Septième leçon de maths modernes

Géométrie intrinsèque des surfaces : la courbure de Gauss (1827)

(3 avril 2022)

« *Au milieu du chemin de notre vie,*
je me trouvai par une forêt obscure
car la voie droite avait été gauchie. »
Dante

« *Dieu écrit droit avec des lignes courbes*. »
Proverbe portugais

ARGUMENTAIRE

La théorie, par Gauss, de la courbure d'une surface (géométrie différentielle *moderne* [1]) nous permet d'approfondir notre compréhension générale des questions d'orientation. Elle dégage en effet les conditions de possibilité pour que *se diriger dans un espace orienté* puisse se pratiquer de l'intérieur même des situations concernées et en immanence aux parcours mis en œuvre, non plus, comme dans la géométrie différentielle *classique*, en surplomb extériorisant : il s'avère ainsi possible de « compter sur ses propres forces » pour s'orienter et se diriger sur une surface qui intrique au moins deux dimensions indépendantes (ce qui par contre s'avère impossible pour de simples lignes courbes).
On tiendra que cette « immanentisation » de la courbure par Gauss déclare, en 1827, la modernité mathématique sous le signe de la géométrie, cette même modernité que Galois, trois ans plus tard (1831), déclarera sous le signe de l'algèbre. Dans ces deux cas, la modernité mathématique s'avance selon le principe des constitutions intrinsèques, des autonomies émancipatrices et d'une primauté des causes internes, à rebours d'un classicisme privilégiant extériorités hiérarchisantes, savoirs surplombants et points de vue de Sirius.

Théorie mathématique

Comprendre cette théorie gaussienne de la courbure des surfaces va culminer dans la compréhension de son « théorème remarquable » (*Theorema egregium*) qui établit que la courbure (extrinsèque) d'une surface peut être entièrement déterminée par des distances endogènes (une métrique locale intrinsèque), sans recours au plongement de cette surface dans l'espace tridimensionnel euclidien.
Pour arriver à nous approprier ce point décisif, nous avancerons selon cinq étapes.

1. Courbure extrinsèque des lignes

Nous examinerons d'abord la courbure des lignes (à une seule dimension donc) et verrons pourquoi il ne peut y en avoir qu'une approche extrinsèque (un « habitant » d'une telle ligne – une fourmi sur une tige - ne pourrait par lui-même savoir s'il marche droit ou courbe).

2. Courbure de Gauss pour les surfaces

Nous traiterons ensuite de la courbure des surfaces (à deux dimensions internes) plongées dans l'espace 3D ordinaire en examinant sa nouvelle caractérisation par Gauss : non plus selon la courbure « moyenne » avancée par Sophie Germain (comme *somme* des deux courbures principales extrinsèques : $K_{moyenne} = \frac{k_{max}+k_{min}}{2}$) mais selon la courbure « de Gauss » (comme *multiplication* de ces deux mêmes courbures principales : $K_{Gauss}=k_{max}.k_{min}$).
À ce stade, la courbure de Gauss reste définie extrinsèquement (puisque les deux courbures principales qui l'engendrent par multiplication sont extrinsèques). Mais la simple mutation d'opération arithmétique, formalisant le passage d'un <u>accolement</u> (par *somme*) des deux dimensions de la surface à leur <u>intrication</u> (par *produit*) [2], va préparer le passage de l'extrinsèque à l'intrinsèque selon ce qu'on pourrait appeler, à la suite d'Yves André, un « philosophème » particulier, celui que la mathématique moderne, en particulier l'algèbre tensorielle, va abonder :

$$invariance \equiv covariance \otimes contravariance$$

3. « Théorème remarquable » (*theorema egregium*)

Nous aboutirons alors au « théorème remarquable » de Gauss qui établit *algébriquement* l'équivalence entre la courbure (extrinsèque) de Gauss et une distance (intrinsèque) – ou métrique locale [3] – sur cette surface : techniquement dit, la courbure de Gauss va s'avérer invariante par isométrie locale. Ceci veut dire que cette courbure, ne dépendant pas de la manière dont la surface en question est plongée dans un espace de dimensions supérieures, est bien une caractéristique intrinsèquement appréhendable de cette surface.

---

[1] En général, on tient que <u>Riemann</u> *inaugure* la géométrie différentielle moderne en radicalisant les nouvelles idées de <u>Gauss</u> (caractère intrinsèque des cartes locales) : il généralise les dimensions des surfaces et surtout il ne présuppose plus l'existence d'espaces extérieurs aux surfaces considérées. Mettant ceci en œuvre pour les fonctions complexes, il va passer des surfaces aux *variétés*.
Pour ma part, je préfère inscrire la coupure classique/moderne entre Euler et Gauss pour mieux rehausser ce que Gauss *engage* de la modernité géométrique.
[2] ce qui, corrélativement, attache la courbure d'une surface à l'inverse d'une aire et non plus, comme pour les courbes, d'une longueur
[3] basée sur deux coordonnées curvilignes intrinsèques et non plus sur trois coordonnées cartésiennes extrinsèques : la mutation essentielle s'engage en ce point.

Ne nous cachons pas la difficulté : la démonstration de ce théorème s'opère *algébriquement* (par équivalence de deux formes quadratiques : l'une pour la métrique intrinsèque, l'autre pour la courbure extrinsèque), ce qui ne facilite guère sa compréhension *géométrique*.
On s'appropriera intuitivement ce résultat en posant que la courbure (extrinsèque) étant une déformation de la métrique (intrinsèque), à l'inverse la mesure (intrinsèque) d'une déformation de cette métrique peut mesurer la courbure (extrinsèque), ce qui s'éclaire si l'on considère qu'une géométrie (et donc une métrique) intrique la règle et le compas, c'est-à-dire des distances et des angles.

4. Transport parallèle

Nous relierons ensuite cette problématique de la courbure à celle dite du « transport parallèle » pour conduire à la formule et au théorème de Gauss-Bonnet.

Formule de Gauss-Bonnet

La formule établit une correspondance entre la courbure « totale » d'une surface (délimitée par un triangle *géodésique* inscrit sur cette surface) et la déformation de ce triangle (sur une surface courbe, la somme des angles d'un triangle ne vaut plus π) :

$$\iint_S K\, dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Théorème de Gauss-Bonnet

Le théorème relie cette même courbure *totale* à la caractéristique χ d'Euler-Poincaré de la surface en question, invariant topologique qui en établit une propriété *globale* :

$$\iint_S K\, dA = 2\pi\chi$$

Ainsi, l'immanentisation de la courbure autorise le transit endogène d'une approche *totale* à des approches *régionale* (triangles) et *globale* (χ) de la même surface.

5. Surfaces orientables et parallélisables

Nous achèverons en examinant les rapports entre deux propriétés *globales* des surfaces : être *orientables* et *parallélisables*. On verra que, pour qu'une surface soit parallélisable, il faut qu'elle soit orientable quand l'inverse n'est pas vrai.
Si le fait pour une surface d'être parallélisable s'interprète comme capacité de s'y diriger selon une ferme direction préalablement décidée, on éclairera ce faisant la manière dont la pensée peut coordonner le fait de s'orienter et celui de se diriger en situation. Ce qui débouchera sur notre dernière partie.

Interprétation intellectuelle

Conformément à notre problématique de mathématiciens aux pieds nus interprétant intellectuellement les trésors de pensée que les maths modernes fournissent gratuitement (ici pas de droits d'auteur autres que symboliques !) à l'humanité, nous interprèterons cette théorie de Gauss de la manière suivante.

- Les espaces modernes de pensée (espaces militants, amoureux, musicaux et bien sûr mathématiques) sont systématiquement *courbes* là où les espaces classiques étaient tenus pour *plats*.
- Leur courbure est *intrinsèque*. Pas besoin donc de sujet supposé savoir en extériorité surplombante pour les connaître : les modernités mettent l'immanence et les causes internes au poste de commandement de leurs pensées. Elles privilégient *l'intrinsèque* des choses à la manière dont le poète Gerard Manley Hopkins privilégiera, dans la seconde partie du XIX° siècle, l'*intension* (l'*instress*) à l'extension et l'*inspect* à l'aspect.
- Le caractère intrinsèque de cette courbure tient à une *intrication* de différentes dimensions indépendantes. Inversement, la platitude tient à leur non-intrication. Courber, c'est intriquer, selon les circonstances rencontrées, une indépendance formelle ; à rebours, la platitude s'accorde au dogmatisme.
- S'orienter est une chose, se diriger une autre. On peut ainsi garder son cap et *marcher droit* dans un espace courbe : autrement dit, dans un espace courbe, toute déviation n'est pas une déviance et peut être une fidélité. La pensée moderne conçoit ainsi une droiture de type nouveau, telle celle d'une vie droite intriquée à une vie en vérités.
- La pensée moderne de la *forme* ne la conçoit plus comme un contenant susceptible de contenir différents contenus. La forme est une structure qui ossature et fournit un squelette qui peut s'avérer partageable par différents domaines.
- Dans cette théorie, "*global*" s'emploie en trois sens différents : pour nommer
  - une propriété *locale* partout valide (par exemple une courbure localement définie, ou l'existence en tout point d'un plan tangent : ainsi un espace non-euclidien sera un espace à courbure locale

constante) ;

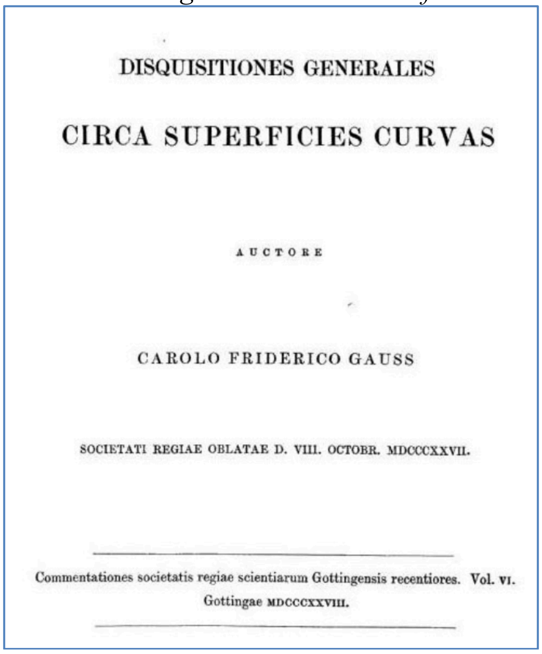
- une propriété *régionale* qui, devenant valide d'un bout à l'autre, appréhende globalement la chose (par exemple l'existence sur une sphère de cercles-méridiens de circonférence maximale) :
- une propriété *directe du global* comme bloc en un seul tenant, propriété sans équivalent local ou régional (par exemple la caractéristique d'Euler-Poincaré).

Il importe de dialectiser cette équivocité si l'on veut émanciper la pensée actuelle d'une supposée « *globalisation* » capitaliste du monde contemporain.

***

Carl Friedrich GAUSS

1777-1855
(Göttingen : 1795-1855
1827 : *Recherches générales sur les surfaces courbes*


DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. VIII. OCTOBR. MDCCCXXVII.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VI.
Gottingae MDCCCXXVIII.

« Le prince des mathématiciens ».
Devise : *« Pauca sed matura »* : *Peu mais mûr.*
« *Ce n'est pas la connaissance mais l'apprentissage, pas la possession mais ce qui y mène, qui donne le plus grand plaisir.* »

Géométrie différentielle

On entre ici dans la géométrie différentielle [GD] **moderne** qui se distingue de la GD **classique** 1) par l'accès au caractère intrinsèque des surfaces, 2) par la primauté ensuite donnée par Riemann à cette approche immanente des surfaces pour les généraliser en variétés.

Courbes et surfaces lisses

On va systématiquement travailler ici sur des courbes et surfaces lisses c'est-à-dire indéfiniment différentiables [4] : intuitivement, sur de telles courbes et surfaces, il n'y a pas de singularités qui accrocheraient une main les caressant.
Nous examinerons cette propriété plus en détail quand nous examinerons les variétés de Riemann (qui généralisent ces courbes et surfaces lisses).

Enjeux

« *Je me trouvai dans une forêt obscure*
car la voie droite avait été gauchie. »
Dante

Ou d'une désorientation obscure par courbure d'une route qu'on imaginait droite…

Géométrisation et courbure d'un espace

Courbure ? $\Longrightarrow$ la géométrisation d'un espace = sa courbure par intrication de la règle (longueurs) et du compas (angles) : géométrie=règle$\otimes$compas=distances$\otimes$angles (où le compas courbe la règle).
Ceci sera algébriquement formalisé par le produit scalaire (XS) (très explicitement par sa forme $\|u\|.\|v\|.\cos\theta$, plus implicitement par sa forme $\sum u_i.v_i$)
Bien sûr, les deux formes équivalent :

[4] courbes dites C^∞

par exemple $si\ \vec{u} = x\vec{\imath}\ et\ \vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath},\ alors\ \vec{u}.\vec{v} = x.\sqrt{x'^2 + y'^2}.\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = x.x' + 0.y'$

Attention : à proprement parler, le XS ne définit pas la métrique géométrique ; il la *formalise* algébriquement et il *s'interprète* géométriquement comme métrique.

Géométriser un espace, c'est le doter d'une <u>règle</u> (de distances), d'un <u>compas</u> (d'angles) et éventuellement d'un <u>centre</u> (d'une référence centrale).

Cinq étapes

Comme indiqué dans l'argumentaire, je vais procéder en cinq étapes :

1) Courbure extrinsèque des lignes
2) Courbure de Gauss pour les surfaces
3) « Théorème remarquable »
4) Transport parallèle. Formule et théorème de Gauss-Bonnet
5) Surfaces orientables et parallélisables

Interprétation intellectuelle

On examinera la capacité des surfaces puis des variétés de formaliser mathématiquement des espaces de pensée : essentiellement de pensée politique ou artistique.

> Un modèle hétérodoxe de cette théorie pourrait-il être un espace politique ou artistique de pensée ?
>
> Bien sûr, on sait d'avance que non : rigoureusement, il est impossible qu'un tel espace ontique corresponde, point par point, à l'espace ontologique engagé dans cette théorie.
>
> Mais l'hypothèse de travail est que mener cette investigation aussi loin et aussi rigoureusement que possible peut mener à mieux comprendre non seulement la mathématique concernée mais ce qui se joue dans ces espaces non mathématiques de pensée.
>
> Autrement dit, on jugera de cette orientation de travail à ses fruits intellectuels.

Par exemple ces premières questions : que voudrait dire que géométriser un espace politique de pensée ou un espace musical de pensée, que voudrait dire qu'un espace politique ou musical de pensée soit courbé, gauchi comme la voie droite de Dante ?

***

I. Courbes

Pour les courbes, toute approche de leur courbure ne peut être qu'extrinsèque.
Pas moyen donc pour l'habitant d'une courbe de savoir si elle est droite ou courbe.
La constitution d'une approche intrinsèque de la courbure ne commencera donc qu'avec les surfaces. c'est-à-dire avec l'intrication de deux dimensions internes.
Mais voyons d'abord avec elles ce que *courbure* veut mathématiquement dire.

Courbes planes

Soit une courbe C dans le plan $\mathbb{R}^2$.

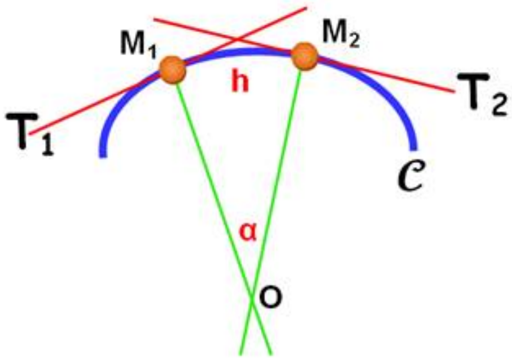
Intuitivement…

On dira que C est courbe entre les points A et B (approche *régionale* donc) si sa longueur sur la courbe est plus grande que celle du segment de droite joignant A et B dans le plan.

Par exemple, si C est un cercle de rayon 1 et si A et B sont les extrémités d'un diamètre, on aura $\pi>2$.

On voit qu'on définit ici extrinsèquement la courbure : par comparaison avec une droite de $\mathbb{R}^2$ qui n'appartient pas à C.

Analytiquement…



Courbure = lim (α/h)

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{dh}} = \frac{\text{un angle}}{\text{une longueur}}$$ soit l'inverse d'une longueur.

Pour une courbe définie par y=f(x), la courbure en x est définie par

$$K = \frac{d\alpha}{dh} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

<u>Démonstration</u>
dα/dh=dα/dx.dx/dh

- dα/dx
  Or tg(α)=dy/dx ⟹ α=arctg(dy/dx)
  ⟹ dα/dx=d[arctg(dy/dx]/dx
  Si y=arctg(u) avec u=g(x), on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

  Ici u=arctg(dy/dx) ⟹

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

- dx/dh=1/(dh/dx) ⟹

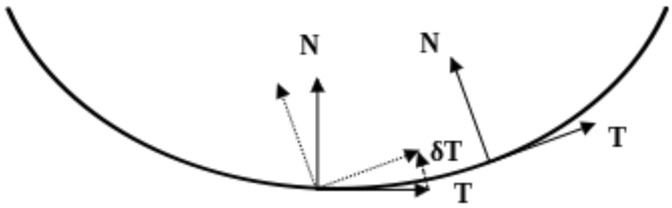
$$\frac{dx}{dh} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

- dα/dh=dα/dx.dx/dh ⟹

$$\frac{d\alpha}{dh}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Géométriquement…

La courbure se formalise localement, en chaque point x de la courbe C(x) supposée lisse (indéfiniment différentiable), à partir de la tangente (cf. son vecteur tangent $\vec{T}$) et du vecteur unitaire normal $\vec{N}$.



La courbure k de C(x) en x va concerner la rotation du repère $(\vec{T},\vec{N})$ dit *repère de* ***Frenet*** au voisinage de x.

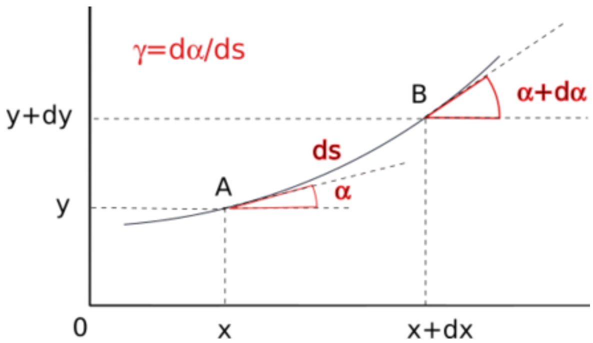
Ce repère varie comme la dérivée première C'(x). Le repère en question relève ainsi de la dérivée première.

La courbure k(x) va alors concerner la vitesse de cette variation, donc son accélération, c'est-à-dire la dérivée seconde C''(x). Ainsi, la courbure relève de la dérivée seconde.

Pour une droite, la dérivée seconde est nulle.

Au point A, la courbure γ(x) sera définie par γ=dα/ds c'est-à-dire par un angle de rotation dα rapporté à une longueur de déplacement ds sur la courbe (quand on se déplace de **ds**, le repère tourne de **dα**).

Le repère et donc dα sont extrinsèques mais ds, lui, est intrinsèque.



On a :

$$\vec{T}=\begin{pmatrix}cos\alpha\\ sin\alpha\end{pmatrix};\quad \vec{N}=\begin{pmatrix}-sin\alpha\\ cos\alpha\end{pmatrix}\ avec\ \vec{T}.\vec{N}=0$$

$$Cf.\ \vec{N}=\frac{d\vec{T}}{d\alpha};\quad \vec{T}=-\frac{d\vec{N}}{d\alpha}$$

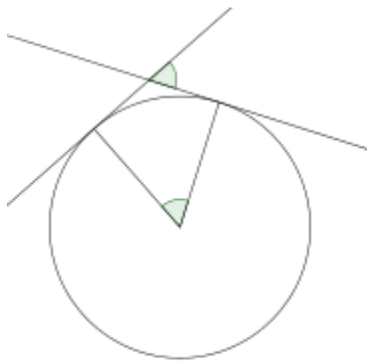
$$\gamma=\frac{d\alpha}{ds}\Longrightarrow\frac{d\vec{T}}{ds}=\gamma\vec{N}\quad car\quad d\vec{T}=\vec{N}.d\alpha\Longrightarrow\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}.\vec{N}$$

Attention : dT/ds mesure la variation de T (sa rotation) par rapport à la longueur *intrinsèque* ds de l'arc parcouru et non, comme dα, par rapport à un repère donné.

La courbure γ(x) qui mesure la vitesse de rotation du repère de Frenet $(\vec{T},\vec{N})$ par rapport à une direction fixe (ici l'axe horizontal $\overrightarrow{Ox}$), c'est-à-dire <u>une accélération</u> sur la courbe, <u>est donc formalisable comme un vecteur</u> orthogonal à $\vec{T}$ et donc <u>parallèle à $\vec{N}$</u>: $\vec{\gamma}=\gamma\vec{N}$

<u>Exemples</u>

- Pour une droite, ce repère est constant. La variation C'(x)=0 [la tangente est la droite elle-même] et l'accélération C''(x)=0 [la courbure est nulle].
- Pour le cercle, l'angle de rotation est l'angle de déplacement.



Rayon de courbure

La courbure (dα/ds) est homogène à l'inverse d'une longueur (puisqu'un angle comme dα est un nombre sans dimension).
D'où **le rayon de courbure R** comme inverse de la courbure : R=1/γ=ds/dα.

Algébriquement…

Graphe

Partons du graphe de la fonction f(x).

f'(x)=df/dx=sinα/cosα=tgα

⟹α(x)=arctg[f'(x)]

On a γ(x)=lim(dα/ds) [5] ⟹

$$\gamma(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt[\frac{3}{2}]{1+f'(x)^2}}$$

Arc paramétré

Ce geste est important : il repose sur une seule coordonnée intrinsèque.
On part ici du point $\vec{M}(s)$: le point est ici paramétré comme extrémité d'un vecteur dont l'origine est 0.

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{M}}{ds}(s) \text{ et } \vec{N}(s).\vec{T}(s) = 0$$

Mais $\left\|\vec{T}(s)\right\|^2 = 1$ car la vitesse de paramétrage est posée comme constante et valant 1.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{T}}{ds}(s).\vec{T}(s) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{M}}{ds^2}(s) = \frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \gamma(s)\vec{N}(s)$$

En simplifiant les notations :

T(s)=M'(s)
T'(s)=γ(s)N(s)
R(s)=1/|γ(s)|

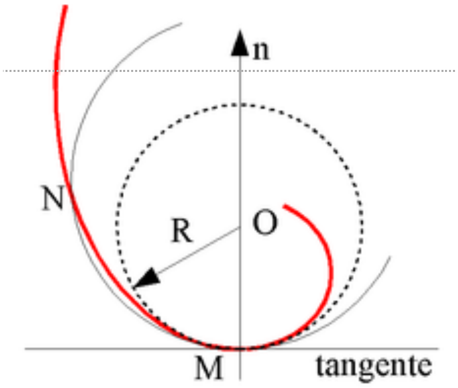
Exemple du cercle

x(θ)=cosθ et y(θ)=sinθ
On a ds=r.dθ (cf. périmètre= 2πr)
⟹R=r : le rayon R de courbure (constant) du cercle est son rayon r.

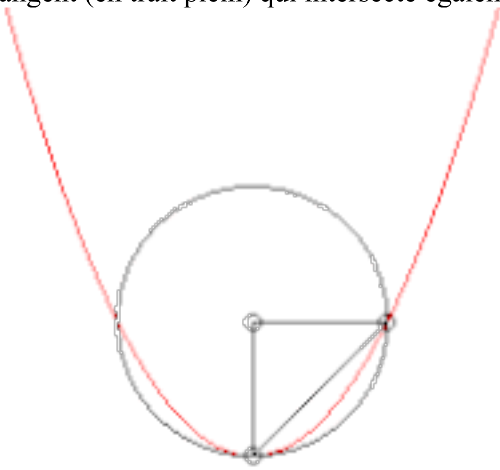
Cercle osculateur

Le rayon de courbure R est le rayon du cercle *osculateur* (du latin *osculare : embrasser*) [6] : c'est le cercle tangent qui épouse le mieux la courbe au point M car il partage avec la courbe des dérivées supérieures à la dérivée première (c'est-à-dire la tangente).

[5] et non pas dα/dx !
[6] Le terme vient de Leibniz qui le distingue d'un cercle *touchant* (tangent) la courbe.



En M, le cercle osculateur en pointillé épouse mieux la courbe
que l'autre cercle tangent (en trait plein) qui intersecte également la courbe en N.



Évolution du cercle tangent en un point de la courbe
et passant par un autre point,
lorsque ce point tend vers le premier.

On démontre assez facilement [7] qu'en un point M donné le cercle osculateur (ou *cercle de courbure*) est unique.

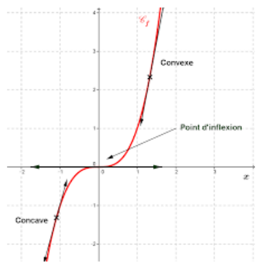
Convexité-concavité

Si l'on adopte une version dite *algébrique* de la courbure (c'est-à-dire qui, via le sens de rotation du repère de Frenet, peut être positive, nulle ou négative), on aura les différents cas suivants :

Courbure	*négative*	*nulle*	*positive*
Courbe	concave	droite	convexe

Point d'inflexion

Un point d'inflexion sera un point dont la courbure locale est nulle mais au voisinage duquel la courbure de la courbe change de sens.



Courbes gauches

Il s'agit cette fois de courbes en 3D c'est-à-dire situées dans $\mathbb{R}^3$ et non plus dans le plan $\mathbb{R}^2$.
Ces courbes vont avoir courbure et *torsion*.

Remarquons que cette courbe en 3D reste paramétrable intrinsèquement par une unique coordonnée.

[7] Voir par exemple la notice Wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle_osculateur

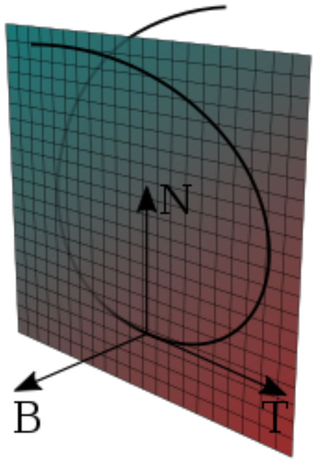
Géométriquement…

Plan osculateur

C'est le plan qui « embrasse » le mieux la courbe en un point donné c'est-à-dire qui contient sa tangente et son cercle osculateur en ce point.
Ce plan est donc structuré par les vecteurs vitesse et accélération c'est-à-dire par les deux premiers vecteurs dérivés (ici supposés non colinéaires car il y a courbure) soit les vecteurs $(\vec{T}, \vec{N})$ du repère de Frenet.

Torsion

La torsion en ce point mesurera alors l'écart en ce point entre la courbe et son plan osculateur.



Formellement…

Il y a désormais une infinité de vecteurs orthogonaux à la tangente $\vec{T}(s) = \frac{d\vec{M}}{ds}(s)$.
Parmi eux, on sélectionne le vecteur unitaire colinéaire à $\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \frac{d^2\vec{M}}{ds^2}(s)$ pour définir $\vec{N}$ et la courbure.
On posera :

$$\gamma(s) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right\| \text{ et } \vec{N}(s) = \frac{1}{\gamma(s)} \frac{d\vec{T}}{ds}(s)$$

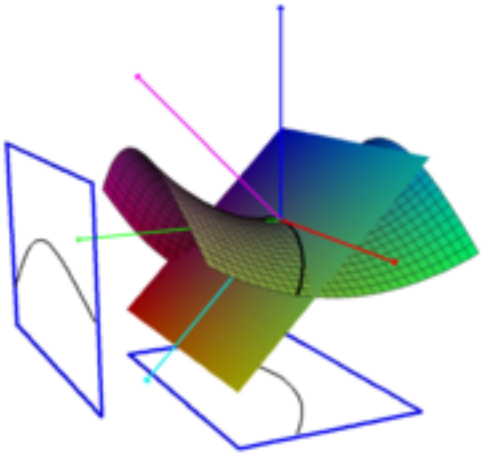
Courbe tracée sur une surface

Soit la courbe C(s) tracée sur la surface S.
Soit $\vec{N}(s)$ le vecteur normal à la surface au point M(s).
On définit un troisième vecteur unitaire $\vec{G}(s) = \vec{N}(s) \wedge \vec{T}(s)$ dit vecteur binormal *géodésique*.

D'où le repère dit de **Darboux** (« **trièdre mobile** » fait de la tangente, la normale et la géodésique ou binormale) au point M : $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{G}\}$.
Ici $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est une combinaison linéaire de $\vec{N}$ et de $\vec{G}$:

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \gamma_g(s)\vec{G}(s) + \gamma_n(s)\vec{N}(s)$$

D'où deux courbures :
- γ_g : *géodésique* (dans le plan tangent) ;
- γ_n : *normale* (du plan tangent)



Repère de **Darboux** (« trièdre mobile ») :
- la tangente $\vec{T}$ est en rouge ;
- la normale $\vec{N}$ est en bleu ;
- la géodésique $\vec{G}$ est en vert.

Dans un repère de **Frenet** :
- la normale $\overrightarrow{N_F}$ est en cyan ;
- la binormale en violet.

Les projections :
- selon $\vec{N}$ (plan horizontal) $\Longrightarrow$ la courbure géodésique γ_g ;
- selon $\vec{G}$ (plan vertical) $\Longrightarrow$ la courbure normale γ_n.

La courbure en M sera définie par :

$$\gamma(s) = \sqrt{{\gamma_g}^2 + {\gamma_n}^2}$$

Elle équivaut toujours à l'inverse d'une longueur.

<u>Formalisation plus algébrique</u>

On peut formaliser le rapport entre {T'(s), N'(s), G'(s)} et $\{\gamma_g, \gamma_n, \tau_g\}$ où τ_g est la torsion géodésique par :

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ G \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_g & \gamma_n \\ -\gamma_g & 0 & -\tau_g \\ -\gamma_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ G \\ N \end{pmatrix}$$

En tout point, on peut passer
- du repère $\{\vec{T}, \overrightarrow{N_B}, \vec{G}\}$ de Darboux (sur la surface)
- au repère $\{\vec{T}, \overrightarrow{N_F}, \vec{B}\}$ de Frenet (de la courbe) complété par le vecteur binormal $\vec{B}$

par une rotation dans le plan normal au vecteur $\vec{T}$ commun.

On déduit alors $\{\gamma_g, \gamma_n, \tau_g\}$ [Darboux] de la courbure γ et de la torsion τ [Frenet] par les formules :

$$\gamma_g = \gamma\sin(\alpha)$$
$$\gamma_n = \gamma\cos\alpha$$
$$\tau_g = \tau - d\alpha/ds$$

II. Surfaces

C'est seulement à partir des surfaces que la distinction essentielle intrinsèque/extrinsèque va s'imposer. Pourquoi cela ? Parce que la notion de courbure va changer : pour une surface en 2D, elle va donner lieu à une intrication (entre les deux dimensions) qui n'a bien sûr pas de sens en une seule dimension !
Ainsi en une seule dimension, toute courbure n'est qu'un gauchissement extrinsèque mais, à partir de deux dimensions, la courbure devient un gauchissement intrinsèque par intrication de deux dimensions indépendantes.

Voir plus loin l'importante raisonance intellectuelle de ce point.

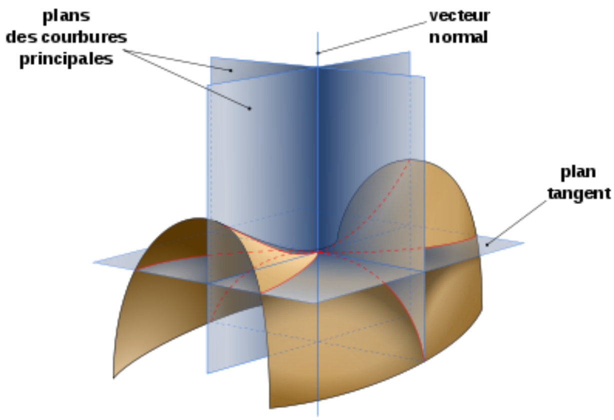
Courbures extrinsèques

Sur une surface S, la droite tangente à une courbe devient le plan tangent T.
Par contre, le vecteur unitaire normal $\vec{N}$ reste unique.

Courbures principales

Si l'on fait pivoter les plans perpendiculaires au plan tangent T (c'est-à-dire les plans contenant le vecteur normal $\vec{N}$), la courbure des sections de la surface S [8] varieront d'un maximum k_{max} à un minimum k_{min}.
On les appelle les deux courbures **principales** de la surface S au point considéré.

Euler démontre en 1760 que les deux plans correspondant à ces courbures maximale et minimale sont toujours orthogonaux.



Surface en « selle de cheval » [9]

Courbure moyenne

Sophie Germain (1776-1831) va définir la courbure *moyenne* de la surface S au point M comme la moyenne des deux courbures principales (maximale et minimale) en ce point :

$$K_{moyenne} = \frac{k_{max} + k_{min}}{2}$$

Cette notion de courbure va servir pour la caractérisation des surfaces minimales c'est-à-dire des surfaces s'appuyant sur un contour donné et ayant une aire minimale.

Surfaces minimales

On démontrera en effet que les surfaces dites *minimales* ont nécessairement une courbure moyenne nulle.

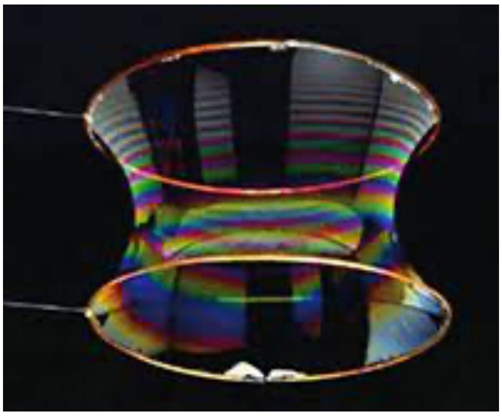
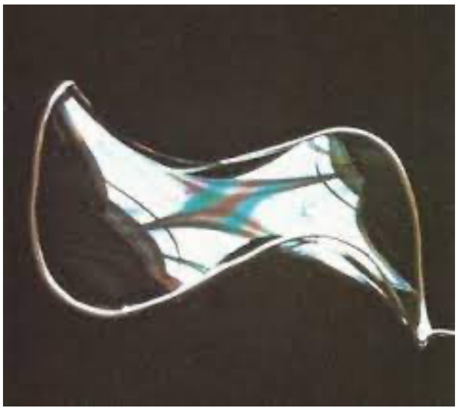
Voici de telles surfaces minimales réalisées par des films de savon [10] :

---

[8] qui sont donc des courbures de courbes, homogènes à l'inverse d'une longueur…

[9] Elle correspond à une fonction convexe-concave du type z=f(x,y) où $\forall x_0$, la fonction $z=g(x_0,y)$ est convexe et $\forall y_0$, la fonction $z=h(x,y_0)$ est concave.

[10] http://idm-old.math.cnrs.fr/Surfaces-minimales-et-lignes-de.html

L'architecture peut utiliser cette propriété pour minimiser les contraintes physiques de son matériau (voir par exemple le stade olympique de Munich).
Notons que la courbure moyenne d'une surface a la même dimension physique que la courbure d'une courbe : elle correspond à l'inverse d'une longueur (du rayon de courbure).
A contrario, la courbure de Gauss va cerner la spécificité d'une courbure de surface en lui faisant correspondre l'inverse d'une aire : par multiplication (et non plus addition) de ces deux courbures.

Courbure de Gauss

Gauss va définir une courbure par multiplication (et non plus par moyenne arithmétique) des deux courbures principales :

$$K_{Gauss}=k_{max}.k_{min}$$

Ainsi la courbure de Gauss (qu'on appellera désormais tout simplement *courbure de la surface*) n'aura plus, comme la courbure moyenne, la dimension de l'inverse d'une longueur mais celle de l'inverse d'une aire – on va voir comment l'application de Gauss interprète et justifie cette particularité.
C'est précisément ce qui distingue la courbure d'une surface de la courbure d'une courbe – le fait qu'elle intrique (et non pas accole) deux dimensions différentes – qui va rendre possible que la courbure d'une surface lui devienne intrinsèque c'est-à-dire ne dépende plus de sa caractérisation extrinsèque par l'espace ambiant (à 3 dimensions) dans lequel la surface (à 2 dimensions) est plongée : la courbure moyenne n'est pas intrinsèque mais la courbure de Gauss va l'être, non pas par sa définition (extrinsèque, comme la courbure *moyenne*) mais par équivalence (on va voir comment) avec une métrique locale intrinsèque.

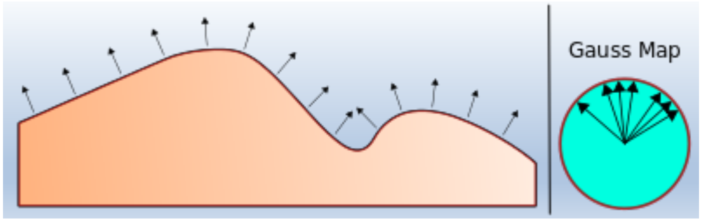
Pour prendre mesure du caractère surprenant de ce résultat (Gauss a nommé cela le *theorema egregium* c'est-à-dire le théorème *remarquable*), remarquons que les deux courbures principales k_{max} et k_{min} sont définies à partir de l'espace en 3D dans lequel le vecteur normal et les plans perpendiculaires sont définis (ce sont des notions entièrement extrinsèques à la surface, non immanentisables). Or **la multiplication de ces deux courbures extrinsèques va dégager une courbure s'avérant intrinsèquement mesurable** c'est-à-dire que leur multiplication va annuler leurs composantes extrinsèques, inconnaissables de l'intérieur de S.
Prenons le temps d'examiner tout ceci plus en détails.

Application de Gauss

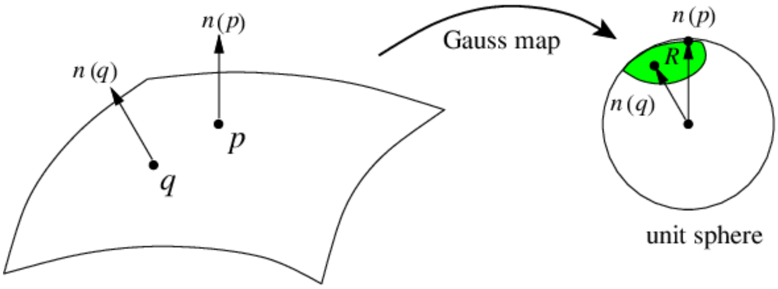
Gauss a conçu sa courbure K à partir de ce qu'on appelle désormais *l'application de Gauss* qui transfère les différents vecteurs unitaires normaux d'une même surface sur une sphère unité de la manière suivante (je privilégie ici l'intuition géométrique plutôt que la formalisation algébrique) :

Les différents vecteurs en différents points de la courbe sont regroupés autour d'une même origine.

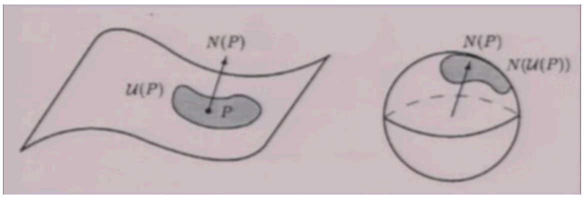
Pour mieux l'intuitionner, voici l'équivalent de cette application pour une courbe plane : elle transfère chaque vecteur normal sur un cercle unité de la manière suivante :



L'application de Gauss va de même définir une correspondance entre chaque point p ou q d'une surface et un point équivalent de la sphère unité par transfert du vecteur normal n(p) ou n(q) au centre de la sphère unité :



L'intérêt de cette opération qui transforme ainsi chaque région U(P) de la surface S en une région N(U(P)) de la sphère unité S'

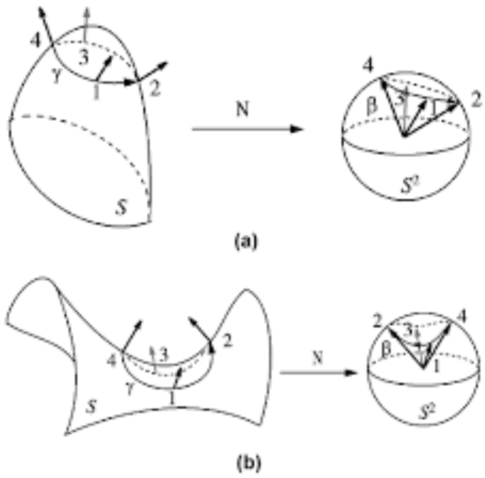


va être que la courbure de Gauss K mesure exactement le rapport des aires entre ces deux surfaces (ce qui ne va aucunement de soi) !

Intuitivement, l'idée est la suivante : si la surface S est un plan, alors à toute région U(P) correspond un seul point de S' qui est d'aire nulle. Par contre, plus la surface S sera courbée, alors plus à toute région U(P) d'aire donnée correspondra une région N(P) d'aire plus grande.
On pressent ainsi l'idée de mesurer la courbure K de U(P) au rapport des aires de N(P) et de U(P) :

$$K = \frac{\|N(P)\|}{\|U(P)\|}$$

L'intérêt au demeurant de l'application de Gauss est de dégager également comment convexité et concavité de S vont conduire à deux sens de rotations différents sur la même sphère (convexe !) unité :



C'est donc par cette application que Gauss conçoit cette courbure K qui va s'avérer, via le *theorema egregium*, formaliser une propriété intrinsèque de la surface S.
Le point est alors : comment formaliser le rapport des aires de N(P) et U(P) ?
L'idée, pour cela, va être de recourir à un paramétrage intrinsèque de la surface S.

Entrons dans le détail de ce théorème qui va constituer le cœur de cette étude.

Idée directrice : paramétrisation curviligne intrinsèque

Jusque-là, on représentait une surface soit par une équation W(x, y, z)=0, soit en exprimant une des trois variables en fonction des deux autres, par exemple z(x,y).
Euler avait remarqué que ces trois coordonnées pouvaient être considérées comme fonction de deux variables indépendantes mais c'est Gauss qui va systématiser ce point en utilisant deux coordonnées curvilignes.

> Comme va le voir, cette paramétrisation intrinsèque n'est pas une mesure : elle ne mesure pas les distances et les angles. En effet, une mesure doit précisément intérioriser les déformations du paramétrage par la courbure !
> D'où que la mesure intrinsèque va engendrer une forme quadratique des paramètres curvilignes et non pas une forme linéaire.
> Notons aussi que cette paramétrisation curviligne et la métrique locale qu'elle autorise va être l'amorce de l'idée de « carte locale » qui va opérer au principe des variétés.

Voyons tout ceci.

Formes (quadratiques) fondamentales

Soit la surface S paramétrée par la fonction X(u,v).
Soit donc (u, v) les coordonnées locales au voisinage d'un point d'une surface S paramétrée.

> Sur une sphère (qui est une surface de courbure constante), ces coordonnées locales peuvent correspondre à des coordonnées globales, telles exemplairement la longitude et la latitude (θ, λ).

On appelle *forme* les applications d'un ou plusieurs espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire des applications associant à un ou plusieurs vecteurs un scalaire : ici un nombre réel.
On va ici travailler avec des formes *locales* c'est-à-dire valides sur tout voisinage d'un point quelconque de la surface.
Que cette forme locale soit partout définie (c'est-à-dire en tout point) ne veut nullement dire qu'elle est une forme globale c'est-à-dire homogène sur toute la surface considérée.

> Ceci nous engagerait dans les dédales de la dialectique local-global dont je réserve l'exploration à la dernière partie de cette leçon.

Le vecteur ΔX entre X(u, v) et X(u+du, v+dv) aura pour développement limité (formule de Taylor) :

$$\Delta X=X(u,v)-X(u+du,v+dv)=[X_u du+X_v dv]+1/2[(X_{uu}du^2+2X_{uv}du.dv+X_{vv}dv^2)]+\varepsilon$$

$$\varepsilon=\text{termes d'ordres supérieur}$$

où l'on note $X_u=\partial X/\partial u$; $X_v=\partial X/\partial v$; $X_{uu}==\partial^2X/\partial u^2$; $X_{uv}==\partial^2X/\partial u.\partial v$; $Xvv==\partial^2X/\partial v^2$

- Les termes du premier ordre (premier crochet) vont servir à la définition de la première forme qui va caractériser la **métrique**.
- Les termes du second ordre (second crochet) vont servir à la définition de la seconde forme qui va concerner la **courbure**.

> Ce sont des termes nuls si la surface est un plan, de courbure donc nulle, prenant alors la forme suivante : X(u,v)=au+bv+c.

> Métrique

Attention ! : les paramètres (u, v) ne sauraient servir à mesurer directement les distances sur la surface S : ainsi la distance entre P et P' ne saurait se déduire directement de leur écart paramétrique {du, dv} par une formule du type

$$\sqrt{du^2+dv^2}$$

Autrement dit, **la paramétrisation de la surface n'en est pas une mesure** !
Pour mesurer la longueur ΔX, il faut en effet prendre mesure de la manière dont la fonction X(u, v), qui intrique u et v, déforme (du, dv).

> Ce ne serait pas le cas si X(u, v) était une fonction linéaire de (u, v) du type X(u, v)= au+bv+c. Mais ceci voudrait alors dire que notre surface est un plan !
> Donc pour une surface qui n'est pas plane $\Delta X=X(u,v)-X(u+du,v+dv)\neq adu+bdv$ avec (a, b) constants !
> Pour une surface qui n'est pas plane, on peut approximer cela par le développement de Taylor qui indique que les termes (X_u, X_v) affectant du et dv ne sont pas constants.

Ce que l'on peut dire, c'est que $X_u du+X_v dv$ approche ΔX.
Une mesure des longueurs est en fait déterminée par un **produit scalaire** (qui, d'un seul geste, établit une mesure des longueurs et des angles).

Ainsi la longueur d'un vecteur V est donnée par $\sqrt{V.V}$.

Comme $\Delta X \simeq X_u du+X_v dv$, on aura :

$$\Delta X^2 \simeq (X_u du+X_v dv)^2=X_u^2.du^2+2X_uX_v.du.dv+X_v^2.dv^2$$

Gauss renomme alors $\{X_u^2, X_uX_v, X_v^2\}$: $\{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}\}$.

D'où la première forme quadratique :

$$\boxed{\mathbb{E}.du^2 + 2\mathbb{F}.du.dv + \mathbb{G}.dv^2}$$

qui mesure localement les distances.

Exemples

Plan

$X(u,v)=au+bv+c$

$X_u=a$; $X_v=b$

$\Delta X^2=a^2.du^2+2ab.du.dv+b^2.dv^2$

$\Longrightarrow\{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}\}=\{a^2, ab, b^2\}$

Sphère

$X(u,v)=X(\text{latitude, longitude})=X(\lambda,\theta)$

Parallèle (λ=constant) et méridien (θ=constant) étant orthogonaux, $X_\lambda.X_\theta=0 \Longrightarrow \mathbb{F}=0$

La longueur d'un arc de méridien étant constante, $\mathbb{G}=X_\theta^2$ est constant.

Par contre, la longueur d'un arc de parallèle est variable car elle dépend de la latitude $\Longrightarrow \mathbb{E}=X_\lambda^2$ est variable.

$\Longrightarrow\{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}\}=\{\text{variable, 0, constante}\}$

Courbure

Les termes d'ordre 2 dans le développement de Taylor de X(u,v) – voir le second crochet ($X_{uu}du^2+2X_{uv}du.dv+X_{vv}dv^2$) – sont géométriquement interprétables comme mesurant la distance algébrique (c'est-à-dire avec signe) au plan tangent, cette distance qui signe l'existence d'une courbure.

Mais si ($X_u du+X_v dv$) et donc son carré ($X_u^2.du^2+2X_uX_v.du.dv+X_v^2.dv^2$) sont invariants par changement de carte, il n'en va plus de même de ($X_{uu}du^2+2X_{uv}du.dv+X_{vv}dv^2$).

Les termes d'ordre 1 mesurent les distances de l'intérieur du plan tangent.

Les termes d'ordre 2 vont mesurer la distance du point X' au plan tangent en X (distance orthogonale à ce plan), soit celle-là même qui révèle l'existence d'une courbure de la surface au point X.

Gauss renomme ainsi $\{X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}\}$: $\{\mathbb{L}, \mathbb{M}, \mathbb{N}\}$.

D'où la seconde forme quadratique :

$$\boxed{\mathbb{L}.du^2 + 2\mathbb{M}.du.dv +\mathbb{N}.dv^2}$$

Attention !: nos deux formes ($\mathbb{E}.du^2 + 2\mathbb{F}.du.dv + \mathbb{G}.dv^2$) et ($\mathbb{L}.du^2 + 2\mathbb{M}.du.dv +\mathbb{N}.dv^2$) ont la même apparence mais elles formalisent des contenus différents car la première mesure le carré d'une longueur tangente (par carré d'une dérivée première) quand la seconde mesure une courbure (par une dérivée seconde) : $(X_u)^2 \neq X_{u.u}$!

Courbure de Gauss

Le quotient de la seconde forme (celle de la courbure) par la première (celle de la métrique) va prendre mesure de la courbure de la surface au point X dans la direction (du, dv).

Autrement dit, la courbure de Gauss s'obtient par multiplication des deux courbures principales (courbures de courbes) mais cette multiplication se formalise comme quotient de ces deux formes quadratiques.

Rappelons en effet que

1) la courbure d'une courbe est de la forme $d\alpha/ds$;
2) celle d'une surface et de la forme $d\alpha^2/ds^2$.

Ainsi, la courbure de Gauss d'une surface se mesure en rapportant le carré d'un angle (de courbure) à une aire : $d\alpha^2/ds^2$.

$$ds^2=(a.du+b.dv)^2=(a^2du^2+b^2dv^2)+2ab.dudv$$

= une aire + sa modification (courbure) par intrication

La mesure exacte de la courbure sera donnée par le quotient des déterminants des deux formes quadratiques c'est-à-dire par :

$$K = \frac{\mathbb{LN} - \mathbb{M}^2}{\mathbb{EG} - \mathbb{F}^2}$$

Cf. $\mathbb{L}.du^2 + 2\mathbb{M}.du.dv + \mathbb{N}.dv^2 = [du \quad dv]\begin{bmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{M} \\ \mathbb{M} & \mathbb{N} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{M} \\ \mathbb{M} & \mathbb{N} \end{vmatrix} = \mathbb{LN} - \mathbb{M}^2$$

K aura bien la dimension de l'inverse d'une aire (et non plus de l'inverse d'une longueur comme la courbure d'une courbe ou comme la courbure moyenne d'une surface).

Revoyons tout ceci de manière mieux formalisée.

I – Première forme (métrique intrinsèque)

La première forme (notée classiquement I mais que je renoterai $\mathscr{M}$ pour indiquer qu'elle fonde la métrique) correspond au produit scalaire [XS] euclidien de $\mathbb{R}^3$ restreint en chaque point de S à son plan tangent.

Rappelons que tout produit scalaire donne mesure des longueurs et des angles.

Soit la surface S paramétrée par la fonction X(u,v).
En tout point P donné, le plan tangent sera engendré par les deux vecteurs tangents $X_u=\partial X/\partial u$ et $X_v=\partial X/\partial v$.
Le XS de deux vecteurs tangents s'écrit :

$$(aX_u+bX_v).(cX_u+dX_v)=ac(X_u.X_u)+(ad+bc)(X_u.X_v)+bd(X_v.X_v)$$

Notons :

- $\mathbb{E}=X_u.X_u=(X_u)^2$
- $\mathbb{F}=X_u.X_v$
- $\mathbb{G}=X_v.X_v=(X_v)^2$

Longueurs et aires

La longueur d'un élément ds={du,dv} de courbe dessinée sur la surface S au voisinage du point P sera donnée par la première forme $\mathscr{M}$:

$$\mathscr{M}=\mathbb{E}.du^2+2\mathbb{F}.du.dv+\mathbb{G}.dv^2$$

et l'aire d'un élément de surface D=dA voisin de P sera donnée par :

$$A = \iint_D \sqrt{\mathbb{E}.\mathbb{G} - \mathbb{F}^2}\, du.dv$$

Comme on le voit, cette métrique $\mathscr{M}$, compatible avec l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$, est intrinsèque à la surface car elle ne fait intervenir que des éléments intrinsèques : ds={du,dv} et $\mathscr{M}\{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}\}$.

Sphère

Pour mieux le comprendre, prenons un exemple : celui où S est une sphère.

$$(u,v)\in[0, 2\pi]$$

$$X(u,v) = R.\begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{N} = -\begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

$$X_u = R.\begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_v = R.\begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix}$$

$$X_{uu} = R.\begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{uv} = R.\begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{vv} = R.\begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ -\cos v \end{pmatrix}$$

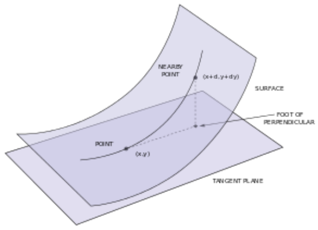
$\mathbb{E}=R^2.\sin^2 v$; $\mathbb{F}=0$; $\mathbb{G}=R^2$

II – Seconde forme (courbure extrinsèque)

La seconde forme (notée classiquement II mais que je renoterai $\mathcal{C}$ pour indiquer qu'elle fonde la courbure) va formaliser la courbure entendue comme la rotation du plan tangent - nous avons déjà vu cela avec la droite tangente pour les courbes – c'est-à-dire comme l'accélération de la fonction X(u,v) paramétrant la surface.
Pour formaliser cette idée,

1) on va mobiliser, en tout point P de la surface S paramétrée par X(u,v) le vecteur unitaire normal **N** au plan tangent et donc colinéaire à $X_u \wedge X_v$;
2) on va travailler sur le développement de Taylor de la surface S au point P dans le repère local

$$\{P\ ;\ X_u,\ X_v,\ \mathbf{N}\}$$



en s'intéressant aux termes quadratiques de ce développement (les termes premiers X_u et X_v sont ceux du plan tangent qui nous on servi pour la métrique) qu'on va noter $\mathcal{C}\{\mathbb{L}, \mathbb{M}, \mathbb{N}\}$ avec

$$\mathbb{L} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}.\boldsymbol{N};\ \mathbb{M} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}.\boldsymbol{N};\ \mathbb{N} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}.\boldsymbol{N}$$

$$\Longrightarrow$$

$\mathbb{L}.du^2+2\mathbb{M}.du.dv+\mathbb{N}.dv^2$ (+ termes epsilonesques d'ordres supérieurs)

D'où la seconde forme :

$$\mathcal{C}=\mathbb{L}.du^2+2\mathbb{M}.du.dv+\mathbb{N}.dv^2$$

Courbure de Gauss

Si l'on représente les deux formes $\mathscr{M}$ et $\mathcal{C}$ par les matrices

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E} & \mathbb{F} \\ \mathbb{F} & \mathbb{G} \end{pmatrix}\ et\ \begin{pmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{M} \\ \mathbb{M} & \mathbb{N} \end{pmatrix}$$

puisque, par exemple pour deux vecteurs x et y du plan tangent, on aura :

$$\mathcal{M}(x,y) = x^T \begin{pmatrix} \mathbb{E} & \mathbb{F} \\ \mathbb{F} & \mathbb{G} \end{pmatrix} y$$

on peut alors calculer la courbure de Gauss par quotient des déterminants de II et I :

$$K = \frac{det\,\mathcal{C}}{det\mathcal{M}} = \frac{\mathbb{L}\mathbb{N} - \mathbb{M}^2}{\mathbb{E}\mathbb{G} - \mathbb{F}^2}$$

L'idée, en effet, est de rapporter au point P la rotation du plan tangent à sa métrique (tout de même que pour une courbe on avait posé : γ=dα/ds) avec cette dimension quadratique nouvelle, propre à la courbure (de Gauss) d'une surface, tenant au fait qu'elle est le produit de deux courbures de courbe et qu'elle a donc cette fois la dimension d'un $K=(d\alpha)^2(ds)^2$.
Ici $(d\alpha)^2$ correspondra à $det\mathcal{C}=\mathbb{L}\mathbb{N}-\mathbb{M}^2$ et $(ds)^2$ à $det\mathscr{M}=\mathbb{E}\mathbb{G}-\mathbb{F}^2$.

Theorema egregium

Si deux surfaces sont isométriques (c'est-à-dire ont, en tout point, une même métrique locale), alors elles ont même courbure (de Gauss).

Attention : la réciproque n'est pas vraie : deux surfaces (paramétrées) peuvent avoir la même courbure sans être pour autant isométriques.

Exemples

- Le plan et le cylindre sont isométriques (même première forme fondamentale $\mathscr{M}$) et leur courbure est en effet la même K=0 (mais les courbures moyennes sont différentes !).
- Le plan et la sphère n'ont pas même courbure de Gauss (K=0 pour le plan ; K=1/r2 pour la sphère). Ils ne sont donc pas isométriques.

Idée directrice

Le théorème remarquable démontre que la courbure de Gauss K d'une surface S est préservée par les isométries locales.
Comme on l'a vu, la courbure K est extrinsèquement définie comme produit des deux courbures principales (extrinsèques) alors que la métrique locale, préservée par les isométries, est intrinsèquement définie.
La courbure extrinsèque s'avérant ainsi contrôlée par la métrique intrinsèque, la courbure s'avère donc être une caractéristique intrinsèque de la surface !

Comprenons bien l'enchaînement logique.

Notons de manière simplifiée $K=\mathcal{C}/\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_2$, alors $K_1=K_2$ et donc $\mathcal{C}_1=\mathcal{C}_2$.

Mais si $\mathcal{M}_1\neq\mathcal{M}_2$ on peut avoir $K_1=\mathcal{C}_1/\mathcal{M}_1 = K_2=\mathcal{C}_2/\mathcal{M}_2$ avec $\mathcal{C}_1\neq\mathcal{C}_2$

Démonstration

La démonstration est algébrique, et assez aveuglément calculatrice.

Je n'en connais malheureusement pas d'interprétation géométrique, plus ouverte à l'intuition…

Il y en a bien une démonstration plus « conceptuelle » - voir Grothendieck – mais elle nous est inaccessible.

La démonstration consiste à montrer que $\mathcal{C}\{\mathbb{L}, \mathbb{M}, \mathbb{N}\}$ est algébriquement déterminé par $\mathcal{M}\{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}\}$.

Intuitivement…

On peut intuitionner la logique à l'œuvre dans la démonstration à partir de la dualité covariance/contravariance.

L'algèbre tensorielle nous montrera que l'on peut obtenir une invariance par le produit d'une coriance et d'une contravariance :

$$\textit{invariance} \equiv \textit{covariance} \otimes \textit{contravariance}$$

Intuitionnons cela.

Par exemple, si vous calculez le revenu moyen d'une personne en euros, ce revenu par personne sera covariant au nombre de personnes (il sera multiplié par 10 si vous calculez le revenu d'une famille de 10 personnes) mais contravariant à l'unité de compte (il sera divisé par 10 si vous le calculez en dizaine d'euros) en sorte qu'au total le revenu ne sera pas changé si vous le calculez en dizaine d'euros par famille de dix personnes !

Par exemple si le revenu moyen mensuel est de 1700 euros par personne, le revenu moyen d'une famille de 10 personnes sera également en dizaines d'euros de 1700 !

Ici, la dualité covariance/contravariance à l'œuvre concerne la dualité de $\mathcal{C}\{\mathbb{L}, \mathbb{M}, \mathbb{N}\}$ avec $\mathcal{M}\{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}\}$.

On pourra intuitionner la chose en indiquant que la courbure est reliée au plan cotangent comme la métrique l'est au plan tangent en sorte que la dualité plans tangent/cotangent engendre une dualité métrique/courbure.

Toujours intuitivement, ceci peut se formaliser ainsi : la courbure étant une déformation de la métrique, une métrique intrinsèque doit pouvoir prendre mesure intrinsèque de sa courbure.

La démonstration passe par la formule suivante.

Formule de Brioschi

Francesco Brioschi (1824-1897) [11]

Elle explicite la courbure (intrinsèque) K en fonction uniquement de $\mathcal{M}\{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}\}$ c'est-à-dire de la seule métrique locale.

$$K = \frac{\mathbb{L}\mathbb{N} - \mathbb{M}^2}{\mathbb{E}\mathbb{G} - \mathbb{F}^2} \Longrightarrow$$

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}$$

Rappels synthétiques

$$\mathbb{E}=X_u.X_u \;;\; \mathbb{F}=X_u.X_v \;;\; \mathbb{G}=X_v.X_v$$

$$\mathbb{L} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}.\boldsymbol{N};\ \mathbb{M} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}.\boldsymbol{N};\ \mathbb{N} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}.\boldsymbol{N}$$

$$K = \frac{\mathbb{L}\mathbb{N} - \mathbb{M}^2}{\mathbb{E}\mathbb{G} - \mathbb{F}^2}$$

En termes d'unités, les X sont des vecteurs.

Donc $\{\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}\}$, étant des produits scalaires, sont homogènes à des aires quand $\{\mathbb{L}, \mathbb{M}, \mathbb{N}\}$ restent homogènes à des longueurs.

---

[11] Il fut également un homme politique qui, lors du *Risorgimento*, joua un rôle de premier plan dans la formation de l'État national italien.

Donc K, qui divise des aires (du type $\mathbb{LN}$ et $\mathbb{M}^2$) à des aires au carré (du type $\mathbb{EG}$ et $\mathbb{F}^2$), sera bien homogène à l'inverse d'une aire (soit l'inverse du carré d'un rayon), ce qui se retrouve dans le fait qu'elle est la multiplication de deux courbures principales, chacune homogène à l'inverse d'une longueur.

Exemples

Plan

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$
$$(u, v)\to(u, v, 0)$$

$\mathbb{E}=\mathbb{G}=1$; $\mathbb{F}=0$
$\mathbb{L}=\mathbb{M}=\mathbb{N}=0$
$\Rightarrow K=0$

Cylindre

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$
$$(u, v)\to(\cos u, \sin u, v)$$

$\mathbb{E}=\mathbb{G}=1$; $\mathbb{F}=0$
$\mathbb{L}=1$; $\mathbb{M}=\mathbb{N}=0$
$\Rightarrow K=0$

Sphère

$$(u,v)\in[0, 2\pi]$$
$$X(u,v) = R.\begin{pmatrix}\cos u \sin v\\ \sin u \sin v\\ \cos v\end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{N} = -\begin{pmatrix}\cos u \sin v\\ \sin u \sin v\\ \cos v\end{pmatrix}$$

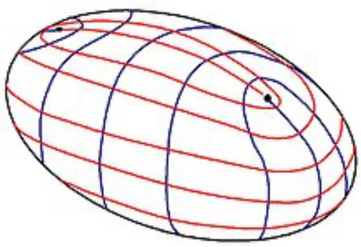
$$X_u = R.\begin{pmatrix}-\sin u \sin v\\ \cos u \sin v\\ 0\end{pmatrix}, \qquad X_v = R.\begin{pmatrix}\cos u \cos v\\ \sin u \cos v\\ -\sin v\end{pmatrix}$$
$$X_{uu} = R.\begin{pmatrix}-\cos u \sin v\\ -\sin u \sin v\\ 0\end{pmatrix}, \qquad X_{uv} = R.\begin{pmatrix}-\sin u \cos v\\ \cos u \cos v\\ 0\end{pmatrix}, \qquad X_{vv} = R.\begin{pmatrix}-\cos u \sin v\\ -\sin u \sin v\\ -\cos v\end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}=R^2.\sin^2 v$; $\mathbb{F}=0$; $\mathbb{G}=R^2$
$\mathbb{L}=R.\sin^2 v$; $\mathbb{M}=0$; $\mathbb{N}=R$
$\Rightarrow \mathbb{EG}-\mathbb{F}^2=R^4.\sin^2 v$; $\mathbb{LN}-\mathbb{M}^2=R^2.\sin^2 v$
$\Rightarrow K=1/R^2$

Classification des points et des surfaces

Points

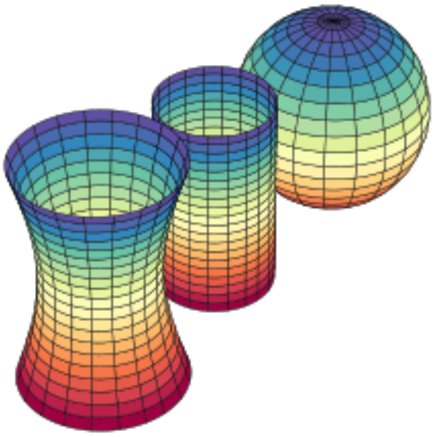
- elliptique : K>0. S est localement convexe.
  Si de plus $\gamma_{max}=\gamma_{min}$, le point est un ombilic : en ce point, la surface ressemble à une sphère ou à un plan (méplat).



- parabolique : K=0. Cf. le cylindre ou le cône.
- hyperbolique : K<0. Cf. l'hyperboloïde à une nappe

Surfaces

Si ces caractéristiques locales sont partout valables – « globales » au sens d'une propriété locale partout valide -, alors la surface et donc sa géométrie sera elliptique, euclidienne ou hyperbolique.



Courbures globales : négative (hyperboloïde), nulle (cylindre), positive (sphère)

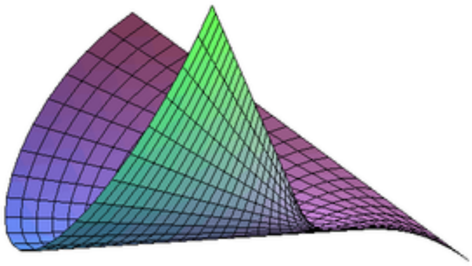
Courbure totale et formule de Gauss-Bonnet

Courbure totale

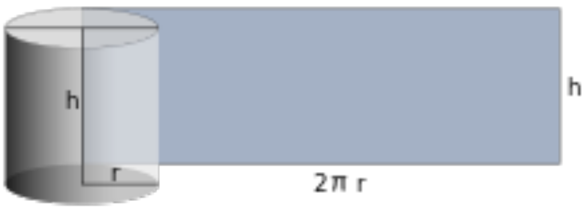
La courbure **totale** (différente donc de la courbure **globale** précédente) est l'intégrale double de la courbure de Gauss sur une surface donnée : $\iint_S K\, dA$

Surfaces développables

Si cette courbure totale est nulle, la surface sera dite *développable*.
Intuitivement, on pourra la faire rouler sans glisser sur un plan. On pourra donc la développer pour la rendre plane sans la déchirer (ce qu'on ne peut faire, par contre, pour une coquille d'œuf ou pour un ballon de foot).

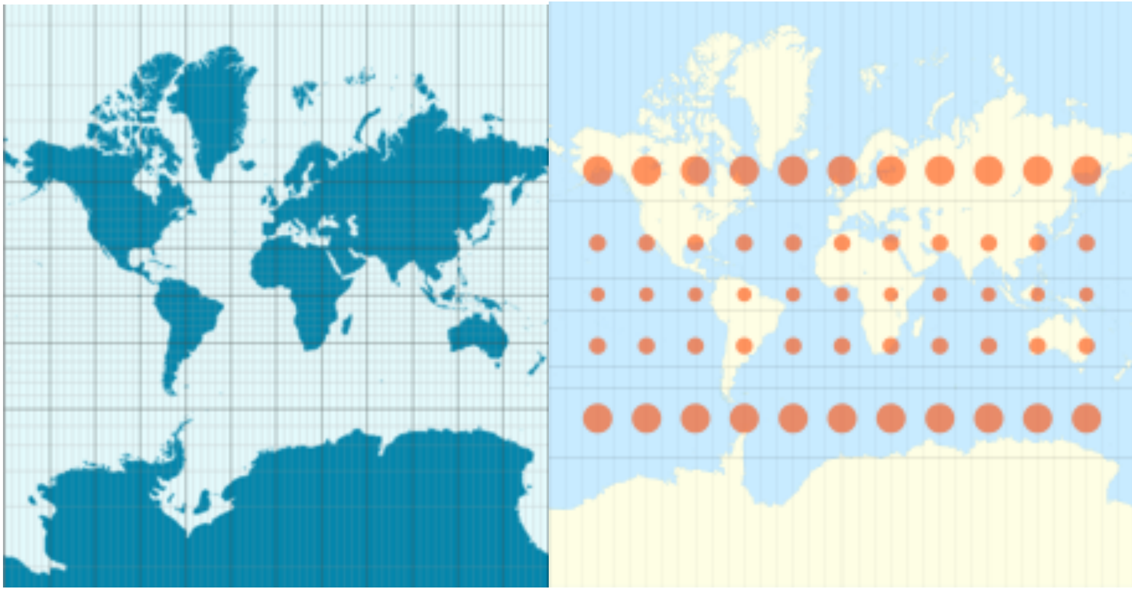


Exemple : le cône ou le cylindre



Contrexemple de la sphère

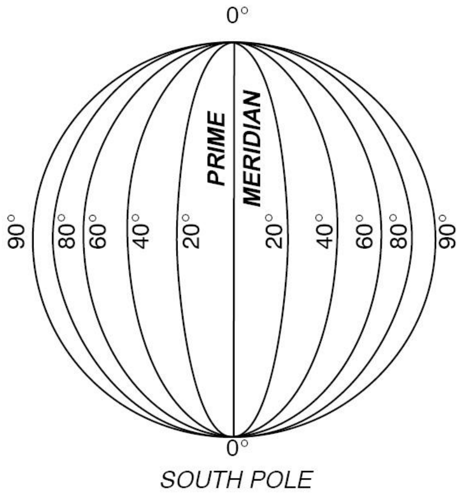
La sphère, en tout point de courbure $1/R^2$, n'est pas développable. D'où qu'il n'y a pas d'isométrie avec le plan (de courbure nulle). D'où qu'il n'existe pas de cartes isométriques (préservant les longueurs) mais seulement des cartes *conformes* (préservant les angles) ou *équivalentes* (préservant les aires).



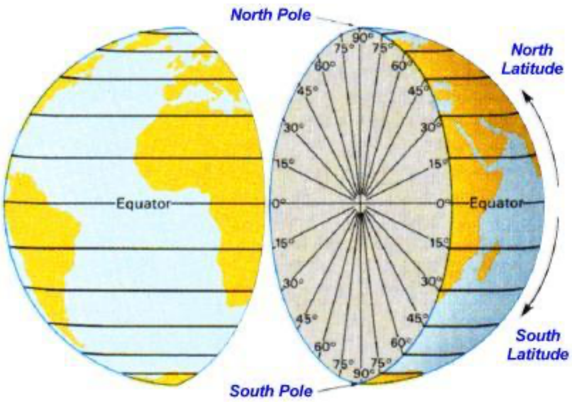
La projection de Mercator est *conforme* : elle préserve les angles mais pas les aires
(sur le globe, les cercles en rouge ont tous la même surface !).

Lignes sur la Terre

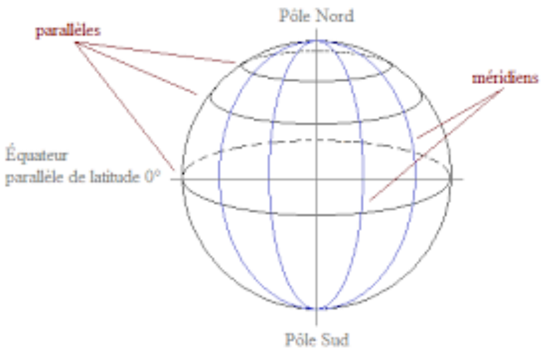
Les méridiens sont des cercles maximaux sur la sphère qui indiquent la longitude. Ce sont des géodésiques.



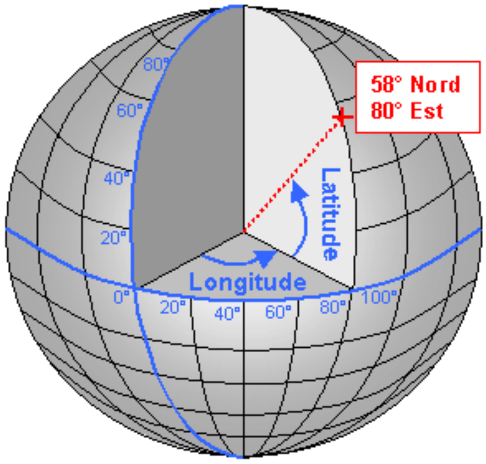
Par contre les parallèles (c'est-à-dire les cercles parallèles à l'Équateur) sont des cercles de plus en plus petits donnant la latitude.



Méridiens et parallèles se coupent toujours selon un angle droit.



D'où sur Terre, les coordonnées paramétriques de tout point par latitude et longitude.



Géodésiques

Sur une surface, les géodésiques sont les courbes qui sont « le plus court chemin » d'un point à un autre de la surface. On peut également les voir comme le chemin « le plus droit » (c'est-à-dire le moins courbé).

- Sur un plan, les géodésiques sont les droites.
- Sur une sphère, les géodésiques sont les grands cercles ou cercles maximaux c'est-à-dire ayant pour centre le centre de la sphère.

Formule de Gauss-Bonnet

Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892)

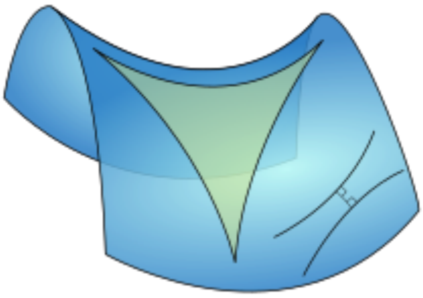
Cette formule donne la courbure **totale** d'une surface délimitée selon un chemin fermé par l'intégrale de la courbure le long du chemin en question.

Le plus simple ici est d'en présenter la forme simplifiée lorsque la courbe en question est un triangle.
Soit un triangle **géodésique** sur une sphère c'est-à-dire un triangle dont les trois côtés sont des géodésiques (c'est-à-dire des parties de grands cercles).
Alors la courbure totale de la surface délimitée par ce triangle **géodésique** sera égale à la différence de la somme des angles du triangle à π :

$$\boxed{\iint_S K\,dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi}$$

Ainsi la déviation de la somme de ses angles par rapport à π mesure la courbure totale de la surface.
On retrouve ici nos trois cas :

- somme des angles = π : la courbure totale est nulle ⟹ la surface est plane ;
- somme des angles > π : la courbure totale est positive ⟹ la surface est elliptique, concave (courbée vers l'intérieur) ;
- somme des angles < π : la courbure totale est négative ⟹ la surface est hyperbolique, convexe (courbure tournée vers l'extérieur).



Concavité $\Longrightarrow$ somme des angles $< \pi$

Avec cette formule, on intuitionne donc plus clairement comment la courbure d'une surface peut devenir intrinsèquement mesurable, par exemple sur le globe terrestre.
La chose se clarifiera encore mieux prochainement quand on va examiner ce qu'on appelle **le transport parallèle** et que la courbure se lira intrinsèquement pour un triangle géodésique dans la différence

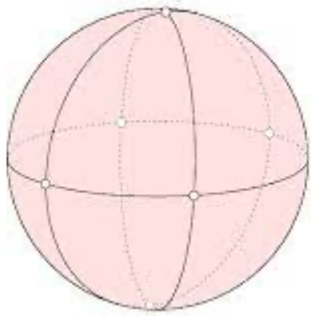
$$\alpha+\beta+\gamma-\pi$$

Théorème de Gauss-Bonnet

Ce théorème introduit à la problématique plus générale des variétés riemanniennes. On l'examinera donc en détail dans la leçon spéciale qui leur sera consacrée.
Mais indiquons d'ores et déjà son principe.
Ce théorème fait le lien entre la courbure totale d'une surface et ce que l'on appelle sa **caractéristique d'Euler-Poincaré**.
Le point extraordinaire est donc de lier le **tout** d'une intégrale (la courbure totale) à une caractéristique **globale** !

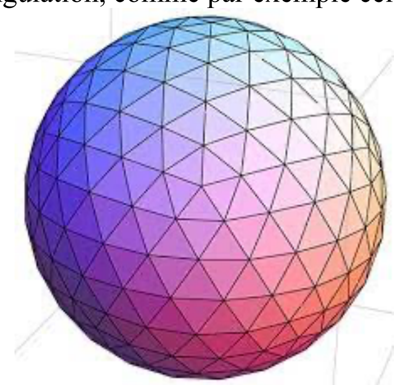
Caractéristique d'Euler-Poincaré

Intuitionnons cette caractéristique en triangulant la sphère c'est-à-dire en la recouvrant par un ensemble de triangles.
Si l'on compte le nombre S de sommets, le nombre A d'arêtes (côtés) et le nombre F de faces (triangles), on obtiendra toujours que $\chi=S-A+F=2$.
Par exemple ici, on a 8 triangles égaux :



S=6 ; A=12 ; F=8 $\Longrightarrow$ $\chi=6-12+8=2$

Ce nombre invariant est appelé la caractéristique d'Euler-Poincaré de la sphère.
Il sera le même pour tout autre triangulation, comme par exemple celle-ci :



Résultat remarquable : cette caractéristique est la même pour toute surface ayant la même topologie que la sphère !

Théorème

Le théorème de Gauss-Bonnet énonce le résultat surprenant suivant :

la courbure totale de la surface (compacte) est égale à 2π fois sa caractéristique d'Euler :

$$\boxed{\iint_S K \, dA = 2\pi\chi}$$

Le théorème relie donc une totalisation sur la surface à une propriété globale de cette surface qui la caractérise d'un bloc ou d'un seul tenant, sans faire référence à quelque propriété locale que ce soit.
Renvoyons son examen à la prochaine leçon sur les variétés.

***

ORIENTABILITÉ ET PARALLÉLISABILITÉ

Introduisons maintenant deux propriétés qui vont devenir centrales dans la théorie riemannienne des variétés - l'orientabilité et la parallélisabilité - en les examinant, plus intuitivement (géométriquement) que formellement (algébriquement) pour des surfaces lisses.

Surface orientable

Orientation

L'orientation d'un espace 3D consiste dans la capacité d'y coordonner un point par un repère orienté Oxyz.

Point, intellectuellement décisif, sur lequel on reviendra avec Riemann : si un espace est ainsi orientable, il l'est alors de deux et deux seulement manières différentes.

Algébriquement, ceci tient au fait qu'on peut associer un déterminant à une orientation, c'est-à-dire un nombre non nul qui ne peut être que négatif ou positif.

Plus précisément, le déterminant de la jacobienne vaut ± 1.

Ce point s'intuitionne facilement en 2D pour l'orientation d'une droite et en 3D pour l'orientation de l'espace euclidien : on saisit intuitivement qu'on ne peut passer d'une orientation à l'autre (inverse) de l'intérieur de l'espace considéré.

Orientation locale

Par le biais du plan tangent, l'orientation d'une surface peut être mise en rapport général avec une orientation de l'espace ambiant. Ainsi l'orientation d'une surface s'établit localement, point par point.
Résultat : une surface lisse (donc partout tangentiable) est toujours localement orientable.
Le problème, pour les surfaces lisses, devient alors : dans quelles conditions le serait-elle globalement ?
Mais que veut ici dire orientation globale ?

Orientation globale

Une surface (lisse c'est-à-dire indéfiniment différentiable) est dite orientable (sous-entendu globalement orientable) si le champ vectoriel de ses vecteurs normaux est lui-même indéfiniment différentiable.

Intuitivement, l'idée est la suivante : il faut que l'orientation locale apportée par le plan tangent (plan identifié par son vecteur unitaire normal $\vec{N}$) évolue continûment sur la surface, c'est-à-dire soit lisse comme l'est la surface elle-même. Autrement dit, il faut qu'en passant de proche en proche d'un point à l'autre, l'orientation locale évolue elle-même continûment de proche en proche.

Notons que « global » s'entend ici au sens $\mathcal{P}$ (voir les leçons intellectuelles plus loin) de « partout », en tout point : l'orientabilité (globale) d'une surface s'entend comme cohérence globale d'une propriété locale.

Plus formellement, on verra qu'être orientable veut dire que l'espace tangent (somme disjointe des plans tangents) est lisse et sans intersection.

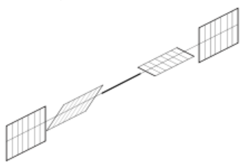
Exemples

Une surface couverte par une seule carte est orientable.
Une surface définie comme graphe d'une fonction f(x,y) ou implicitement par une fonction g(x,y,z)=0 est orientable.

Contrexemple

La bande de Möbius n'est pas orientable. [12]

Intuitivement, un repère orienté intrinsèque au ruban (différenciant un haut d'un bas, une gauche d'une droite et un extérieur d'un intérieur) se déplacera bien continûment par déplaçant continu dans la bande mais tournera continûment (voir la torsion de la surface) en sorte de revenir inversé au bout d'un tour en sorte qu'il ne peut y avoir d'orientation globalement cohérente.



Surface parallélisable

La propriété de parallélisabilité, différente mais reliée – on va voir comment – à la propriété d'orientabilité va nous permettre d'appréhender directement la courbure d'une surface de manière intrinsèque.

[12] Voir Rouvière p. 261-2

Examinons cette notion plus concrètement en nous limitant ici à l'exemple de la sphère.

Orientation et directions

Il nous faut pour cela clairement distinguer deux opérations : celle d'orientation de celle de direction.

Intellectuellement, cette distinction est importante pour les espaces subjectifs : c'est une chose de s'orienter subjectivement ; c'en est une autre de se diriger dans un espace ainsi orienté car une même orientation globale autorise bien sûr une infinité de directions différentes en son sein.

Transport parallèle

Soit donc sur une surface donnée S une direction localement fixée dans le repère localement orienté – formalisons-la comme un vecteur v dans le plan tangent ($d\theta$, $d\lambda$) : $v=\alpha.d\theta+\beta.d\lambda$

Le transport parallèle de cette direction v désignera le déplacement de ce vecteur corrélatif au déplacement du plan tangent le long d'un parcours effectué sur la sphère.

Le point important va être le suivant : si la surface est plane (c'est-à-dire de courbure nulle), le transport parallèle sur tout chemin fermé conduira à une rotation nulle de la direction.

Par contre, si la surface est courbe (c'est-à-dire de courbure non nulle comme sur la sphère), ce transport parallèle sur tout chemin fermé conduira à une rotation qui s'avère mesurer la courbure totale de l'aire ainsi circonscrite par le chemin en question.

Détaillons un peu.

Angle d'holonomie

L'angle de rotation ψ ainsi engendré dans le plan tangent par un transport parallèle le long d'un chemin fermé γ s'appelle angle d'holonomie du chemin fermé γ.

holo = « entier » $\Longrightarrow$ liaison entière…

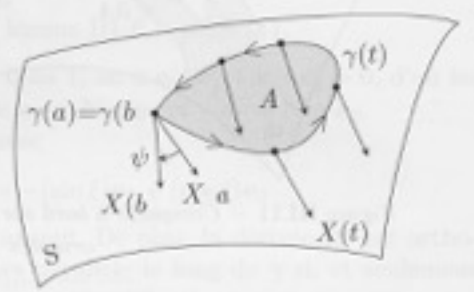


Figure III.12 *Transport parallèle le long d'un chemin fermé*

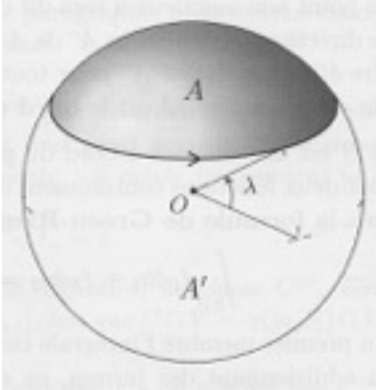


Figure III.13 – *Holonomie d'un cercle parallèle de la sphère*

Théorèmes

- L'angle ψ du chemin γ est égal à la courbure totale sur le domaine A :

$$\psi = \iint_A K d\sigma$$

Il ne dépend donc que du domaine A délimité sur S par γ.

- Sur une surface orientée, la somme des angles α, β, γ d'un triangle géodésique [13] T est donnée par :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_T K d\sigma$$

où K est la courbure de Gauss et $d\sigma$ la mesure de surface (c'est la formule déjà vue de Gauss-Bonnet).

[13] c'est-à-dire dont les trois côtés sont des arcs de géodésiques c'est-à-dire, pour la sphère, de cercles maximaux ayant le centre de la sphère pour centre.

Exemple de la sphère

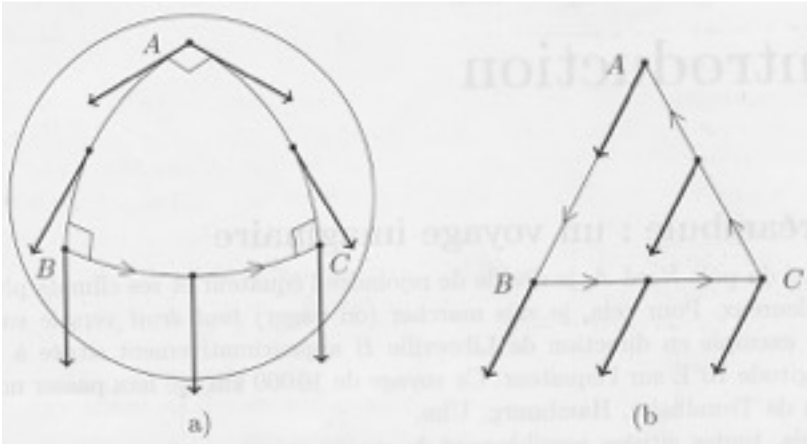
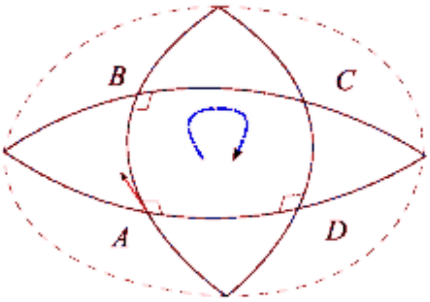
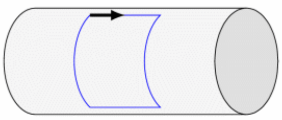
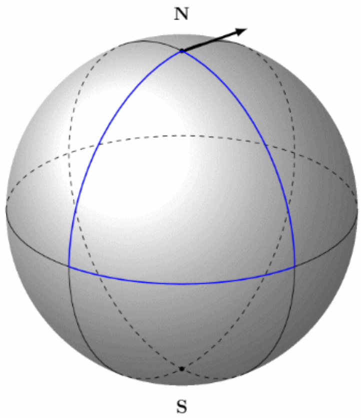


Figure 0.2 — *Transport parallèle d'une flèche, sur la sphère et dans le plan*







Une direction orthogonale à la géodésique AD et parallèle à la géodésique AB se transporte parallèlement selon l'arc A-B-C-D pour revenir finalement au point A avec un angle de rotation qu'on appelle angle d'holonomie.

Formalisons…

Soit la sphère ainsi paramétrée :

$$R(\cos\lambda\cos\theta,\ \cos\lambda\sin\theta,\ \sin\lambda)$$

La base orthonormale du plan tangent est composée des deux vecteurs unitaires tangents :

$$\delta\theta=(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)$$

$$\delta\theta=(-\sin\lambda\cos\theta,\ -\sin\lambda\sin\theta,\ \cos\lambda)$$

Soit une direction déterminée par le vecteur v faisant dans le plan tangent l'angle ξ avec la base ($\delta\theta$, $\delta\theta$) :

$$v=\cos\xi.\delta\theta+\sin\xi.\delta\lambda$$

- Pour un cercle de latitude λ, on aura $\psi=-2\pi\sin\lambda$

  Comme il est clair intuitivement, pour l'équateur ($\lambda=0$), l'angle d'holonomie sera nul.
  Intuitivement, l'angle d'holonomie pour un parallèle non équatorien tient au fait que le plan tangent pivote autour du centre de la sphère (le vecteur normal, orthogonal au plan tangent, est toujours dirigé vers le centre de la sphère) alors qu'on le déplace, sur un parallèle, selon un cercle dont le centre n'est plus le centre de la sphère. Le fait alors que le plan tangent glisse et ne se contente plus de pivoter entraîne sa rotation selon l'angle d'holonomie.
- Pour un triangle géodésique, on aura (formule de Girard) :

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=\pi+KA}$$

(où A est l'aire du triangle)

Cette formule permet clairement de déterminer la courbure d'une sphère de manière intrinsèque :

$$\boxed{K=\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{A}}$$

Résumé provisoire

Distinguer orientation et parallélisme

La parallélisabilité désigne la capacité de tenir globalement une direction localement définie, disons la capacité de **se diriger**.

Comme l'orientabilité, la parallélisabilité est une propriété globale.

Formellement, une surface est parallélisable si son espace tangent (ou fibré tangent) c'est-à-dire la somme disjointe de ses plans tangents est « trivial » c'est-à-dire lisse et sans singularité.

Comme on va le voir, ceci suppose au préalable la capacité de s'orienter mais elle ne s'en déduit nullement.

Par exemple, politiser un espace social, c'est non seulement l'orienter (selon la dualité orientations capitaliste/communiste) pour s'y orienter (en choisissant l'une des deux orientations possibles) mais s'y diriger (en décidant cette fois une direction parmi une infinité possible).

Si une surface/variété n'est pas parallélisable, alors une direction localement déterminée ne pourra être globalement tenue parce qu'il y aura un ou plusieurs points sur la surface/variété où il n'y aura plus de direction tangente : ces points seront des singularités de l'espace tangent, des sortes de trous noirs pour la direction retenue.

Attention : ceci ne contredit pas l'existence d'un angle d'holonomie car celui-ci concerne un chemin sur la surface et donc une région particulière, nullement la totalité des points sur la surface.

On va voir l'exemple de la sphère S^2 qui est globalement orientable mais pas parallélisable en un point au moins : une direction ne peut être absolument partout tenue !

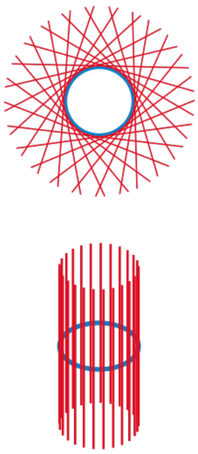
Parallélisabilité ⟹ orientabilité

Pour être parallélisable, il faut que la surface/variété soit orientable.

[Démonstration]

Exemple du cercle, orientable et parallélisable

Orienter T_xM est toujours possible car c'est une propriété locale : tout point d'une variété est localement orientable. Mais orienter l'espace tangent veut dire orienter l'espace tangent total TM (forme de la somme directe de tous les T_xM pour x dans M) de la variété M. En fait, TM est toujours orientable. C'est ici que les choses ne sont pas si simples : pour que TM soit bien une variété il faut réarranger les vecteurs base de ses espaces tangents (haut) de manière lisse et non singulière (bas) :



Les droites tangentes forment un espace lisse (continu et indéfiniment différentiable) mais non disjoint (les droites se coupent). On réarrange alors les droites tangentes dans un espace cylindrique en 3D en sorte qu'elles ne se croisent plus.

Orientabilité ⇏ parallélisabilité

Inversement, il y a des surfaces/variétés orientables qui pour autant ne sont pas parallélisables.

Tel va être l'exemple canonique de la sphère S^2.

Les seules sphères (toutes orientables) qui sont parallélisables sont S^1 (le cercle), S^3 et S^7.

Exemple de la sphère, orientable mais non parallélisable

Théorème dit de « la boule chevelue » : sur une sphère de dimension paire (comme l'est notre sphère ordinaire S2), un champ vectoriel continu s'annule en au moins un point.

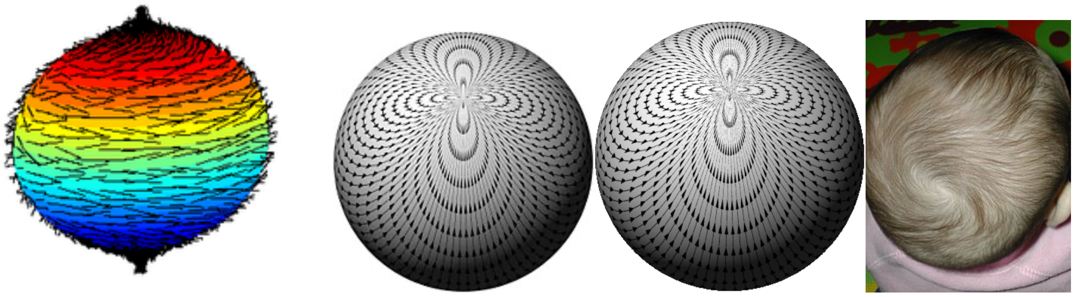
Voir le théorème de Brower : dans un espace vectoriel dimension finie, toute application continue d'une boule fermée dans elle-même admet un point fixe.

Intuitivement…

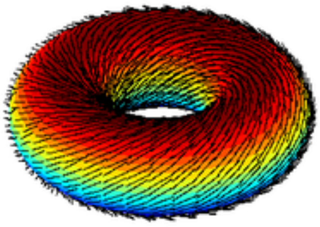
Coiffure

Toute coiffure sur une sphère inclut un épi !

Soit une sphère recouverte de cheveux souples et pas frisés, chaque point de la sphère étant la racine d'un cheveu. On considère la projection du cheveu sur le plan tangent à la sphère au point où le cheveu pousse : l'ensemble de ces projections donne une bonne idée d'un champ de vecteurs tangents sur la sphère. On cherche alors à coiffer ces cheveux en les aplatissant sur la surface de la boule, et en évitant les discontinuités : on ne fait pas de raie, on ne permet pas à des cheveux de changer brutalement de direction les uns par rapport aux autres. Le théorème dit qu'il est impossible d'arriver à ce résultat. Quoi qu'on fasse, on va causer la formation d'au moins un épi, c'est-à-dire d'un endroit où un cheveu se dressera.



Ce ne serait plus le cas sur un tore :



Météorologie

Tout système de vents sur Terre impose l'existence d'un œil de cyclone où la composante horizontale du vent est nulle !

Intellectuellement : sur S^2, toute direction vient, en un point au moins, à ne plus pouvoir être tenue !

Donc la détermination de « tenir sa direction, tenir son point » connaît un point de « castration » (où *ne pas tenir* ne veut pas dire pour autant *céder*).

Un espace non orientable est relevable en un surespace orientable.

On peut relever une surface/variété non orientable en un revêtement orientable à deux feuillets.
On peut ainsi relever la bande de Möbius (non orientable) en un cylindre orientable.
Inversement, on redescend de ce revêtement à la surface/variété initiale par quotientage.

***

On examinera le passage des surfaces aux variétés lors de notre dernière leçon sur Riemann.

Courbes planes

Caractérisation extrinsèque par $C^1 \subset \mathbb{R}^2$

3 formes extrinsèques

Forme cartésienne explicite ⟹ courbe « fonctionnelle »

x⟶y : y=f(x)

Exemple : $y=x^2$ (parabole).

La fonction n'est pas linéaire. La dimension Ox s'intrique avec elle-même. L'auto-intrication entraîne que la courbe… est courbe.

Forme cartésienne explicite ⟹ courbe « équationnelle »

g(x,y)=0

Exemple : $x^2+y^2=C^{te}$ (cercle)

On a ici une intrication entre les deux dimensions indépendantes.

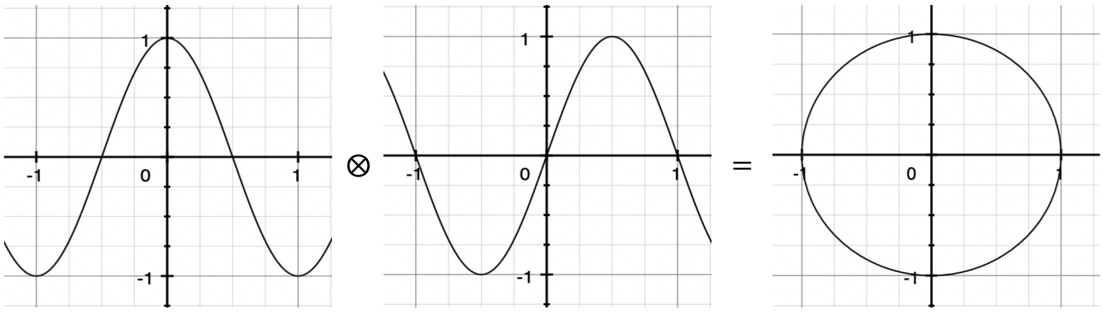
Forme paramétrée ⟹ courbe « paramétrée »

{x(t),y(t)}

Noter que y=f(x) ⟺ {x, f(x)}

Exemple : {r.cosθ, r,sinθ) (cercle)

On a ici l'intrication de deux auto-intrications.



Exemple de la droite dans $\mathbb{R}^3$: {at+b, ct+d, et+f} où {b,d,f} est un point sur la droite et {a,c,e} est un vecteur directeur.

Exemple d'une hélice dans $\mathbb{R}^3$: {r. cos(2πt), r. sin(2πt), at}

Dans un espace euclidien, toute courbe peut être paramétrée.

Forme intrinsèque

Courbe=γ(s) : coordonnée curviligne

Cf. paramétrage selon la longueur d'arc ⟹ le problème dit « de rectification » $\int \|h(s)\|.ds$

Courbure

$K(s)=\|h''(s)\|$

Courbe lisse

Continue, différentiable, indéfiniment différentiable…

Courbe simple

Pas de recoupement !

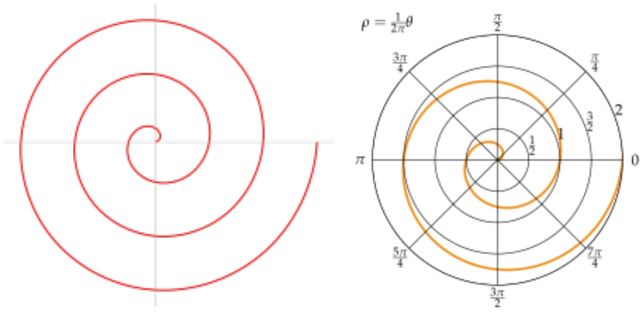
$\forall t \neq t'$, $\{x(t),y(t)\} \neq \{x(t'),y(t')\}$

Courbe régulière

Pas de point singulier !

$\forall t$, $\{u'(t),v'(t)\} \neq \{0,0\}$

Spirale d'Archimède



$\rho = a\theta$

Courbes algébriques

<u>droites</u>

Équation à 2 paramètres :

$$Ax+By+1=0$$

<u>quadriques ou coniques</u>

Équation à 5 paramètres :

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+1=0$$

Parabole, ellipses, hyperboles…

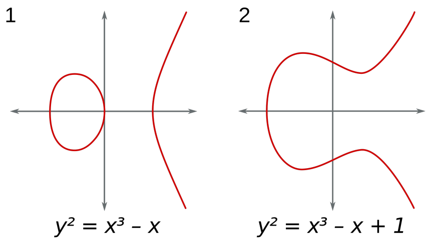
<u>cubiques</u>

Équation à 9 paramètres.

<u>Courbes elliptiques</u>

$y^2=x^3+ax+b$

Exemples :

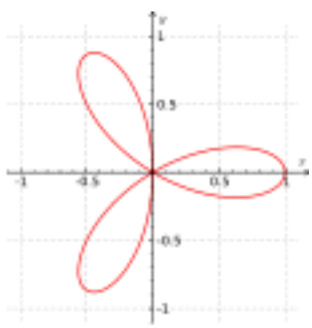


<u>quadratiques</u>

Équation à 14 paramètres :

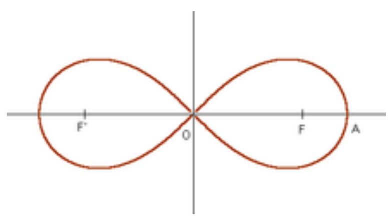
$$(Ax^4+By^4+Cx^3y+Dx^2y^2+Ex.y^3)+(Fx^3+Gy^3+Hx^2y+Ix.y^2)+(Jx^2+Ky^2+Lx.y)+(Mx+Ny)+1=0$$

<u>Trifolium</u>



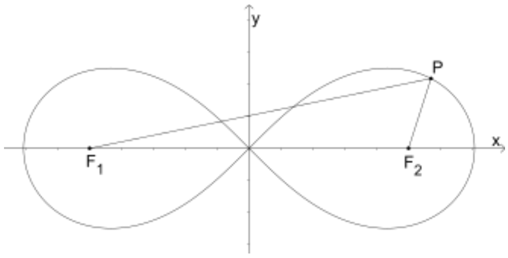
r.cos(3θ) ou {cos(3t).sin(t), cos(3t).cos(t)}

<u>Lemniscate de Bernoulli</u>



$$(x^2+y^2)^2=2d^2(x^2-y^2)$$

Interprétation géométrique



Ensemble des points tels que

$$PF_1.PF_2=OF^2 \text{ ou } |PF_1-PF_2|=OP\sqrt{2}$$

F_1 et F_2 sont les foyers et O leur milieu.

Démonstration de l'équivalence des deux propriétés.

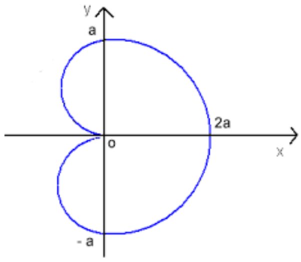
Comme $PF_1^2=OP^2+OF_1^2-2.OP.OF_1.\cos\theta$ et $PF_2^2=OP^2+OF_2^2+2.OP.F_2.\cos\theta$

on a : $(PF_1-PF_2)^2=2(OP^2+OF^2-PF_1.PF_2)$

et donc :

$$PF_1.PF_2=OF^2 \Leftrightarrow (PF_1-PF_2)^{2=}2.OP^2$$

Cardioïde



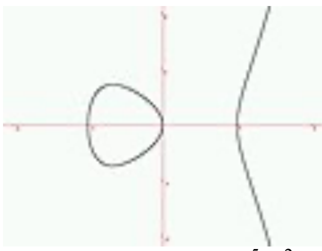
$$(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$$

Cf. en acoustique le micro qui

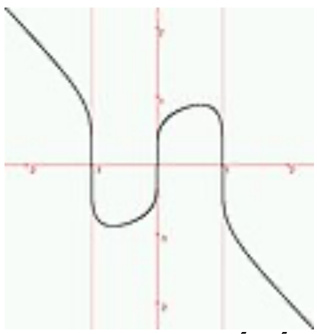
- élimine le son venant de l'arrière ;
- atténue le son venant des côtés ;
- dirigé vers la source, réduit le son réverbéré.

quintiques

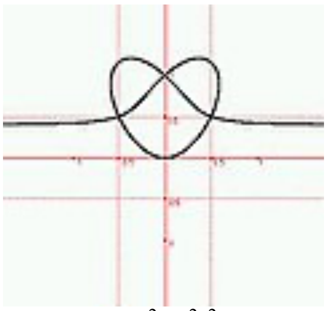
20 paramètres.



Courbe de Burnside : x^5-y^2-x+0



Courbe sinusoïdale : $x^5+y^5-x=0$



Courbe de l'Hospital : $(x^2+y^2)^2(y-2)+y(4x^4+x^2+^{y2})=0$

Surfaces 2D

Caractérisation extrinsèque par $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

3 formes extrinsèques

Forme cartésienne explicite ⟹ surface « fonctionnelle »

$z=f(x, y)$

Exemple : $z=x^2+y^2$ (paraboloïde)

Forme cartésienne explicite ⟹ surface « équationnelle »

$g(x,y,z)=0$

Exemple de la sphère : $x^2+y^2+z^2=C^{te}$

Forme paramétrée ⟹ surface « paramétrée »

$\{x(u,v),y(u,v),z(\underline{t})\}$

Noter que $z=f(x,y) \Leftrightarrow \{x, y, f(x,y)\}$

Exemple de la sphère : $\{R.\cos\lambda.\cos\theta, R.\cos\lambda.\sin\theta, R.\sin\lambda\}$ avec latitude λ et longitude θ.

Dans un espace euclidien, toute surface peut être paramétrée.

Forme intrinsèque

Sphère=$\sigma(\lambda, \theta)$

LEÇONS INTELLECTUELLES

« *Il faut compter sur ses propres forces*. »
« *Les causes externes opèrent par l'intermédiaire des causes internes*. »
Mao Tsé-toung

Résumé

On peut connaître rationnellement une surface de manière intrinsèque, en pure immanence donc, sans avoir pour cela besoin d'un regard extérieur, en surplomb.
On peut, en particulier, savoir de manière endogène si elle est plate ou courbe en un point donné et l'on peut mesurer, toujours de manière endogène, sa courbure en tout point.
La courbure tient en effet à une intrication des deux dimensions intrinsèques de la surface (et non pas à ses trois dimensions {x, y, z} par plongement dans un espace 3D) : la surface est plane quand ses deux dimensions ne sont pas intriquées mais juxtaposées.

La projection arithmétique de l'intrication géométrico-algébrique est la multiplication.

L'opérateur prenant mesure de l'intrication est la métrique.
Cet opérateur peut prendre mesure de l'intrication car il consiste lui-même en une intrication : celle de la règle et du compas (la règle formalise les distances et le compas formalise les angles).

La formalisation algébrique de cette intrication géométrique des distances et des angles est le produit scalaire !

Courbure d'un espace de pensée

On dira qu'un espace de pensée est courbe si ses dimensions constituantes ne sont pas indépendantes mais intriquées : disons relativement (et pas absolument) autonomes les unes par rapport aux autres.

Le paradigme d'un espace 4D courbe est l'espace de pensée communiste : travail (ouvrier-paysan), peuples-pays, humanité-monde, organisation politique. Ses quatre dimensions interagissent entre elles et ne sont pas simplement juxtaposées. On écrira :

travail⊗peuple-pays⊗humanité-monde⊗organisation

On peut, de l'intérieur d'un tel espace, mesurer sa courbure en tout point – c'est-à-dire l'intrication en tout point de ses différentes dimensions constituantes – en se dotant d'une métrique qui intrique une mesure des distances (près/loin) et une mesure des angles (directions bonne/mauvaise).

Dans notre cas politique, la métrique est organisationnelle.

La courbure tient à une intrication de dimension(s).

C'est parce qu'elle est une intrication qu'elle sera plus tard formalisée par le produit tensoriel ⊗.
Courbure s'oppose à platitude (quand droit s'oppose à gauche).
Une droite ou un plan sont plats car ils n'intriquent pas : le fait géométrique correspond au fait que sa formalisation algébrique se fait par des équations linéaires : ax+by+c=0 et ax+by+cz+d=0 [où {a,b,c} sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan].
La forme arithmétique de l'intrication est la multiplication. D'où que les courbes polynomiales ($y=x^2$: parabole ; $yx=C^{te}$: hyperbole) soient courbes. x^2 formalise l'auto-intrication d'une même dimension (la dimension s'intrique avec elle-même) ; xy formalise l'intrication de deux dimensions indépendantes.

Les espaces modernes sont courbes.

Les espaces modernes sont des espaces **courbes** (dits non euclidiens).
Les espaces classiques sont des espaces **droits** (dits euclidiens) c'est-à-dire compris par les modernes comme des espaces courbes dont la courbure est nulle !
En cette affaire, l'inauguration de la modernité se déclare en **1827**.

Cette courbure concerne les espaces modernes de pensée.

Les espaces modernes ne se réduisent nullement aux espaces physiques et naturels. Ils concernent tout autant (et pour nous avant tout) des espaces subjectifs de pensée :
- les espaces harmoniques en musique,
- les espaces de fonctions en mathématiques,
- les espaces militants en politique (régions politiques, peuples…),
- les espaces amoureux des questions traitées en commun par un couple,
- …

Les espaces modernes de pensée sont donc également courbes.

- Cf. la *Divine comédie* de Dante s'engage sur un problème de courbure existentielle :
  « *Au milieu du chemin de notre vie,*
  je me trouvai par une forêt obscure
  car la voie droite avait été gauchie. »
- Cf. l'existence subjective *moderne* assume que la vie droite se trouve gauchie par des rencontres événementielles. Le projet d'une vie qui resterait purement droite relèverait d'une conception *classique* de l'existence subjective (voir détails plus loin).

La courbure de ces espaces est intrinsèque.

Principale leçon des mathématiques modernes : la courbure des espaces est une propriété essentiellement intrinsèque (cf. la *courbure de Gauss*). Donc, pour la connaître et la pratiquer, pas besoin d'un recours subjectif à un regard extrinsèque en surplomb. Pas besoin d'en passer par « un sujet supposé savoir », par un X^{logue} (un politologue, un musicologue, un épistémologue, un sexologue, un anthropologue, un sociologue…), pas besoin de recourir à des universitaires ou des curés. L'exploration d'un espace de pensée peut compter sur ses propres forces intrinsèques !
D'où cette orientation générale : <u>la modernité met l'immanence, l'intériorité et les causes internes au poste de commandement</u>.

Le moderne privilégie l'intrinsèque.

Gauss met en évidence le caractère intrinsèque de sa courbure (par opposition à celle de Sophie Germain : la courbure *moyenne*), extrinsèquement définie.
Rappelons que sa courbure est la <u>multiplication</u> des deux courbures principales, extrinsèquement définies :

$$K_{Gauss}=k_{max}.k_{min}$$

Comme on le voit également avec Galois et avec les tenseurs, un produit peut annuler une variation :

$$\text{invariance} = \Delta.\nabla = \text{covariance}\otimes\text{contravariance}$$

Riemann va faire un pas de plus en construisant cette courbure de manière entièrement intrinsèque ce qui passera par une caractérisation intrinsèque de ce qu'est une variété, constituante d'une telle courbure : on ne va plus caractériser une courbe (à 1 dimension), une surface (à 2 dimensions) ou une hypersurface (à n dimensions) par les coordonnées de ses points dans un espace ambiant de référence mais par une manière intrinsèque de la surface de <u>s'autoparamétre</u>r, c'est-à-dire de prendre mesure de ses dimensions et de leur intrication. Et c'est ce caractère immanent de la surface qui va autoriser une approche intrinsèque de sa courbure.
Cette manière d'intelliger les choses non plus extérieurement, en surplomb, par leur apparence ou par les phénomènes qu'elles génèrent chez un observateur extrinsèque, qui en un certain sens les transcende, mais de manière immanente, intrinsèque, endogène est éminemment moderne.

- Voir la problématique politique moderne (Mao) où « les causes externes agissent par les causes internes », où « il faut principalement compter sur ses propres forces ».
- Voir la problématique psychanalytique moderne (Lacan) du « désir inconscient » : l'émancipation du sujet est d'assumer son désir inconscient pour le meilleur et pour le pire, non de se victimiser.
- Voir la problématique poétique moderne (Gerard Manley Hopkins) de l'inspect plutôt que de l'aspect : la poésie saisit chaque chose dans la tension intérieure (*instress* ou *intension*) qui soutient la forme que la chose prend pour elle-même (l'*inspect*).
- Voir la problématique philosophie moderne (Badiou) des mondes dont la consistance relève d'une logique (intuitionniste) interne et non pas de son immersion dans l'environnement global d'un univers.
- Voir la problématique intellectuelle moderne de la forme, non plus comme contenant formel d'un contenu réel, opérant donc dans un unique espace ambiant, mais comme espace relativement autonome de formalisation, constituant d'enjeux interprétatifs dans des modèles qui existent alors dans un autre espace, non plongé-immergé dans celui des formes.
- Voir ce que la problématique postmoderne comporte alors d'antimoderne lorsqu'elle privilégie la relativisation des espaces autonomes par immersion dans un espace environnant (musical→sonore, politique→social, culture→nature, amour→contrat, etc.).

La forme moderne n'est pas un contenant.

Elle n'a pas de contenu qu'elle contiendrait ou habillerait.
C'est une structure ossaturante qui peut devenir squelette de différents domaines ou corps.
Toute forme est le résultat d'un processus de formalisation (littérale), formulation (langagière) ou formation.

On peut marcher droit dans un espace courbe.

On peut cependant marcher droit - c'est-à-dire au plus court - dans un espace courbe (cf. les *géodésiques*). La modernité ne récuse pas en bloc l'idée de droiture mais elle promeut une ***droiture de type nouveau***, une droiture impure car courbée par intrication de gauchissements.
Dans la modernité, la pureté de la droiture classique tend au dogmatisme (voir la 7° leçon).

Dans un espace courbe, toute déviation n'est pas une déviance.

Une même direction fermement tenue lors d'un parcours de travail peut conduire à des inflexions ou déviations résultantes (cf. la problématique dite du *transport parallèle*). Que la direction d'arrivée s'écarte de la direction de départ ne signe pas un laisser-aller opportuniste, une déviance, voire une infidélité mais tout au contraire une fidélité maintenue lors d'un cycle de travail.
Mieux : **cette inflexion résultante mesure le travail accompli** selon la directive générale car sans inflexion, pas de vrai travail accompli mais simplement une répétition stérile.
Dans un espace moderne de pensée, une déviation n'est pas nécessairement une déviance (comme elle l'est dans un espace classique de pensée).

Il faut intriquer au moins deux dimensions pour que la courbure soit intrinsèque.

Une loi mathématique est que la courbure extrinsèque d'une variété ne peut devenir intrinsèquement appréhendable qu'à partir de deux dimensions au moins. A contrario, l'habitant d'une simple courbe ne peut avoir rapport à l'éventuelle courbure de la courbe dans/sur laquelle il vit.

> Intuitivement, si l'on appelle *courbure* d'un parcours son allongement et, inversement, si l'on appelle *droiture* d'un parcours le plus court chemin entre deux points, on comprend bien que sur une courbe donnée, il n'y a qu'une manière d'aller d'un point à un autre et qu'il n'y a donc aucun moyen de réaliser, de l'intérieur de cette courbe, qu'il pourrait en exister des raccourcis.

Ainsi la notion même de courbure change de nature à partir de deux dimensions : elle devient alors associable à une intrication (ipso facto intrinsèque) entre deux dimensions et non plus seulement à une apparence extrinsèque (où la variété est vue à partir d'un espace plus vaste dans lequel elle est plongée et où la courbure tient alors à un regard extérieur, à une position de surplomb sur la variété, à une évaluation extrinsèque de la variété courbe).

> Bien sûr, une telle intrication n'a pas de sens en un espace unidimensionnel : l'intrication présuppose l'existence d'une dualité dimensionnelle (on ne s'intrique pas à soi-même !).

Cette loi a des raisonances intellectuelles immédiates avec l'existence subjective de chacun.
Détaillons-le.

- Appelons *vie droite* une vie qui s'autonorme en nouant trois principes, indépendants des circonstances extérieures et des rencontres exogènes : *faire ce que l'on dit, penser ce que l'on fait et dire ce que l'on pense*.
  Un tel paradigme de la vie droite exhausse une vie unidimensionnelle restant indifférente aux inflexions que seul un observateur extérieur pourra constater. De l'intérieur d'une telle vie droite, pas de courbures envisageables en sorte que son dilemme subjectif est l'alternative classique (sans tiers exclu) : vivre ou céder.
- Appelons *vie en vérités* une vie qui s'ordonne à quelques fidélités événementielles, procédant donc de rencontres aléatoires librement [14] assumées selon une implacable discipline des conséquences.
  Un tel type de vie ne peut qu'être courbé par les rencontres événementielles qui infléchissent, courbent, bloquent, détournent, obliquent, diagonalisent les trajectoires vitales.
- Appelons maintenant *existence subjective* une vie qui intrique *vie droite* et *vie en vérités* [15].
  Une telle existence se déploie dans un espace bidimensionnel puisque *vie droite* et *vie en vérités* ne sont pas parallèles (mathématiquement dit, elles sont linéairement indépendantes). En effet, par

[14] La liberté n'est pas la négation de contraintes mais tout au contraire, la liberté est ce qui contraint : un acte libre n'est pas sans contraintes mais un acte qui contraint… à ses conséquences. Être libre, c'est assumer les conséquences de tous ses actes, fussent-ils manqués et involontaires, et non pas refuser toute contrainte extérieure dans le fantasme d'un libre et capricieux arbitre.
[15] En toute rigueur, il faudrait alors compléter l'intrication en y incorporant la nécessaire *survie* (celle que pointe Spinoza en posant que « chaque chose, autant qu'il est en elle, s'efforce de persévérer dans son être ») et poser :

$$\textit{existence subjective} = \textit{survie} \otimes \textit{vie droite} \otimes \textit{vie en vérités}$$

définition, la vie droite procède d'une *autonorme* endogène quand la vie en vérités, par définition également, se nourrit de rencontres exogènes et aléatoires et relève donc d'une *hétéronorme*.
Une telle existence subjective accède ce faisant à une capacité de *se* courber, plus exactement à la capacité que la vie en vérités vienne courber la vie droite pour engager cette *divine comédie* de l'existence qui s'annonce sous le signe d'une « voie droite gauchie ».

Rendue en ce point, la modernité mathématique des espaces courbes nous apprend qu'une telle existence subjective est en état d'intérioriser sa courbure, de la comprendre intrinsèquement, par là de l'orienter et de la diriger de manière endogène : autant dire qu'une telle existence subjective pourra librement se disposer sous le régime de ses propres conséquences ; elle pourra s'infléchir, se détourner, contourner, adopter des chemins de traverse, des obliques et des diagonales, se déplacer en tenant compte des circonstances et rencontres, mais tout aussi bien dégager les géodésiques lui autorisant de marcher droit dans un espace courbe !
Ce faisant, la courbure intrinsèque d'une telle existence subjective ne sera plus conçue comme un défaut (défaut de vie droite…) mais comme une puissance subjective de type de nouveau : comme capacité créatrice d'intriquer le travail subjectif tortueux d'un faisceau de vérités à la rigueur subjective d'une voie droite !
Autant dire que la mathématique moderne encourage ainsi chacun dans l'ambition d'une existence subjective intriquant vie droite et vie en vérités.

Penser le global avec la modernité mathématique

La notion de global joue aujourd'hui un rôle prépondérant dans les discours politiques : l'époque serait celle de « la globalisation » et elle requerrait de « penser globalement et agir localement ».
Mon interrogation sera ici double :
1) Que veut exactement dire « global » ?
2) Quel rapport exact y a-t-il entre global et local ?
C'est ici que les mathématiques modernes peuvent nous éclairer (où pourrions-nous d'ailleurs trouver d'autres éclaircissements sur ces questions ?) car **la dialectique mathématique local/global s'avère éminemment moderne** : elle n'opérait pas comme telle dans l'ère classique.

À examiner ces mathématiques, le point m'apparaît le suivant :
- le local est mathématiquement caractérisé de manière <u>univoque</u> (comme voisinage d'un point) alors que le global reste une notion largement <u>équivoque</u> (nous allons voir comment, en distinguant trois acceptions mathématiques de ce que global veut dire) ;
- mathématiquement, le rapport local/global ne va nullement de soi (nous allons examiner ses différentes modalités), non seulement parce que **local se dit de manière univoque et global de manière multivoque** mais parce que ces deux notions ne sont toujours intrinsèquement couplées.

<u>Local univoque</u>

Local a une signification univoque : local désigne ce qui entoure un petit espace d'aussi près qu'on veut (un *voisinage*).
La propriété qui ici compte est celle d'entour, non celle de proximité. :
1) un voisinage doit incorporer ce qui approche le point *de tous côtés* pour éviter que le point en question ne se situe au bord de ce domaine (à sa *frontière*) ;
2) un voisinage peut être étendu jusqu'à l'espace tout entier puisque toute partie contenant un voisinage devient ipso facto un voisinage.

<u>Global multivoque</u>

Par contre, la notion de global n'a rien d'univoque !
Je propose d'en distinguer trois sens, qui ne sont nullement équivalents.
Présentons-les à propos d'une surface telle la sphère.

<u>Global $\mathcal{G}$</u>

au sens d'une propriété généralisant une propriété locale, c'est-à-dire une propriété locale « partout » vraie

Une propriété locale sera dite globale si elle est valide en tout point, c'est-à-dire partout.
Par exemple, le plan localement tangent à une sphère existe en tout point de la sphère. Pour une sphère, la propriété « être tangentiable » sera donc globale, non pas qu'il existerait un plan tangent global (!) mais simplement qu'il existe un tel plan en tout point de la sphère.

Une propriété globale est donc ici une propriété **locale** partout valide, une propriété locale généralisée.

Global $\mathcal{P}$

au sens cette fois d'une propriété prolongeant une propriété régionale « d'un bout à l'autre », « de part en part » de la surface considérée

Le global est ici une propriété qui appréhende la surface du point d'un fil rouge la traversant de part en part, d'un bout à l'autre.

Par exemple, toute sphère configure des cercles de circonférences maximales et toutes égales (par exemple les méridiens du globe terrestre) qui, chacuns, appréhendent globalement la sphère.

En ce deuxième sens, le global opère comme une prolongation d'un parcours régional (c'est-à-dire reliant deux points séparés) ; il ne s'agit donc pas ici d'étendre un voisinage mais de prolonger une existence **régionale** : ce global $\mathcal{P}$ ne part donc plus du local mais du régional.

On verra, via l'analyse complexe de Cauchy, l'importance de cette propriété pour les fonctions complexes dites analytiques : toute fonction, régionalement établie par lien construit entre deux points, s'avèrera globalement prolongeable.

Global $\mathcal{T}$

au sens enfin d'une propriété caractérisant la surface « en bloc », « d'un seul tenant »

En ce dernier sens, une propriété sera dite globale si elle caractérise cette fois la surface dans son entier, d'un seul tenant, dans son homogénéité de bloc.

Par exemple, la sphère sera globalement caractérisable par le fait que toute triangulation y conduit à une même caractéristique d'Euler valant 2 (nombre de faces – nombres d'arêtes + nombre de sommets).

Ici la propriété globale n'entretient de rapport intrinsèque avec une propriété locale qu'elle généraliserait ou régionale qu'elle prolongerait. Elle est **spécifiquement globale**. Elle saisit la surface d'un seul tenant sans référence à quelque propriété locale ou régionale.

Donc trois sens du global, correspondant à trois types très différents de rapport au local :

A. le global $\mathcal{G}$ comme généralisation du local ;
B. le global $\mathcal{P}$ comme prolongation (intégrale) du régional ;
C. le global $\mathcal{T}$ comme un seul tenant sans rapport au local ou régional.

Remarquons que ces trois « global » se distinguent d'un « total » (celui qui prend exemplairement la forme d'une intégrale, telle celle mise en œuvre pour calculer la courbure totale d'une surface).

Il faudrait examiner les rapports qui peuvent s'instaurer entre nos trois modalités $\mathcal{G}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$.

Par exemple, une surface orientable affirme la cohérence globale d'une propriété locale (l'orientabilité) partout et relie ainsi $\mathcal{G}$ et $\mathcal{T}$.

Examinons à cette lueur nos deux poncifs sur le monde contemporain.

L'inanité du poncif « penser globalement, agir localement »

A. Si le global $\mathcal{G}$ s'entend comme généralisation, on peut admettre cette maxime mais il faut alors s'interroger par quelle opération magique cette action locale pourra se généraliser en sorte d'être « partout » mise en œuvre : la réponse convenue consiste à faire valoir les vertus contagieuses de l'exemple individuel – autant dire qu'on côtoie ici la religiosité individualiste.
B. Si maintenant le global $\mathcal{P}$ est conçu comme prolongation du régional, alors son socle ou sa base de lancement n'est plus l'action locale mais l'action restreinte (entendue comme action non globale ambitionnant de constituer ses régions et donc de dépasser l'action locale) en reliant deux actions locales différentes sous une dynamique unifiante d'un autre ordre, non commensurable au local.
Dans ce cas, la maxime devrait être : « pensée globale et action restreinte c'est-à-dire régionale ».
C. Si enfin le global $\mathcal{T}$ relève du « un seul tenant », alors aucune action locale n'est susceptible d'en prendre mesure, et la maxime convenue s'avère donc un pur et simple appel à renoncer à toute ambition globale.

Donc dans les trois cas, notre maxime est au mieux inopérante, au pire démobilisatrice.

« Globalisation » du monde contemporain

Il devient également possible d'examiner l'idée de globalisation sous le triple angle de $\{\mathcal{G}, \mathcal{P}, \mathcal{T}\}$.

A. Entendue comme global $\mathcal{G}$, la globalisation désignera la généralisation du capitalisme ; cela voudra dire que le capitalisme domine partout, est partout hégémonique : il n'existe plus de lieu sur Terre qui ne soit sous sa coupe.
B. Entendue plutôt comme global $\mathcal{P}$, la globalisation désignera la prolongation d'un bout à l'autre du globe des échanges marchands, monétaires et financiers, et la communication capitaliste planétaire ; ici la globalisation met plutôt l'accent sur le fait que toutes les terres, toutes les mers et tous les airs sont désormais sillonnés, d'une extrémité à l'autre de la Terre, par la circulation des marchandises, des monnaies et des capitaux, par la communication capitaliste prévalant d'un bout à l'autre du monde contemporain.
C. Entendue enfin comme global $\mathcal{T}$, la globalisation désignera plutôt que le monde est désormais capitaliste d'un seul bloc (contre l'ancien partage du monde en deux blocs et un Tiers-Monde). Ici, plus de rapport du global à quelque réalité locale que ce soit.

S'orienter *et* se diriger

Dans ce que l'on appelle communément « orientation de la pensée », il faut clairement dialectiser deux opérations : l'une d'orientation proprement dite, l'autre de direction. Autrement dit il faut dialectiser le fait de s'orienter (dans la pensée) et le faire de se diriger (dans la pensée).
Pour se diriger, il faut s'orienter mais s'orienter ne suffit pas à se diriger.

S'orienter, lorsque c'est possible (et cela ne l'est pas forcément partout et en toute circonstance), se fait selon deux dispositifs inverses et deux seulement.

> Cf. s'orienter politiquement se fait selon une orientation capitaliste ou une orientation communiste. Il n'y en a pas d'autre.
> Mais il n'est pas possible de s'orienter politiquement en tout domaine de l'existence : toute existence n'est pas ipso facto politisable (tout n'est pas politique !).
>
> Cf. s'orienter sexuellement se fait selon une orientation-homme ou une orientation -femme. Il n'y en a pas d'autre : il y a deux sexes et deux seulement.
> Mais il n'est pas possible de s'orienter sexuellement en tout domaine de l'existence : toute existence n'est pas ipso facto sexualisable (tout n'est pas sexuel !)

Se diriger selon une orientation retenue peut par contre se faire d'une infinité de façons différentes.
Une fois une direction décidée, la tenir en tout point et en toute circonstance n'est pas toujours envisageable.
Deux problèmes s'avancent ici :

1) si l'espace est courbe, tenir une même direction le long d'un parcours fermé conduira à une inévitable déviation (angle d'holonomie) qui ne signifie nullement une déviance (entendue comme relâchement ou abandon de la direction prise) mais au contraire son travail effectif au fil d'un périmètre entourant un sous-domaine ;
2) il se peut qu'en un point au moins de l'espace orienté, cette direction ne soit plus soutenable, qu'il y ait donc un « <u>trou noir</u> » de l'espace orienté pour la direction décidée. Il se peut donc que dans un espace orienté, il n'y ait pas de direction globalement soutenable c'est-à-dire qui soit tenable en tout point de l'espace considéré.

> Ainsi, non seulement toute existence n'est pas politisable ou sexualisable, mais tout domaine (courbe) politisé ou sexualisé implique d'inévitables déviations dans les directions soutenues et un domaine politisé ou sexualisé peut aussi impliquer d'inévitables trous noirs pour ces directions.

Tous ces résultats mathématiques constituent d'heureux garde-fous contre les inévitables tentations dogmatiques !

Histoires imbriquées

La figure d'une courbe dessinée sur une surface – mieux encore : sur une variété (généralisant les surfaces à n dimensions et les « variant » c'est-à-dire les diversifiant en différents feuillets collés ensemble) est-elle susceptible de nous aider à penser l'intrication des existences individuelles dans la grande Histoire de l'humanité via différentes histoires qu'on dira « régionale » ?

> Songeons ici aux biographies qui « graphent » une existence individuelle insérée dans une plus vaste histoire régionale (par exemple celle de la musique pour un compositeur, associée à celle d'un pays et bien sûr d'une époque donnée), elle-même partie prenante de l'histoire globale de l'humanité.

Comment s'intriquent ici histoire locale, régionale et globale ?

Peut-on la formaliser comme l'intrication d'une courbe, d'une surface ou d'un feuillet et d'une variété ?

Formalisons cela au plus simple : comme une courbe γ sur une surface S en deux dimensions paramétrées par $\{l, t\}$ – un paramètre de localisation, un paramètre temporel.

Soit $S=\sigma(l, t)$

La courbe ou le chemin γ est inscrit sur S dans l'intervalle $[t_0, t_1]$. Dans $\sigma(l, t)$, il se caractérise par $l_\gamma(t)$.

$$\Rightarrow \gamma = \int_{t_0}^{t_1} \sigma[l_\gamma(t), t]$$

Peut-on, à partir de cette formalisation minimale, examiner notre intrication de trois types (local, régional, global) d'histoire ?

Quel rapport déjà entre les courbures de la courbe et celle de la surface ?

Premier enseignement

La courbure de la courbe ne saurait être intrinsèque. D'où qu'**on ne peut avoir de compréhension intrinsèque d'un itinéraire qu'en l'intriquant à une histoire collective, constituant une région de l'histoire globale de l'humanité**.

Second enseignement

Dérivons $\gamma=\sigma[l_\gamma(t), t] \Rightarrow \gamma'_t=[\sigma'_l.(l_\gamma)'_t+\sigma'_t]dt$

La dérivée du chemin par rapport au temps est la somme d'une composante globale (la dérivée générale de la courbe par rapport au temps) et d'une composante propre à ce chemin. Autrement dit, **la direction chronologique individuelle somme une direction chronologique globale et une composante propre**.

Troisième enseignement

Selon quelle formule la courbure (extrinsèque) du chemin est-elle reliée à la courbure (intrinsèque) de la surface ?

Cartographier intellectuellement la mathématique moderne ?

En anticipant sur les variétés riemanniennes, dotées d'un atlas (ensemble cohérent de cartes recouvrant la totalité de la variété), on peut dire que ce travail consiste à cartographier certaines régions de la mathématique moderne, c'est-à-dire de les mettre intellectuellement « à plat » en les associant étroitement à différents réseaux discursifs.

***

Documentation

Livres

- *Gauss – Une révolution de la théorie des nombres* (coll. Génies des mathématiques ; 2018)

- François Rouvière : *Initiation à la géométrie de Riemann. Première partie : Surfaces et géométrie de Gauss* (Calvage & Monnet, 2016)
- Sous la direction de Jean Dieudonné : *Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900)* ; tome II, chapitre IX : *Géométrie différentielle* par Paulette Libermann (Hermann, 1978)

Documents

Xinwei Yu

- Vidéo : *Gauss Remarkable Theorem*
  https://www.youtube.com/watch?v=-OIEDeOsg20
- Cours : *Math 348 A1 Fall 2016*
  http://www.math.ualberta.ca/~xinweiyu/348.A1.16f/

CNRS

Johann Colombano : *Visualiser la courbure. Du rayon de courbure au tenseur de Riemann*
http://images.math.cnrs.fr/Visualiser-la-courbure.html

Vidéo

Jean Pierre Bourguignon : *Espaces courbes de Gauss à Perelman, en passant par Einstein*
https://www.youtube.com/watch?v=A7yc3WZXtcM

***