Sixième leçon de maths modernes

Théorie des quaternions (Hamilton, 1843)

(20 mars 2022)

ARGUMENTAINE

Problématisation

Intellectuelle

À l'heure où le monde contemporain s'oriente selon la perspective d'une guerre généralisée, tant extérieure entre blocs impériaux qu'intérieure aux différents pays, il est plus que jamais nécessaire de se demander : qu'est-ce que « s'orienter » et de quoi a-t-on intellectuellement besoin pour ce faire ?
En ce point, les mathématique modernes nous fournissent un nouveau trésor de pensée : la théorie des quaternions, établie par Hamilton à partir de 1843 (et donc en contemporanéité inattendue avec l'orientation politique élaborée à partir de 1844 par Marx et Engels).

Mathématique

On abordera cette théorie mathématique en partant des trois questions techniques suivantes.

1) Une question d'**algèbre** : pourquoi les triplets de $\mathbb{C}[j]$ (adjonction de « j » au corps $\mathbb{C}$ des complexes) ne peuvent faire corps et pourquoi faut-il donc augmenter les dimensions des espaces algébriques non pas selon une progression arithmétique {1, 2, 3…} mais selon une progression géométrique $\{2^0=1,\ 2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8\ldots\}$? Autrement dit, pourquoi faut-il *étendre* (opération qualitative) par *adjonction* plutôt que simplement *généraliser* (opération quantitative) par *ajout* ?
2) Une question de **géométrie** : pourquoi, pour s'orienter dans un espace vectoriel 3D, vaut-il mieux recourir à une quatrième dimension (d'un autre type : numérique), apte à paramétrer et synthétiser l'ensemble ?
   On examinera la parenté de ce problème avec la pseudo-métrique de l'espace-temps « $dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$ » par Minkowski (1907).
   On rapprochera également le problème des singularités inorientables en 3D (telle « la boulue chevelue ») du problème mécanique dit de « blocage du cardan ».
3) Une question d'**intrication** mathématique : pourquoi les deux questions précédentes s'avèrent-elles deux faces (algébrique et géométrique) d'une même question mathématique ?

Théorie mathématique

I. <u>Algèbre</u> : *formalisation* des quaternions

On partira d'une perspective algébrique : ayant étendu le corps $\mathbb{R}$ en corps $\mathbb{C}=\mathbb{R}[i]$ par l'adjonction de **i**, comment étendre à son tour le corps $\mathbb{C}$ en un nouveau corps, et par quelle adjonction $\mathbb{C}[x]$?
Une fois clarifié pourquoi les triplets x+iy+jz ne peuvent former un corps $\mathbb{C}[j]$, on examinera la solution apportée par Hamilton : celle des quaternions s+ix+jy+kz et de leur corps $\mathbb{H}=\mathbb{C}[j,k]$.
Les conditions auxquelles les nouvelles grandeurs adjointes **j** et **k** doivent satisfaire ($i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ et borroméanité ij=k, jk=i, ki=j) imposent alors un prix à payer pour cette nouvelle extension : la **non-commutativité** de la multiplication ($qq'\neq q'q$).
Mais ce prix a lui-même sa <u>contrepartie positive</u> en l'existence d'une nouvelle opération que seule la non-commutativité justifie : la *conjugaison* quaternionique qVq^{-1} .
Cette opération 4D de type nouveau va déboucher sur une propriété imprévue : sa capacité à formaliser les rotations dans un espace vectoriel en 3D.

II. <u>Géométrie</u> : *interprétation* des quaternions

Pour ce faire, on va interpréter géométriquement (de manière donc *intramathématique*) l'algèbre des quaternions :

- de même que la *multiplication* complexe formalise algébriquement la géométrie des ampli-rotations dans le plan $\mathbb{C}$ (en 2D donc), de même la *conjugaison* quaternionique formalise algébriquement la géométrie des ampli-rotations dans l'espace $\mathbb{H}$ (en 4D) ;
- mais la *conjugaison* quaternionique unitaire vient également formaliser algébriquement la géométrie des rotations dans l'espace vectoriel 3D inclus dans $\mathbb{H}$ (corrélativement à son invention

des quaternions, Hamilton invente également les *vecteurs*, un quaternion étant la somme paradoxale d'un scalaire et d'un vecteur !).

On débouchera ainsi sur cette propriété décisive pour nos problèmes d'orientation : l'espace des conjugaisons quaternioniques unitaires est isomorphe à l'espace 3D des rotations vectorielles.

III. Analyse : *fonctions* quaternioniques

Pour prendre le temps d'interpréter intellectuellement l'espace propre de ces grandeurs de type nouveau et la dialectique *quaternions 4D /vecteurs 3D*, on renverra l'étude de l'*analyse quaternionique* à l'année prochaine.

Interprétation intellectuelle de cette théorie

À partir de cette théorie mathématique, il s'agira pour nous d'en tirer différentes conséquences intellectuelles en matière d'orientation dans la pensée.

1) On dégagera comment caractériser les espaces vectoriels en 3D dans lesquels il s'avère possible de s'orienter.
2) On qualifiera ensuite les différents gestes de pensée dont procède l'acte de s'orienter dans de tels espaces.
3) On analysera également les différentes manières corrélativement offertes à la sophistique postmoderne pour désorienter les consciences individuelles et collectives.
4) On explorera enfin différentes situations concrètes susceptibles d'opérer comme modèles interprétatifs pour une telle problématique d'orientation.

Au total, il s'agira de s'approprier cette leçon mathématique : *pour orienter une intervention dans un espace vectorisé à trois dimensions, il vaut mieux plonger ce 3D dans un espace étendu 4D en sorte d'y diriger sa pensée*.

A) Dans quel type d'espace de prensée s'orienter ?

On le reverra avec la géométrie riemannienne : tout espace n'est pas orientable [1], mais s'il l'est, il l'est alors de deux façons duales et de deux seulement [2] (binarité essentielle : toute orientation s'inscrit dans une adversité).

Concernant spécifiquement un espace vectoriel 3D, s'y orienter implique les opérations suivantes :

- le considérer comme espace de trois possibilités orthogonales (et non plus d'une seule comme dans le cas des grandeurs complexes) ;
- dans cet espace 3D des possibles, nouer borroméennement (ij=k, jk=i, ki=j) les différentes possibilités et les intriquer (ijk=-1) aux effectivités ;
- adjoindre, à cet espace 3D des possibles, une quatrième dimension d'un type *numérique* (et non plus *vectoriel*), apte à paramétrer l'ensemble des possibles comme à s'autoparamétrer elle-même en sorte de constituer ainsi un espace 3+1=4D étendu doté, de manière endogène, d'une mesure synthétique d'*effectivité*.

B) Se repérer, se situer, se diriger

S'orienter dans un tel espace 4D implique alors de

- s'y <u>repérer</u> (en adoptant un **repère** d'orientation) ;
- s'y <u>situer</u> (en établissant la **position** de départ) ;
- s'y <u>diriger</u> (en décidant une **direction** d'intervention).

Ainsi, c'est une chose d'*être passivement orienté* dans un espace vectoriel 3D (telle une aiguille aimantée dans un champ magnétique) ; c'en est une tout autre que de *s'orienter activement* selon un projet d'intervention (dialectisant effectivités et possibilités et, pour ce faire, réorientant régulière-

[1] D'où que tout espace ne soit pas (intégralement) politisable ou sexualisable : songeons ici à celui du *monde-Musique*…

[2] qui découlent directement du signe « plus » ou « moins » (±) attaché au déterminant de toute matrice d'orientation…

ment la direction stratégique adoptée), ce qui nécessite alors de penser l'espace initial 3D de manière étendue (3+1 ou 3.1D), *i.e.* selon une Idée globalement directrice.

C) Comment la sophistique contemporaine s'acharne à désorienter les consciences

L'époque s'attache à désorienter les consciences au moyen de différents sophismes, explicitables à la lumière de ce qui précède.
En allant de la plus globale à la plus locale, on distinguera quatre méthodes de désorientation.

- Rabattre l'espace d'intervention, intérieurement dialectisé entre effectivités et possibilités, en un simple espace réaliste tenu tel quel pour habitable, au moyen d'une assimilation indue de $\mathbb{H}$ à $\mathbb{R}^4$ (analogue à la réduction « réaliste » de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).
- Réduire (vers le bas, par projection indue) ou noyer (vers le haut, par immersion confuse) le nombre des dimensions pour les espaces dans lesquels l'humanité entreprend collectivement de s'émanciper en sorte d'enfermer celle-ci dans des espaces où elle n'a plus d'autre horizon pragmatique que la survie animale.
- Dénigrer la binarité (celle qui opère au principe de tout repère d'orientation) selon la maxime nihiliste : « *plutôt vouloir la désorientation et vivre sans boussole qu'assumer la rigueur d'une orientation prise dans une adversité binaire !* »
- Prétexter la juste nécessité de repères locaux [3] pour défaire la nécessité corrélative de coordonner stratégiquement l'inévitable prolifération des ajustements locaux.

D) Trois modèles de subjectivités concrètes

À cette lumière, on examinera trois situations, possibles « modèles » pour une telle « théorie » de l'orientation :

- situation cinématographique selon le surprenant « *axiome du montage x+3=1* » de Jean-Luc Godard (*Cahiers du cinéma*, octobre 2019) ;
- situation existentielle concernant la possibilité pour un sujet individuel d'orienter son existence *en vérités* (i×j×k ≡ *militantisme politique* × *composition musicale* × *études mathématiques*) en paramétrant synthétiquement l'effectivité de cette existence subjective selon un amour sexué ;
- situation politique du monde contemporain confrontant deux orientations stratégiques pour l'humanité (capitalisme/communisme) en paramétrant les effectivités de leurs trois directions vectorielles respectives (i×j×k ≡ *propriété-travail* × *pays-peuple* × *monde-humanité*) selon leur modalité organisationnelle propre (État / organisations politiques de masse).

***

[3] On examinera en détail la légitimité de ce point avec la géométrie riemannienne qui adjoint un atlas aux surfaces…

NOTRE PARCOURS

Comme l'a fait Hamilton, abordons la théorie des quaternions selon sa face algébrique.

Résumé du parcours

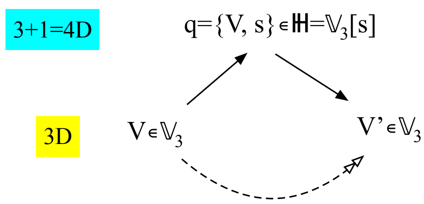
Il s'agit alors d'étendre le corps $\mathbb{C}$ comme celui-ci a étendu le corps $\mathbb{R}$.
$\mathbb{C}=\mathbb{R}[i] \Longrightarrow$ Que faut-il adjoindre à $\mathbb{C}$ pour l'étendre ?

La première idée, naturelle, a été d'adjoindre à $\mathbb{C}$ une grandeur « j » du même type que « i », donc telle que $j^2=-1 \Longrightarrow \mathbb{C}[j]$ composé de triplets $t=x+iy+jz$.
Le point sur lequel bute cette hypothèse est que de tels triplets ne peuvent faire corps, quelle que soit l'hypothèse concernant $i*j$.
D'où la découverte d'Hamilton : il faut adjoindre non pas une seule mais deux quantités « j » et k » telles que $j^2=k^2=-1$ et $i*j=j*k=k*i=i*j*k=-1$ en sorte de former des quaternions $q=s+xi+yj+zk$ qui se présentent alors comme la « somme » paradoxale d'un nombre « s » et d'un « vecteur » $V=\{x, y, z\}$: $q=\{s ; V\}$.
De tels quaternions font bien corps : $\mathbb{H}=\mathbb{C}[j, k]=\mathbb{R}[i, j, k]$

On va explorer l'algèbre des quaternions, puis l'interprétation géométrique de cette formalisation algébrique, ce qui va permettre de comprendre la propriété essentielle de ce corps étendu : il permet de formaliser un calcul en 4D des rotations dans un espace vectoriel en 3D.
Tel va être le principal résultat qui va nous intéresser : pour calculer les rotations d'un vecteur 3D, défini dans le repère orthonormé euclidien classique {Ox, Oy, Oz}, donc pour le diriger – autrement dit pour le réorienter -, il vaut mieux (ce n'est pas indispensable mais c'est plus efficient) lui adjoindre une quatrième dimension paramétrique (non vectorielle) en sorte de le plonger dans un espace (3+1)D ou mieux 3.1D.

Formalisons cela ainsi : $\mathbb{H}=\mathbb{V}_3[s]$

C'est en plongeant $V\in\mathbb{V}_3$ dans $\mathbb{H}=\mathbb{V}_3[s]$ qu'on calculera simplement des rotations qu'il suffira ensuite de projeter de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{V}_3$ pour obtenir les rotations visées de $V\in\mathbb{V}_3$:



Cette « méthode » va intellectuellement nous intéresser.

Dialectique de l'adjonction/extension : gains et pertes…

Nouvelle adjonction/extension
- $\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{R}$ (nombres rationnels → nombres réels : Dedekind avec $\mathbb{R}=\mathbb{Q}$[coupure])
- $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$ (nombres réels → grandeurs complexes) ≈ (1D→2D) : $\mathbb{C}=\mathbb{R}[i]$
- $\mathbb{C}\rightarrow$? (grandeurs complexes → triplets ?) ≈ (2D→3D) ?

On va voir qu'on n'aura pas 1D→2D→3D mais plutôt 2^0=1D→2^1D=2D→2^2D=4D (quaternions plutôt que triplets) : l'extension n'est pas une généralisation car l'adjonction n'ajoute pas mais adjoint (et donc intrique).
On a d'ailleurs vu l'importance que $\mathbb{C} \neq \mathbb{R}^2$. On va voir de même que $\mathbb{H} \neq \mathbb{C}^2 \neq \mathbb{R}^4$.

Prix à payer de toute adjonction-extension :
- $\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{R}$: perte de la dénombrabilité, si commode $\Longrightarrow$ discret→continu
- $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$: perte du bon ordre (compatible avec l'arithmétique du corps) $\Longrightarrow$ nombres → grandeurs

- $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$: perte de la commutativité pour la multiplication

Et si l'on continuait ?

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$ (Hypercomplexes à partir de $\mathbb{H}$)

2^n	nom	pertes cumulatives
1	réels $\mathbb{R}$	
2	complexes $\mathbb{C}$ ($\neq\mathbb{R}^2$)	de l'ordre
4	quaternions $\mathbb{H}$ ($\neq\mathbb{C}^2$)	de la commutativité
8	octonions $\mathbb{O}$ ($\neq\mathbb{H}^2$)	de l'associativité
16	sédénions ($\neq\mathbb{O}^2$)	de la norme (de l'intégrité [4] et de la divisibilité)

Pour étendre, il faut partiellement renoncer !

		Dénombrabilité	Bon ordre	Commutativité de la multiplication	Associativité de la multiplication	Norme multiplicative	Corps
[0]	rationnels $\mathbb{Q}$	dénombrable	ordre	commutativité	associativité	norme	corps
1	réels $\mathbb{R}$		ordre	commutativité	associativité	norme	corps
2	complexes $\mathbb{C}$			commutativité	associativité	norme	corps
4	quaternions $\mathbb{H}$				associativité	norme	corps
8	octonions $\mathbb{O}$					norme	corps
16	sédénions						corps
32							

Cf. on ne peut pas indéfiniment étendre car le prix à payer – la castration symbolique – peut atteindre le cœur même du projet.

Émancipation et liberté…

Rappelons que nous faisons des mathématiques pour mieux en comprendre (« prendre avec nous ») les trésors de pensée émancipée qui y opèrent.
Il faut, en effet, prendre au sérieux l'énonce fameux de Cantor : « l'essence des mathématiques, c'est la liberté. ». Je le prendrais volontiers pour ma part comme définissant la liberté à partir des mathématiques plutôt que l'inverse : il s'agit de comprendre ce que liberté veut dire à la lumière de ce que sont les mathématiques plutôt que de comprendre l'essence des mathématiques à la lumière de ce qu'est la liberté.
La liberté s'éclaire ici comme discipline active des conséquences : l'acte libre n'est pas celui qui, en amont, se veut indéterminé mais celui qui, en aval, s'assume déterminant ; l'acte libre n'est pas celui qui se veut délié de tout mais celui qui s'enchaîne aux liaisons qu'il établit ; l'acte libre n'est pas celui qui se veut inconséquent mais celui qui se tient responsable de ses propres conséquences.
Et quel meilleur modèle en effet de cette liberté que celle de la pensée mathématique qui décide les axiomes auxquels elle va s'enchaîner.
Il est vrai que les axiomes, par définition, sont non déductibles – ce ne sont pas des théorèmes -, qu'ils ne s'imposent donc pas, qu'il est loisible à chacun de les adopter ou de les récuser. Mais ce qu'il y a alors de libre dans la décision ainsi ouverte ne tient pas tant au caractère non contraint de l'énoncé – on peut l'adopter ou le récuser - qu'au fait qu'il convoque la pensée en un point où elle peut enfin décider la discipline à quoi elle va se soumettre : pouvoir le choisir est une chance, la chance de rencontrer un point incalculable (« indécidable ») où il y a sens à décider – la liberté est la chance d'avoir à décider en un point pour se fixer un cap et s'y tenir avec rigueur.
La pensée mathématique nous délivre donc ainsi un paradigme dialectique de la liberté, unité des contraires que rend bien la formulation mathématique, laquelle parle d'indécidabilité pour indiquer

[4] cf. il y a désormais des diviseurs de zéro

qu'un point de liberté – c'est-à-dire pour nous d'émancipation – est un point incalculable requérant le choix binaire d'un enchaînement.

Nous interprèterons longuement en intellectualité cette leçon mathématique : pour orienter une intervention dans un espace 3D fléché, il vaut mieux plonger cet espace dans un espace étendu 3.1=4D en sorte d'y organiser sa pensée.

Le corps non-commutatif $\mathbb{H}$

Les quaternions, à la différence des « triplets », font corps.

Addition de quaternions

C'est la même que sur $\mathbb{R}^4$:

$$(s+ix+jy+kz)+(s'+ix'+jy'+kz')=(s+s')+i(x+x')+j(y+y')+k(z+z')$$

Multiplication de quaternions

Je distingue – provisoirement – le signe « + » (entre grandeurs de même type : scalaires, vecteurs ou quaternions et le signe « ⊕ » entre scalaire et vecteur pour définir un quaternion

$$q=\{s\ ;\ V\}=s\oplus V$$

On a alors :

$$(S\oplus V)\times(S'\oplus V') = (S.S'-V.V') \oplus (S.V'+S'.V+V\wedge V')$$
$$\Longrightarrow (0\oplus V)\times(0\oplus V') = (-V.V' \oplus V\wedge V')$$

Cette multiplication est non-commutative puisque $i\times j=-j\times i$

Vérifions-le :

$i=(0, 1, 0, 0)$ et $j=(0, 0, 1, 0)$

$\Longrightarrow i.j=0$ et $i\wedge j=k=(0, 0, 0, 1)$

$\Longrightarrow i\times j=(0 \oplus k)=k$

mais $j\wedge i=-k \Longrightarrow j\times i=-k=-i\times j$

Quaternion conjugué

Tout comme la grandeur complexe $\bar{z}$=x-iy est la grandeur conjuguée de z=x+iy, on a le quaternion conjugué $\bar{q}$=s-(ix+jy+kz) du quaternion q=s+(ix+jy+kz).

$$q=\{s, x, y, z\} \Longrightarrow \bar{q}=\{s, -x, -y, -z\}$$
$$q=\{s\ ;\ V\} \Longrightarrow \bar{q}=\{s\ ;\ -V\}$$

Comme pour les complexes, on a :

$$q = \bar{q} \Longrightarrow q\epsilon\mathbb{R}$$
$$q + \bar{q}\epsilon\mathbb{R}$$

$$\overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q}'$$
$$\bar{\bar{q}} = q$$
$$q \times \bar{q} = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2 = \bar{q} \times q \Longrightarrow \bar{q} = q^{-1}.|q|^2$$

Si q est unitaire (|q|=1), alors $\bar{q} = q^{-1}$

Inverse

$q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = |q|^2 \Longrightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$: tout quaternion non nul a un unique inverse q^{-1}.

Si q est unitaire (|q|=1), alors $\bar{q} = q^{-1}$.

Attention à penser en terme d'inverse plutôt que de **division** car q'/q ne différencierait pas $q' \times q^{-1}$ et $q^{-1} \times q'$. Or, comme on va le voir avec la conjugaison, $q \times q' \times q^{-1} \neq q'$

Pour q et q', on a :

$$\frac{q}{q'} = \frac{q\overline{q'}}{|q'|^2} = \frac{|q|^2}{\bar{q}q'}$$

Éléments neutres

de l'addition : (0, 0, 0, 0)
de la multiplication : (1, 0, 0, 0)

Sous-corps isomorphe à $\mathbb{C}$

Soit $\mathbb{H}^i$ l'ensemble des quaternions de la forme (x, y, 0, 0) c'est-à-dire x+iy. C'est un sous-corps de $\mathbb{H}$ isomorphe à $\mathbb{C}$.

Interprétation matricielle

$\mathbb{H}$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$

Interprétation vectorielle

$\mathbb{H}$ peut aussi être vu comme un espace vectoriel de dimension 4 : $\mathbb{V}_4$
Rappeler que c'est Hamilton qui est à l'origine du mot « vecteur ».

$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$: généralisation ou extension ?

Au départ, il s'agissait pour Hamilton de généraliser la manière par laquelle $\mathbb{C}$ avait étendu $\mathbb{R}$ (un peu comme on généralise aujourd'hui de $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^n$).
Pour cela, il lui fallait retrouver quatre propriétés :

- celle du produit vectoriel (voir ci-dessus) ;
- celle du corps (division) ;
- celle de la rotation : toute rotation d'un vecteur V dans $\mathbb{R}^2$ se formalise comme multiplication $V \rightarrow w_u V$ par un complexe unitaire w_u ; on obtiendra que toute rotation d'un vecteur V dans $\mathbb{R}^3$ se formalise comme conjugaison $V \rightarrow q_u V q_u^{-1}$ par un quaternion unitaire q_u. De même l'amplirotation complexe, obtenue par multiplication selon un complexe quelconque, devient l'amplirotation quaternionique, obtenue par conjugaison selon un quaternion quelconque.
- celle de la transformation orthogonale [5] dans $\mathbb{R}^4$: on identifie un V de $\mathbb{R}^4$ à un quaternion et on considère les applications $q \rightarrow aqb$ où a et b sont deux quaternions tels que $\|a\|.\|b\|=1$.

Mais, en fait, pour passer à une dimension supérieure, comme on l'a vu en détail avec les triplets, il faut étendre et non pas généraliser, c'est-à-dire

1) adjoindre un geste de type nouveau (et pas seulement répéter l'ancien geste d'extension) : ici une dimension supplémentaire k et l'ensemble des opérations borroméennes d'adjonction du type ij=k…
2) et abandonner une ancienne propriété (la commutativité).

La généralisation est quantitative : on passe de 2 à 3, de 3 à 4, de n à n+1 ou de n à 2n.
L'extension est qualitative : on passe de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ (et non pas à $\mathbb{R}^2$) et de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{H}$ (et non pas à $\mathbb{R}^4$).

[5] Une transformation orthogonale de tout l'espace (rotations – cf. matrices de déterminant 1 - et réflexions – cf. matrices de déterminant -1) préserve le produit scalaire et par là les longueurs et les angles. En particulier, elle transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

Quaternions : différentes formes

Forme additive « + »

(s, x, y, z)∈ℝ

$$q=s+xi+yj+zk$$

Forme scalaire-vectorielle $\mathbb{R}+\mathbb{V}_3$

4D comme 1+3 (le triplet est vu comme vecteur en 3D sur le corps des scalaires ℝ) :

$$\mathbf{q=\{s\ ;\ V\}}$$
$$q=\{s\ ;\ (x, y, z)\}$$
$$\mathbb{H}\equiv\{\mathbb{R}+\mathbb{V}_3\}$$

où q=s+V avec V=xi+yj+zk

q=s+(xi+yj+zk)

ce qui peut s'entendre vectoriellement ainsi, si **1** est le vecteur unitaire de l'axe des paramètres :

$$q=s\mathbf{1}+xi+yj+zk$$

Attention à distinguer $z=s\mathbf{1}+ix\in\mathbb{C}$ et $q=(s, x, 0, 0)\in\mathbb{H}$

s=partie scalaire des quaternions

V=(x, y, z)=partie vectorielle des quaternions

$V\in\mathbb{V}_3$=vecteur à 3 dimensions avec $\mathbb{V}_3\cong\mathbb{R}^3$

Distinguer un scalaire et un vecteur des quaternions purement scalaires ou purement vectoriels :

- $s\in\mathbb{R} \neq q=\{s, 0\} = (s, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}$
- $V\in\mathbb{V}_3 \neq q = \{0, V\} = (0, x, y, z) \in \mathbb{H}$

Forme polaire

De même qu'on avait

$$z=x+iy=\rho(\cos\theta+i.\sin\theta)=\rho[\theta]=\rho e^{i\theta} \text{ avec}$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \text{ et } \theta = \arctan\frac{y}{x}\,(+\pi\ si\ a<0)$$

on va avoir

$$q=s+ix+jy+kz=\{s;\ (x, y, z)\}=\{s;\ V\}=\rho\{\cos\theta;\ \vec{A}.\sin\theta\}=\rho[\theta/\vec{A}]=\rho e^{\vec{A}\theta}$$

où $\vec{A}$ (axe) est un vecteur unitaire parallèle à $\vec{V}$:

$$\vec{A} = \frac{\vec{V}}{\rho}$$
$$A = \frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

avec

$$\theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{s}$$

Résumons l'analogie complexes/quaternions dans le tableau suivant :

complexes	**quaternions**
z=x+iy	q=s+ix+jy+kz
$z=\rho(\cos\theta+i.\sin\theta)=\rho[\theta]=\rho e^{i\theta}$	$q=\rho\{\cos\theta;\ \vec{A}.\sin\theta\}=\rho[\theta/\vec{A}] = \rho e^{A\theta}$
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$	$\rho = \sqrt{s^2+x^2+y^2+z^2}$
i	$A = \frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
$\theta = \arctan\frac{y}{x}$	$\theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{s}$

- Norme de q : $N(q)= s^2+x^2+y^2+z^2 \Longrightarrow$ module de q : $|q|=\rho = \sqrt{s^2+x^2+y^2+z^2}$
  Un quaternion unitaire sera tel que $s^2+x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow \rho=1$
- $\vec{A}$ (axe) est un vecteur unitaire $\vec{V_u}$ parallèle à $\vec{V}$.
  $\vec{A}\in\mathbb{A}\equiv\mathbb{S}^2$

$$A = \frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

- Argument θ : « angle » du quaternion par rapport à cet axe $\vec{A}$

$$\theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{s} = \arccos\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+x^2+y^2+z^2}}\right)$$ [6]

  On a alors : $q=\rho\{\cos\theta\ ;\ \vec{A}.\sin\theta\}$

D'où

$$\mathbf{q=\rho[\theta/\vec{A}]}$$

$$\mathbb{H}\equiv\mathbb{R}[\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2]$$

$$q = \rho e^{A\theta} = \rho\{\cos\theta\ ;\ \vec{A}.\sin\theta\} = (\rho.\cos\theta,\ \rho.\sin\theta.A_x,\ \rho.\sin\theta.A_y,\ \rho.\sin\theta.A_z)$$

Forme $\mathbb{C}^2$

On peut représenter q=a+bi+cj+dk comme paire de paires [(a, b) ; (c, d)] et donc comme paire de complexes [α=a+ib ; β=c+id].
On peut alors représenter le quaternion q comme une matrice :

$$q \equiv \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

La norme N(q) de q est alors le déterminant de la matrice : $a^2+b^2+c^2+d^2$
On a bien : N(q).N(q')=N(q.q') car on a bien, pour les matrices carrées det(A.A')=det(A).det(A')

Ceci, au passage, renvoie au théorème d'Euler (1748) :

$$(s^2+x^2+y^2+z^2)(s'^2+x'^2+y'^2+z'^2)$$
$$=$$
$$(ss'-xx'-yy'-zz')^2+(sx'+s'x+yz'-y'z)^2+(sy'-xz'+s'y+x'z)^2+(sz'+xy'-x'y+s'z)^2$$

le produit de 2 sommes de 4 carrés est une somme de 4 carrés !
Donc les sommes de 4 carrés sont stables par produit.
John Young (fin XIX°) montrera que cela vaut également pour 8 carrés (comme cela vaut pour 2 ou 4) mais que cela ne vaut plus pour 16 carrés !

Lien des trois

$$q=(s, x, y, z)=\{s\ ;\ V\}=\rho[\theta/\vec{A}]=\rho\{\cos\theta\ ;\ \vec{A}.\sin\theta\}$$

Forme additive ($\mathbb{R}^4$)	Forme scalaire-vectorielle $\{\mathbb{R}+\mathbb{V}^3\}$	Forme polaire
(s, x, y, z)	{s; (x, y, z)}	$\sqrt{s^2+x^2+y^2+z^2}[\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{s} / \frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}]$
	{s; V}	
(ρ.cosθ, ρ.sinθ.A_x, ρ.sinθ.A_y, ρ.sinθ.A_z)	ρ{cosθ; sinθ.$\vec{A}$}	**ρ[θ/$\vec{A}$]**

Interprétation

La clef de la puissance orientante des quaternions va se donner dans leur forme polaire qui fait apparaître un angle θ (comme pour les complexes) mais cette fois non plus par rapport à l'axe horizontal des scalaires mais par rapport à un axe A en 3D.

---

[6] Pour mémoire, $\arccos(\theta)=\arctan(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta})$ et $\arctan(\theta)=\arccos(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$

On ne spécifie pas l'axe de rotation pour les grandeurs complexes : $z=\rho e^{i\theta}=\rho(\cos\theta+i.\sin\theta)$ car leur amplirotation (amplification de ρ et rotation de θ, angle mesuré par rapport à l'axe des réels x) se fait selon un axe fixe **perpendiculaire** au plan complexe et donc extérieur.

Pour les quaternions, cet axe est celui du vecteur V intervenant dans q={s ; V}

On prend ainsi mesure de la singulière intrication entre s et (x, y, z) qui préside à la constitution d'un quaternion !

Récapitulation : quatre produits entre deux vecteurs

- scalaire (ou intérieur [7]) : q.q', V.V' et s.s' ⟹ un scalaire
- vectoriel : V∧V' ⟹ un vecteur
- de quaternions= q×q' ⟹ un quaternion
- extérieur ⟹ un bivecteur

Produit scalaire

$q.q'=s.s'+x.x'+y.y'+z.z'$

$q.q=q^2=s^2+x^2+y^2+z^2=\rho^2$

$V.V'=x.x'+y.y'+z.z'$

$V.V'=V^2=x^2+y^2+z^2$

$q^2=s^2+V^2$

$q\perp q'$: $q.q'=0$

$V\perp V'$: $V.V'=0$

Le produit scalaire mesure la colinéarité (c'est pour cela qu'il est nul quand les vecteurs sont orthogonaux).

⟹ angle entre deux quaternions = $arccos\frac{produit\ scalaire}{produit\ des\ normes}$

$$q.q'=|q|.|q'|.\cos\theta$$

Produit vectoriel

$V\wedge V'+V'\wedge V=0$

$V'\wedge(V\wedge V')=V$

Cf. $Z=X\wedge Y$ et $Y\wedge Z=X$

Si V//V', $V\wedge V'=0$

Le produit vectoriel mesure l'orthogonalité (c'est pour cela qu'il est nul quand les vecteurs sont colinéaires).

Rappels

$|V\wedge V'|=|V|.|V'|.\sin(V,V')$

$$U\wedge V=\begin{bmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{bmatrix}=-V\wedge U$$

Produit quaternionique

$$\{s\ ;\ V\}\times\{s';\ V'\}=\{ss'-V.V';\ sV'+s'V+V\times V'\}$$

Cf. lien entre produits quaternionique, scalaire et vectoriel.

$\{s;\ V\}\times\{s;\ V\}=\{s;\ V\}^2=\{s^2-V^2;\ 2sV\}$

$\{s;\ -V\}\times\{s;\ -V\}=\{s;\ -V\}^2=\{s^2-V^2;\ -2sV\}$= conjugué de {s ; V}

$\{s;\ V\}\times\{s;\ -V\}=\{s^2+V^2;\ 0\}=q\times\bar{q}=\{\rho;\ 0\}$

Noter la différence avec $(s+s')^2$, $(s-s')^2$ et $(s+s')(s-s')$ pour les scalaires

$$V\times V'=\{-V.V';\ V\times V')$$

Noter que le produit quaternionique de deux « vecteurs » produit un quaternion non vectoriel (avec un scalaire).

---

[7] cf. *inner product*

Ceci a à voir avec le fait que ijk=-1

Si $V \perp V'$: $V \times V' = \{0; V \wedge V'\} \equiv V \wedge V'$

Si les vecteurs sont orthogonaux, le produit quaternionique de ces vecteurs est leur produit vectoriel.

Si $V // V'$: $V \times V' = \{V.V' ; 0\} \equiv V.V'$

Si les vecteurs sont colinéaires, le produit quaternionique de ces vecteurs est leur produit scalaire.

$$\mathbf{V \times V = \{-V^2 ; 0\}}$$

Cf. $(ix+jy+kz)^2 = -x^2-y^2-z^2$

Produit extérieur

Cf. Grassmann puis Clifford

Cela correspond à un bivecteur représentant le parallélogramme formé par les deux vecteurs.

Cela est apparenté (mais pas confondu) au produit tensoriel…

Récapitulation

	multiplicande	*multiplicateur*	*⇒ produit*	*formule*	Enjeu
multiplication scalaire	V	s	un vecteur	s.V=V'	espace vectoriel
produit scalaire	V	V	un scalaire	V.V'=s	mesure l'orthogonalité [8]
produit vectoriel	V	V	un vecteur	$V \wedge V' = V''$	mesure la colinéarité [9]
multiplication quaternionique des vecteurs	[V]	[V]	un quaternion	$[V]\times[V']=q$ $\{-V.V' ; V \wedge V'\}$	**corps** (non vectoriel)
multiplication quaternionnique	q	q	un quaternion	$q \times q' = q''$	
[produit extérieur]	V	V	bivecteur		(algèbres de Clifford)

Le corps non-commutatif $\mathbb{H}$

Les quaternions, à la différence des « triplets », font corps.

Addition de quaternions

C'est la même que sur $\mathbb{R}^4$:

$$(s+ix+jy+kz)+(s'+ix'+jy'+kz')=(s+s')+i(x+x')+j(y+y')+k(z+z')$$

Multiplication de quaternions

Je distingue – provisoirement – le signe « + » (entre grandeurs de même type : scalaires, vecteurs ou quaternions et le signe « ⊕ » entre scalaire et vecteur pour définir un quaternion

$$q=\{s ; V\}=s \oplus V$$

On a alors :

$$(S \oplus V)\times(S' \oplus V') = (S.S'-V.V') \oplus (S.V'+S'.V+V \wedge V')$$
$$\Rightarrow (0 \oplus V)\times(0 \oplus V') = (-V.V' \oplus V \wedge V')$$

Cette multiplication est non-commutative puisque $i \times j = -j \times i$

Vérifions-le :

i=(0, 1, 0, 0) et j=(0, 0, 1, 0)

$\Rightarrow$ i.j=0 et $i \wedge j = k = (0, 0, 0, 1)$

$\Rightarrow i \times j = (0 \oplus k) = k$

mais $j \wedge i = -k \Rightarrow j \times i = -k = -i \times j$

---

[8] et étend la *perpendicularité* euclidienne par adjonction du produit scalaire.
Ex. : deux polynômes P(x) et Q(x) sont orthogonaux si leur produit scalaire ∫P(x).Q(x) sur l'intervalle [-1, 1] est nul.

[9] extension du *parallélisme* euclidien…

Quaternion conjugué

Tout comme la grandeur complexe $\bar{z}$=x-iy est la grandeur conjuguée de z=x+iy, on a le quaternion conjugué $\bar{q}$=s-(ix+jy+kz) du quaternion q=s+(ix+jy+kz).

$$q=\{s, x, y, z\} \Rightarrow \bar{q}=\{s, -x, -y, -z\}$$
$$q=\{s ; V\} \Rightarrow \bar{q}=\{s ; -V\}$$

Comme pour les complexes, on a :

$$q = \bar{q} \Rightarrow q \epsilon \mathbb{R}$$
$$q + \bar{q} \epsilon \mathbb{R}$$

$$\overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q'}$$
$$\bar{\bar{q}} = q$$
$$q \times \bar{q} = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2 = \bar{q} \times q \Rightarrow \bar{q} = q^{-1}.|q|^2$$

Si q est unitaire (|q|=1), alors $\bar{q} = q^{-1}$

Inverse

$q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = |q|^2 \Rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$: tout quaternion non nul a un unique inverse q^{-1}.
Si q est unitaire (|q|=1), alors $\bar{q} = q^{-1}$.

Attention à penser en terme d'inverse plutôt que de **division** car q'/q ne différencierait pas $q' \times q^{-1}$ et $q^{-1} \times q'$. Or, comme on va le voir avec la conjugaison, $q \times q' \times q^{-1} \neq q'$

Pour q et q', on a :

$$\frac{q}{q'} = \frac{q\bar{q'}}{|q'|^2} = \frac{|q|^2}{\bar{q}q'}$$

Éléments neutres

de l'addition : (0, 0, 0, 0)
de la multiplication : (1, 0, 0, 0)

Sous-corps isomorphe à ℂ

Soit $\mathbb{H}^i$ l'ensemble des quaternions de la forme (x, y, 0, 0) c'est-à-dire x+iy. C'est un sous-corps de ℍ isomorphe à ℂ.

Interprétation matricielle

ℍ est un sous-espace de $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$

Interprétation vectorielle

ℍ peut aussi être vu comme un espace vectoriel de dimension 4 : $\mathbb{V}_4$
Rappeler que c'est Hamilton qui est à l'origine du mot « vecteur ».

ℂ→ℍ : généralisation ou extension ?

Au départ, il s'agissait pour Hamilton de généraliser la manière par laquelle ℂ avait étendu ℝ (un peu comme on généralise aujourd'hui de $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^n$).
Pour cela, il lui fallait retrouver quatre propriétés :
- celle du produit vectoriel (voir ci-dessus) ;
- celle du corps (division) ;
- celle de la rotation : toute rotation d'un vecteur V dans $\mathbb{R}^2$ se formalise comme multiplication $V \rightarrow w_u V$ par un complexe unitaire w_u ; on obtiendra que toute rotation d'un vecteur V dans $\mathbb{R}^3$ se formalise comme conjugaison $V \rightarrow q_u V q_u^{-1}$ par un quaternion unitaire q_u. De même l'amplirotation complexe, obtenue par multiplication selon un complexe quelconque, devient l'amplirotation quaternionique, obtenue par conjugaison selon un quaternion quelconque.

- celle de la transformation orthogonale [10] dans $\mathbb{R}^4$: on identifie un V de $\mathbb{R}^4$ à un quaternion et on considère les applications $q \rightarrow aqb$ où a et b sont deux quaternions tels que $||a||.||b||=1$.

Mais, en fait, pour passer à une dimension supérieure, comme on l'a vu en détail avec les triplets, il faut étendre et non pas généraliser, c'est-à-dire

3) adjoindre un geste de type nouveau (et pas seulement répéter l'ancien geste d'extension) : ici une dimension supplémentaire k et l'ensemble des opérations borroméennes d'adjonction du type ij=k…
4) et abandonner une ancienne propriété (la commutativité).

La généralisation est quantitative : on passe de 2 à 3, de 3 à 4, de n à n+1 ou de n à 2n.
L'extension est qualitative : on passe de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ (et non pas à $\mathbb{R}^2$) et de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{H}$ (et non pas à $\mathbb{R}^4$).

[10] Une transformation orthogonale de tout l'espace (rotations – cf. matrices de déterminant 1 - et réflexions – cf. matrices de déterminant -1) préserve le produit scalaire et par là les longueurs et les angles. En particulier, elle transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

Produit quaternionique

Ce qui caractérise donc les quaternions, c'est ce qui de leur multiplication-produit diffère de la multiplication arithmétique, de la multiplication complexe des grandeurs complexes (amplirotation dans le plan complexe z*z') et de la multiplication vectorielle : c'est l'opération géométrique mise en jeu par les formules algébriques i×j=k et i×j×k=-1.
Pour la comprendre, il faut saisir la différence entre les quatre opérations 2.3=6 (*arithmétique*), i*i=-1 (*complexe*), i∧j=k (*vectorielle*) et q×q'=q" (*quaternionique*)

- 2.3=6 correspond à une opération géométrique en **1D** : sur une droite (la droite réelle).
  Je rappelle qu'on note de même par un point « . » le produit scalaire de deux vecteurs V.V' : le point est donc réservé à une multiplication (de scalaires ou de vecteurs) produisant un scalaire.
  La multiplication du vecteur V par le scalaire s sera simplement notée « sV »
- i*i=-1 correspond à une opération géométrique en **2D** : l'amplirotation dans un plan (le plan complexe ℂ).
- i∧j=k correspond à une opération géométrique en **3D** : dans un espace euclidien 3D (espace vectoriel $\mathbb{V}_3$).
- i×j=k correspond à une opération géométrique en **4D** : dans l'espace ℍ des quaternions !

Ces multiplications-produits sont algébriquement intriquées selon les formules suivantes :

$$\{s;\ V\}\times\{s';\ V'\}=\{s.s'-V.V';\ sV'+s'V+V\wedge V'\}$$
$$\{0;\ V\}\times\{0;\ V'\}=\{-V.V';\ V\wedge V')$$

Représentation polaire du quaternion

Comme pour les complexes, l'interprétation géométrique passe par la représentation polaire du quaternion.
Je résume l'analogie complexes/quaternions :

complexes	**quaternions**
s+ix	s+ix+jy+kz
$\rho(\cos\theta+i.\sin\theta)=\rho[\theta]=\rho e^{i\theta}$	$\rho\{\cos\theta;\ \vec{A}.\sin\theta\}=\rho[\theta/\vec{A}] = \rho e^{A\theta}$ $=(\rho.\cos\theta,\ \rho.\sin\theta.A_x,\ \rho.\sin\theta.A_y,\ \rho.\sin\theta.A_z)$
$\rho = \sqrt{s^2+x^2}$	$\rho = \sqrt{s^2+x^2+y^2+z^2}$
i	$\vec{A} = \dfrac{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
$\theta = \arctan\dfrac{x}{s} = \arccos(\dfrac{s}{\sqrt{s^2+x^2}})$	$\theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{s} = \arccos(\dfrac{s}{\sqrt{s^2+x^2+y^2+z^2}})$

En particulier, on a :

	(s, x, y, z)	$\{s;\vec{V}\}$	ρ	θ	$\vec{A}$	$\rho[\theta/\vec{A}] = \rho e^{A\theta}$
1	(1, 0, 0, 0)	$\{1;\vec{0}\}$	1	0°	0	$[0/\vec{0}] = e^0 = 1$
i	(0, 1, 0, 0)	$\{0;\vec{\imath}\}$	1	90°	$\vec{\imath}$	$[\frac{\pi}{2}/\vec{\imath}] = e^{i\frac{\pi}{2}}$
j	(0, 0, 1, 0)	$\{0;\vec{\jmath}\}$	1	90°	$\vec{\jmath}$	$[\frac{\pi}{2}/\vec{\jmath}] = e^{j\frac{\pi}{2}}$
k	(0, 0, 0, 1)	$\{0;\vec{k}\}$	1	90°	$\vec{k}$	$[\frac{\pi}{2}/\vec{k}] = e^{k\frac{\pi}{2}}$

Interprétation géométrique

Complexes

Rappelons-nous : la grandeur complexe z={x, y}=ρ[θ] c'est-à-dire $z=x+iy=\rho(\cos\theta+i.\sin\theta)=\rho e^{i\theta}$ agit, par multiplication sur une autre grandeur complexe z', en lui appliquant une amplirotation ρ[θ] (amplification de ρ et une rotation de θ).
Ce dont il faut prendre mesure, c'est que cette rotation dans le plan complexe xOy se fait implicitement selon l'axe orthogonal Oz au centre O du repère ! C'est ce type de rotation de tout le plan complexe qui, transformant l'axe Oy en axe Ox, permet à i, en se multipliant par lui-même, de valoir -1.

Quaternions

Dans le cas des quaternions, la multiplication correspondra à nouveau à une amplirotation de l'espace entier mais non plus autour d'un axe fixe extérieur à l'espace complexe 2D (l'axe orthogonal à ce plan) mais selon un axe variable intérieur à l'espace quaternionique 4D : l'axe formalisé dans la représentation {s ; $\vec{V}$} par le vecteur $\vec{V} = ix + jy + zk$ dont on retient la valeur unitaire

$$\vec{\mathrm{A}} = \frac{\vec{\mathrm{V}}}{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2}}$$

On comprend alors que le quaternion q=(s, x, y, z)={s ; $\vec{V}$}=ρ[θ/$\vec{A}$] formalise une capacité à exercer, par multiplication, une *amplirotation* de l'espace 4D qui amplifie sa taille de ρ et le fait tourner d'un angle θ autour de l'axe $\vec{A}$.

Exemple

Voyons comment i×j=k c'est-à-dire comment i multipliant j le fait tourner de 90° autour de l'axe $\vec{\imath}$.

Algébriquement…

(s+ix+jy+kz)×(s'+ix'+jy'+kz')=
(ss'-xx'-yy'-zz')
+i(sx'+s'x+yz'-zy')
+j(sy'+s'y+zx'-z'x)
+k(sz'+s'z+xy'-x'y)

Donc i=(0, 1, 0, 0) et j=(0, 0, 1, 0)
⟹ i×j=(0, 0, 0, 1)=k

Ou encore…

{s; V}×{s'; V'}={s.s'-V.V'; sV'+s'V+V∧V'}
Donc {0 ; $\vec{\imath}$}×{0 ; $\vec{\jmath}$}={0 ; $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$}={0 ; $\vec{k}$}

Géométriquement…

Dans le repère orthonormé {$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$}, faire tourner $\vec{\jmath}$ selon l'axe $\vec{\imath}$, c'est le transformer en $\vec{k}$.
À l'inverse, faire tourner $\vec{\imath}$ selon l'axe $\vec{\jmath}$, c'est bien le transformer en -$\vec{k}$.

Amplirotation quaternionique

Complexes

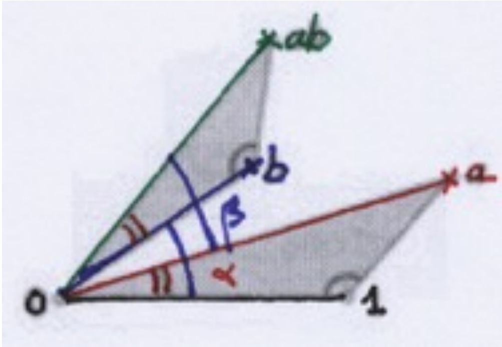
Concernant les grandeurs complexes, on a compris l'amplirotation exercée par Z' sur Z en posant que multiplier Z par Z', c'est prendre Z' comme nouvelle base pour Z en sorte que Z'*Z dans Z' équivaut à Z dans **1** :

$$\frac{\vec{Z'} * \vec{Z}}{\vec{Z'}} \approx \frac{\vec{Z}}{\vec{1}}$$

ce qui se formalise ainsi en coordonnées polaires :

$$\rho e^{i\theta} * \rho' e^{i\theta'} = \rho.\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

et se figure ainsi :



$$\frac{\vec{b} * \vec{a}}{\vec{b}} \approx \frac{\vec{a}}{\vec{1}}$$

Quaternions

L'analogue pour la multiplication quaternionique est :

$$\rho\{\cos\theta; \vec{A}.\sin\theta\} \times \rho'\{\cos\theta'; \vec{A'}.\sin\theta'\} =$$
$$\{\cos\theta.\cos\theta' - \sin\theta.\sin\theta'.A.A' ; \cos\theta.\sin\theta'.A' + \cos\theta'.\sin\theta.A + \sin\theta.\sin\theta'.A\wedge A'\}$$

On n'a plus de résultat simple !

Rotation du vecteur V par conjugaison

On va maintenant aborder le principal intérêt géométrique propre des quaternions, le résultat spécifique qui le différencie des complexes : la conjugaison quaternionique des quaternions vectoriels c'est-à-dire purement imaginaires {0 ; V}.

Attention : cette conjugaison fait bien intervenir un quaternion conjugué mais cette opération « conjugaison » ne se réduit pas à le faire intervenir une fois !

Comme de juste, cette conjugaison va se comprendre selon la dialectique d'une formalisation algébrique et d'une interprétation géométrique.

À partir de maintenant, on simplifie la notation de la multiplication quaternionique en l'écrivant q.q' voire tout simplement qq' (il n'y a plus d'ambiguïté possible).

Résumons le parcours qu'on va engager.

- Algébriquement, on va formaliser une conjugaison quaternionique des quaternions vectoriels :
$$\bar{V} = q.V.q^{-1} = q.V.\bar{q}$$
- Géométriquement, on va la comprendre comme amplirotation en 3D du vecteur V (et non plus 4D).
- Quand le quaternion q est unitaire, la conjugaison devient une simple rotation.
- L'unité dialectique des deux va se formuler ainsi : l'espace des quaternions unitaires est isomorphe à l'espace des rotations 3D !
- Ceci va permettre de calculer facilement des rotations ou redirections dans l'espace ordinaire 3D, et ce beaucoup plus facilement qu'à partir des matrices 3x3 qui formalisent les directions selon les trois angles d'Euler.

Voyons comment.

Conjugaison quaternionique

On définit ainsi la conjugaison quaternionique $C_q(V)$ d'un quaternion V purement imaginaire ou vectoriel (un quaternion réduit à sa composante vectorielle, privé donc de sa dimension scalaire) par le quaternion quelconque q=[ρ;θ/A] :

$$C_q(V)=q*V*q^{-1}$$

Cette conjugaison produit un nouveau quaternion « vectoriel » qui correspondant à son amplirotation de norme ρ et d'angle 2θ autour de l'axe A.

Corrélativement, si la conjugaison se fait par un quaternion unitaire q_u, il y aura rotation sans amplification.

Allons-y pas à pas.

1. Conjugaison par quaternions unitaires

La conjugaison $\overrightarrow{W}=q_u\vec{V}q_u^{-1}$ du vecteur $\vec{V}$ par le quaternion unitaire $q_u(\theta/\vec{u})$ équivaut à une rotation d'angle double 2θ selon l'axe $\vec{u}$.

Démonstration

Soit le quaternion unitaire $q_u=\cos\theta+\vec{u}.\sin\theta$ avec $|\vec{u}| = 1$.

$$\overrightarrow{v'}=q_u\vec{v}q_u^{-1}=(\cos\theta+\vec{u}\sin\theta)\vec{v}(\cos\theta-\vec{u}\sin\theta)$$

$\vec{v}$ se décompose en deux composantes, parallèle $\vec{v}_{\|}$ et perpendiculaire $\vec{v}_{\perp}$ à $\vec{u}$: $\vec{v}=\vec{v}_{\|}+\vec{v}_{\perp}$ avec

$$\vec{v}_{\|}=\vec{u}(\vec{u}.\vec{v})$$
$$\vec{v}_{\perp}=\vec{v}-\vec{u}(\vec{u}.\vec{v})$$
$$\vec{v}=\vec{u}(\vec{u}.\vec{v})+[\vec{v}-\vec{u}(\vec{u}.\vec{v})]$$

Si on développe $q_u\vec{v}q_u^{-1}$, on obtient :

$$\overrightarrow{v'}=q_u\vec{v}q_u^{-1}=\vec{v}_{\perp}\cos2\theta+(\vec{u}\mathrm{x}\vec{v})\sin2\theta+\vec{v}_{\|}$$

Rappels trigonométriques : $\cos^2\theta=1/2(1+\cos2\theta)$ et $\sin^2\theta=1/2(1-\cos2\theta)$

Cf. le détail du calcul dans Wikipedia en posant $\theta=\alpha/2$.
On utilise alors la formule $(\cos a+i.\sin a)^2=\cos(2a)+i.\sin(2a)$
puisque $\cos(2a)=\cos^2a-\sin^2a$ et $\sin(2a)=2.\sin a.\cos a$

$$\begin{aligned}
&= \vec{v}\cos^2\tfrac{\alpha}{2} + (\vec{u}\vec{v}-\vec{v}\vec{u})\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} - \vec{u}\vec{v}\vec{u}\sin^2\tfrac{\alpha}{2}\\
&= \vec{v}\cos^2\tfrac{\alpha}{2} + 2(\vec{u}\wedge\vec{v})\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} - (\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{u}) - 2\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v}))\sin^2\tfrac{\alpha}{2}\\
&= \vec{v}(\cos^2\tfrac{\alpha}{2} - \sin^2\tfrac{\alpha}{2}) + (\vec{u}\wedge\vec{v})(2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}) + \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v})(2\sin^2\tfrac{\alpha}{2})\\
&= \vec{v}\cos\alpha + (\vec{u}\wedge\vec{v})\sin\alpha + \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v})(1-\cos\alpha)\\
&= (\vec{v} - \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v}))\cos\alpha + (\vec{u}\wedge\vec{v})\sin\alpha + \vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{v})\\
&= \vec{v}_{\perp}\cos\alpha + (\vec{u}\wedge\vec{v}_{\perp})\sin\alpha + \vec{v}_{\|}
\end{aligned}$$

soit la formule de rotation dite de Rodrigues.

Intuitivement, l'idée géométrique est la suivante : la rotation autour de l'axe $\vec{u}$ ne change pas la composante parallèle $\vec{v}_{\|}$ (de $\vec{v}$ à $\vec{u}$) mais change la direction de sa composante perpendiculaire $\vec{v}_{\perp}$ sans pour autant changer sa longueur.

Exemple

Soit le quaternion unitaire $q_u = \frac{1+i+j+k}{2}$.

On a $q_u=[2\pi/3/(1,1,1)]$ puisque $\cos(2\pi/3)=1/2$ et $\sin(2\pi/3)=\sqrt{3}/2$.

Rappel : $\theta=\arccos(s/|q|)\Longrightarrow\arccos(1/2)=2\pi/3=60°$

Géométriquement…

La conjugaison du vecteur $\vec{v}$ par q_u soit $q_u\vec{v}q_u^{-1}$ va donc représenter une rotation de $\pi/3=120°$ sur la première diagonale (1,1,1) du trièdre vectoriel c'est-à-dire très exactement une permutation circulaire :

(Ox, Oy, Oz)→(Oz, Ox, Oy) c'est-à-dire (i,j,k)→(k,i,j).

Algébriquement…

On vérifie en effet que, pour $\vec{v}=ai+bj+ck$, on a

$$\frac{1+i+j+k}{2}(ai+bj+ck)\frac{1-i-j-k}{2} = ci+aj+bk$$

Cf. le détail des calculs dans Wikipedia :

$$\begin{aligned}
f(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}) &= \tfrac{1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{2}(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})\tfrac{1-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}}{2}\\
&\quad (1-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\\
&= \tfrac{1}{4}((a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})+(-a+b\mathbf{k}-c\mathbf{j})+(-a\mathbf{k}-b+c\mathbf{i})+(a\mathbf{j}-b\mathbf{i}-c))\\
&\quad (1-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\\
&= \tfrac{1}{4}((-a-b-c)+(a-b+c)\mathbf{i}+(a+b-c)\mathbf{j}+(-a+b+c)\mathbf{k})\\
&\quad (1-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\\
&= \tfrac{1}{4}(((-a-b-c)+(a-b+c)\mathbf{i}+(a+b-c)\mathbf{j}+(-a+b+c)\mathbf{k})\\
&\quad +((a+b+c)\mathbf{i}+(a-b+c)+(a+b-c)\mathbf{k}+(a-b-c)\mathbf{j})\\
&\quad +((a+b+c)\mathbf{j}+(-a+b-c)\mathbf{k}+(a+b-c)+(-a+b+c)\mathbf{i})\\
&\quad +((a+b+c)\mathbf{k}+(a-b+c)\mathbf{j}+(-a-b+c)\mathbf{i}+(-a+b+c))\\
&= \tfrac{1}{4}(((-a-b-c)+(a-b+c)+(a+b-c)+(-a+b+c))\\
&\quad +((a-b+c)+(a+b+c)+(-a+b+c)+(-a-b+c))\mathbf{i}\\
&\quad +((a+b-c)+(a-b-c)+(a+b+c)+(a-b+c))\mathbf{j}\\
&\quad +((-a+b+c)+(a+b-c)+(-a+b-c)+(a+b+c))\mathbf{k})\\
&= \tfrac{1}{4}(0+4c\mathbf{i}+4a\mathbf{j}+4b\mathbf{k})\\
&= c\mathbf{i}+a\mathbf{j}+b\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Formulation détaillée du quaternion unitaire ici retenu

$$q_u = \frac{1+i+j+k}{2} = \left(\frac{1}{2},\frac{i}{2},\frac{j}{2},\frac{k}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2};\frac{\overrightarrow{i+j+k}}{2}\right\} = 1.\left[\frac{2\pi}{3};\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}\right]$$

soit :

$$q_u = \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}.\frac{i}{\sqrt{3}}, \sin\frac{2\pi}{3}.\frac{j}{\sqrt{3}}, \sin\frac{2\pi}{3}.\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$$

où $\frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ est le vecteur unitaire $\vec{V}$.

soit, pour $q_u=|q_u|\{\theta ;\overrightarrow{V_u}\}$:

$$q_u = 1.\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{\overrightarrow{i+j+k}}{\sqrt{3}}\right\}$$

Autre exemple : conjugaison par le vecteur unitaire $\vec{u}$

Si $q_u=\vec{u} = \{\frac{0,1,1,1}{\sqrt{3}}\}$, alors $q_u^{-1}=-q_u=-\vec{u}$ et $\theta=\pi/2$

Alors $-\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{u}$ fait faire un demi-tour (π) à $\vec{v}$ autour de l'axe $\vec{u}$ puisqu'alors $q=1[90°/\vec{u}]$.

Donc l'opérateur $-\vec{u}(\ )\vec{u}$ reflète les vecteurs dans le plan normal à $\vec{u}$.

2. Conjugaison par quaternions quelconques

Examinons différents cas.

Soient

- $q_1=1/2+i+j+k$: la rotation $C_q(V)$ associée par conjugaison aura le même axe (même vecteur) mais un nouvel angle de rotation arccos(2/13 [11])≃81° et elle sera associée à une amplification de $|q_1|=2$
- $q_2=2+i+j+k$: la rotation associée aura le même axe (même vecteur) mais un nouvel angle de rotation $\arccos(2/\sqrt{7})\simeq 71°$ et une amplification de $\sqrt{7}\simeq 2,6$…
- $q_3=1+2i+3j+4k$: la rotation associée aura un nouvel axe (non diagonal), un nouvel angle de rotation $\arccos(1/\sqrt{30})\simeq 79°$ et une amplification de $\sqrt{(30)}\simeq 5,5$

Bref, dans la conjugaison par $q = \{s;\vec{V}\}$:

- **l'axe** résultant de la conjugaison dépend du vecteur, indépendamment de sa norme ;
- **l'angle** résultant de la conjugaison intrique les composantes scalaire et vectorielle ;
- **l'amplification** résultante de la conjugaison dépend de la norme de q laquelle intrique également les composantes scalaire et vectorielle.

Démonstration

Pour démontrer (ce que nous ne ferons pas en détail) que la conjugaison d'un quaternion purement vectoriel (un V) s'interprète comme une rotation dans $\mathbb{R}^3$, il faut

- d'abord vérifier qu'elle conserve bien la norme : $|qV\bar{q}|=|p|$
- ensuite vérifier que conjugaison puis conjugaison inverse entraîne l'identité : $C_q(V)+\overline{C_q(V)}=0$

[11] $|q|=13/4 \Rightarrow s/|q|=1/2:13/4$

- vérifier également que si V est un quaternion-vecteur, alors $C_q(V)$=V' (la conjugaison transforme un quaternion-vecteur en un quaternion-vecteur) ;
- démontrer alors, par calcul algébrique, que si q unitaire=(θ,V), alors $C_q(V)$ est une rotation de p d'angle θ selon l'axe V.

On comprend alors pourquoi la multiplication des quaternions n'est, pas plus que les rotations dans $\mathbb{R}^3$, commutative.
Rappel : cette non-commutativité se vérifie facilement par i×j=-j×i

Intrication des grandeurs scalaires et vectorielles

Où l'on voit bien que scalaire et vecteur ne sont pas accolés, « sommés » (comme tendrait à le faire croire la forme s+xi+yj+zk=s+V) mais bien intriqués, tout de même que, pour une grandeur complexe, les composantes réelle et imaginaire de z=x+iy sont intriquées et non « sommées ».

Ici, le caractère trompeur du signe « + » employé tient au fait qu'il s'interprète comme une somme vectorielle c'est-à-dire une somme de longueurs orientées.

Ici, la donnée préalable d'un système d'orientation (en 2D ou 3D ou nD) est la donnée d'une intrication qui, seule, autorise de donner sens à l'expression (1,0)+(0,1)=(1,1).

Où il appert que la « somme » des composantes d'un vecteur est engendrée par une intrication première qui autorise alors deux (ou trois) projections du même vecteur sur les différents axes orientés en sorte que la somme de ces projections reconstitue le vecteur initial : vecteur = ∑ de ses projections axiales.

Un vecteur est ainsi la donnée d'une intrication orientée (dans 2D ou 3D ou nD) qui peut être décomposée par projections

Comparaison avec les complexes

L'équivalent de la conjugaison quaternionique dans les complexes serait :

$$z_u*iy*z_u^{-1}$$

soit, pour z_u=x'+iy' avec x'²+y'²=1 :

$$(x'+iy')*iy*(x'-iy')=(x'^2+y'^2).iy=iy$$
$$\Rightarrow z_u*iy*z_u^{-1}=iy$$

On vérifie que **la conjugaison est une opération *identité* si la multiplication est commutative**.
Pour les quaternions, $q_u \times V \times q_u^{-1} \neq V$

Cette différence essentielle n'efface pas une ressemblance : tout de même que z_u*iy engendre un complexe (-yy'+ix'y) et non pas un pur imaginaire alors que $z_u*iy*z_u^{-1}$ génère un pur imaginaire (le même iy),
q_u×V engendre un quaternion {s ; V'} et non pas un pur vecteur quand $q_u \times V \times q_u^{-1}$ engendre un pur vecteur W.
En effet, si q_u={s ; W}

q_u×V={s ; W}v{0, V}= (W.V ; sV+W∧V} qui n'est pas un pur vecteur

mais $(q_u \times V)\times q_u^{-1}$=(W.V ; sV+W∧V}×{s ; -W} et sa partie scalaire vaut alors

sW.V-W.(sV+W∧V)=sW.V-W.sV-W.(W∧V)=0 car sW.V=W.sv et W.(W∧V)=0

C'est pour cette raison que, pour faire tourner un vecteur V (3D), on ne peut recourir simplement à la multiplication quaternionique mais à la conjugaison quaternionique :

$$q \times \vec{V} \neq \vec{V'} \; mais \; q \times \vec{V} \times q^{-1} = \vec{V''}$$

Composition et inversion des conjugaisons

Composition

Notons $C_q(V)$ la conjugaison de V par q : $C_q(V)=q.V.q^{-1}$

On peut composer alors les conjugaisons $C_p=p.V.p^{-1}$ et $C_q=q.V.q^{-1}$ en la conjugaison C_{pq} :

$$p.q.V.(p.q)^{-1}=p.q.V.q^{-1}.p^{-1}=p.(q.V.q^{-1}).p^{-1}$$
$$\Rightarrow C_{pq}=C_p(C_q)$$

On utilise $(pq)^{-1}=q^{-1}.p^{-1}$ car $q^{-1}.p^{-1}.p.q=1$ mais $p^{-1}.q^{-1}.p.q=p^{-1}.C_{q^{-1}}(p) \neq 1$

<u>Inversion</u>

En particulier, on définit ainsi une **conjugaison inverse** :

$$q^{-1}.(q.V.q^{-1}).q=V$$

$$C_{q^{-1}}(C_q) = I$$

$$C_{(q^{-1})} = (C_q)^{-1}$$

Ainsi, l'inverse d'une conjugaison est une conjugaison par l'inverse.

Directions≠orientations

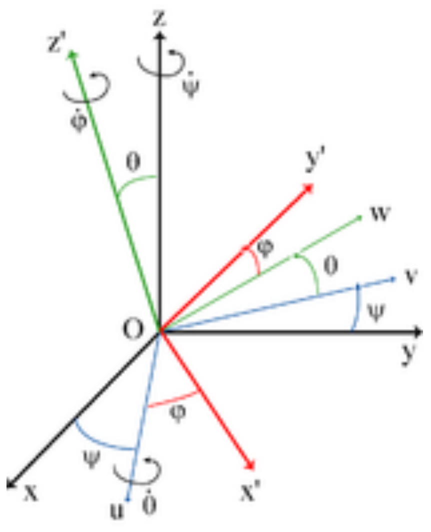
Attention : par lui-même, le quaternion n'est pas orienté (il ne distingue pas entre deux sens, direct ou indirect). L'obtention de coordonnées dans un système orienté choisi relève d'une interprétation des données du quaternion (concernant par exemple le sens de rotation).
Donc, une fois un repère d'orientation choisi, on interprète le quaternion comme direction dans ce repère orienté.

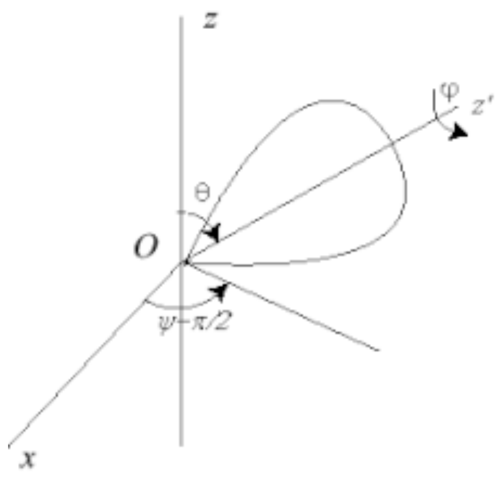
Cf. se diriger présuppose de s'orienter mais ne s'y confond pas. Une chose est de s'orienter, une autre chose est de se diriger en identifiant ses directions dans cette orientation générale.

Angles d'Euler

précession, nutation et giration : ψ, θ, φ.

- précessions ψ : autour de l'axe Oz : Oxyz→Ouvz (pour une toupie, rotation de la toupie autour de Oz) ;
- nutation θ : autour de l'axe Ou : Ouvz→Ouvz' (pour une toupie, obliquité de son axe par rapport à la verticale) ;
- giration φ : autour de l'axe Oz' : Ouvz'→Ox'y'z' (pour une toupie, rotation autour de son axe Oz').





D'où des matrices de rotation 3x3 (9 nombres) représentant le roulis, le tangage et le lacet.
Quatre inconvénients des matrices de rotation :

- une matrice orthogonale approchée n'est plus orthogonale et ne représente donc plus une rotation alors qu'un quaternion approché représente toujours une rotation.
- peu de compacité : 9 nombres quand 4 suffisent pour un quaternion ;
- « blocage de cardan » quand deux des trois cardans deviennent coplanaires, donc quand le paramétrage dégénère ;
- il est plus difficile d'engendre une rotation continue (et donc « fluide » pour les représentations visuelles – simulations, jeux…) avec les matrices qu'avec les quaternions (cf. analyse quaternionique).

Au total…

On voit que toute conjugaison quaternionique de $\vec{v} \epsilon \mathbb{V}_3$ par q_u=[1 ; θ/A] formalise algébriquement une rotation géométrique de $\vec{v}$ dans $\mathbb{V}_3$ (de l'angle 2θ selon l'axe A).
Inversement, toute rotation géométrique de $\vec{v}$ dans $\mathbb{V}_3$ (pour un angle θ selon l'axe A) sera formalisable algébriquement par une conjugaison quaternionique par q_u=[1 ; $\frac{\theta}{2}$/A].
On a donc une isomorphe de l'espace algébrique des conjugaisons quaternioniques dans $\mathbb{H}$ et de l'espace géométrique des rotations dans $\mathbb{V}_3$.
C'est là le résultat décisif sur lequel nous arrêtons cette première exploration de la théorie des quaternions.

Analyse quaternionique

Il faudrait la prolonger par l'examen de l'analyse quaternionique en étudiant comment les résultats extraordinaires de l'analyse complexe (voir leçon précédente) s'étendent ou non à l'analyse des fonctions quaternioniques.
Curieusement, l'analyse quaternionique ne s'est pas immédiatement développée après la mort d'Hamilton et il a fallu attendre les années 1930 pour qu'elle se constitue.
Ce « retard » débouche sur le fait assez étonnant que ce n'est apparemment qu'au début du XXI° siècle que l'analyse quaternionique se développe et se ramifie.
Je renvoie l'examen détaillé de cette analyse quaternionique à l'année prochaine (je rappelle que ces leçons se tiendront l'année prochaine à l'Ircam le samedi matin).

Nous allons maintenant nous attacher à interpréter intellectuellement tout ceci : qu'est-ce que ceci nous apprend sur la manière d'orienter les existences et les pensées en dehors des mathématiques ?

Interprétation générale de l'espace quaternionique à 3.1=4D

Des complexes (2=1+1D) aux quaternions (1+3=3.1D), nous passons d'une dialectique élémentaire entre effectivités (partie « réelle » des grandeurs complexes) et possibilités (partie « imaginaire » des grandeurs complexes) à une dialectique plus diversifiée entre un faisceau coordonné de trois types de possibilités composant un espace vectoriel en 3D, et une dimension numérique paramétrant l'effectivité résultante (non seulement l'effectivité « réelle » mais également l'effectivité des différents possibles concernés [12]).
Nous gardons donc notre schème interprétatif général :

- l'axe des scalaires (noté x pour le complexe z=x+iy et désormais noté s pour le quaternion q=s+ix+jy+zk) formalise l'effectivité d'une grandeur (complexe ou quaternionique) ;
- les autres axes (l'axe Oy pour les grandeurs complexes et le groupement vectoriel des trois axes Ox-Oy-Oz pour les grandeurs quaternioniques) formalisent la ou les dimensions des possibles en situation, la ou les dimensions d'un projet d'intervention visant non pas à gérer les existences déjà là mais à y transformer des possibilités en effectivités ou, inversement, de transformer des effectivités en impossibilités !

Le changement décisif porte sur l'extension de l'espace des possibles puisqu'il s'organise désormais selon trois dimensions borroméennement nouées entre elles et quantifiées selon la même logique paramétrique, celle-là même qui prend mesure des effectivités.

Une fois un tel espace constitué, nous allons y interpréter notre principal résultat : pour diriger et rediriger un projet orienté d'intervention prenant la forme d'un vecteur intriquant trois dimensions de possibilités, il est plus efficient de le penser en plongeant ce projet dans la situation complète (dotée quaternioniquement d'une dimension scalaire apte à paramétrer l'ensemble) car l'opération de pilotage du projet va prendre alors la forme simplifiée d'une conjugaison. Mais ceci revient très exactement à « évaluer » le projet non pas comme pur projet mais bien comme projet en situation, c'est-à-dire devant intervenir dans un état effectif donné.
Autrement dit, l'idée induite de la mathématique est la suivante : **pour rediriger un projet au fur et à mesure de son effectuation, il faut continuellement mesurer ce qui reste à faire en l'intriquant aux transformations effectives. Ceci autorise alors de rediriger le projet en conjuguant les tâches à accomplir à quelque bilan d'ensemble**.
En quelque sorte nous interpréterons la conjugaison $W=q\times V\times q^{-1}$ redirigeant V dans $\mathbb{V}_3$ ainsi :

- q représente le bilan que nous pouvons faire de l'action accomplie par V dans sa situation ;
- q et son conjugué q^{-1} représentent respectivement les coups de barre à gauche et à droite qu'il convient d'opérer pour rediriger V ;
- la conjugaison $q\times V\times q^{-1}$ représente l'amplirotation que ce bilan induit : l'amplification correspond à une intensification des tâches et la rotation à leur redirection.

Pour interpréter tout ceci dans des situations non-mathématiques, il va donc falloir nous demander successivement :

A. Que veut dire que les trois dimensions du possible en situation sont borroméennement nouées ? Autant dire comment interpréter la formalisation suivante : ik=k, jk=i et ki=j ?
B. Comment interpréter l'aptitude de la quatrième dimension scalaire à paramétrer l'ensemble des effectivités ? Autant dire que veut dire l'intrication générale du 3.1D formalisée par ijk=-1 ?
C. Comment interpréter le quaternion comme grandeur synthétique, autant dire comme $q=s\oplus V=s\oplus(i\otimes j\otimes k)$?
D. Comment interpréter la redirection d'un projet vectoriel 3D V selon une conjugaison quaternionique q appropriée au bilan du travail accompli ?

---

[12] selon l'idée qu'en un sens, une possibilité peut être plus ou moins effectivement possible – disons : plus ou moins facile à réaliser…

Donc quatre étapes :

A. $ik=k$, $jk=i$ et $ki=j$?
B. $ijk=-1$?
C. $q=s\oplus V=s\oplus(i\otimes j\otimes k)$?
D. $W=q\times V\times q^{-1}$?

Leçons générales

Rappelons formellement les leçons générales que nous pouvons tirer de notre étude mathématique avant d'examiner leur mise en œuvre dans un certain nombre de situations concrètes opérant comme possibles modèles de la théorique quaternionique.

1) Pour se diriger en 3D, il faut s'orienter en 3.1=4D : s'y positionner (caler sa position) et caler sa direction.
2) Le 4D est un 3+1 ou mieux un 3.1
3) La dimension scalaire paramétrante
   - paramètre l'ensemble, y compris elle-même ;
   - est intriquée aux trois dimensions vectorielles (comme l'atteste le fait que $i^2=j^2=k^2=-1$).
4) Le possible devient un vecteur 3D $i^2=j^2=k^2=-1$
5) Dimensions orthogonales : les possibles ne sont pas colinéaires mais ont des dimensions indépendantes.
6) Borroméanité : $ij=jk=ki$
7) Intrication du 3.1D : $ijk=-1$
8) La dimension scalaire est celle de l'effectuation : elle mesure synthétiquement l'effectuation globale des trois possibilités.
9) Un quaternion formalise la transformation intriquée d'une effectivité selon de trois possibilités en dotant cette transformation d'une mesure globale d'effectuation.

Qu'est-ce que s'orienter ?

1. Se repérer (par rapport à un repère orienté 3D)
2. Se situer (par rapport à un point de référence)
3. Se diriger

Différentes manières de se trouver désorienté

Ne pas savoir se situer

- Où en est-on ?
- Quel point de repère stable ?

Ne pas pouvoir se repérer

- Où est le repère ?
- Quel est le bon repère ?

Ne pas arriver à se diriger

- Quelle direction décider, prendre ?

De cinq manières de désorienter !

Espace réaliste habitable

$\mathbb{H}\rightarrow\mathbb{R}^4$: rabattre l'espace d'intervention, intérieurement dialectisé entre effectivités et possibilités, en un simple espace réaliste tenu tel quel pour habitable, au moyen d'une assimilation indue de $\mathbb{H}$ à $\mathbb{R}^4$ (analogue à la réduction « réaliste » de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).

Réduire ou augmenter la dimension

Réduire (vers le bas, par projection indue) ou noyer (vers le haut, par élargissement confus) le nombre des dimensions pour les espaces dans lesquels l'humanité entreprend collectivement de s'émanciper en sorte d'enfermer celle-ci dans des espaces où elle n'a plus d'autre horizon pragmatique que la survie animale.

Réduire d'un cran la dimension : 4D→3D

Cf. pays→région : décentralisation girondine, régionalisme (Catalogne), fragmentation des grands États, localisme (« agir localement »), dissolution du point de vue d'ensemble au nom du spontanéisme, mais aussi transformation du « monde-Musique » en « le monde des musiques » (France-Musique → France-musiques)…

Augmenter d'un cran la dimension : 4D→5D

Cf. pays→zone de libre échange, « la communauté internationale », « l'Occident », mais aussi immerger le monde-Musique dans l'univers des pratiques sonores, noyer le moderne dans le postmoderne, …

Opprobre sur le binarisme

Dénigrer la binarité (celle qui opère au principe de tout repère d'orientation) selon la maxime nihiliste : « *plutôt vouloir la désorientation et vivre sans boussole qu'assumer la rigueur d'une orientation binairement adverse !* »

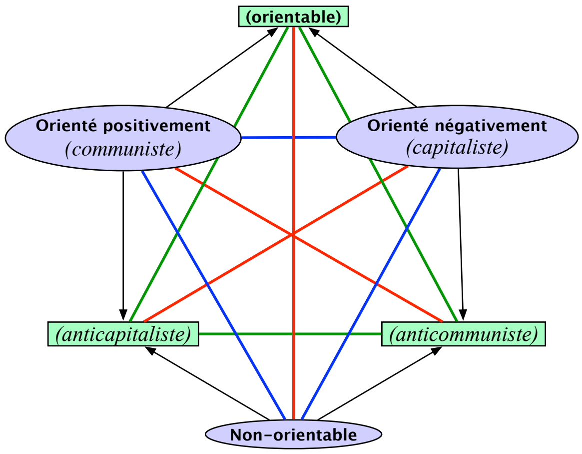
On verra, avec Riemann, que

1) tout espace n'est pas orientable (donc, par exemple, tout n'est pas politisable ou sexuable) ;

2) mais si un espace est orientable, il l'est alors de deux et seulement de deux manières duales (cela tient au fait qu'on peut associer un déterminant à tout repère matriciel d'orientation et, par définition, le déterminant est un nombre non nul qui est soit positif, soit négatif).

Donc déconstruire ici le binarisme, c'est éradiquer les possibilités mêmes de s'orienter !

Il est vrai qu'il existe toujours une position tierce, mais c'est alors celle de refuser toute orientation !



Prolifération incoordonnée de repères locaux

Prétexter la juste nécessité de repères locaux [13] pour défaire la nécessité corrélative de coordonner stratégiquement l'inévitable prolifération des ajustements locaux.

Or, nous l'examinerons plus tard en détail, le global ne se déduit pas directement du local !

On l'a déjà vu avec l'analyse complexe : pour aller du local au global, il faut en passer par l'étape du régional qui ne se déduit pas de la première !

Ce point du régional va se retrouver

- en géométrie différentielle des atlas quand on examinera le nécessaire recouvrement de

[13] On examinera en détail la légitimité de ce point avec la géométrie riemannienne qui adjoint un atlas aux surfaces…

deux cartes locales pour pouvoir espérer construire leur recollement ;

- en géométrie algébrique des faisceaux quand on examinera la même dialectique du recouvrement et du recollement.

Le point essentiel est ici le suivant : la dialectique du local et du global opère comme tension, non comme fusion, ni dans le sens local→global (le local engendrerait spontanément le global – voir les échecs politiques de socialisme autogestionnaire croyant pouvoir faire l'économie d'une planification socialiste), ni inversement dans le sens global→local (le point de vue d'ensemble est une chose ; son appropriation créatrice à une situation locale donnée en est une autre).

En politique, la promotion du local→global représente un spontanéisme ; celle du global→local représente un dogmatisme.

« C'est plus compliqué ! » ou « c'est pragmatiquement plus simple ! »

L'objection canonique est ici : « *le binaire est trop simple, le complexe est trop compliqué ! Tenons-nous-en plutôt aux expériences avérées (« empirisme ») de ce qui marche (« pragmatisme ») !* »

Mais si le complexe est plus difficile, il est en vérité plus clair (voir le paradigme de l'analyse complexe). Et seule la binarité d'orientation permet d'y accéder.

MODÈLES

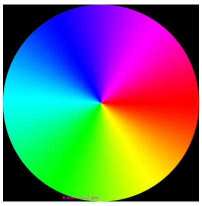
Cinq modèles de deux types : physique (2) et subjectif (4)
Comme nous allons le voir, il ne s'agit pas de vérifier une exacte conformité modèle/théorie mais plutôt d'interroger la situation concrète en se demandant comment l'hypothèse qu'elle puisse être modèle de cette théorie l'éclaire : ici la théorie nous incite à nous poser des questions sur la situation- « modèle » que nous ne nous serions pas posées autrement.
Listons-les.

- Vectorialisation : quel vecteur 3D ?
  - Quelle multiplication ?
  - Non-commutativité ?
  - Borroméanité vectorielle $i\times j=k$, $j\times k=i$, $k\times i=j$?
- Scalairisation ?
  - Quelle dimension paramétrique en plus ?
  - Quelle intrication quaternionique $i\times j\times k=-1$?
  - Quelle intrication $i^2=j^2=k^2=-1$ (un scalaire) ?
- Conjugaison quaternionique pour rediriger ?

Plutôt que de la tenter, modèle par modèle, e renverrai l'interprétation de la conjugaison quaternionique à la fin.

Modèles physiques

Le spectre des couleurs, et son paramétrage par la luminosité ?

	CHROMATICITÉ (3 couleurs primaires [14])	**Vert**
		Rouge
		Bleu
	LUMINOSITÉ	*noir* — o *gris* — x *blanc*

Interprétation ?

<u>Vectorialisation ?</u>

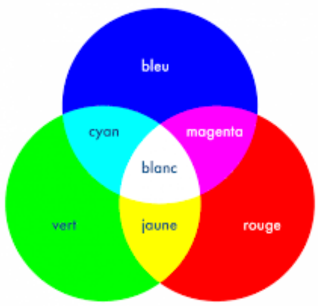
Multiplication…

Interprétons-la selon la logique de synthèse additive comme produit de couleurs : action d'une couleur sur une autre (même si ceci s'appelle improprement « somme » ou « addition » de couleurs).

Non-commutative ?

C'est commutatif !

Borroméanité $i\times j=k$, $j\times k=i$, $k\times i=j$?



Ce n'est pas exactement borroméen :

[14] de la synthèse additive…

Vert*Rouge=Jaune
Rouge*Bleu=Magenta
Bleu*Vert=Cyan

<u>Scalairisation ?</u>

Scalairisation générale ?

Il y a bien

Luminosité*Couleur=Couleur
Noir=-Blanc mais Noir≡0 et Blanc≡1 (et 0≠-1)

mais il n'existe pas de scalaires négatifs !

$i^2=j^2=k^2=-1$?

Non! : Vert*Vert=Vert ≠ Noir…

$i\times j\times k=-1$?

Presque! : Vert*Rouge*Bleu=Blanc=**1** !

L'espace-temps, et son paramétrage par le temps

La pseudo-métrique « $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$ » [15] dite de Minkowsky formalise en 1907 l'espace-temps de la relativité restreinte d'Einstein.
Le principe de causalité (on ne peut rebrousser le temps) vient orienter le temps et par là le repère spatio-temporel.

<table>
<tr><td rowspan="4">$x^2+y^2+z^2-t^2$</td><td rowspan="3">ESPACE</td><td>x</td></tr>
<tr><td>y</td></tr>
<tr><td>z</td></tr>
<tr><td>TEMPS</td><td>t</td></tr>
</table>

Interprétation ?

<u>Vectorialisation ?</u>

Multiplication…

Interprétons-la ici naturellement comme produit vectoriel de deux dimensions spatiales.

Non-commutative ?

Oui : cf. produit vectoriel ordinaire

Borroméanité $i\times j=k,\ j\times k=i,\ k\times i=j$?

Oui : cf. produit vectoriel ordinaire

<u>Scalairisation ?</u>

Scalairisation générale ?

Oui : le temps paramètre le 3D : {x(t), y(t), z(t)}

$i^2=j^2=k^2=-1$?

Non : il faudrait faire intervenir ici le produit scalaire, mais c'est alors une autre multiplication !

$i\times j\times k=1$?

Non ! Produit vectoriel=Produit scalaire=0 !

L'espace-temps musical…

On pourrait ajouter à ces modèles « physiques » celui de l'espace-temps musical avec ses trois dimensions vectorielles (hauteur-durée-intensité) paramétrées le temps :

{t ; H(t), D(t), I(t)}

Mais, concernant la musique, je vais plutôt privilégier comme on va le voir un modèle « subjectif » : celui du musicien qui se trouve être également militant, mathématicien et amant…

---

[15] En vérité $\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$

Modèles subjectifs

L’axiome du montage chez Godard : paramétrage par le montage

Dans un long entretien aux *Cahiers du Cinéma* (octobre 2019), Jean-Luc Godard déclare :
« *J’ai fait une équation, très simpliste, que j’appelle l’axiome du montage, comme Euclide avait fait ses cinq axiomes : x+3=1. Pour obtenir un, il faut supprimer deux. Ce n’est pas vraiment une équation. Quand je l’ai montrée à Badiou, il ne savait pas trop quoi en faire.* »
Je l’interprète ainsi :

une dimension de type nouveau **x** + **trois** dimensions usuelles = **un** quaternion,
⟹ au cinéma, **1** montage + **3** dimensions du matériau = **1** film

si l’on entend par *montage* la dimension cinématographique venant paramétrer trois dimensions du matériau cinématographique en sorte de produire les orientations synthétiques d’un film.

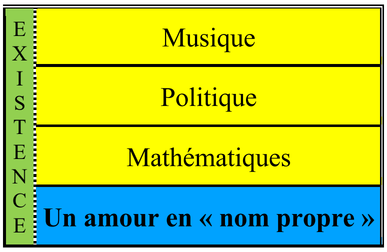
Trois dimensions cinématographiques ?

Comment dans ce cas entendre les trois dimensions du matériau cinématographique ?
On peut l’envisager d’au moins trois manières différentes.

1) de manière spatiale dans la salle de cinéma : on compte 2 dimensions pour la surface plane de l’écran et 1 dimension pour le son dirigé vers le public ;
2) de manière imagée concernant la bande de la pellicule : on compte 2 pour sa surface et 1 pour la piste-son ; ou, de manière plus abstraite, le montage combine des images en deux dimensions et un son en une dimension ;
3) de manière plus symbolique concernant cette fois la composition du plan cinématographique, on comptera trois en additionnant un champ, un contre-champ et un hors-champ.

Une existence subjective individuelle, et son paramétrage par l’amour

Pour ne pas généraliser indûment, je prendrai l’exemple de ma propre existence subjective, intriquant un faire de la musique depuis mon enfance, un faire des mathématiques depuis que j’ai dix ans, un faire de la politique depuis que mes 19 ans en 1966, le tout se trouvant paramétré et « mesuré » selon un amour sexué qui vient en quelque sorte attester de l’existence effective et intriquée des trois « faire » (musique/mathématiques/politique).



Interprétation ?

Vectorialisation ?

Multiplication…

Interprétons-la comme l’effet d’une dimension sur une autre.
Par exemple les mathématiques modernes peuvent-elles éclairer des questions politiques ou musicales ? Y a-t-il sens à politiser la musique ?

Non-commutative ?

Oui : mathématiser la politique (la formaliser mathématiquement) n’est pas politiser les mathématiques !

Borroméanité $i\times j=k,\ j\times k=i,\ k\times i=j$ *?*

N’y aurait-il de croisement *politique*×*musique* que par les mathématiques ?
Mais cela n’a pas trop de sens de tenir que tout croisement *politique*×*mathématiques* convoquerait la musique !

<u>Scalairisation ?</u>

Scalairisation générale ?

Oui, si l'on pose qu'il s'agit, en toutes ces activités (ou plutôt ces faire), d'<u>aimer</u>, c'est-à-dire non pas tant d'aimer la musique [16], la politique et les mathématiques, mais d'aimer en faire !

$i^2=j^2=k^2=-1$?

Non, sauf pour l'amour (de quelqu'un) car aimer l'amour [17], c'est ne pas aimer $\Longrightarrow$ **amour^2=-1**

$i \times j \times k=1$?

???

En politique, deux orientations et deux seules avec un paramétrage par l'organisation

À mon sens, cette situation va s'avérer correspondre le mieux à l'idée d'un possible modèle de notre théorie quaternionique.

			DEUX ORIENTATIONS… et deux seules !	
			COMMUNISTE	***CAPITALISTE***
QUATERNION	**VECTEUR**	**Travail & propriété**	Travail émancipé & appropriation collective des moyens et des fins de la production	Travail exploité et aliéné & propriété privée des moyens de production
		Peuple & pays	Résolution des contradictions au sein du peuple & réduction des grandes contradictions du pays	Concurrence généralisée
		Humanité & monde	Solidarité entre les peuples et coopération entre les pays d'une même humanité peuplant un seul monde	Rivalités et guerres
	SCALAIRE	**Organisation** de la politique	Organisation politique des masses et dépérissement de l'État	Gestion étatique séparée et oppressive

Interprétation ?

<u>Vectorialisation ?</u>

Multiplication…

Interprétons-la comme l'effet d'une dimension sur une autre : il y a bien intrication des trois dimensions politiques.

Par exemple :

Non-commutative ?

Il semble raisonnable de tenir que l'intrication est dynamiquement dissymétrique, donc non-commutative.

Par exemple :

Borroméanité $i \times j=k,\ j \times k=i,\ k \times i=j$?

Elle semble plutôt satisfaite car l'intrication de deux dimensions affecte la troisième.

Par exemple :

> $\Delta p * \Delta w \Longrightarrow \Delta c$? Oui, si l'on adopte une conception étendue de l'internationalisme communiste à une coopération générale (opposée à une concurrence) : voir les limites de l'autogestion qui débouchent sur la concurrence entre unités de production autogérées…

---

[16] J'ai par exemple soutenu, dans une conférence des années 90, qu'il ne s'agissait pas d'aimer la musique contemporaine mais de la vouloir…

[17] Mauvaise directive de Saint Augustin !

$\Delta w * \Delta c \Rightarrow \Delta p$? Oui : comment bouleverser les rapports de travail et la coopération entre unités de tous types si l'on ne transforme pas le régime de propriété ?

$\Delta c * \Delta p \Rightarrow \Delta w$? Oui également : la coopération généralisée et la révolution des régimes de propriété impliquent bien de transformer les rapports de travail au sein des unités de production.

<u>Scalairisation ?</u>

Scalairisation générale ?

Oui : il s'agit bien d'organiser politiquement la révolutionnarisation des trois dimensions.

$i^2=j^2=k^2=-1$?

??? et le carré (du type travail^2) est déjà problématique à interpréter !

$i \times j \times k=1$?

Non ! Une révolution conjointe des trois dimensions n'engendre pas une désorganisation générale (ce qui est proprement l'accusation anti-communiste).

On aurait plutôt ici, comme pour le spectre des couleurs : $i \times j \times k=1$!

On pourrait éventuellement avancer que les 2 orientations se formalisent ainsi : $i \times j \times k=\pm 1$!

<u>Au total…</u>

L'organisation de la politique constitue l'échelle de mesure de l'intrication politique d'ensemble (paramétrage, dont autoparamétrage).

La ligne – la direction générale – est bien affaire du vecteur 3D (travail-propriété, peuples-pays, humanité-monde).

Mais le processus de sa mise en œuvre (cf. quels mots d'ordre successifs ?, quelles directions et redirections incessantes ?) mobilise en premier lieu la dimension scalaire : le mode d'organisation.

Techniquement, l'angle de rotation d'un quaternion met en jeu l'ensemble du 4D car

$$\theta = \arccos\left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Cf. il y a une sorte de proportionnalité entre la taille de l'organisation et celle de la ligne (de ce qui est révolutionné).

En un certain sens, l'opérateur pour rediriger pratiquement la ligne est d'ordre organisationnel.

Cf. dans le passage de l'UCF à l'OP en 1985, le changement global de ligne politique se mesure à l'opérateur organisationnel formulé par un changement de nom.

Cf. il y a une dialectique ligne-organisation : en politique communiste, l'organisation n'est pas l'intendance, l'administration, la gestion de la ligne (comme elle l'est dans une orientation capitaliste et étatique).

L'organisation prend mesure synthétique de ce qui a été effectué en matière de ligne.

Conjugaison quaternionique

Reste le plus délicat à interpréter précisément : l'opération de conjugaison quaternionique qui met en œuvre la redirection d'un vecteur 3D.

Je dois avouer n'y être pas très bien arrivé :

- je n'y suis pas arrivé du tout dans le cas de nos deux modèles physiques comme dans nos deux premiers modèles subjectifs ;
- seul notre modèle politique suggère d'y interpréter la conjugaison quaternionique comme une manière de rediriger une intervention politique en enchaînant un premier coup de barre à gauche et un second à droite (ou vice versa selon que la conjugaison commence par $q \times V$ ou par $V \times q^{-1}$). L'idée serait ici qu'une redirection procède généralement (ce n'est pas nécessaire, pas plus que la conjugaison n'est formellement nécessaire : je rappelle qu'elle intervient pour simplifier les calculs, lisser les rotations et éviter les singularités type « blocage de cardan ») en deux étapes successives où la seconde vient corriger ce que la première ne pouvait d'un coup obtenir. En un sens, la conjugaison est une opération qu'on pourrait dire « pragmatique » : elle facilite un contrôle de la redirection par division de ses effets.

Bilan

Si l'on résume en un tableau nos quatre situations [18], candidates à servir de « modèle » à notre théorie, on obtient ceci :

	VECTORIALISATION			SCALAIRISATION			CONJUGAISON
	multiplication vectorielle	**non-commutative**	**borroméenne**	**multiplication scalaire**	**$i^2=j^2=k^2=-1$**	***$i\times j\times k=-1$***	***$q\times V\times q^{-1}$***
Couleurs	forte	Non	Non	Oui	Non	i.j.k=1 !	
Espace-temps	forte	forte	forte	Oui	Non	Non	
Existence subjective	*faible*	faible	?	Oui	$amour^2=-1$	Non	
Orientations politiques	forte	faible	faible	Oui	???	i.j.k≡±1 !	±

Le modèle le plus compatible semble donc le partage politique des deux orientations stratégiques.

***

[18] Je mets ici de côté l'axiome énigmatique de JLG…

Brève documentation

Livres

Théorie des quaternions

Romain Vidonne : *Groupe circulaire, rotations et quaternions* (ellipses, 2001)
Andrew J. Hanson : *Visualizing Quaternions* (Morgan Kaufman, 2006)

Hamilton

Luis Fernando Arean Alvarez : *Hamilton. Les fondations de la mécanique* (coll. *Génies des mathématiques*, 2019)

Vidéos

« Henri Paul de Saint Gervais » : *Quaternions, rotations, fibrations* :
http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Quaternions-rotations-fibrations.html

***