbitraire[11] ne laisse dans l'esprit que des connaissances obscures et imparfaites, au lieu de la clarté qui résulte des démonstrations vraiment géométriques. C'est de là que vient le penchant que l'on a fait paraître dans ces derniers temps d'introduire des mystères dans une science où tout doit être démontré.

À la fin du siècle, l'Analyse a relevé le défi et revendique hautement le non-recours à l'exutoire de l'infini métaphysique, comme en témoigne le titre de l'ouvrage de Lagrange : *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies* (1797)[12].

---

[8]rappelons que l'intétgrale $\int_a^b \frac{df}{dx} \cdot dx$ représente, géométriquement, l'aire limitée par le graphe de f entre a et b (et par le segment $[a, b]$ de l'axe des x).

[9]attendues, puisque la notion d'infini actuel, logico-métaphysique chez Aristote, avait pris une très forte connotation théologique chez les Scolastiques.

[10]Treatise of fluxions, 1742. Cité par P. Raymond, *op. cit.*

[11]que des quantités infinies de divers ordres, voire intermédiaires entre finies et infinies, entre nulles et non nulles.

[12]Il faut sans doute ouvrir ici une parenthèse anachronique et glisser un mot de la prétendue « analyse non-standard », compte tenu de l'incroyable publicité dont elle a joui. Si ses « tenants », en Logique et en Théorie des ensembles, sont fascinants et féconds, ses « aboutissants » sont en revanche plutôt douteux : combat d'arrière-garde pour « justifier les indivisibles » des débuts du Calcul infinitésimal, sans regard épistémologique critique sur les liens supposés entre ses « néo-

Du côté des philosophes, c'est Hegel (lecteur attentif de Lagrange) qui a pris la mesure de la hardiesse du Calcul infinitésimal comme réponse mathématique aux problèmes de l'infini dépassant les conceptions métaphysiques classiques.

> Dans une perspective philosophique, l'infini mathématique est important pour cette raison qu'en fait c'est le concept de l'infini véritable qui se trouve à son fondement, et qu'il se tient beaucoup plus haut que ce qu'habituellement on appelle l'infini métaphysique, à partir de quoi sont faites des objections contre le premier.

Il conclut que c'est à la Philosophie qu'il revient toutefois d'élucider le concept dialectique de l'infini que les Mathématiques ont dégagé et mis en œuvre.

7.1.4 L'Analyse du XIX^e et la rigueur du calcul.

Les acquis du calcul infinitésimal à la fin du XVIII^e sont éclatants[13]. Si éclatants que Lagrange a pu écrire - enthousiasme ou pessimisme ? - qu'il

> reste peu de moyens de faire de grands progrès avec l'Analyse dans l'état actuel où elle se trouve[14].

Une période de stagnation a suivi en effet, où l'on s'est rendu compte que l'on s'était débarrassé à trop bon compte des difficultés liées aux infinitésimaux. D'Alembert notait déjà que Euler se souciait

> d'agrandir l'édifice plus que d'en éclairer l'entrée.

Si l'algébrisation progressive de l'Analyse, poussée par Lagrange, avait évacué les mystères de l'infini, le caractère trop formel des opérations symboliques du calcul infinitésimal et l'usage immodéré des développements en séries laissait planer une ombre sur les fondements ; et tout particulièrement sur la faculté même d'une fonction d'être développée en série de puissances (son analyticité).

En entreprenant d'éclairer « l'entrée de l'édifice », Bolzano puis Cauchy se sont vus contraints de penser à nouveaux frais les notions de fonction continue et de limite (ces limites que Lagrange se faisait fort de contourner !).

Pour eux, une fonction (d'une variable x) est *continue* en un point x_0 si la valeur absolue de la différence $f(x) - f(x_0)$ décroît indéfiniment avec celle de $x - x_0$. On peut, suivant Weierstrass, exprimer cette condition de manière encore plus explicite (ou plus pédante) : pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il en existe un autre δ tel que $|x - x_0| < \delta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

---

infinitésimaux » et ceux, fort divers, des anciens. Son foyer d'intérêt - des questions inactuelles de fondements - étant très loin des problèmes qui drainent l'Analyse contemporaine, il n'est pas étonnant que ses contributions y soient minimes. Mais elle s'est bien vendue auprès d'épistémologues friands de curiosités « non-standard » (et semble actuellement faire des ravages en didactique).

[13] séries trigonométriques $\sum_0^\infty a_n e^{inx}$, calcul des variations et équation de Euler-Lagrange $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0$, développements asymptotiques, application du Calcul infinitésimal à l'étude et parfois à la résolution des équations différentielles à une ou plusieurs variables...

[14] cité par P. Dugac, Fondements de l'analyse, in *Abrégé d'histoire des mathématiques*, VI. Hermann 1978.

De même, la notion de *limite* est posée, aussi transparente et non métaphysique, et l'*intégrale* est rigoureusement construite (Cauchy, Riemann).

Pour finir de bâtir solidement l'édifice de l'Analyse classique, pour achever ce qu'on appelait « l'arithmétisation de l'Analyse » et comprendre à fond le continuum, il ne restait plus qu'une tâche : élucider la notion même de *nombre réel*.

Cette tâche fut menée à bien, quelques 200 ans après les débuts du Calcul infinitésimal, par Weierstrass, Méray, Dedekind et Cantor.

Ainsi, au bout de deux siècles et demi d'efforts, les mathématiciens, initialement confrontés à l'exigence de penser l'infini sur fond problématique du continu et du mouvement, ont produit, en s'abstenant de forger un concept mathématique de l'infini, un calcul de l'infini*, calcul dont l'approfondissement les a conduits à un* concept mathématique du continu *(nombres réels et fonctions continues)*.

7.2 Les multiplicités infinies et leur mesure.

7.2.1 Dedekind et Cantor.

C'est à ce moment, où l'on pouvait croire l'infini actuel définitivement délogé des Mathématiques, à ce point précis où l'on achevait « l'arithmétisation de l'Analyse », que « le loup entra de nouveau dans la bergerie ». Non plus au niveau des grandeurs numériques, mais au niveau des multiplicités, des ensembles.

En effet, les constructions du continu à partir des nombres entiers et des nombres rationnels brisaient un tabou - elles faisaient intervenir inexorablement des multiplicités infinies en acte - , et s'y brisaient elles-mêmes en tant que tentatives de ramener le continu au fini illimité. La construction de Dedekind, par exemple, assimilait un nombre réel à une totalité infinie de nombres rationnels : précisément, à un ensemble de nombres rationnels formant intervalle sans extrémités, borné inférieurement et non borné supérieurement.

Cette intrusion *in extremis* de l'infini actuel si longtemps traqué convainquit les mathématiciens de son irréductibilité.

Faute de pouvoir le chasser, il s'est agi alors de le domestiquer - c'est-à-dire d'apprendre *à connaître et maîtriser les multiplicités infinies, et à en prévenir les paradoxes*. C'est l'objet de la Théorie des ensembles, dont Dedekind et Cantor sont les fondateurs[15] (on oublie trop souvent le premier).

Une fois admis l'existence d'ensembles infinis et légitimé leur emploi, la confrontation de Dedekind et Cantor à l'axiome euclidien « le tout est plus grand que la partie » les conduit tout d'abord à préciser ce que « plus grand » peut vouloir dire dans le cas d'ensembles éventuellement infinis.

Réponse : un ensemble A est (strictement) « plus grand » qu'un autre B s'il existe une application injective[16] de B dans A mais pas dans l'autre sens.

[15] la construction des nombres réels n'est d'ailleurs pas la seule source de la théorie : l'arithmétique des idéaux de Dedekind (1871), ensembles infinis sujets à des opérations algébriques, comme des nombres, en est une autre. L'étude de Cantor (1871) des parties de $\mathbb{R}$ où les séries de Fourier s'annulent, une autre encore.

[16] c'est-à-dire une règle associant à tout élément de B un élément de A, des éléments distincts

Par exemple, Cantor observe que l'ensemble des parties d'un ensemble est toujours « plus grand » que cet ensemble. Il observe aussi qu'étant donnés deux ensembles qui ne sont pas en bijection[17], il y en a forcément un qui est « plus grand » que l'autre[18].

Dedekind et Cantor montrent que l'axiome euclidien caractérise en fait les ensembles finis. D'où un renversement de perspective : au lieu de concevoir négativement l'infini comme « apeiron » (in-fini, illimité), est déclaré *infini* tout ensemble A qui est en bijection avec une de ses parties $B \neq A$.

7.2.2 Le transfini. Procession des ordinaux et cardinaux.

Cantor est allé plus loin et a introduit des *nombres transfinis*, initiant une *combinatoire de l'infini*. Les entiers naturels servent d'une part à mesurer la taille d'un ensemble fini et d'autre part à repérer la position d'un terme dans une suite. Dans le domaine transfini, ces deux usages sont portés par des notions distinctes : les *cardinaux* et les *ordinaux*.

Les cardinaux sont associés aux ensembles amorphes, c'est-à-dire sans structure supplémentaire : deux ensembles en bijection ont même cardinal. Le premier cardinal transfini, noté $\aleph_0$, est celui de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Le cardinal $2^{\aleph_0}$ de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est aussi celui du continu, c'est-à-dire de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. La relation « être plus grand que » entre ensembles ordonne les cardinaux en une « procession ».

Les ordinaux sont associés aux ensembles *bien ordonnés*, c'est-à-dire munis d'un ordre total pour lequel toute partie a un minimum. Le premier ordinal transfini, noté ω, est celui de $\mathbb{N}$ avec son ordre naturel : $0 < 1 < 2 < \ldots$. On peut effectuer des opérations sur les ordinaux : addition, multiplication, puissance. Par exemple, $\omega + 1$ est $\mathbb{N}$ auquel on ajoute un élément $+\infty$ plus grand que tous les précédents. S'ensuit toute une procession : $\omega + 2, \ldots, \omega + \omega = \omega \times 2, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega} \ldots$

7.2.3 L'infini derrière le fini. La patience de Goodstein.

Voici une patience fort simple, inventée par le logicien R. Goodstein, qui se joue non pas avec des cartes, mais avec des chiffres. Elle est basée sur l'écriture en base b itérée : on part de l'écriture en base b, puis on écrit tous les exposants en base b, de même pour les exposants des exposants, *etc*... Par exemple, l'écriture en base 2 itérée de 25 est $2^{2^2} + 2^{2+1} + 1$.

On « tire » pour commencer un entier $n > 0$. On l'écrit en base 2 itérée, on change tous les 2 en 3 (par exemple $25 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 1$ devient $3^{3^3} + 3^{3+1} + 1 = 7625597485069$), et puis on retranche 1.

---

de B correspondant par cette règle à des éléments distincts de A ; de sorte qu'on peut identifier B, au moyen d'une telle règle, à une partie de A.

[17] *cf.* 1.1.5.

[18] théorème de Cantor-Bernstein-Schröder, qui, contrairement à une opinion courante (et à la preuve originale de Cantor), ne requiert pas l'axiome du choix, *cf.* S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge.

On écrit le nombre ainsi obtenu en base 3 itérée, on change tous les 3 en 4, et puis on retranche 1, *etc*...

Le jeu s'arrête dès qu'on tombe sur 0.

Ainsi, si l'on part de $n = 2$, on obtient la séquence $2^1 \rightsquigarrow 3^1 - 1 = 2 \rightsquigarrow 2 - 1 = 1 \rightsquigarrow 0$: le jeu s'arrête dès la troisième étape.

Pour $n = 3$, on a la séquence $3 = 2^1 + 1 \rightsquigarrow 3^1 + 1 - 1 = 3 \rightsquigarrow 4^1 - 1 = 3 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 0$: le jeu s'arrête à la cinquième étape.

Pour $n = 4$, on a la séquence $4 = 2^2 \rightsquigarrow 3^3 - 1 = 26 = 2.3^2 + 2.3^1 + 2 \rightsquigarrow 2.4^2 + 2.4^1 + 1 = 41 \rightsquigarrow 2.5^2 + 2.5^1 = 60 \rightsquigarrow 83 \ldots$ et le jeu ne s'arrête qu'à l'étape $3.(2^{402653211} - 1)$: une « petite éternité » !

Et la patience traîne invraisemblablement en longueur lorsque n croît...

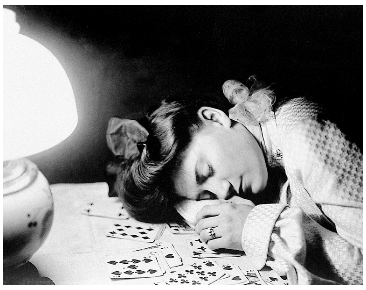

FIG. 7.1 –

Pourtant, le jeu s'arrête toujours. La « souris qui grignote » une unité à chaque étape finit par avoir raison des sauts gigantesques occasionnés par les changements de base itérée de b à $b + 1$!

« Patience et longueur de temps... »

La démonstration qu'en a donnée Goodstein (1944) passe par l'infini, comme suit. On observe que la fonction qui à l'écriture en base b d'un entier m associe l'ordinal obtenu en changeant tous les b en ω est croissante en m. Donc si l'on mime la patience en remplaçant, à chaque étape k, la base $b = k + 2$ par ω (au lieu de $b + 1$) puis en retranchant 1, on obtient une suite *strictement décroissante* d'ordinaux dénombrables, à cause de l'unité soustraite à chaque étape. Une telle suite aboutit nécessairement à 0, et il en est donc de même de la suite originale.

N'y aurait-il pas une démonstration plus standard, par récurrence, n'utilisant pas l'infini ? Eh bien, non[19]. Le déroulement de l'algorithme est si lent - pire que ce que peut contrôler toute fonction de n définie par récurrence - qu'il échappe aux axiomes de Peano du fini : toute preuve du fait qu'elle s'arrête (toujours) requiert l'existence de ω.

On peut donc voir ce jeu d'innocente apparence comme un *reflet, dans le monde fini, de l'axome de l'infini* ; mieux : comme un marqueur de la *suture ontologique entre fini et infini*.

Mais la présence de l'infini derrière le fini, en Mathématiques, ne se borne pas, tant s'en faut, à de tels exemples limites un peu artificiels.

[19]Kirby et Paris, Bull. London Math. Soc. 14 (1982).

La plus grande partie de la combinatoire finie témoigne de cette présence. Sa technique fondamentale, remarquablement efficace, est celle des *séries génératrices*. *Grosso modo*, s'agissant de dénombrer les configurations de tel ou tel type A, la méthode consiste à insérer A dans une hiérarchie de types de configurations A_n liées par des relations de récurrence, et à introduire la série $f(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$ dont les coefficients a_n dénombrent les configurations de type A_n. Les récurrences se traduisent par une équation différentielle ou fonctionnelle satisfaite par $f(x)$. Même lorsque l'on ne sait pas (ou peut pas) résoudre explicitement l'équation, l'Analyse asymptotique permet souvent d'obtenir le comportement de $f(x)$ à l'infini, et partant, de bonnes estimations pour les a_n.

Au reste, la question du comportement de grands nombres issus de la combinatoire et des probabilités a été l'un des moteurs du développement de l'Analyse asymptotique[20] au XVIII^e.

7.2.4 L'enjeu des grands cardinaux.

Disons quelques mots de ces fameux grands cardinaux qui fascinent tant, pour des raisons souvent bien éloignées des enjeux proprement mathématiques.

Partant du cardinal $\aleph_0$ dénombrable, on forme la suite croissante de cardinaux

$$\aleph_0,\ 2^{\aleph_0}\ \text{(cardinal du continu)},\ 2^{2^{\aleph_0}},\ 2^{2^{2^{\aleph_0}}},\ldots$$

Deux questions se posent :

1) en bas de l'échelle, y a-t-il des cardinaux intermédiaires entre les deux premiers barreaux (entre le dénombrable et le continu) ? [Plus généralement, y a-t-il des intermédiaires entre les barreaux ?]

2) et en haut de l'échelle ? Y a-t-il des cardinaux au-delà ?

La question 1) est indécidée (Cantor penchait pour la réponse négative : c'est l'*hypothèse du continu*). En fait, l'axiomatique usuelle des ensembles, ZFC (Zermelo-Fraenkel + axiome du choix), est trop faible pour la trancher, comme l'ont démontré Gödel et Cohen.

Ce résultat négatif n'est nullement une liquidation de la question 1), mais plutôt une critique de ZFC[21]. Comment compléter ZFC devient un problème, qui est loin d'être réglé, mais l'histoire récente de la Théorie des ensembles montre qu'une réponse précise à la question 2) est une clé. C'est la problématique des grands cardinaux. Les récents travaux de W. Woodin[22] semblent indiquer que l'existence de certains très grands cardinaux infirmerait l'hypothèse du continu.

Quoi qu'il en soit, le haut de l'échelle influe sur le bas ; le phare des grands cardinaux éclaire les eaux troubles entre le dénombrable et le continu, et c'en est le véritable enjeu pour les mathématiciens.

[20] formule sommatoire d'Euler-MacLaurin pour $\sum_0^n f(k)$, méthode de Laplace pour les intégrales $\int_0^\infty f(x)g(x)^n dx$, *etc*...

[21] ZFC a le grand mérite d'avoir mis fin aux paradoxes, mais n'est nullement « gravée dans le marbre » ; elle ne doit pas devenir « le carcan de la théorie des ensembles », *cf.* 1.6.1. L'argument parfois avancé que modifier ZFC demanderait à réécrire toutes les mathématiques est une imposture : la quasi-totalité de la littérature mathématique ne fait aucune référence, ni explicite ni implicite, à ZFC ; pour ce qu'elle retient de la Théorie des ensembles, voir 7.2.5 ci-après.

[22] voir P. Dehornoy, Les travaux de Woodin sur l'hypothèse du continu, *Encyclopedia Universalis*, La science au présent 2004, 123-128.

7.2.5 (Non-)influence de la Théorie des ensembles sur les Mathématiques.

Que retiennent les Mathématiques de tous ces travaux sur les multiplicités infinies ?

La réponse est double, et très tranchée.

• En ce qui concerne l'usage et le langage (élémentaire) des ensembles, à la manière de Dedekind disons, ils ont envahi toutes les Mathématiques. L'usage des ensembles a ouvert la voie à la Topologie générale[23], à la Théorie de la mesure, et à l'Analyse fonctionnelle (où l'on traite d'ensembles de fonctions comme s'il s'agissait de points d'un espace). D'autre part, le langage des ensembles, sous l'impulsion de Bourbaki notamment, a beaucoup contribué à la précision du langage mathématique en général. Les mathématiciens ont aussi retenu quelques règles d'« hygiène logique » pour éviter les paradoxes de l'infini[24], ainsi que l'usage conscient mais circonspect de l'axiome du choix et de ses variantes[25].

Au reste, la plupart des ensembles considérés par les mathématiciens sont des ensembles définis « en compréhension », pour lesquels l'appartenance veut dire, concrètement, satisfaire une certaine propriété explicite ; à ce niveau basique, les ensembles n'offrent guère qu'un langage « réaliste » un peu plus commode que le maniement logique des propriétés elles-mêmes.

• En revanche, en ce qui concerne les travaux de Cantor sur la combinatoire transfinie, l'axiomatique ensembliste et tous les développements ultérieurs de la Théorie des ensembles, les Mathématiques (hors Théorie des ensembles et Logique) n'en retiennent *quasi-rien*. Il n'arrive pratiquement jamais, par exemple, qu'un mathématicien[26] ait à faire une récurrence transfinie ; dans l'autre sens, il est extrêmement rare qu'un théoricien des ensembles contribue au reste des Mathématiques ou utilise des méthodes issues d'un domaine autre que la Théorie des ensembles ou la Logique[27].

Cet isolement (non irrémédiable, au demeurant) est l'un des arguments qui empêchent de prendre au sérieux le discours conventionnel, bien dépassé, sur la Théorie des ensembles comme fondement des Mathématiques[28]. Pour des bataillons de mathématiciens, les théoriciens des ensembles apparaissent plutôt comme des *sentinelles de l'infini*, qui de loin rassurent sur les questions de fondements des multiplicités infinies[29], et évitent aux autres (pour qui les questions fondamentales ne sont pas du tout des questions de fondements) d'y penser.

[23] voie frayée par Dedekind lui-même, d'ailleurs. La définition ensembliste des applications continues - celles pour lesquelles l'image inverse d'un ouvert est un ouvert - est bien plus souple et plus générale que celles de Cauchy et Weierstrass (rappelées plus haut).

[24] dont la forme la plus sophistiquée est l'usage « préventif » des univers de Grothendieck.

[25] dans la plupart des situations, l'axiome du choix dénombrable (qui pose qu'à partir d'une suite d'ensembles non vides X_n, on peut légitimement construire une suite d'éléments $x_n \in X_n$) suffit.

[26] non théoricien des ensembles ni logicien.

[27] les exceptions confirment la règle !

[28] voir 8.1. Il convient aussi de rappeler que la Théorie des ensembles a par ailleurs une influence nulle dans les sciences de la nature, ce qui n'ôte rien à l'importance de ses enjeux intellectuels.

[29] par exemple, le résultat de Gödel « si ZF est cohérent, ZFC l'est aussi » rassure sur l'usage de l'axiome du choix.

7.3 L'horizon : l'infiniment loin.

Nous passons maintenant à l'infini géométrique.

7.3.1 Points de fuite.

Revenons aux XV^e et XVI^e siècles, où concevoir l'infini en acte était non seulement difficile, mais même dangereux (Giordano Bruno...).

À cette époque, pourtant, les artistes italiens, en mettant au point et en pratique la *perspective centrale*, avaient donné (sans la penser comme telle) une première représentation de l'infini actuel, marquée comme *point de fuite* sur l'horizon.

Après deux siècles de pratique de la perspective centrale et d'« éducation de l'oeil », Desargues[30] en théorise la géométrie d'un point de vue radical : plutôt que de borner la perspective à une représentation fictive de la réalité géométrique familière, il « croit ses yeux » et identifie parallélisme et concours à l'infini. Ce qui l'amène à revisiter et subvertir la géométrie des coniques des Anciens en y introduisant des considérations d'infini, et lui permet de montrer l'équivalence de toutes les coniques par changement de perspective.

Ces idées hétérodoxes pour l'époque, violemment combattues puis oubliées, préfigurent la Géométrie projective (*cf.* 6.1.1), où l'espace usuel est « compactifié » par ajout d'un plan à l'infini.

7.3.2 Compactifications.

Compactifier est une opération fondamentale en Topologie. Elle consiste à plonger un espace donné X comme sous-espace dense d'un espace compact $\bar{X}$, donc d'empêcher en quelque sorte les points de « fuir » à l'infini, en captant les « fuyards ». Plus précisément : de toute suite de points de X on peut extraire une sous-suite qui a une limite dans $\bar{X}$.

Par exemple, on peut compactifier la droite réelle $\mathbb{R}$ en ajoutant un seul point à l'infini, ce qui la transforme en un cercle (droite projective réelle) ; de même avec $\mathbb{C}$, ce qui donne la *sphère de Riemann* (droite projective complexe).

Ces exemples montrent déjà que le procédé n'est pas aussi rudimentaire qu'il paraît : l'« horizon » qu'il campe n'est pas un simple bord recollé (le cercle et la sphère n'ont pas de bord !). On remarque aussi qu'après compactification, ces espaces deviennent plus homogènes, c'est-à-dire acquièrent davantage de symétries. En Géométrie projective, c'est cette homogénéité renforcée par l'incorporation du plan à l'infini qui permet d'éliminer toutes les fastidieuses considérations de « cas de figures ». Intégrer l'horizon à la réalité familière libère bien des potentialités (du moins chez les artistes et les géomètres)...

> Avec l'horizon, l'infini trouve enfin un lieu d'accouplement avec le fini. Son absence ruine l'homogénéité créarice que donne la profondeur. [...] La finitude fétichise l'itération. [...] Une itération privée d'horizon doit renoncer à tirer parti de l'enveloppement des choses.[31]

[30] *Brouillon project d'une atteinte aux évènemens des rencontres d'un cône avec un plan*, 1639.

[31] G. Châtelet, *Les enjeux du mobile*, Seuil, ch. 2.

Au reste, la compactification n'est pas un procédé « uniforme » : comme le savaient déjà les artistes qui perfectionnaient la perspective centrale, il y a une certaine liberté de choix de ce qu'on place à l'infini (points ou lignes de fuite) ; le tableau change notablement suivant ce choix, qui requiert du discernement.

> Toute timidité à décider l'horizon fait basculer l'infini dans un *indéfini*. [...] Dans l'indéfini, tout « finit » par être la même chose : ce sont les « lointains », et ces « lointains » se risquent parfois jusqu'aux premiers plans, un peu comme les fantômes errants de l'infini qui n'a pas été résolument tranché.
>
> Il faut donc, pour refuser toute concession à l'indéfini et s'approprier un infini géométrique, *décider l'horizon*, en se pénétrant de la discipline de discernement qu'il propose et qui fait resplendir l'infini dans chaque chose finie[32].

7.3.3 Complétion métrique.

Les compactifications s'appliquent dans le contexte topologique général (contexte de la « localité » au sens de 2.3.2) et ne tiennent pas compte - et parfois même détruisent - d'éventuelles structures supplémentaires, par exemple métriques (contexte « topographique », au sens de 2.3.3).

Pour dessiner un « horizon » en tenant compte de la métrique, la *complétion* est un procédé parfois plus pertinent, et « uniforme ». Elle consiste à plonger l'espace X comme sous-espace dense d'un espace $\hat{X}$, en respectant la structure métrique, et de façon à ce que toute suite de points x_n de X, telle que x_n soit arbitrairement proche de tous les x_m suivants (quand n est assez grand), tende vers une limite dans $\hat{X}$.

La complétion sert à faire aboutir les procédés de construction de solutions par *approximations successives*, pour toutes sortes de problèmes. Par exemple, toute application contractante T de $\hat{X}$ dans lui-même admet un unique point fixe (qu'on obtient comme limite de la suite $x, Tx, T^2x, \ldots$ dont le point de départ x est arbitraire).

Un exemple important est celui où X l'espace vectoriel engendré par une base orthonormée formée d'une suite de vecteurs e_n : la complétion de X est l'espace de Hilbert dont les points sont les combinaisons linéaires infinies $\sum \lambda_n e_n$ telles que $\sum |\lambda_n|^2 \neq \infty$ (*cf.* 2.4.2). Plus généralement, la complétion d'espaces vectoriels de fonctions pour des normes savamment choisies est une opération fondamentale en Analyse fonctionnelle, qui permet de trouver des solutions à bien des équations (ou des questions d'optimisation) fonctionnelles - ainsi que dans la théorie des représentations linéaires de dimension infinie (*cf.* 4.3.5)[33].

Comme le fait remarquer P. Cartier, c'est dans l'Analyse fonctionnelle du milieu du XX^e, notamment à propos de distributions (*cf.* 6.3.2), que viennent se mêler aux limites « classiques » les limites « catégoriques » (*cf.* 1.5.3) inductives et projectives (*espaces de Fréchet* et leurs duaux) ; et c'est de là que Grothendieck a

[32]G. Châtelet, *loc. cit.*

[33]rappelons-nous aussi la « bonne classe » des algèbres de von Neumann *moyennables*, caractérisées par la propriété d'être approximées par des sous-algèbres stellaires de dimension finie (algèbres de dimension infinie, mais « pas trop », *cf.* 2.6.4).

importé l'usage massif de méthodes « infinitaires » dans son traitement catégorique des faisceaux et de la cohomologie.

Il y aurait bien davantage à dire sur « l'infiniment loin » en Mathématiques, notamment en liaison avec la dégénérescence, l'évanescence et les singularités (chapitre 5).

Il y aurait tout autant à dire sur « l'infiniment proche ». On pourrait évoquer notamment le parcours conceptuel menant des *germes* (de fonctions analytiques) à la Weierstrass (*cf.* 5.5.1) aux *fibres* (de faisceaux) à la Leray-Cartan (*cf.* 1.5.4) *via* l'étude des variétés analytiques, ou celui menant des *points infiniment proches* de la Géométrie algébrique du début du XX^e - points dont l'existence séparée se révèle par éclatement (*cf.* 5.5.2) - à la refonte algébrique, par Grothendieck, du calcul infinitésimal au moyen des *éléments nilpotents* et à son invention du *topos infinitésimal*. Mais cela nous entraînerait bien loin...

7.4 L'infini importun.

7.4.1 Contrôler la divergence.

Même domestiqué, l'infini reste un « loup » qui sévit en Analyse sous la forme de la divergence. On dit qu'il y a *divergence* lorsqu'un processus opératoire aboutit à un résultat infini (par exemple, la série $\sum_0^\infty \frac{1}{n}$ diverge).

Mais comment, à quelle vitesse ? (Euler savait par exemple que $\sum_0^{\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ croît comme $\log N + 0,577\ldots$).

Comme le note Dieudonné dans la préface de son manuel classique[34],

> pour acquérir le « sens de l'Analyse » indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est « grand » de ce qui est « petit », ce qui est « prépondérant » de ce qui est « négligeable ». En d'autres termes, le Calcul infinitésimal [...] est l'apprentissage du maniement des *inégalités* bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER.

L'Analyse a mis au point tout un arsenal de microscopes et télescopes virtuels pour appréhender, à leurs différentes échelles, l'infiniment petit et l'infiniment grand. La sensibilité dont parle Dieudonné guide le choix délicat de ces instruments d'observation et de mesure (métriques, mesures, espaces fonctionnels adaptés à chaque problème), ainsi que l'usage d'une formidable boîte à outils techniques (prolongement analytique, résidus, distributions, régularisations, transformée de Fourier, ondelettes, *etc*...).

Le « sens de l'Analyse », c'est cet esprit de finesse face aux deux infinis, et sa virtuosité.

C'est vers l'Analyse que se tourne la Théorie des nombres lorsqu'elle aborde les formidables problèmes de répartition des nombres premiers, c'est à l'Analyse que sont dues les avancées les plus considérables de la Géométrie différentielle[35].

---

[34] *Calcul infinitésimal*, Hermann, 1980. Il existe des manuels moins austères : par exemple J. Steele, *The Cauchy-Schwarz master class : an introduction to the art of mathematical inequalities*, Cambridge.

[35] comme la classification des variétés de dimension 3, *cf.* 8.5.

Car c'est bien *l'Analyse* (et non la Théorie des ensembles) qui est la *« science dure » de l'infini mathématique, science « des infinis subtils », qualitatifs.*

7.4.2 Dépasser la divergence.

Euler n'hésitait pas à braver la divergence en écrivant des formules comme :

$$1+2+4+8+16+\cdots=-1, \quad 1+2+3+4+5+\cdots=-1/12,$$

ou en attribuant une valeur précise à la somme $1-1!+2!-3!+4!-5!+\cdots$ Ces formules « scandaleuses », sévèrement critiquées aux temps de la quête de la rigueur en Analyse, furent pleinement éclaircies et justifiées ultérieurement (à l'abus de notation près qu'elles commettent). Par exemple, la première formule n'est autre que l'évaluation en $x=1$ de la série de puissances $1+2x+4x^2+\cdots=1/(1-2x)$; *stricto sensu*, c'est la valeur en 1 du *prolongement analytique* (*cf.* 5.5.1) de la fonction $1/(1-2x)$ de la variable complexe x définie par cette série (série qui ne converge que pour $|x|<1/2$).

La seconde formule est nettement plus profonde et attendit 120 ans sa justification : elle exprime la valeur en $s=-1$ du prolongement analytique de la fonction

$$\zeta(s)=\sum_{1}^{\infty} n^{-s}=\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

de Riemann (qui contrôle la répartition des nombres premiers p)[36].

La troisième formule est la valeur en 1 de la sommation canonique $\int_0^x e^{-t/x}\frac{dt}{1+t}$ de la série formelle $y=x-1!x^2+2!x^3-3!x^4+\cdots$, *cf.* 3.4.

La divergence est encore bien plus importune en Physique qu'en Mathématiques. Elle infeste pourtant la Physique des champs quantiques et, comme on l'a brièvement évoqué en 3.6, les physiciens ont dû bâtir un arsenal de techniques, bien plus élaborées que celles de Euler, pour la dépasser. C'est la théorie de la *renormalisation*. Il est fascinant de constater qu'en jonglant avec des intégrales divergentes, donc dépourvues de sens physique (et même mathématique, *a priori*), la renormalisation aboutit à des quantités finies, en accord remarquable avec l'expérience de surcroît. Elle réussit le tour de force d'*extraire, systématiquement, du (dé)fini de l'in(dé)fini.*

« Qu'il n'y ait plus ni fini ni infini.
Que seul l'amour devenu lieu demeure. »

O. V. de L. Milosz (1927) *Les Arcanes*.

---

[36]Dans son article visionnaire de 1859 (Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, *Monatsberichte der Berliner Akademie*), Riemann prouve, pour tout nombre complexe s, la symétrie suggérée par Euler entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, et il explique le lien entre la distribution des nombres premiers et la position des *zéros* de ζ (c'est-à-dire des valeurs de s pour lesquelles $\zeta(s)$ s'annule). C'est en suivant ces arguments que J. Hadamard et C. de la Vallée-Poussin ont démontré qu'entre 1 et n, il y a environ $\frac{n}{\log n}$ nombres premiers (1896). La célèbre *conjecture de Riemann*, qui préciserait de manière essentielle et optimale ce résultat, dit que les zéros non triviaux (c'est-à-dire distincts des entiers pairs strictement négatifs) de ζ se trouvent tous sur l'axe de symétrie, c'est-à-dire la droite verticale d'abscisse $1/2$.