Huitième leçon de maths modernes

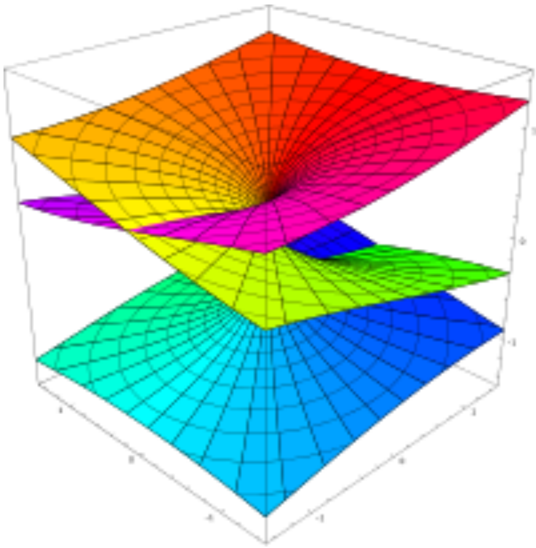
Théorie des variétés (Riemann, 1858)

(22 mai 2022)

Argumentaire

Avec cette huitième leçon, nous achèverons notre cycle consacré aux mathématiques modernes précantoriennes (1827-1858 : Gauss-Cauchy-Galois-Hamilton-Riemann-Dedekind).
La théorie riemannienne des variétés constituant un envoi de toute la géométrie moderne et contemporaine, nous ne pourrons qu'y introduire : des trois dimensions cumulatives (topologique, différentielle et géométrique) qui structurent cette théorie, nous n'examinerons en détail que la première, nous contentant ensuite d'esquisser les deux autres.
Nous conclurons alors ce cycle par une caractérisation synthétique de ces mathématiques modernes précantoriennes selon six traits distinctifs.

Surfaces de Riemann et variétés



Surface de Riemann de la racine cubique complexe

Gauss→Riemann

Riemann radicalise l'ouverture vers la géométrie moderne que Gauss a opérée en 1827 : lorsque ce dernier avait dégagé une notion *intrinsèque* de courbure (qui ne dépendait plus d'un regard en extériorité sur la surface considérée, d'un point de vue de Sirius), Riemann vient caractériser les surfaces de manière désormais entièrement immanente en abolissant l'idée même d'un espace ambiant conçu comme théâtre passif d'activités en surface : la surface n'est plus un monde (en 2D) contenu dans un univers plus vaste (en 3D) mais un univers à elle toute seule.
Pour cela, il cumule trois gestes :

1) il radicalise le geste de Gauss en substituant intégralement une formalisation *paramétrique* (intrinsèque) à l'ancienne formalisation *fonctionnelle* (extrinsèque) des surfaces ;
2) il généralise les *surfaces* à *deux* dimensions aux *hypersurfaces* à *n* dimensions ;
3) il adjoint des atlas intrinsèques aux (hyper)*surfaces* pour les étendre en des *variétés*.

Idée directrice

La démarche de Riemann s'appuie sur le fait moderne que les fonctions complexes viennent mettre à l'ordre du jour des fonctions *multiformes* (fonctions à plusieurs résultats, contrairement aux fonctions *uniformes* classiques). Riemann propose alors de remplacer les différentes surfaces d'une même fonction multiforme par une seule surface plurielle (dite de Riemann) devenue uniformément paramétrable : autrement dit, une pluralité de surfaces est remplacée par une surface plurielle (l'unité *arithmétique* d'une pluralité numérique mute en l'unité *géométrique* d'une surface à plusieurs couches).
Cette surface de Riemann pourra alors, à certaines conditions, être dotée d'un atlas endogène en sorte de devenir une *variété* proprement dite (*Mannigfaltigkeit*).

Trois grandes étapes

Nous étudierons la théorie des variétés selon leur caractérisation contemporaine (la clarification théorique a pris un siècle) comme étant des (hyper)surfaces topologiques, lisses et métriques.
Nous prendrons d'abord le temps de détailler ce que « variété topologique » veut dire : c'est un « *espace topologique séparé à base dénombrable et localement euclidien* ». Puis, nous esquisserons les deux grandes étapes suivantes :

- l'infinie différentiabilité autorisant de doter ces variétés d'un ensemble de cartes dénommé *atlas* ;
- la donation ultime d'une métrique (via un *produit scalaire* formalisant le jeu de la règle et du compas sur cet espace) caractérisant une géométrie intrinsèque.

Variétés « topologiques »

La topologie constituant le langage moderne de l'analyse, nous nous y attarderons avant d'examiner comment elle intervient dans la constitution d'une variété topologique.

<u>Les voisinages</u>

Des quatre manières équivalentes de définir une famille topologique de parties sur un ensemble donné (par les ouverts, les fermés, les voisinages et les adhérences), nous privilégierons la définition par les voisinages car celle-ci

1. est plus intuitive,
2. caractérise le local en l'arrimant à un point central ;
3. et s'accorde ainsi mieux à nos interprétations intellectuelles (la figure du point subjectif à fidèlement tenir y est en effet centrale).

<u>Portée logique</u>

Nous examinerons au passage la portée proprement logique des considérations topo-logiques précédentes puisque l'algèbre moderne formalise :

- l'opposition des *contradictoires* (respectant les deux principes de non-contradiction et du tiers exclu) selon l'algèbre de *Boole* des *parties* (le contradictoire d'une partie est sa partie complémentaire) ;
- l'opposition des *contraires* (ne respectant que le principe de non-contradiction) selon l'algèbre de *Heyting* des *ouverts* (le contraire d'une partie est le plus grand ouvert disjoint) ;
- l'opposition des *subcontraires* (ne respectant que le principe de tiers exclu) selon l'algèbre de *Brouwer* (ou de coHeyting) des *fermés* (le subcontraire d'une partie est le plus petit fermé complémentant).

<u>Autres notions topologiques</u>

Nous profiterons alors de l'axiomatisation topologique des voisinages pour avancer notre propre *axiomatisation topologique de la notion de région*, médiation décisive dans la dialectique du local et du global.
Nous continuerons en dégageant, sur cette base topologique, les notions de *limite* et de *continuité*.
Nous aboutirons ainsi à la notion d'*homéomorphisme* (bijection bicontinue) ce qui nous permettra de dégager des classes d'équivalence entre application continues (*homotopie*) ou linéaires (*homotopie*) sur ces espaces. Mais à ce stade, on n'aura pas encore de calcul différentiel et intégral (une différentielle n'est pas invariante par homéomorphisme). D'où la suite.

<u>Variétés lisses</u>

Si l'on suppose que les *homéomorphismes* précédents sont infiniment différentiables (*difféomorphismes* C^∞), on pourra adjoindre à la variété topologique un ensemble de cartes dénommé *atlas*. Avec cela, on disposera également des notions d'immersion et de plongement, d'orientabilité et de parallélisabilité, mais on n'aura pas encore de *courbure* (la différentielle ne présuppose pas de *métrique*).

<u>Variétés de Riemann proprement dites</u>

D'où la dernière étape dotant la variété lisse précédente d'un produit scalaire qui la géo-métrise (en la nantissant de distances et d'angles intrinsèquement définis) et lui confère des propriétés métriques intrinsèques (dont la courbure).

Interprétation intellectuelle

La portée intellectuelle de cette formalisation mathématique se concentrera pour nous sur les questions suivantes : qu'est-ce qu'un espace intrinsèque de pensée et comment y constituer un point d'intervention susceptible de composer *différentiellement* le lieu régional d'une action restreinte à ambition globale ?
On rehaussera l'actualité de ces interrogations pour les différentes modernités contemporaines, confrontées à l'incessant travail de sape des déconstructions postmodernes.

<u>Traits distinctifs de la première modernité</u>

Nous conclurons cette année par un bilan synthétique de la modernité mathématique pré-cantorienne en la caractérisant par six traits distinctifs (au regard des mathématiques classiques qui les ont précédées).

1) La modernité mathématique [Gauss-Riemann…] découpe des *situations* (totalisations partielles intrinsèquement autonomes) comme lieux de travail pour la pensée mathématique sans passer par l'hypothèse classique d'une vaste Totalisation préalable.

2) La modernité mathématique [Dedekind…] invente *une nouvelle manière de révolutionner* une situation donnée, non plus simplement par abandon-déplacement ou destruction-reconstruction mais *par adjonction-extension* endogène.
3) Pour l'algèbre moderne [Galois…], *les groupes sont constituants* de leurs éléments et non plus (comme dans l'algèbre classique jusqu'à Lagrange) constitués par eux : métaphoriquement dit, l'organisation moderne relève d'un groupement créateur de ses membres, non de la sélection d'individualités préexistantes pour former un collectif (une « équipe » !).
4) Pour la mathématique moderne [Cauchy-Hamilton…], il convient de penser une situation *du point de ses possibilités et de ses potentialités*, et pas seulement (position classique) de ses effectivités (de ses « faits »).
5) L'action moderne [Cauchy…] se concentre sur sa *dimension régionale ou restreinte* (conçue comme médiation dialectique entre le local et le global).
6) Plus globalement, la modernité mathématique privilégie *la pensée en intériorité* sur la pensée en surplomb, l'immanence des causes internes sur la transcendance de causes externes.

Prolongement…

In fine, nous esquisserons une prolongation de ces leçons centrée désormais sur la géométrie différentielle et pas seulement sur la géométrie algébrique.

Introduction

« *Dans les travaux de cette nature, la difficulté réside plutôt dans la conception que dans la construction*. » Riemann (1854)

« *La notion générale de variété est assez difficile à définir avec précision*. » Élie Cartan (1946)

Généalogie par extension

Les variétés sont une extension des courbes, des surfaces et des hypersurfaces, extension précédée par l'abolition de tout espace ambiant (et donc de toute immersion ou plongement) en sorte d'immanentiser, d'intérioriser, ou de rendre intrinsèques les propriétés caractéristiques (topologiques bien sûr mais aussi différentielles et géométriques) qui constituent les variétés.

Abandon-déplacement permettant que les variétés saisissent leur espace en immanence selon leur « inspect » et leur « instress » (Hopkins) !

Intrication donc d'une révolution par adjonction-extension et d'une révolution par abandon-déplacement !

Cette extension est le terme d'un triple « agrandissement » par rapport à la géométrie classique :
1. Radicalisation du geste de Gauss en substituant intégralement une formalisation *paramétrique* (intrinsèque) à l'ancienne formalisation *fonctionnelle* (extrinsèque) des surfaces.
2. Généralisation des surfaces à deux dimensions aux hypersurfaces à n dimensions par augmentation du nombre de dimensions.
3. Extension des (hyper)surfaces aux variétés par adjonction d'atlas intrinsèques.

Trois types de variétés

Distinguons, selon l'exposé de John Lee, les variétés topologiques, lisses et riemanniennes.

Synthétiquement, une variété sera une (hyper)surface topologique lisse et métrique dotée d'un atlas.

Variétés topologiques [VT]

Ce sont des espaces topologiques discrets (ou de Hausdorff), à base dénombrable et localement euclidiens (c'est-à-dire équivalents – homéomorphes - *localement* à un espace euclidien, exemplairement à $\mathbb{R}^n$).

Avec cela, on dispose des notions d'homéomorphisme, de compacité et de connexité, d'homologie et d'homotopie, mais on n'a pas encore de calcul différentiel et intégral (une différentielle n'est pas invariante par homéomorphisme).

Variétés lisses [VL] (ou infiniment différentiables)

Une variété lisse est une VT à laquelle on ajoute une deuxième structure : un atlas, fait de cartes qui sont l'équivalent intrinsèque des vecteurs-plans-hyperplans (⟹ fibrés tangent) extrinsèques.

Avec cela, on dispose des notions de différentielle et de difféomorphisme, d'immersion et de plongement, d'orientabilité et de parallélisabilité, etc. mais on n'a pas encore de *courbure* (la différentielle ne présuppose pas de *métrique*).

Variétés métriques [VM] (ou riemanniennes)

Une variété riemannienne est une VL à laquelle on ajoute une métrique (via un produit scalaire).
Seulement avec cela, on dispose de la notion de courbure intrinsèque…

Deux parcours d'exposition possibles

1. John Lee

Exposé systématique assez constructiviste :

I. Définition formelle : espace topologique (séparable et à base dénombrable) [a : variété topologique] qui est lisse [b : variété lisse] et métrique [c : variété de Riemann].
II. Propriétés qui nous intéressent plus spécifiquement :
   a) équivalences entre variétés topologiques ⟹ homo/logie-topie ;
   b) orientabilité et parallélisabilité des variétés lisses ;
   c) courbure intrinsèque des variétés de Riemann.

2. François Rouvière

Introduction plus intuitivement généalogique.

Je colorie **en rouge** ce qui correspond aux variétés topologiques (Lee.I), **en bleu** aux variétés lisses (Lee.II) et **en vert** aux variétés de Riemann (Lee.III).

Comment caractériser une hypersurface de manière intrinsèque ?

1) **La doter de cartes compatibles ⟹ un atlas ⟹ il faut pour cela des difféomorphismes C^{∞} ⟹ une variété différentielle lisse**.
2) **Donation d'une métrique (par un produit scalaire).**

D'où trois types de propriétés :

a) **transport parallèle via la connexion des espaces tangents** ;
b) **les géodésiques et les distances** ;
c) **les courbures**.

Parcours général

I. Variété topologique : voir Lee.I
II. Différentiabilité intrinsèque ⟹ variétés lisses : voir Rouvière (équivalent de Lee.II)
III. Métrique ⟹ variétés riemaniennes : voir Rouvière (équivalent de Lee.III)

En pratique, on s'étendra aujourd'hui sur I (appropriation de la topologie) et on se contentera d'esquisser II et III (le prochain cycle de leçons, annoncé in fine, devant repartir des variétés riemanniennes et donc de II et III) en détaillant malgré tout la notion d'atlas (II) et celle de produit scalaire (III).

En un certain sens, cette dernière leçon se présentera donc essentiellement comme une leçon sur la topologie plutôt que sur les variétés de Riemann.

Interprétation

Exceptionnellement, nous ne renverrons pas à la fin l'interprétation intellectuelle de la théorie mathématique mais nous la dispenserons au fur et à mesure de l'apparition des nouvelles notions.
En effet, la multiplication des notions topologiques, différentielles et métriques impose de les saisir une par une sans les laisser trop longtemps s'accumuler de manière purement formelle.
De plus, comme notre trop vaste parcours devra aujourd'hui rester incomplet, il est plus prudent d'introduire nos interprétations intellectuelles au fur et à mesure du développement et non pas de les réserver à la fin trop lointaine d'un trop vaste parcours.

Qu'est-ce qu'une variété ?

Définition formelle

Une V est un espace <u>topologique</u> séparé à base dénombrable qui est localement euclidien (I-VT), qui de plus est <u>lisse</u> (infiniment différentiable) (II-VL) - et ainsi dotable d'un atlas - et <u>métrique</u> (III-VM : localement euclidien) – soit trois volets (cf. les trois volumes de Lee) : un espace topologique lisse et métrique.
À chaque volet (VT-L-M), un enjeu plus spécifique pour nous :

I. VT : que veut dire que deux VT sont équivalentes : par homologie (V. homologues) ou par homotopie

(V. homotopes) ?

II. VL : que veut dire qu'une VL soit orientable et parallélisable ?

III. VM : que veut dire qu'une VM soit courbée : intrinsèquement et extrinsèquement ? Cf. généralisation de la courbure de Gauss

« Variété »

Une variété est un espace de type particulier.

Ici, le mot français « variété » n'est pas très parlant. Le mot anglais « a manifold » comme le mot allemand originaire « *eine Mannigfaltigkeit* » l'est plus : il évoque une pluralité de feuillets (carnet à plusieurs feuilles), mieux : une diversité.

Une variété est un espace divers ou pluriel (« varié » donc), composé de différents feuillets assemblés ou collés entre eux : par exemple, non pas une seule page mais plusieurs pages reliées ou repliées entre elles.

Exemple

Prendre une feuille, placée dans l'espace 3D ordinaire ⟹ z=ax+by+c

La froisser ⟹ z=f(x, y)

La courber en deux (sans la plier : le pli formerait une singularité non lisse), puis en quatre, puis froisser le tout : une variété !

L'espace propre d'une variété est toujours susceptible d'être plongé dans un espace de dimension supérieure (par exemple notre feuille de papier – qui n'est pas forcément tout à fait plane – comme notre carnet à différents feuillets existent dans l'espace euclidien à trois dimensions).

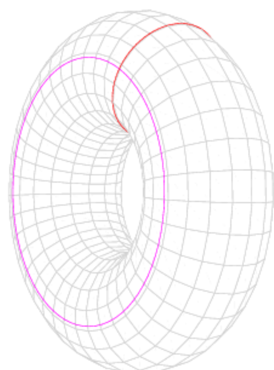
L'espace propre d'une variété va être caractérisé par le nombre de ses dimensions (c'est-à-dire le nombre de paramètres intrinsèques nécessaires pour le parcourir et le décrire) :

– une courbe sera de dimension 1 :

Nœud de trèfle (dimension 1) plongé dans un espace de dimension 3

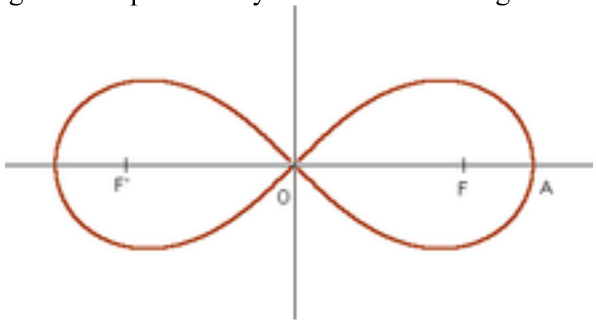
– une feuille ou un carnet seront de dimension 2, et on les présente ordinairement plongés dans un espace de dimension 3 :

Bande de Möbius (dimension 2)



Tore (dimension 2)

L'espace pluriel d'une variété a ceci de particulier qu'au voisinage de tout point, il semble plat. C'est le cas pour les sphères, les tores, les bouteilles de Klein, les rubans de Möbius, les nœuds de trèfle.
Mais, a contrario, l'espace figuré ci-dessous de la lemniscate de Bernoulli ne sera pas une variété car il ressemble à une croix à l'origine et ne peut donc y ressembler à une ligne droite :



Lemniscate de Bernoulli (dimension 1)

Nous allons maintenant formaliser tout cela de manière mathématiquement rigoureuse.

I – Variété topologique

Une VT est un espace topologique séparé à base dénombrable.

Topologie

La topologie va constituer le langage moderne de l'analyse.
On se donne un ensemble E={e} dont on interprète les éléments comme étant les points d'un lieu.
On dote alors ce lieu d'une « structure » (un réseau de parties) en sorte de le constituer en *espace* $\mathscr{E}$ aux points p, q, r. On pose ce faisant qu'un espace est un lieu structuré.
La structure en question est ici une *topologie* c'est-à-dire une famille organisée de parties particulières qui, tel un filet, vont recouvrir tout l'espace.
L'espace $\mathscr{E}$ ainsi topologiquement structuré sera appelé un *espace topologique* :
Un espace topologique est un ensemble topologiquement structuré.

Interprétation intellectuelle

Notons qu'une telle intrication d'un lieu et d'une structure produisant un espace (*espace=lieu⊗structure*) peut s'interpréter comme l'intrication d'un lieu d'être et d'une structure mentale produisant un espace de pensée où, conformément au principe de Parménide, *être et penser* sont étroitement intriqués :
espace de pensée = lieu d'être ⊗ structure mentale

Quatre manières

« Une structure topologique sur un espace donné y exprime une notion de proximité. »
René Lavendhomme [1]

Il y a quatre manières équivalentes de définir une famille topologique de parties selon que les parties retenues sont des ouverts, des fermés, des adhérences ou des voisinages.
La manière la plus courante (car formellement la plus économe) procède par les ouverts mais elle n'est pas la plus intuitive.

Je vais ici privilégier celle par les voisinages, pour trois raisons imbriquées :
- cette manière est plus intuitive ;
- elle caractérise le local en le corrélant à un point « central » ;
- elle s'accorde mieux à nos raisonances et interprétations intellectuelles où la figure du point subjectif, décidé et fidèlement tenu, sera centrale.

Voyons donc comment définir une famille topologique $\mathcal{V}$ de voisinages V avant de montrer comment on peut alors en déduire une famille topologique $\mathcal{O}$ d'ouverts O.

[1] *Lieux du sujet. Psychanalyse et mathématique* (Seuil, 2001 ; p. 23)

Voisinages

« *Ce qui est le plus fondamental dans l'idée de topologie, c'est sans doute la notion de voisinage d'un point x.* […] *C'est la notion de voisinage qui est la plus intuitive.* »

René Lavendhomme [2]

Un voisinage…

Intuitivement, un voisinage V d'un point donné p sera une partie qui l'entoure d'aussi près qu'on veut. [3]

Il faut donc intuitionner un voisinage du point p comme une partie dotée de deux propriétés :

1) elle l'entoure
2) et ce faisant l'approche d'aussi près qu'on veut de tous les côtés à la fois.

Ceci impose que le point ne soit pas « au bord » de la partie V (il ne serait plus approchable « de tous côtés ») mais bien « à l'intérieur » d'elle.

Ainsi, au principe de la notion de voisinage, il y a la notion d'*entour* plutôt que celle de *proximité* (on va d'ailleurs voir que l'espace total $\mathscr{E}$ est lui-même un voisinage de chacun de ses points, non pas parce qu'il serait proche de chacun d'eux mais parce qu'il entoure bien chacun d'eux).

À ce titre, le nom de *voisinage* (*Neighborhood* en anglais) n'est pas bien approprié : il faudrait plutôt parler d'*entourage*.

Formalisons ces propriétés des parties-voisinages.

Pour cela, caractérisons la famille $\mathcal{V}(p)$ des voisinages V_p d'un point p donné appartenant à l'espace $\mathscr{E}$ par quatre propriétés.

0) Propriété liminaire, tout à fait « naturelle » : un voisinage V_p du point p contient le point p !

Formalisons que p appartient à V_p :

$$\forall p\in\mathscr{E} \text{ et } \forall V_p\in\mathcal{V}(p), \text{ on a : } p\in V_p$$

1) Propriété intuitive : puisqu'un voisinage du point p est une partie qui l'entoure, si nous étendons un tel voisinage, nous obtenons une nouvelle partie qui l'entoure toujours et qui constitue donc un nouveau voisinage de p.

Formalisons qu'une partie W de $\mathscr{E}$ qui contient un voisinage V_p de p est elle-même un voisinage de p :

$$\forall p\in\mathscr{E} \text{ et } \forall V_p\in\mathcal{V}(p) : \forall W\subset\mathscr{E} \text{ telle que } V_p\subset W, \text{ alors } W\in\mathcal{V}(p).$$

Conséquence immédiate : l'espace $\mathscr{E}$ tout entier est voisinage de chacun de ses points p :

$$\forall p\in\mathscr{E},\ \mathscr{E}=V_p \text{ et donc } \mathscr{E}\in\mathcal{V}(p)$$

Ainsi, les voisinages d'un point s'étendent vers le haut jusqu'à couvrir tout l'espace considéré.

Il y a donc un voisinage maximum, qui est le même pour tous les points de l'espace considéré et qui est l'espace global $\mathscr{E}$.

Voyons maintenant ce qu'il en est d'un voisinage quand on le restreint, quand on opère donc vers le bas.

2) La propriété suivante est assez naturelle : l'intersection de deux voisinages du même point p est également un voisinage de ce point.

Intuitivement, la chose se comprend ainsi : l'intersection de deux entours d'un même point reste un entour de ce point.

Formalisons cela.

$$\forall p\in\mathscr{E},\ \forall V_p\in\mathcal{V}(p) \text{ et } \forall W_p\in\mathcal{V}(p), \text{ on a } V_p\cap W_p\in\mathcal{V}(p)$$

3) Reste une propriété importante pour assurer que p, qui appartient à V_p, est bien *entouré* par V_p.

Les propriétés précédentes sont des conditions nécessaires mais pas suffisantes pour que V_p entoure bien p.

Il faut pour cela s'assurer en plus que p ne se situe pas sur *un bord* de V_p.

On peut aussi (cf. Lavendhomme) le voir ainsi : il faut que V_p soit également voisinage des points voisins de p.

Pour caractériser cette propriété, l'idée intuitive va être la suivante : si l'on retire tous les bords de V_p (c'est-à-dire si l'on retire de V_p tous les points dont il n'est pas le voisinage), alors p doit toujours appartenir à la partie (sans bords) ainsi obtenue.

---

[2] *Lieux du sujet. Psychanalyse et mathématique* (Seuil, 2001 ; p. 78)

[3] « Un voisinage de x est une partie de X qui "entoure bien" le point x. » R. Lavendhomme

Intuitivement, il faut par exemple ôter à une surface sa frontière (les terrains de rugby, à l'opposé des terrains de tennis, sont de telles surfaces puisqu'y marcher sur une des lignes qui délimitent en blanc le terrain, c'est être sorti du terrain).

Pour mettre en forme cette idée, on va poser qu'un voisinage sans bords est voisinage de tous ses points !

Un tel type de partie, voisinage de tous ses points, s'appellera un *ouvert*.

On va donc poser la propriété suivante : si V_p est voisinage de p, c'est que V_p sans ses bords est toujours voisinage de p. Or V_p sans ses bords peut être caractérisé comme l'ensemble des points de V_p dont V_p est également voisinage. Donc, si V_p est voisinage de p, c'est que p appartient également à un sous-voisinage qui est lui-même voisinage de tous ses points.

Formalisons rigoureusement cette idée :

$$\forall p\in\mathscr{E} \text{ et } \forall V_p\in\mathcal{V}(p) : \{q\in V_p \text{ tels que } V_p\in\mathcal{V}(q)\}\in\mathcal{V}(p)$$

L'ensemble des points q de V_p tels que V_p en est également le voisinage forment un voisinage de p (auquel p appartient donc).

Autrement dit, si on restreint V_p en n'en gardant que les points « intérieurs » (c'est-à-dire qui ne sont pas sur un bord), on obtient toujours un voisinage de p et on assure ainsi que V_p entoure bien p « de tous côtés ».

Interprétation

Intuitivement, le voisinage d'un point dans un espace donné est donc constitué par une partie de cet espace entourant le point en question d'aussi près qu'on veut.

Bien sûr, toute l'interprétation va reposer sur le sens concret qu'on va donner à la notion métaphorique d'entourer.

Par exemple, dans une société donnée, les voisinages d'une personne pourront être constitués des autres humains qui l'entourent (par exemple « le cercle de ses amis » ou « ses voisins d'habitation »). Dans ce cas, le voisinage ne désignera pas un environnement naturel.

Plus généralement, dans un espace de pensée, le voisinage d'une notion ou d'une idée pourra être l'ensemble des notions ou idées apparentées qui l'encerclent et délimitent ses raisonances.

Encore une fois, l'important dans la notion topologique de voisinage est de l'accorder à l'idée d'entour, de « tous côtés », librement contractable autour du point en question (plutôt qu'à celle de proximité).

Ouverts

Appelons « ouvert » une partie qui est voisinage de chacun de ses points.

On peut alors reformuler ainsi notre dernière propriété caractérisant les voisinages : tout voisinage V_p contient un ouvert contenant p.

Formalisons cela :

$$\exists O\subseteq V_p \text{ [avec O tel que } \forall q\in O, O\in\mathcal{V}(q)] \text{ tel que } p\in O \text{ et donc que } O\in\mathcal{V}(p).$$

Il existe une partie O de V_p (caractérisée par le fait qu'elle est voisinage de chacun de ses points) qui est telle que p lui appartient et qui s'avère donc être également un voisinage de p.

Remarquons qu'un ouvert n'est plus, comme le voisinage, caractérisé par un point p donné mais par une propriété intrinsèque générale (il est voisinage de tous ses points).

C'est ce qui va en faire la notion la plus commode pour définir ces familles de parties qu'on va appeler une topologie.

Dans ce cas, on définira à l'inverse le voisinage à partir de l'ouvert de la manière suivante : un voisinage de p est une partie contenant un ouvert contenant p !

Propriétés

La famille $\mathcal{O}$ des ouverts O de $\mathscr{E}$ va avoir les quatre propriétés suivantes :

1) $\mathscr{E}\in\mathcal{O}$
2) $\emptyset\in\mathcal{O}$
3) $O_1\cup O_2\in\mathcal{O}$ et plus généralement une réunion *infinie* d'ouverts est un ouvert : $\bigcup O_i\in\mathcal{O}$
4) $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$ mais ici seule une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert.

On peut à partir de cette définition d'une partie ouverte (elle est voisinage de chacun de ses points) définir d'autres types de parties.

Un ouvert pointé est un voisinage

On appelle *ensemble pointé* (*pointed set*) un ensemble X avec un élément distingué x appelé *point de base* : $\{X, x_0\}$.

En théorie des catégories, les ensembles pointés forme une catégorie spécifique…
Un ouvert O (voisinage de tous ses points) pointé selon le point de base x {O, x} constitue donc un voisinage de x : $\{O, x\}=V_x$.
L'inverse n'est pas vrai car un voisinage n'est pas forcément un ouvert (ni non plus un fermé).

Fermés

Appelons « fermé » la partie complémentaire d'un ouvert dans $\mathscr{E}$.
La famille $\mathscr{F}$ des fermés F aura les propriétés suivantes :

1) $\mathscr{E}\in\mathscr{F}$
2) $\varnothing\in\mathscr{F}$
3) $F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$ mais ici seule une <u>réunion *finie*</u> de fermés est un fermé.
4) $F_1\cap F_2\in\mathscr{F}$ et plus généralement une <u>intersection *infinie*</u> de fermés est un fermé : $\cap F_i\in\mathscr{F}$

Logique intuitionniste de subcontraires

On remarque tout de suite que *ouvert* et *fermé* ne sont pas des notions contradictoires : une même partie peut être à la fois ouverte ou fermée (telles Ø et $\mathscr{E}$).
Logiquement, ce sont donc des notions *subcontraires* : différentes mais non entièrement incompatibles. Ainsi *non-ouvert* ne veut pas systématiquement dire *fermé* et *non-fermé* ne veut pas systématiquement dire *ouvert*.
On pressent ici que la structure topologique, qui se base sur la distinction ouvert-fermé, ne sera pas régie par la logique *classique* mais par d'autres logiques qu'on dira *intuitionniste* et *paracohérente*.
On va ainsi avoir trois cas :

1) le <u>contradictoire</u> d'une partie est son complémentaire ensembliste ;
2) le <u>contraire</u> d'une partie est le plus grand ouvert disjoint ;
3) le <u>subcontraire</u> d'une partie est le plus petit fermé complémentaire.

Mais nous allons revenir dans un instant sur cette portée logique de la topologie.

Remarquons que mathématiquement, nous circulons bien des mathématiques vers la logique (quelle logique est compatible avec la structure mathématique considérée ?) et non pas de la logique aux mathématiques comme si la première était le fondement des secondes : c'est la mathématique qui est constituante de la logique et non pas, comme le prétend la philosophie analytique, l'inverse.

Intérieur

L'intérieur $\dot{P}$ d'une partie quelconque P sera le plus grand ouvert contenu dans cette partie.
C'est l'ensemble des points qui ne sont pas sur un bord…
Un point p sera dit *intérieur* à P si P est un voisinage de p. Bien sûr, un point intérieur à P lui appartient.

Extérieur

L'extérieur d'une partie P sera le plus grand ouvert disjoint.

Adhérence

L'adhérence $\overline{P}$ d'une partie quelconque P sera le plus petit fermé contenant cette partie.
C'est la partie complétée par ses bords.
Un point p sera dit *adhérent* à P si tout voisinage de p rencontre P - attention : un point adhérent n'appartient pas nécessairement à P !

Frontière

La frontière d'une partie quelconque P sera l'intersection de son adhérence et de son intérieur : $\overline{P}\cap\dot{P}$
C'est l'ensemble des points sur les bords.
Un point p sera dit *frontière* de P si tout voisinage de p rencontre P et son complémentaire - à nouveau, un point frontière n'appartient pas forcément à P.

Partie dense

Une partie A de $\mathscr{E}$ est dense dans la partie B de $\mathscr{E}$ si tout ouvert contenant un point de B rencontre A.

Intuitivement : tout point de B peut être approché d'aussi près qu'on veut dans A.
Par exemple, $\mathbb{Q}$ est dense sur $\mathbb{R}$ pour la topologie de l'ordre : tout réel peut être approché d'aussi près qu'on veut par un rationnel (c'est ce que l'on fait quand on pratique le développement décimal d'un réel, tel π=3,14…)

Cette notion de partie dense a pour intérêt topologie spécial que deux applications continues sur un espace séparé seront égales si elles le sont sur une partie dense.

Portée logique

Pour plus de détail, voir mon récent article :

Algébrisation moderne de trois négations logiques : quelles ressources émancipatrices pour un travail contemporain du négatif ? Colloque *L'ampleur dans le discours* (31 avril 2022, Kairouan ; Tunisie)

Trois logiques

La logique *classique* (se soumettant au principe de non-contradiction et au principe du tiers exclus) se voit, dans l'ère moderne, complétée par la logique *intuitionniste* (qui se soumet toujours au principe de non-contradiction mais n'adopte plus le principe du tiers exclus) et par la logique *paracohérente* [4] (qui ne se soumet plus au principe de non-contradiction mais continue d'admettre le principe du tiers exclus).

Et donc trois négations

Chacune de ces trois logiques met en œuvre une négation différente qu'on pourra *mesurer* aux effets propres de sa double négation :

- la négation *classique* (qu'on notera ***non***) est une alternative destructrice qui se mesure au point où non.nonX *s'identifie* à X : ***non.non*X = X** (en quelque sorte *non-nonX* mesure le *tout ou rien* dont X est le nom propre) ; [5]
- la négation *intuitionniste* (qu'on notera ¬) est un remplacement non exclusif qui se mesure au point où ¬.¬X *resserre* X : **¬.¬X ≤ X** (en quelque sorte *¬.¬X* mesure son noyau intérieur *irremplaçable*, soit ce que les géomètres modernes appellent son *invariant* propre et les topologues son *intérieur*) ;
- la négation *paracohérente* (qu'on notera **~**) est une altération qui se mesure au point où ~.~X *élargit* X : **~.~X ≥ X** (en quelque sorte *~.~X* mesure la *clôture* potentielle de X, soit ce que les topologues appellent son *adhérence*).

Trois algèbres

En cet endroit, l'algébrisation moderne de la logique (engagée par Boole en 1854 puis élargie par Heyting en 1930) va prendre trois formes :

- L'algèbre de *Boole* formalise la logique *classique* comme algèbre des *parties* d'un ensemble - la négation classique de la partie P d'un ensemble E est sa partie complémentaire dans E :

  $$\text{nonP} = \complement_P$$

  On a :

  $$P \cup \text{nonP} = E \text{ (principe du tiers exclus)}$$
  $$P \cap \text{nonP} = \emptyset \text{ (principe de non-contradiction)}$$

- L'algèbre de *Heyting* formalise la logique *intuitionniste* selon l'algèbre des *ouverts* d'une topologie - la négation intuitionniste de P est le plus grand *ouvert* disjoint, c'est-à-dire l'intérieur de son complémentaire ensembliste :

  $$\neg P = \dot{\complement}_P \text{ [6]}$$

  On a :

  $$P \cup \neg P = \{E - \partial P \text{ [7]}\} \neq E \text{ (en général, on n'a plus le principe du tiers exclus)}$$
  $$P \cap \neg P = \emptyset \text{ (principe de non-contradiction)}$$

- L'algèbre de *co-Heyting* formalise la logique *paracohérente* [8] selon l'algèbre des *fermés* d'une topologie - la négation paracohérente de P est le plus petit *fermé* complémentant, c'est-à-dire l'adhérence de son complémentaire ensembliste :

  $$\sim P = \overline{\complement_P} \text{ [9]}$$

  On a :

---

[4] pour éviter l'anglicisme « paraconsistant »

[5] Comme le changement arithmétique de signe ± ou la symétrie géométrie du plan, la négation logique classique est ainsi dite *involutive*.

[6] $\dot{P}$ est l'intérieur d'une partie P c'est-à-dire le plus grand ouvert contenu dans P.

[7] ∂P est la frontière de P c'est-à-dire l'intersection de sa fermeture $\overline{P}$ et de son intérieur $\dot{P}$.

[8] ou *paraconsistante*

[9] $\overline{P}$ est l'adhérence d'une partie P c'est-à-dire le plus petit fermé contenant P.

$P \cup \sim P = E$ (principe du tiers exclus)

$P \cap \sim P = \partial P \neq \emptyset$ (en général, on n'a plus le principe de non-contradiction)

Trois opposés

1. L'opposé classique de la partie P (nonP) est un ensemble composé « en vrac » de tout ce qui n'est pas P.
2. L'opposé intuitionniste de la même partie P ($\neg$P) est un ensemble topologiquement structuré en ouvert (c'est-à-dire en voisinage de chacun de ses éléments et donc sans éléments frontières) : le plus grand ouvert disjoint, vu comme le plus grand « camp solidaire » n'ayant pas d'élément commun avec P.
3. L'opposé paracohérent de la même partie ($\sim$P) est un ensemble topologiquement structuré en fermé (c'est-à-dire doté de ses propres frontières) : le plus petit « camp » fermé complémentant, vue comme le plus petit « camp retranché » qui incorpore tous les éléments qui ne sont pas dans P.

Trois doubles négations

1. La double négation classique est une involution qui ramène au point de départ : non.non(P)=P. Elle n'inscrit aucun travail particulier du négatif.
2. La double négation intuitionniste dégage le plus grand ouvert contenu dans P : $\neg.\neg(P)=\dot{P}$. Ici le travail du négatif ôte à P ses points-frontière et le réduit à son intérieur constituant.
3. La double négation paracohérente produit le plus petit fermé contenant P : $\sim.\sim(P)=\overline{P}$. Ici le travail du négatif complète P en lui incorporant les points qui y adhérent, en le fermant selon ses frontières.

Et six négations doublées…

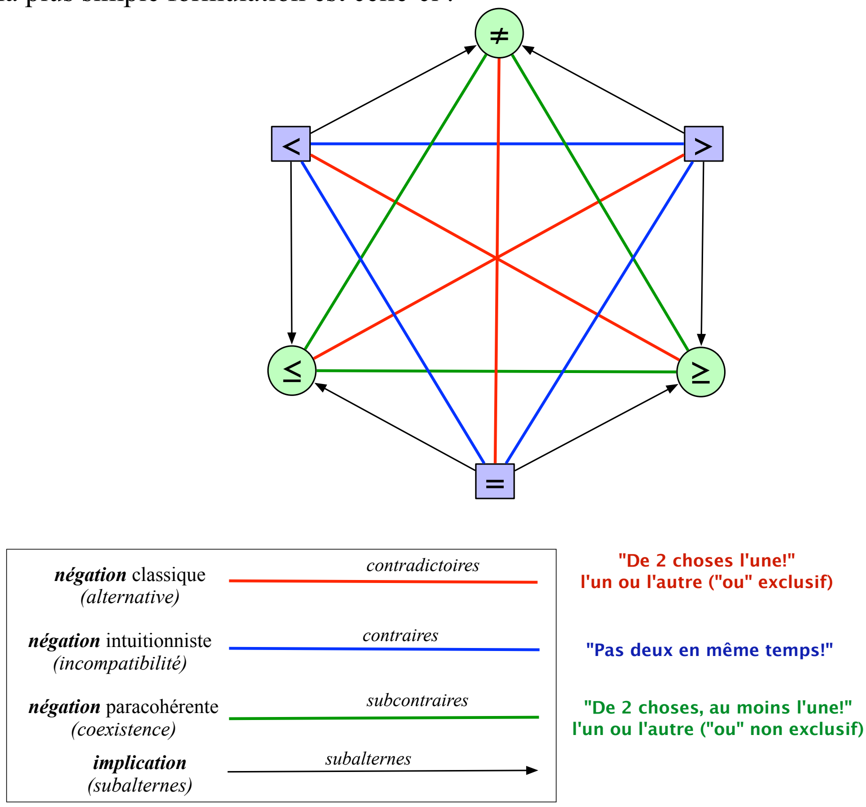
	non	$\neg$	$\sim$
non	non.non(P) = **P**	non.$\neg$(P) = $\overline{\mathbf{P}}$	non.$\sim$(P) = $\dot{\mathbf{P}}$
$\neg$	$\neg$.non(P) = $\dot{\mathbf{P}}$	$\neg.\neg$(P) = $\dot{\mathbf{P}}$	$\neg.\sim$(P) = $\dot{\mathbf{P}}$
$\sim$	$\sim$.non(P) = $\overline{\mathbf{P}}$	$\sim.\neg$(P) = $\overline{\mathbf{P}}$	$\sim.\sim$(P) = $\overline{\mathbf{P}}$

$\dot{P}$ = intérieur de P

$\overline{P}$ = adhérence de P

Un hexagone logique

On peut schématiser l'intrication (borroméenne [10]) de ces trois logiques selon la figure d'un hexagone dit *logique* [11] dont la plus simple formulation est celle-ci :



« < » et « ≥ » sont des ***contradictoires***
« < », « > » et « = » sont des ***contraires***
« ≤ », « ≥ » et « ≠ » sont des ***subcontraires***.
« ≤ » est **subalterne** de « < » car « $< \Longrightarrow \leq$ »

I.a - Espace topologique

Après cette exploration de la zoologie des parties et des points, revenons à notre structure dite topologique. L'espace $\mathscr{E}$ sera dit topologique si on définit, dans l'ensemble de ses parties, une famille d'ouverts dotée des propriétés distinctives précédemment relevées (l'ensemble vide et l'ensemble tout entier sont des ouverts, la réunion quelconque et l'intersection *finie* d'ouverts sont des ouverts).

> Attention : pour un ensemble $\mathscr{E}$ donné, il peut y avoir des topologies différentes car on peut spécifier de manières différentes ce qu'est un ouvert.
>
> Structurer topologiquement $\mathscr{E}$ implique donc de spécifier une topologie c'est-à-dire un type d'ouvert (vérifiant bien sûr les propriétés topologiques de leur famille).
>
> > Par exemple, sur l'espace géométrique du plan $\mathbb{R}^2$, on pourra retenir pour type d'ouvert au choix un disque (sans son cercle-frontière) ou l'intérieur d'un carré (sans sa frontière) ou d'un hexagone…

Interprétation

Un espace topologique sera donc pour nous un lieu ensembliste structuré par une famille cohérente de parties dont le paradigme est celui de voisinage d'un point donné ou celui d'ouvert.

On y sait ce qui entoure ou n'entoure pas chaque point. On sait donc ce que <u>faire le tour d'un point</u> veut dire.

> Cf. importance dans l'expérience concrète du fait de faire le tour d'un point, c'est-à-dire de le voir de toutes les manières possibles, de ne pas le voir unilatéralement ou d'un seul côté.
>
> Avec un espace topologique, cette opération est spatialement codifiée.

---

[10] Voir la démonstration de ce point par René Guitart…

[11] Voir Robert Blanché : *Structures intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts* (1966) et les travaux ultérieurs de Jean-Yves Beziau.

Base

Une base d'une topologie est un sous-ensemble $\mathscr{B}$ d'ouverts (ou de voisinages) tel que tout ouvert (ou tout voisinage) contient un ouvert (ou un voisinage) de cette base :

avec les ouverts, $\forall O \in \mathcal{O}$, $\exists B \in \mathscr{B}$ tel que $O \subset B$

avec les voisinages, $\forall V_p \in \mathcal{V}(p)$, $\exists B_p \in \mathscr{B}(p)$ tel que $B_p \subset V_p$

Interprétation

Doter notre espace d'une telle base, c'est donc disposer d'un réservoir réduit de parties (ouverts ou voisinages) qui fixe une méthode canonique pour faire le tour d'un point et permet donc d'y mesurer toute enquête concrète plus hasardeuse, plus chahutée.

I.b - Espace séparé (ou de Hausdorff)

Deux points distincts y sont séparables par deux voisinages disjoints.
On peut voir cette propriété comme une sorte de 6° propriété ajoutée à nos voisinages :

si $a \neq b$, $\exists \mathcal{V}(a)$ et $\mathcal{V}(b)$ avec $\mathcal{V}(a) \cap \mathcal{V}(b) = \emptyset$

On peut séparer deux points par deux voisinages ou ouverts distincts.

Cette propriété est importante car l'enjeu de notre structure topologique est aussi de pouvoir discerner les points (c'est-à-dire les éléments de notre ensemble de départ) : si deux points différents restent topologiquement indiscernables, notre structure ne va pas saisir finement notre ensemble-lieu. Il nous faut donc nous assurer que notre structure topologique est suffisamment fine pour distinguer deux points infiniment proches. La propriété de Hausdorff assure l'existence d'une telle fine dialectique entre parties et voisinages-ouverts.

Exemple

$\mathbb{R}$ et plus généralement tout espace métrique est séparé.

Contrexemple

Tout ensemble infini muni de la topologie cofinie (les ouverts sont les complémentaires de parties finies) est non-séparé.

Démonstration.

On ne peut avoir $a \neq b \Rightarrow \mathcal{O}(a) \cap \mathcal{O}(b) = \emptyset$ car cela voudrait alors dire que $\mathcal{O}(b) \subseteq \mathcal{C}[\mathcal{O}(a)]$ lequel complémentaire est fini, ce qui entrainerait que $\mathcal{O}(b)$ serait aussi fini ; or tout ouvert, étant complémentaire d'une partie finie, est nécessairement infini !

Interprétation intellectuelle

Il s'agit d'interpréter cela dans des espaces de pensée aussi variés que ceux en jeu :
- dans les œuvres artistiques (un morceau de musique, un poème ou un roman, un film, une peinture, une architecture…),
- dans les entreprises politiques (marxisme…, Commune de Paris…)
- ou dans les sommes intellectuelles (théologiques, philosophiques, musiciennes…).

L'importance est manifeste pour nous : on peut séparer deux points différents par deux localisations distinctes.
Soit : si l'on travaille deux points différents, on veut pouvoir séparer leur localisation pour clairement les distinguer et clairement différencier deux types d'actions locales.
Notons qu'on n'a pas ici nécessairement besoin d'une métrique mesurant quantitativement la distance.

Par exemple si dans le travail musical, le point harmonique n'est pas le même que le point rythmique ou que le point mélodique ou que le point instrumental, on doit pouvoir localement travailler l'un sans s'occuper de l'autre.

De la même manière, si dans le travail politique, l'enjeu organisationnel n'est pas le même que l'enjeu internationaliste (même s'ils sont reliés l'un à l'autre par leur appartenance à un même espace politique de pensée), alors on doit pouvoir agir localement sur les modalités organisationnelles sans être pour autant immédiatement obligé d'agir également localement sur l'internationalisme politique en jeu en toute cette affaire).

Régional

Cette séparation des points va être pour nous décisive car elle va nous permettre de distinguer le régional du local comme du global : si l'on appelle *global* l'ensemble $\mathscr{E}$ et *local* le voisinage d'un point, alors le *régional* sera une sorte de *covoisinage* de deux points distincts.

Formalisons $R_{a,b}\in\mathscr{R}(a,b)$ comme on l'a fait pour les voisinages.

$R_{a,b}\subset\mathscr{E}$ a quatre propriétés :

1) $a\neq b \Longrightarrow \exists V_a$ et $\exists V_b$ avec $V_a\subset R_{a,b}$ et $V_b\subset R_{a,b}$ et $V_a\cap V_b=\emptyset$

   Une région de deux points séparés contient un voisinage de chacun de ses deux points.

2) Si $R_{a,b}\subset\wp\subset\mathscr{E}$, alors $\wp\in\mathscr{R}(a,b)$ soit $\wp=R'_{a,b} \Longrightarrow \mathscr{E}\in\mathscr{R}(a,b)$

   Une partie contenant une région est elle-même une région.

   L'espace est <u>la région maximale</u>.

3) $R_{a,b}\cap R'_{a,b}=R''_{a,b}$

   L'intersection de deux régions des deux mêmes points est toujours une région de ces deux points.

4) Comme pour les voisinages, il faut enfin s'assurer que a et b ne sont pas sur les bords de R :

   $$\forall R_{a,b}\ \exists R'_{a,b} \text{ tel que } \forall a' \text{ et } b'\in R'_{a,b}, \text{ alors } R_{a,b}\in\mathscr{R}(a',b')$$

   Il existe une sous-région telle que pour tout couple de ses points, la région de départ en est également région.

   Conséquence : <u>il n'y a pas de région minimale</u>.

<u>Interprétation</u>

Il n'y a donc pas de région canonique (la situation globale, région maximale, ne saurait en tenir lieu). Tracer ou construire une région implique toujours s'assumer l'arbitraire d'une dimension de cette région qu'on pourrait toujours resserrer, qu'on pourrait toujours minimiser. Mais ne pouvant la minimiser maximalement (si je puis dire !), il faut assumer l'aléa donné à sa surface.

I.c - Espace à base dénombrable [EBD]

Sa topologie admet une base dénombrable.

Notion introduite en 1914 par Félix Hausdorff.

<u>Intérêt</u>

On maîtrise l'espace topologique en maîtrisant sa base comme on le fait pour un espace vectoriel.
Et comme cette base est dénombrable (numérotable par les nombres entiers c'est-à-dire indexable sur $\mathbb{N}$), il suffit de connaître les effets d'une opération topologique sur cette base pour en connaître les effets sur l'espace topologique tout entier (dont la puissance est celle du continu : $\wp(\mathbb{N})=2^{\aleph_0}$).
On a donc une <u>maîtrise discrète du continu</u> !

<u>Base dénombrable [BD]</u>

C'est une notion **globale** !

Une BD est un ensemble d'ouverts tel que tout ouvert de la topologie est la réunion d'éléments de cet ensemble.
Une telle base est alors un recouvrement de l'espace.
Si l'espace est à BD, il est séparable (mais l'inverse n'est pas vrai).
Tout espace métrique compact est à BD.

<u>Base dénombrable de voisinages [BDV]</u>

C'est une notion locale généralisée plutôt que globale (chaque voisinage a sa BDV) !

Un espace topologique est à BDV si <u>en tout point x, il existe une BDV</u> telle que tout voisinage de x contient un voisinage de la BDV en question :

$$\forall x,\ \exists\{V_i(x)\} \text{ tel que } \forall V_a(x),\ \exists V_p(x)\in\{V_i(x)\} \text{ avec } V_p(x)\subset V_a(x)$$

Exemple de BDV : dans un espace métrique, les boules ouvertes de centre rationnel et de rayon rationnel (ou 2^{-n}).

Tout espace métrique, comme tout espace discret, est à BDV.
Tout EBD est EBDV mais pas l'inverse : la notion globale est plus forte que la notion locale.

<u>Interprétation</u>

On va pouvoir explorer les rapports entre les entours des points de la situation avec une famille dénombrable d'entours canoniques. L'exploration étant dénombrable devient discrète et donc ordonnable pas par pas : chaque pas pourra avoir un et un seul successeur.
L'exploration pourra se faire par étapes canoniques !

I.d – Espace « localement euclidien »

Un espace topologique M^n est localement euclidien si tout point y a un voisinage homéomorphe à un ouvert (boule) de $\mathbb{R}^n$.

Cette propriété va servir de base pour l'édification suivante (voir les VL) de cartes et d'un atlas complet. Elle prépare donc la possibilité que la variété soit C^{∞}-différentiable c'est-à-dire lisse.

Interprétation

Être euclidien veut dire être linéarisable (l'espace euclidien a une courbure nulle).
Ceci a pour immense avantage que les effets y restent toujours proportionnels aux causes !
Être localement euclidien veut donc dire que localement les actions sont linéarisables – approximables linéairement. L'action locale est ainsi linéairement cadrable : doubler les effectifs, c'est doubler les résultats.
« Agir localement » reste ainsi éminemment contrôlable.
La difficulté va surgir dès son passage à l'action régionale !

Notions de limite et de continuité

La topologie est le cadre adéquat à l'analyse moderne et donc à ses notions constituantes de *limite* et de *continuité*.

Rappel : l'analyse moderne ne se construit plus sur une problématique (peu assurée car mal fondée) des infinitésimaux mais sur la notion de limite, introduite par Cauchy et formalisée par Weierstrass.

Limite en un point

Soit la fonction $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

$$\ell \text{ sera limite de } f \text{ en a si } \forall W(\ell) \subset \mathcal{F}, \exists V(a) \subset \mathcal{E} \text{ tel que } \forall x \in V(a), f(x) \in W(\ell)$$

Pour tout voisinage de ℓ il existe un voisinage de a tel que si x lui appartient, alors f(x) appartient au voisinage en question de ℓ.

C'est l'équivalent topologique de la définition par Weierstrass où l'on s'assure d'une proximité arbitraire ε des résultats par un intervalle δ sur la source :

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta \text{ tel que } |x-a|<\delta \Rightarrow |\ell - f(a)|<\varepsilon$$

Unicité de la limite ?

La limite sera unique si l'espace est séparé.

Avantage évident !

Contrexemple

La topologie triviale $\mathcal{O}=\{\varnothing,\mathcal{E}\}$ n'est pas séparée.

Conséquence : avec cette topologie, toute séquence dans $\mathcal{E}$ converge en tout point de $\mathcal{E}$!

Démonstration.

$\forall x$, $\mathcal{O}[f(x)]=\mathcal{E}$ tout comme donc $\mathcal{O}[f(x_0)]$.

Donc on approche toujours $f(x_0)$ d'aussi près qu'on veut par tout x !

Interprétation

En quoi la notion de limite nous intéresse-t-elle ?
Elle vise à garantir que l'enquête sur un point se resserre bien au fur et à mesure de l'approche : c'est le sens de la dialectique weierstrasienne du ∀ε ∃δ.
La continuité va ensuite garantir que l'enquête converge bien vers la valeur au point considéré.

Continuité en un point

f sera continue en a si f(a) est limite de f en a c'est-à-dire si $\ell=f(a)$
Ceci revient alors à écrire formellement :

$$f^{-1}\{W[f(a)]\}=V(a)$$

Cf. règle ε-δ de Weierstrass pour les fonctions continues :

$$f \text{ sera continue en a } [f(x)\to f(a) \text{ quand } x\to a] \text{ ssi}$$
$$\forall \varepsilon\ \exists \delta \text{ tel que } |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

De même ici :

$f(x)\to f(x_0)$ quand $x\to x_0$ ssi

$$\forall O[f(x_0)]\ \exists O'[x] \text{ tel que } f(O'[x]) \subset O[f(x)] \text{ c'est-à-dire } f^{-1}\{O[f(x)]\}=O'(x)$$

La continuité est ici une propriété locale (en un point, ici x_0)

Paradoxe

Il faut prendre ici mesure d'un paradoxe implicitement à l'œuvre : la continuité présuppose une infinité dont on contrôle depuis Weierstrass les effets (« continus ») par une méthode finitiste : ε et δ sont des quantités finies aussi petites qu'on veut et nullement des infinitésimaux.

Ainsi l'analyse moderne abandonne-t-elle ici la problématique classique prémoderne des infinitésimaux (Newton-Leibniz).

Continuité globale (au sens de « partout »)

L'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

$f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est continue si $\forall O \subseteq \mathscr{F}$, $f^{-1}(O)=O' \subset \mathscr{E}$

[l'ouvert O' de l'espace de départ garantit que ses résultats composent l'ouvert O sur l'espace d'arrivée.]

Interprétation

La continuité garantit donc que l'enquête sur un point converge à la valeur précise du point, que le point n'est pas une tête d'épingle en exception du resserrement de ses voisinages, de ses entours.
La continuité est locale car elle s'attache aux voisinages d'un point.

« Global » ?

Ici une propriété locale (en un point) est dite « globale » si elle est valable en tout point de l'espace considéré c'est-à-dire partout.
Mais il faudrait plutôt dire qu'il s'agit d'une propriété locale généralisée.

On distinguerait ce faisant le *total* (« tous les points d'un espace ou tous les éléments d'un ensemble »), le *général* (« en tout point de l'espace ou pour tout élément de l'ensemble » comme on peut dire que tout ordinal a un successeur même si les ordinaux ne forment pas un ensemble et que l'on ne peut donc parler rigoureusement de « tous les ordinaux » : on a ici la généralisaiton d'une propriété locale et non pas une propriété globale proprement dite) et le *global* proprement dit.

On va voir en effet qu'une autre notion de global va intervenir en matière de variétés qui ne désignera plus une propriété locale générale – valable en tout point – mais bien une propriété de l'espace globalement considéré.

Retenons donc l'idée de distinguer total, général et global (voir la leçon intellectuelle n°8 de la leçon sur Gauss)

Interprétation

Le qualificatif de « global » est donc mathématiquement équivoque.
Dans le langage commun, il l'est plus encore :

- Que veut dire « la globalisation » capitaliste ? Que le capitalisme est présent et actif en tout point du globe : « global » vient ici du « globe terrestre » (comme la « mondialisation » vient d'un « monde » qui n'est plus partagé en trois : capitaliste, socialiste et tiers-monde). Est-ce que ceci veut dire que la domination capitaliste en tout point est pour autant totale ? Non, bien sûr.
- Que veut dire « penser global » ? Ce n'est pas clair… Cf. le caractère passe-partout du mot d'ordre « penser global, agir local ! » qui incline cependant « global » vers « globe terrestre » !

Homéomorphismes

[*Je passe ici rapidement sur ces notions, pourtant essentielles, pour avoir le temps ensuite d'introduire aux deux notions décisives d'atlas [VL] et de produit scalaire [VR].*]

Bijections bicontinues ⟹ isomorphie entre espaces.
C'est la notion la plus fondamentale en topologie : les propriétés topologiques sont les propriétés invariantes par homéomorphismes (qui sont préservées par homéomorphismes) – c'est le cas pour les ouverts, fermés, voisinages, intérieurs, frontières et pour les notions de séparation, de compacité, de connexité, etc.

[Homotopies/Homologies]

Relations d'équivalence sur des applications continues (homotopie) ou, plus restrictivement, linéaires (homologie).
D'où des groupes-quotients…
Homotopie ⟹

- théorème de d'Alembert-Gauss
- point fixe de Brouwer
- espace contractile

Homologie ⟹

- simplexe et homologie simpliciale
- polyèdre d'Euler

- trous

II – Variété lisse

Le qualificatif de lisse *va s'attacher au fait qu'il n'y a alors pas d'aspérités sur l'hypersurface en question.*

Faute de temps, je ne fais plus qu'énumérer les nouvelles propriétés nécessaires pour passer des variétés topologiques aux variétés géométriques en passant par les variétés lisses.

Avec les notions d'homéomorphisme, de compacité et de connexité, d'homologie et d'homotopie, on n'a pas encore de calcul différentiel et intégral (une différentielle n'est pas invariante par homéomorphisme). On va passer aux variétés lisses (ou infiniment différentiables) en ajoutant une deuxième structure : un atlas, fait de cartes qui vont être l'équivalent intrinsèque de vecteurs-plans-hyperplans (⟹ fibrés tangent) extrinsèques.

Difféomorphisme

Homéomorphisme infiniment différentiable C^∞ : bijection bicontinue et infiniment différentiable entre deux espaces de même dimension (n).

Cartes

La notion intrinsèque de carte remplace la notion extrinsèque (liée à un espace ambiant) de (hyper)plan tangent : pour une hyper-surface S^n, son hyper-plan tangent existe dans R^{n+1} quand la carte C^n ne présuppose nul espace ambiant.

Une carte (de dimension n) de l'espace topologique M (de dimension n) est la donnée d'un couple (D, φ) où D est un ouvert de M (appelé *domaine* de la carte) et φ un homéomorphisme de D sur un ouvert C de $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi : D \to C$$

La carte représente ou formalise le domaine D dans $\mathbb{R}^n$ en le mettant à plat.

Cf. on ne passe pas ici, comme pour l'hyper-plan tangent par R^{n+1}.

On pourrait travailler ici avec des voisinages plutôt qu'avec des ouverts mais un voisinage présupposant la détermination d'un point central de la carte, il est plus simple de s'en tenir aux ouverts.

Compatibilité

La notion de compatibilité entre deux cartes est essentielle pour transformer une liasse de cartes en un atlas consistant.

Deux cartes seront compatibles si l'intersection des deux domaines est cartographiée de manière équivalente (à un difféomorphisme près) par les deux cartes.

Formalisons.

Deux cartes (D_1, φ_1) et (D_2, φ_2) seront compatibles si l'application « changement de carte » $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$: $\varphi_1(D_1 \cap D_2) \to \varphi_2(D_1 \cap D_2)$ est un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.

L'application $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ est bien un changement de carte car elle passe de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^n$ via M :

$$\varphi_1 : D \to C_1 \text{ et } \varphi_2 : D \to C_2$$
$$\Rightarrow \varphi_1^{-1} : C_1 \to D$$
$$\Rightarrow \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : C_1 \subset \mathbb{R}^n \to D \subset M \to C_2 \subset \mathbb{R}^n$$

Attention : cette compatibilité entre cartes est axiomatiquement posée pour les variétés. Son existence pourrait certes être démontrée mais alors de manière extrinsèque : cette fois en plongeant M^n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ donc avec $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Ainsi Rouvière (p. 13-14) va définir un voisinage dans M comme intersection d'un voisinage dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et de M :

$$V_M(x) = V_{\mathbb{R}^{n+1}}(x) \cap M$$

De même, l'application φ va être établie de part en part dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\varphi^{-1}(C) = V_{\mathbb{R}^{n+1}}(x) \cap M$$

C'est alors *dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ que le difféomorphisme $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ est démontré (et non *pas dans* $\mathbb{R}^n$).

Atlas

C'est une famille de cartes compatibles dont les domaines recouvrent l'espace M.
Une variété différentielle est alors une variété topologique dotée d'un tel atlas.
On passe de l'une à l'autre une fois de plus par adjonction-extension : adjonction de cartes en tout ouvert de la variété l'étendant, par reliage consistant des cartes en un atlas, en variété désormais dotée d'un atlas intrinsèque.

Avec les notions de différentielle et de difféomorphisme, on dispose désormais des notions d'immersion et de plongement, d'orientabilité et de parallélisabilité, etc.
Je ne les détaille pas malgré leur grande importance.

Cependant, on n'a pas encore avec tout cela de notion de *courbure* (la différentielle ne présuppose pas de *métrique*).
Pour passer de la courbure des surfaces selon Gauss à la courbure de variétés selon Riemann, il nous faut donc faire encore un pas de plus.

III – Variété géométrique (c'est-à-dire *riemannienne*)

Il nous faut maintenant adjoindre une métrique pour étendre nos variétés lisses en variétés (géo)métriques c'est-à-dire en variétés de Riemann proprement dite.

« Géo-métriser » ?

Géo-métriser un espace, c'est le doter de distances et d'angles.
C'est ensuite le centrer en une origine.
Cela s'opère par une règle, un compas et une origine.

(distances⊗angles)⊕centre

(règle⊗compas)⊕origine

Le produit scalaire

Le produit scalaire va formaliser le produit distances⊗angles qui se projette en distances (normes) et angles.

Formellement introduit, le produit scalaire est une forme bilinéaire qui, à deux vecteurs d'un même espace vectoriel sur le corps K, associe un scalaire de K : $f(u,v)=u.v \in K$.
Ainsi l'opération *produit scalaire* associe à toute paire de vecteurs un scalaire c'est-à-dire ici un nombre (en général pour nous, un nombre réel).

Cette opération est régie par un ensemble de règles qui la caractérisent :

1) $u.v \in K$
2) $u.u \geq 0$
3) $u.u=0 \Leftrightarrow u=0$
4) associativité : $u.(\lambda v)=\lambda(u.v)$
5) commutativité : $u.v=v.u$
6) distributivité : $u.(v+w)=u.v+u.w$

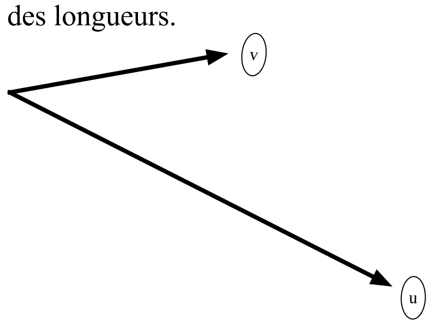
> Rappel : un corps de scalaires est doté des quatre opérations arithmétiques ordinaires (addition-soustraction, multiplication-division avec les éléments neutres 0 et 1) mais il n'est pas nécessairement totalement ordonnable ($\mathbb{R}$ l'est mais pas $\mathbb{C}$).
> En général – et on se tiendra ici à ce cas limitatif – on pose $K=\mathbb{R}$.

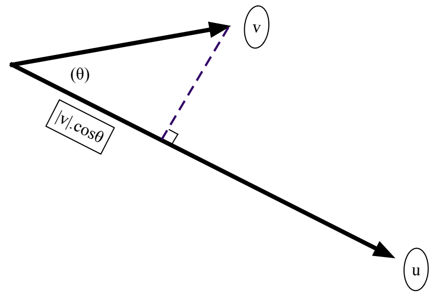
Formalisation algébrique et interprétation géométrique

En général, on présente algébriquement l'opération *produit scalaire* en adoptant une présentation algébrique de deux vecteurs dans un même repère orthonormé : $u=\{u_i\}$ et $v=\{v_i\}$ et en écrivant $u.v=\sum u_i.v_i$ (ou simplement $u_i.v_i$ avec les conventions d'Einstein sur les indices muets).

Demandons-nous : que formalise cette opération produit scalaire ?
On dira : le produit scalaire mesure un rapport de non-orthogonalité entre deux vecteurs en tenant compte

du rapport des longueurs.





Ceci se lit dans la formulation géométrique du produit scalaire qui exhausse l'angle θ des deux vecteurs :

$$u.v=||u||.||v||.\cos\theta$$

Remarquons la dualité algébrico-géométrique des formulations :

$$u.v=\sum u_i.v_i$$
$$u.v=||u||.||v||.\cos\theta$$

La formulation algébrique est tournée vers une puissance de *calcul à la lettre*, la formulation géométrique vers une puissance d'*intuition à la figure*.

Sautons à la conclusion du parcours : une variété topologique lisse ainsi géométrisée est notre variété de Riemann !

Il faudrait bien sûr à partir de là déployer la richesse de cette notion.
Tout ceci ne peut être que renvoyé à une seconde année qui commencera par une reprise synthétique de l'enchaînement Gauss-Riemann (je conseille pour cela le livre de François Rouvière).

Interprétation intellectuelle

Liste de neuf points

Listons les interprétations introduites au fil de l'exposé.

Lieu et espace de pensée

Un espace de pensée est un lieu topologiquement structuré : un espace de pensée intrique la matérialité d'un lieu et la construction relative d'une structuration.

Topologie des points

Un espace de pensée peut être subjectivé autour de points spécifiques.

Attention : en théorie, ces points ne sont pas « en tout point » de l'espace ; ce sont des points qui correspondent aux pôles de multiplicité où les fonctions complexes deviennent méromorphes.
Ces points spécifiques sont le propre des variétés : ils tiennent au lieu d'intersection entre différents feuillets.
Songeons aux « moment-faveur » en musique…

Un point se caractérise par la possibilité d'en faire le tour.

Base canonique

L'existence d'une base canonique assure une méthode canonique pour enquêter sur un point : par exemple en faisant le tour de ses différentes « composante ».

Topologie séparatrice

On doit pouvoir distinguer deux points par deux localisations différentes (sans nécessairement disposer pour cela d'une métrique, c'est-à-dire d'une distance précise entre ces deux points).

Région

La constitution d'une région contient toujours une part d'arbitraire quant à sa taille car il n'existe pas de région minimale.

Action locale

Sur un espace structuré en variété topologique lisse, l'action locale est linéarisable : les effets y restent plus

essentiellement proportionnels aux causes.
D'où les avantages mais aussi les limites des actions locales.
D'où le pas essentiel de l'action régionale, c'est-à-dire restreinte, qui, elle, n'est plus linéarisable, ne serait-ce que parce qu'elle incorpore une intrication minimale de deux points !

Limite

La limite garantit que l'enquête sur un point, qui en fait le tour de manière de plus en plus resserrée, converge et ne diverge pas ou ne cesse pas d'osciller sinusoïdalement.

Continuité

La continuité garantit que le point de convergence d'une enquête sur un point donné est bien la « valeur » même du point ; autrement dit, l'enquête **vers** un point converge bien **sur** ce point.

Global-total-général

Ne pas confondre ces trois notions, en particulier dans les recours fumeux à la notion de globalisation capitaliste.
C'est une chose que le capitalisme agisse désormais en tout point du globe (généralisation du capitalisme), c'en est une autre qu'il ait une maitrise globale du monde (il n'y a pas de méta-État et les forums mondiaux du capitalisme du type Davos n'ont aucunement les moyens de constituer un capitalisme global) et la domination du capitalisme en tout point du globe n'en fait aucunement une domination totale, heureusement !

Deux commentaires supplémentaires

Ajoutons à cette liste deux commentaires plus généraux, liés à la différentialisation des espaces-variétés.

Pour la théorie des points

Tenir un point, c'est le tenir dynamiquement, pas statiquement (ce n'est pas tenir un siège mais faire travailler le point dans la situation).
Tenir dynamiquement un point, c'est d'abord le tenir différentiellement, c'est-à-dire poser un Δx puis l'annuler (double négation : cf. l'intuition de Marx dans ses MMM). Ce Δx engendre alors un Δy. Annuler Δx annule Δy mais laisse une trace si le point est différentiable (c'est-à-dire si $\Delta x/\Delta y$ a une limite) : la dérivée ou tangente, c'est-à-dire une direction. Ce travail de double négation inscrit donc une direction en un point. Il indique donc, dans la situation, une direction de parcours pour le travail du point en question : le tenir, c'est le faire travailler la situation dans ce sens.
Il faut donc voir un point comme constituant un point d'enquête sur la situation : un point peut travailler une situation ; il devient opérateur d'enquête sur cette situation.
Cela ouvre spontanément à deux dynamisations possibles (et d'ailleurs compatibles) de la situation :

a) par tracé d'un parcours à travers la situation : il s'agit ici de savoir ce que tenir le point dans la situation veut dire ;
b) par aimantation de toute la situation : il s'agit ici de savoir ce que faire proliférer ce point dans la situation veut dire.

Pour l'aimantation ou vectorisation d'une situation

Ceci transforme la situation en la vectorisant
Ce n'est pas à proprement parler une transformation effective de la situation (comme celle que peut réaliser $\Delta x \rightarrow \Delta y$) mais c'est l'ajout d'une direction en un point (cela devient une adjonction si cet ajout est généralisé, est effectué en tout point ; et cette adjonction étend alors l'espace de départ en champ vectoriel : l'opération de différentialisation étend l'espace en le vectorisant !).

> Cf. les actions qu'on dira pré-politiques : elles ne sont pas politiques car elles ne révolutionnent pas la situation mais elles sont prépolitiques car elles dégagent la possibilité d'une action politique en l'appuyant sur une potentialité, ponctuellement démontrée : la tangente en un point dégage une potentialité (celle de vectoriser la situation) et une situation vectorisée est une situation où, les possibilités étant inscrites, l'effectuation politique devient à l'ordre du jour.

Donc le point ouvre une direction possible de travail.

Traits distinctifs de la première modernité

Caractérisons la modernité mathématique pré-cantorienne par six traits distinctifs (au regard des mathématiques classiques qui les ont précédées).

1) La modernité mathématique [Gauss-Riemann…] découpe des *situations* (totalisations partielles intrinsèquement autonomes) comme lieux de travail pour la pensée mathématique sans passer par l'hypothèse classique d'un grand Tout préalable.
2) La modernité mathématique [Dedekind…] invente *une nouvelle manière de révolutionner* une situation donnée, non plus simplement par abandon-déplacement ou destruction-reconstruction mais surtout *par adjonction-extension* endogène.
3) Pour l'algèbre moderne [Galois…], *les groupes sont constituants* de leurs éléments et non plus (comme dans l'algèbre classique jusqu'à Lagrange) constitués par eux : métaphoriquement dit, l'organisation moderne relève d'un groupement créateur, non de la sélection d'une équipe.
4) Pour la mathématique moderne [Cauchy-Hamilton…], il convient de penser une situation *du point de ses possibilités et de ses potentialités*, et pas seulement (position classique) de ses effectivités.
5) L'action moderne [Cauchy…] se concentre sur sa *dimension régionale ou restreinte* (conçue comme médiation dialectique entre le local et le global).
6) Plus globalement, la modernité mathématique privilégie *la pensée en intériorité* sur la pensée en surplomb, l'immanence des causes internes sur la transcendance de causes externes.

Prolongement…

Prolongement envisagé de ces leçons, centré sur la modernité mathématique *différentialisante* (et non plus uniquement *algébrisante*), ce qui permettra de, relancer, cette fois dans la modernité mathématique, l'intuition de Marx (*Manuscrits mathématiques*) exhaussant la dialectique au principe du calcul différentiel *classique*.

Documentation

Bernhard Riemann (1826-1866) : *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*. Mémoire d'habilitation [12] présenté le 10 juin 1854 à Göttingen.

Daniel Leborgne : *Calcul différentiel et géométrie* (Puf, 1982)
François Rouvière : *Initiation à la géométrie de Riemann* (Calvage & Mounet ; 2016)
Vincent Guedj : *Introduction à la géométrie différentielle* (Dunod, 2022)

John M. Lee :

- *Introduction to Topological Manifolds* (Springer, 2011)
- *Introduction to Smooth Manifolds* (Springer, 2013)
- *Introduction to Riemannian Manifolds* (Springer, 2018)

Rossana Tazzioli : *Riemann* (Belin – Pour la science ; 2010)
Gustavo Ernesto Pineiro : *Riemann* (coll. Génies des mathématiques ; RBA ; 2018)

*****

[12] Thèse de doctorat : 1851. Thèse d'habilitation : 1854