Cinquième leçon de maths modernes

Analyse complexe (Cauchy, 1838) : prolongement analytique et action régionale

(6 février 2022)

ARGUMENTAIRE

Enjeu intellectuel

En ces temps gorgés d'angoisse, nos raisons (matérialistes) d'espérer sont plus que jamais précieuses. À la lumière de la mathématique moderne, l'action restreinte, que Mallarmé a inscrite au cœur de l'intellectualité contemporaine comme puissance affirmative, non comme renoncement, nous en fournit une de première importance.
Mais en quoi l'action restreinte organise-t-elle une telle puissance affirmative et laquelle exactement ? En quoi une telle puissance, matériellement inscrite dans la constitution d'une **région** reliant a minima deux **localisations** différentes, fonde-t-elle une espérance (qui ne trompe pas) dans une possible prolongation **globale** d'une action régionalement restreinte ?
Sur tout ceci, cette partie de la mathématique moderne constituée, à partir de Cauchy, par l'analyse des fonctions complexes peut nous éclairer et nous guider rationnellement, ses victoires dans la pensée (Ian Stewart : « *Beaucoup de batailles ont déjà été gagnées*. ») constituant des socles pour les intellectualités contemporaines soucieuses d'émancipation.

Analyse mathématique

L'argumentation mathématique s'enchaînera selon les cinq étapes suivantes.

1. Soit f(z) une fonction **complexe** sur un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$. Cette fonction, transformant une grandeur complexe en une autre, va formaliser le type d'action qui nous intéresse : une action qui, dans une situation donnée, transforme les rapports entre effectivités et possibilités et non pas seulement, comme le fait une fonction *réelle* (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$), les seules effectivités.
   On a vu en effet, dans la leçon précédente, comment les grandeurs complexes *intriquent* effectivités « réelles » et possibilités « imaginaires » en sorte qu'une fonction « complexe » vient formaliser l'action suivante :
   $$x_{\text{effectif}} + y_{\text{possible}} \rightarrow x'_{\text{effectif}} + y'_{\text{possible}}$$
   Une action *restreinte* ou *régionale* s'inscrit dans ce type spécifique d'action *complexe* qui prend acte que, dans une situation donnée, il n'y a pas que ce qu'il y a *effectivement* car il y a également les possibilités et les potentialités propres de cette situation.
   Dans l'énoncé « Il n'y a pas que ce qu'il y a », la *négation doublée* (négation dite *confirmative* - « ne… pas… » - d'une première négation dite *exceptive* - « ne… que… ») vaut affirmation d'une extension de la situation à ses possibles, présents mais non présentés comme tels.
   On rappellera au passage que cette algèbre des grandeurs complexes repose sur leur capacité de faire corps, capacité qui s'attache essentiellement à la possibilité de se multiplier entre elles (c'est-à-dire de s'affecter) et à l'adjonction d'une *semi-négation* $\sqrt{-1}$.
   i=$\sqrt{-1}$ est la *semi-négation* (au sens d'une extraction de racine :$\sqrt{\textit{négation}} = \textit{négation}^{1/2}$) de **1** (dont **-1** est la négation complète : **i*i=-1**).
2. Supposons maintenant que cette fonction f(z) soit **différentiable** sur le domaine D considéré.
   La propriété de différenciation veut dire que, localement en $\alpha \in D$, *le résultat* df de l'action f sur z sera commensurable, selon f'(α), à son *origine* dz :
   $$df = f'(\alpha) * dz$$
   Assurer la différenciation de l'action impliquera de respecter des contraintes spécifiques, plus exigeantes que dans le cas réel : les *conditions* dites *de Cauchy-Riemann*.
   On va en déduire des propriétés tout à fait extraordinaires de la fonction f, propriétés qui n'ont nul équivalent pour les fonctions *réelles* agissant sur $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire sur un plan « réel » pourtant apparenté au plan « complexe » $\mathbb{C}$.
3. En tout point α du domaine D où f intervient, on peut alors construire une ***intégrale de contour*** telle que l'action *discrète* de f en ce point α équivaut à son action *continue* en faisant le tour de ce point.
   Ainsi – propriété inattendue - agir en un point α équivaut à agir sur le contour d'un de ses voisi-

nages !

4. Ce bond du discret au continu autorise paradoxalement une redescente vers l'infini dénombrable : toute fonction complexe différentiable l'étant **indéfiniment** (ce qui n'est aucunement le cas pour les fonctions réelles), on déduit en effet que, sur le domaine de départ D, la fonction f est caractérisable de proche en proche selon une formulation désormais algébrique, dite en ***série entière***, qui la structure *localement* en polynôme infini et la dote ce faisant d'une rigidité cristalline apte à proliférer. On dira que la fonction f est *analytique*.

   Cette propriété cristallographique est la clef des propriétés sans égal des fonctions complexes différentiables.

   Ainsi analyser une situation donnée en termes de grandeurs complexes impose certes une plus grande rigueur d'intervention mais cette rigueur gage en retour une plus grande simplification de l'action en question.

   Où l'on retrouve un point, dégagé lors de la précédente leçon sur les grandeurs complexes : <u>complexifier une situation</u> (en y incorporant ses possibilités latentes) <u>n'est pas la compliquer</u> et par là entraver les possibilités d'y intervenir ; tout au contraire, <u>c'est simplifier les interventions</u> qui y deviennent envisageables, interventions de type nouveau car jouant de possibilités explicitement intégrées à la situation.

5. D'où se démontre (en incorporant désormais les noms de Weierstrass et Riemann) le résultat pour nous essentiel : une telle fonction s'avère ***analytiquement prolongeable*** sur tout le domaine D et ce de telle manière que, comme le métaphorise Tristan Needham, « *si deux fonctions analytiques ont des effets identiques sur la courbe dessinée par un simple cil tombé d'un œil dans une rue de San Francisco, alors elles ont des effets identiques sur toute la Californie !* ».

Interprétation

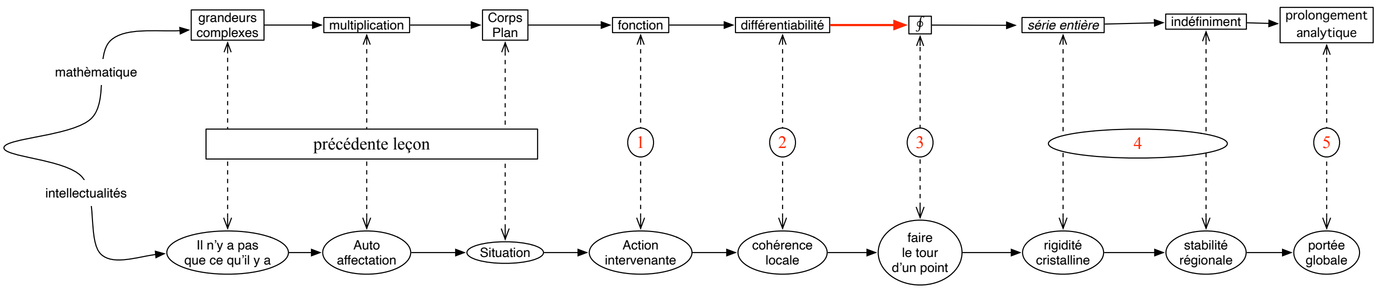
Rendue en ce point, l'action, autolimitée à une région où se constitue un ferme trajet d'intervention entre deux points séparés, révèle sa puissance globale selon ce qu'on appellera ***le « théorème » de l'action régionale***.

- Posons que dans une situation donnée, l'action dite « complexe » ambitionne de transformer les rapports internes à cette situation entre effectivités, possibilités et potentialités (sans se contenter donc, comme le fait l'action « réaliste », de gérer les effectivités existantes, c'est-à-dire de recombiner ce qu'il y a factuellement là, au vu et au su de tous).
- Pour ce faire, une telle action doit assurer la délicate cohérence de son intervention transformatrice (sa « différentiabilité ») : cette cohérence est en effet plus difficile à assurer pour une action « complexe » (c'est-à-dire *intervenante*) que pour une action dite « réaliste » (c'est-à-dire *gérant* l'existence de ce qui est empiriquement disposé aux yeux de tous).
- Mais si elle y parvient, une telle action peut légitimement ambitionner d'opérer à l'échelle globale du domaine concerné (sans se limiter donc au seul « agir localement ») pour peu qu'elle assure sa constitution sur une région reliant a minima deux lieux disjoints : sa réussite régionale fondera alors, de manière matérialiste et rationnelle, l'espérance de son extension globale.

Ainsi il s'avère possible d'échapper au confinement d'une « action locale » (celle à laquelle le conformisme contemporain au désordre du monde capitaliste voudrait condamner ceux qui légitimement ambitionnent de le changer globalement et radicalement) en reliant deux « lieux » sous le chef d'une même ligne transformatrice en sorte de constituer une « région » de type nouveau (région à portée globale : *zone libérée*, ZAD…), devenue effectivement extensible et matérialisant ainsi une réelle « pensée globale ».

Au total, ce « théorème » vient rationaliser le principe émancipateur de Saint Paul : « à la différence de l'espoir (trompeur) en un futur Grand Soir, l'espérance (en une portée globale des interventions ici et maintenant ne trompe pas) quand elle procède d'une victoire d'ores et déjà régionalement acquise ! »

Ce faisant, nous aurons ainsi procédé au doublage des concepts mathématiques par les notions intellectuelles suivantes :

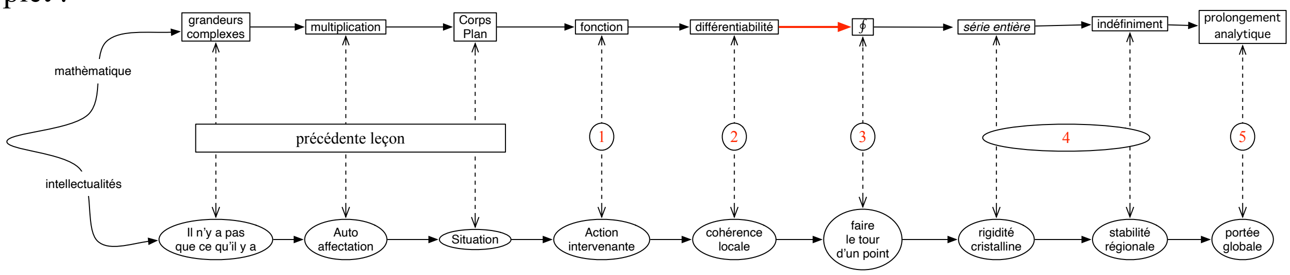

mathèmatique
intellectualités
grandeurs complexes
multiplication
Corps Plan
fonction
différentiabilité
∮
série entière
indéfiniment
prolongement analytique
précédente leçon
1
2
3
4
5
Il n'y a pas que ce qu'il y a
Auto affectation
Situation
Action intervenante
cohérence locale
faire le tour d'un point
rigidité cristalline
stabilité régionale
portée globale

***

PLAN

« Une volonté, à l'insu, qui dure une vie, jusqu'à l'éclat multiple… »
Mallarmé (*L'action restreinte*) [1]

La précédente leçon a examiné en détails la notion de **grandeur complexe** z=x+iy.
La spécificité **non-numérique** de ces grandeurs complexes se concentre dans l'opération de **multiplication complexe**.
L'espace géométrique propre de ces grandeurs complexes est le **plan complexe** $\mathbb{C}$ qui diffère profondément du plan réel $\mathbb{R}^2$ par sa dissymétrie et sa dynamique internes.
Nous repartirons aujourd'hui de là.
Procédons donc à de rapides rappels concernant les trois premières notions de notre parcours complet :



Rapides rappels

Rappels historiques

1) XVI° italien : **Cardan** avance l'hypothèse $\sqrt{-1}$
2) XVII° : **Descartes** nomme « imaginaire » les grandeurs $x\sqrt{-1}$
3) XVIII° : **Euler** note « i » la grandeur $\sqrt{-1}$ et formule l'équation synthétique $e^{i\pi}+1=0$
4) XIX° : **Gauss** nomme « complexe » la « somme » z d'un « réel » x et d'un « imaginaire » iy : z=x+iy

Corps et multiplication

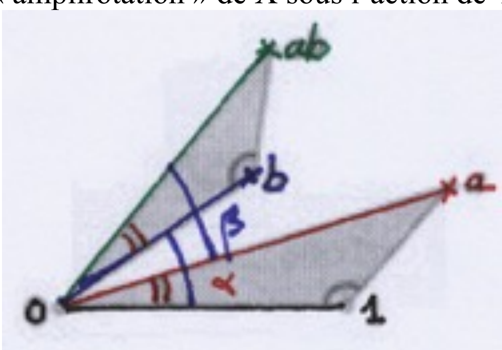
La multiplication est la clef de voûte des grandeurs complexes : c'est elle qui leur permet de faire corps.
Elle se formule algébriquement de manière énigmatique ainsi :

$$\{x\ ;\ y\}*\{x'\ ;\ y'\}=\{x.x'-y.y'\ ;\ x.y'+x'.y\}$$

Cette énigme algébrique s'interprète géométriquement ainsi : multiplier X par Y, c'est prendre Y pour nouvelle base orthonormée en sorte que X équivaille à X*Y dans cette nouvelle base :

$$X \equiv (X*Y)_{[Y]}$$

Cette opération aboutit à une « amplirotation » de X sous l'action de Y – ici de b par a :



Les triangles 0-1-a et 0-b-ab sont semblables ou homothétiques.

Corollairement, diviser X par Y, c'est trouver la base X/Y telle que Y équivaut à X dans cette nou-

[1] Pléiade (1945), p. 369

velle base :

$$Y \equiv (X)_{[X/Y]}$$

On interprètera la division par i comme une opération d'*effectuation* : diviser Y par i pour obtenir y(=Y/i), c'est « effectuer » Y en y c'est-à-dire trouver la base i telle que Y y soit effectif :

$$\text{effectif} \equiv \text{possible}_{[\mathbf{i}]}$$

Semi-négation

i=√(-1) est la semi-négation de **1** dont **-1**=i^2 est la négation.
Géométriquement, cela correspond à faire tourner **1** de 90° dans le sens trigonométrique.

Notations

Nous avons précédemment souligné les spécificités de la multiplication et de l'addition complexes en les distinguant de la multiplication et de l'addition des nombres réels par l'usage de lettres propres :

- dans les réels de ℝ : x+y et x.y
- dans les complexes de ℂ : z✚z' et z*z'

Nous pouvons désormais utiliser uniquement les lettres traditionnelles de multiplication et d'addition sans risque d'ambiguïté, ce qui va faciliter nos formulations algébriques : on saura que

- si l'on note z.z' ou plus simplement encore zz', ceci voudra dire z*z'
- que si l'on note z+z' ou r+z ou x+iy, ceci voudra dire z✚z' ou r✚z ou x✚iy
- et que si l'on note (x+iy).(x'+iy'), ceci voudra dire (x✚iy)*(x'✚iy').

Oubli, effacement…

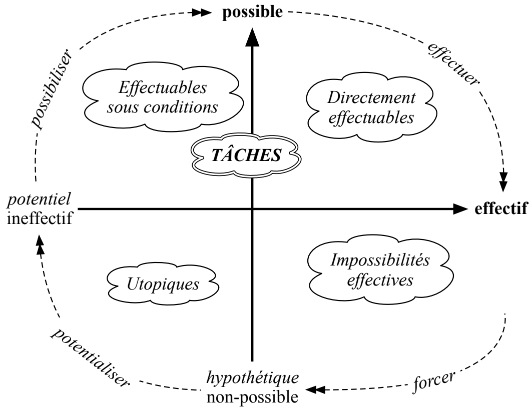
Ce faisant, la mathématique efface et oublie la distinction fondatrice entre multiplications réelle et complexe, celle-là même qui donne un sens rationnel à l'énigme arithmétique i^2=-1 (c'est parce que i^2=**i*i et non pas i.i** que cela peut valoir -1).
Cet effacement oublieux relève de la puissance formelle des mathématiques mais également de sa névrose formaliste.
Posons qu'il revient aux mathématiciens aux pieds nus de combattre le péril psychotique qui consisterait à oublier cet oubli, à le forclore.

Espace vectoriel

ℂ est un espace vectoriel sur ℝ. C'est pour cela qu'on peut parler de plan, en l'occurrence du plan complexe.
Comme espace vectoriel, on n'a pas de multiplication (le produit vectoriel de deux vecteurs du plan donne un vecteur orthogonal à ce plan). On n'a vectoriellement que l'addition et la multiplication par un scalaire c'est-à-dire ici par un nombre réel : cf. « iy »=y.i

Rappels de notre interprétation intellectuelle des grandeurs complexes

Une grandeur complexe intrique deux dimensions plutôt qu'elle ne les « somme ».
Nous interprétons la dualité nombres réels / grandeurs imaginaires comme celle des effectivités « réelles » et des possibilités « imaginaires » d'une situation donnée.
Un point du plan complexe entrecroise un « ici, ceci est effectif/inffectif » et un « ceci est possible/potentiel/non-possible » - plus précisément, un point donné du plan complexe est interprété comme posant, en une situation donnée : « ceci est directement effectuable, ou effectuable sous conditions, ou utopique, ou impossible à effectuer ».



Du réalisme et du pragmatisme…

Appelons ici **réalisme** l'orientation qui tient qu'il n'y a que ce qu'il y a au vu et au su de tous, qu'il n'y a que ce qu'il y a d'effectif, et qui soutient que le reste n'est que rêveries (inoffensives si elles sont compensatrices et stériles, dangereuses si elles se veulent projectives et prescriptives) – dans nos catégories : « il n'y a que l'effectif ».

Appelons ici **pragmatisme** l'orientation qui évalue toute action à ce qu'elle transforme de la réalité, à ses effets dans ce qu'il y a au vu et au su de tous – dans nos catégories, l'action se mesure aux transformations de l'effectivité.

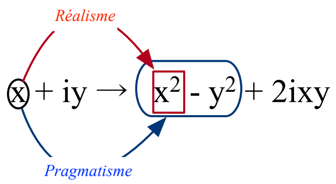
C'est Pierce qui nous livre « *la maxime du pragmatique* » : « *notre entière conception d'un objet se constitue par totalisation de ses effets pratiques* » (1878)

On peut alors formaliser ainsi l'action réaliste et l'évaluation pragmatique :

- le point de vue réaliste est une fonction R(z) qui associe à un complexe sa seule partie réelle :
$$z=x+iy \rightarrow R(z)=x$$
- le point de vue pragmatique P réduit l'action de f(z) à sa transformation des parties réelles :
$$\text{Soit } f(z) : z=x+iy \rightarrow x'+iy'=u(x,y)+i.v(x,y)$$
$$P[f(z)]=\Delta x=x'-x=u(x,y)-x$$

Par exemple
- pour $f(z)=z^2=x^2-y^2+2ixy$ on aura $P[z^2]=x^2-y^2$
- pour $f(z)=\bar{z}=x-iy$ on aura $P[\bar{z}]=Id$.

On pourrait dire que le réalisme se distingue du pragmatisme comme ΔR (variation de la partie réelle) se distingue de RΔ (partie réelle de la variation).



Voyons les conséquences obscurantistes de cette action réaliste et cette évaluation pragmatiste.

Réalisme

R(z) capte quelque chose (la partie « réelle ») de l'addition des complexes car R(z)+R(z')=R(z+z')=x+x'

Par contre R(z) ne comprend rien à la multiplication des complexes car R(z.z')=xx'-yy'≠R(z).R(z')=xx'. Il ne comprend pas plus à la division des complexes.

Ainsi, le point de vue réaliste ne saisit pas l'effet des possibilités (parties imaginaires) sur les effectivités (parties réelles) :

- confronté au résultat d'une action intervenante, il ne comprend pas pourquoi R(z.z')≠R(z).R(z') ;

- confronté à la transformation « conjugaison complexe » (qui intervertit possibilités et non-possibilités), il pense que rien ne se passe !

Au total, le réalisme ne voit rien du complexe : ni les grandeurs, ni les actions !

Pragmatisme

P[f(z)] saisit quelque chose de l'intrication et de l'intervention complexes mais il n'en saisit que la part apparente : les effets sur la réalité effective.

Il comprend la multiplication complexe non plus comme xx' (point de vue réaliste) mais comme xx'-yy' sauf qu'il ne comprend pas d'où provient la supplémentation (-yy'). D'où que, pour lui, les transformations de la réalité au fil de possibilisations vont constituer des miracles ou des catastrophes, des hasards ou des artefacts.

Le pragmatisme ne saisit de l'action complexe que ses effets apparents, réalistes et ainsi rendus incompréhensibles.

Récapitulons ces différences de points de vue sur quatre exemples de fonctions complexes :

f(z)		**Réalisme**	**Pragmatisme**
z+z'	x+x' + i(y+y')	x+x'	x+x'
$\bar{z}$	x - iy	x	x
zz'	xx'-yy' + i(xy'+x'y)	xx'	xx'-yy'
$\frac{1}{z}$	$\frac{x-iy}{x^2+y^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{x^2+y^2}$

Notre travail aujourd'hui…

Nous allons aujourd'hui entrer dans l'analyse complexe proprement dite dont les objets propres sont les fonctions complexes, c'est-à-dire les fonctions f qui associent à tout complexe z un nouveau complexe z' :

$$f : z \rightarrow z'=f(x)$$

L'enjeu intellectuel de ce travail analytique est le suivant : la fonction complexe va constituer notre paradigme formel du type d'action au principe de l'action régionale que nous cherchons à penser et caractériser, action qui s'avance comme intervenant dans une situation donnée, c'est-à-dire action qui intervient sur tout ce qu'il y a dans cette situation, prenant donc en compte ce qu'il y a d'effectif (disons les faits indéniables) mais aussi les possibilités latentes (et donc controversables, désirables ou à éviter), une intervention donc qui se refuse à se restreindre à être *gestionnaire* de l'état des choses effectives, de l'ordre ou du désordre de la situation de départ.

Conformément à notre diagramme directeur (voir plus haut), notre plan de travail va se décomposer en cinq étapes :

1. **Fonctions** complexes
2. **Différentiation** de ces fonctions
3. **Intégrales** de contour des fonctions complexes différentiables
4. Développement indéfini en **série entière** de ces fonctions
5. Existence d'un **prolongement analytique** pour ces fonctions à partir de leur développement indéfini en série entière.

On peut partager ce parcours en deux séquences :

I. I (1-3) : construction de la « bonne » notion de fonction complexe, différentiable et intégrable le long de parcours tracés dans un domaine donné du plan complexe.

II. II (4-5) : démonstration qu'une telle « bonne » fonction est dotée d'une structure algébriquement rigidifiée, « cristalline », autorisant l'existence d'un prolongement dit *analytique* au-delà du domaine de définition de la fonction.

Je ne vous cache pas que le parcours va être mathématiquement un peu plus rude que le précédent :

il va nous falloir entrer plus avant dans la technicité proprement mathématique. C'est indispensable si nous ne voulons pas nous enfermer dans une douce rêverie, divaguant librement à partir de quelques signifiants mathématiques mal compris mais donner une base rationnelle solide au point que nous voulons atteindre et que j'appelle le théorème de l'action régionale, qui en un certain sens vient démontrer intellectuellement le principe cardinal de Saint Paul : « à la différence de l'espoir trompeur en une victoire future, *illic et tunc* [2], l'espérance ne trompe pas car elle a pour socle une victoire d'ores et déjà acquise, *hic et nunc* ! »

Difficulté supplémentaire : il nous faut faire en deux heures un parcours mathématique qui, universitairement parlant, couvrirait tout un cours semestriel.
Il me faudra donc procéder à marche forcée en enchaînant les notions et déductions, juxtaposant les définitions mathématiques techniques et les interprétations intellectuelles extra-mathématiques plutôt que m'attardant sur les démonstrations.
Le résultat en vaut, je pense, l'effort.
Chacun pourra ensuite se reporter librement à la documentation présentée en annexe.

Pour cette leçon, je crois préférable de ne pas reporter l'interprétation intellectuelle de la théorie mathématique à la fin mais plutôt de la faire progresser pas par pas, au rythme même de nos cinq étapes. Donc nous tenterons, à la fin de chacune de ces étapes, de l'interpréter extra-mathématiquement.

[2] « ailleurs et plus tard » et non pas « ici et maintenant »

I.1 - FONCTIONS COMPLEXES

Une fonction

$$z \to f(z) : z=x+iy \to f(z)=x'+iy'$$

Attention : $x' \neq f(x)$ et $y' \neq f(y)$: on n'a pas en général $f(x+iy)=f(x)+if(y)$ ou même $f(x+iy)=g(x)+ih(y)$!

Exemple : $f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2+2ixy-y^2 \Longrightarrow x'=x^2-y^2$ fait intervenir y et diffère de $f(x)=x^2$; de même $y'=2xy$ fait intervenir x et diffère de $f(y)=y^2$.

Pourquoi ? Car la grandeur complexe <u>intrique</u> parties « réelle » et « imaginaire » et non pas les <u>juxtapose</u> côte à côte ou les « somme ». C'est ce qui fait que $\mathbb{C} \neq \mathbb{R}*\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ – dit en termes géométriques, c'est ce qui fait que le plan complexe n'est pas le plan réel.

Rappels

Le panel envisageable de fonctions sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ se diversifie ainsi [3] :

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (fonction réelle à valeurs réelles) : $y=f(x)$

  exemple $f(x)=x^2$
- $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (fonction complexe à valeurs réelles) : $x'=f(z)=f(x+iy)$

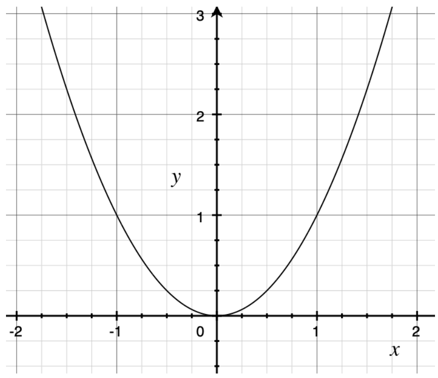
  exemple $x'=f(z)=f(x+iy)=x^2+y^2$
- $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (fonction réelle à valeurs complexes) : $z=x'+iy'=f(x)$

  exemple $x'+iy'=f(x)=x^2+ix^2$
- $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (fonction complexe à valeurs complexes) : $z'=f(z)$ c'est-à-dire $x'+iy'=f'(x+iy)$

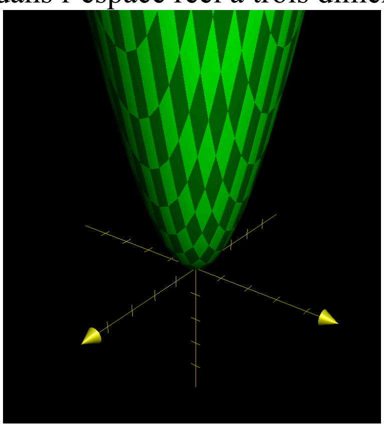
  exemple $f(z)=f(x+iy)=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$

Les trois premières fonctions se visualisent facilement :

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $y=f(x)=x^2$ dans le plan réel :



- $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$: $x'=f(z)=f(x+iy)=x^2+y^2$ dans l'espace réel à trois dimensions :

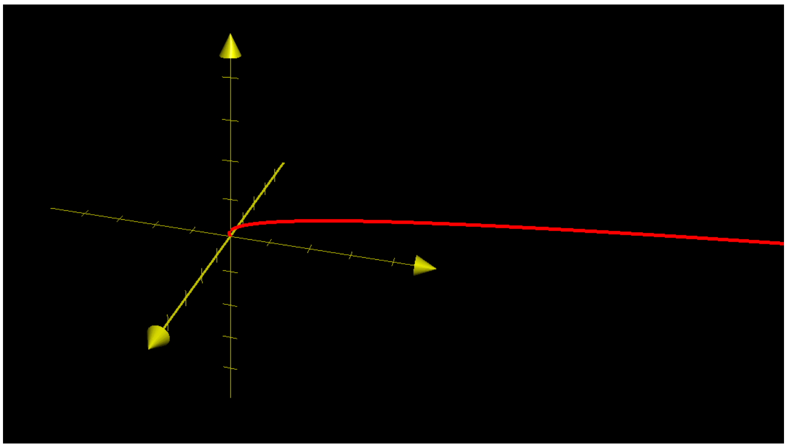


- $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $z=x'+iy'=f(x)=x^2+ix^2$ dans l'espace réel à trois dimensions :

  Ici, la fonction f engendre un arc complexe paramétré par x :

---

[3] Voir en point le livre de Jean Mawhin : *Analyse* (1992)



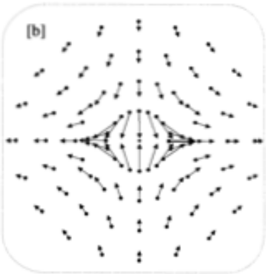
Le quatrième cas ℂ→ℂ pose de nouveaux problèmes de visualisation car il s'agit de représenter visuellement, par projection sur un plan (celui d'un écran ou d'une feuille de papier), le passage d'un plan à un autre, autrement dit une opération en 4 dimensions.
Examinons rapidement différentes manières de le faire : ces manières ont une importance particulière lorsqu'il s'agit d'intuitionner géométriquement les opérations algébriques que l'analyse complexe met en œuvre.

Représentations visuelles d'une ℂ-fonction

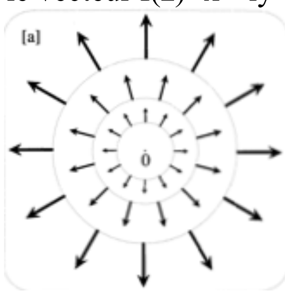
Par un champ vectoriel sur un plan

En chaque point z du plan complexe ℂ, on inscrit le vecteur f(z)=x'+iy' :{x' ; y'}

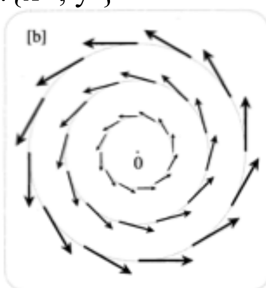
$f(z)=z^2$



$f(z)=1/z$



$f(z)=z/2$

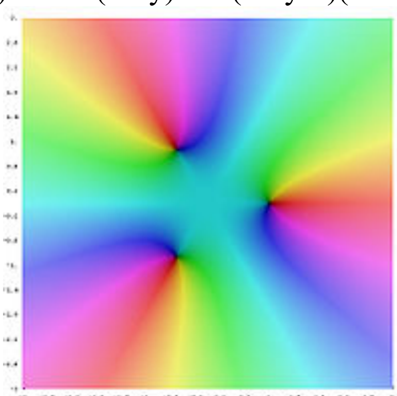


$f(z)=iz/2$

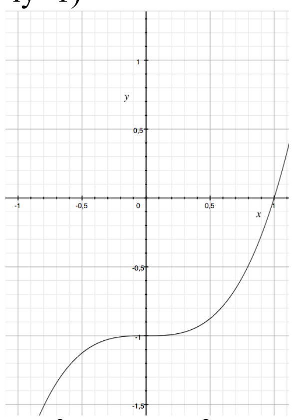
Par un seul plan coloré

« coloration de régions » : le nombre complexe {r, θ} ou {module, argument ou phase} est représenté par {intensité, couleur}

Exemple : $P(z)=z^3-1=(x+iy)^3-1=(x+iy-1)(x^2+2ixy-y^2+x+iy+1)$



$P(z)=z^3-1$
3 zéros sur ℂ



$P(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$
1 zéro sur ℝ

Quel intérêt ? Ceci permet par exemple de visualiser immédiatement comment

- le polynôme complexe $P(z)=z^3-1=(x+iy-1)(x^2+2ixy-y^2+x+iy+1)$ a trois zéros (les trois points de couleur noire c'est-à-dire de module nul) : {1, 0} ; $\{-\frac{1}{2} ; \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\}$

- $x+iy-1=0 \Longrightarrow (x-1)=0$ et $y=0$
- $x^2+2ixy-y^2+x+iy+1=0 \Longrightarrow x^2-y^2+x+1=0$ et $2ixy+iy=0 \Longrightarrow 2x+1=0$ et $y^2=x^2+x+1$

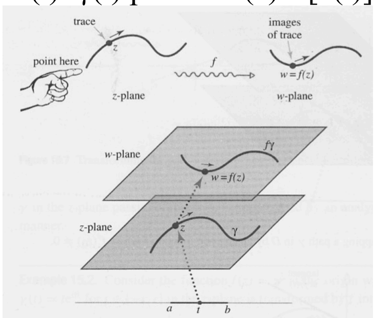
- alors que le polynôme réel $P(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ n'en a plus qu'un (x=1) :

Par deux plans…

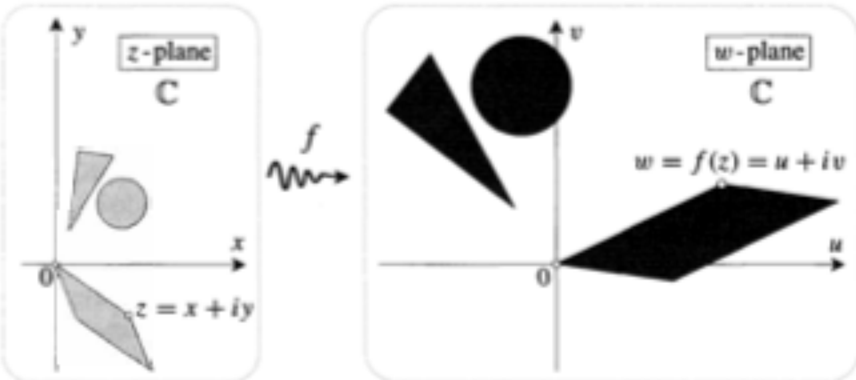
- Superposés…

Voir, par exemple, la transformation suivante d'une courbe complexe γ paramétrée par t :

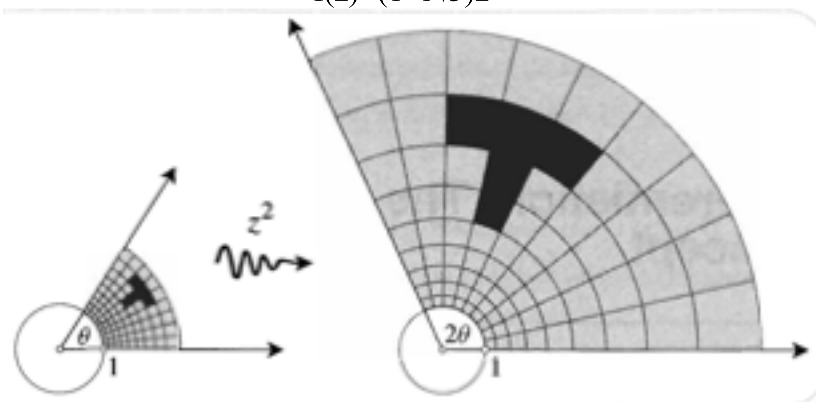
on a $t \rightarrow z(t) \in \gamma(t)$ puis $w=f(z)=f[z(t)] \in \gamma'(t)$:



- Juxtaposés :



$f(z)=(1+i\sqrt{3})z$ [4]



$f(z)=z^2$ [5]

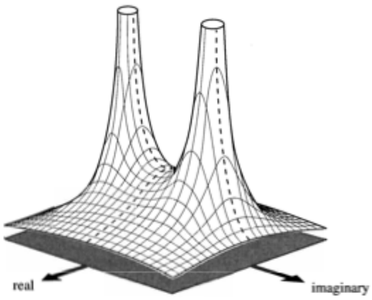
Ce mode de représentation, privilégié par Needham, est à mon sens le plus clair.

Par surfaces « modulaires »

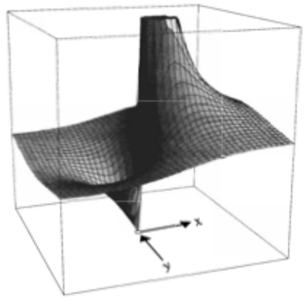
c'est-à-dire surfaces représentant seulement les modules.

« nappes » qui, à z (graphé horizontalement), associent verticalement le module de f(z) $\sqrt{x'^2+y'^2}$

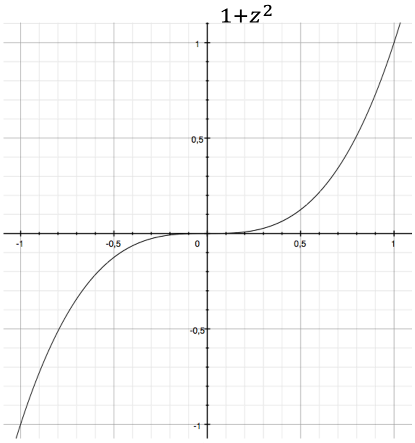
[4] Needham (55)
[5] Needham (190)



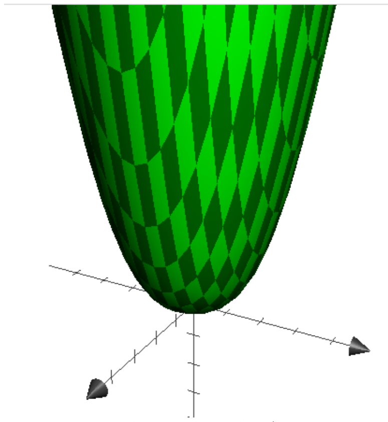
$\frac{1}{1+z^2}$



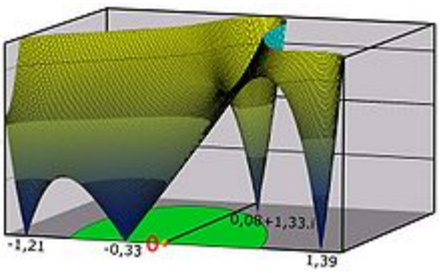
$e^{\frac{1}{z}}$



P(x)=x^3
un zéro sur $\mathbb{C}$



$|P(z)|=|(x+iy)^3|=(x^2+y^2)^{3/2}$
fonction « module



$z=|(x+iy)^5-3(x+iy)-1|=|x^5-10x^3y^2+5xy^4-3x-1+i(5x^4y-10x^2y^3+y^5-3y)|$

$x^5-3x-1 \Longrightarrow$ 3 racines réelles (-1,21…, -0,33…, 1,39…) et deux complexes (0,008…±i.1,33…)

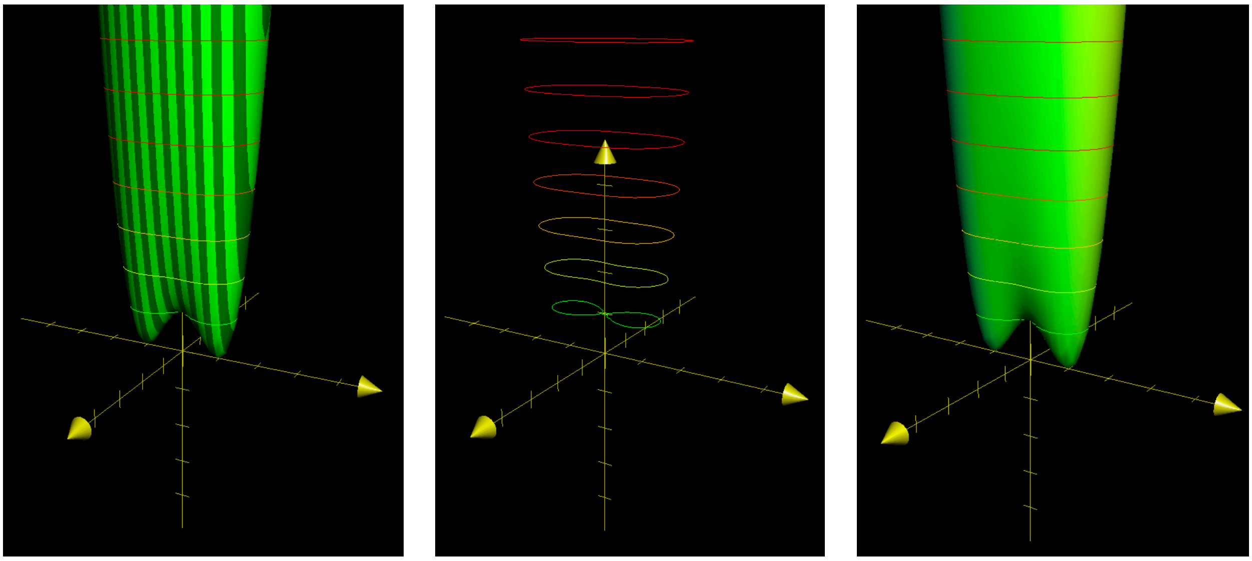
<u>Exemple 1</u>

Nous avons utilisé cette représentation dans notre précédente leçon pour illustrer pourquoi l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de racine réelle quand l'équation complexe $z^2+1=(x+iy)^2+1=0$ en a deux :

{0 ; ±i}

En effet, le module du nombre complexe $z=g(x,y)=(x+iy)^2+1=(x^2-y^2+1)+2ixy$ sera $(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2$.

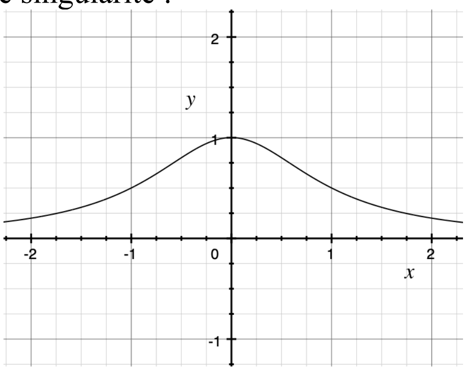
D'où la surface modulaire $z=(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2$ (dans $\mathbb{R}^3$) qui permet de discerne les deux racines complexes {0 ; ±i} :



Exemple 2

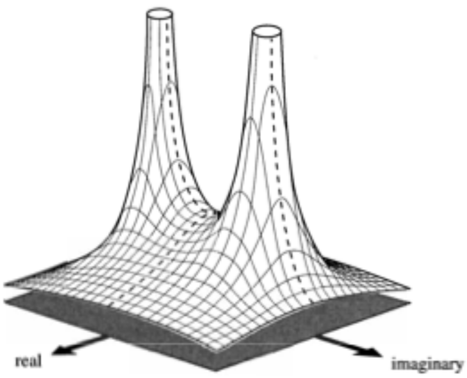
Tout de même, cette représentation des modules éclaire bien le comportement totalement différent pour les réels et pour les complexes des fonctions f(x)=$\frac{1}{1+x^2}$ et g(z)=$\frac{1}{1+z^2}$

La fonction réelle f(x) n'a pas de singularité :

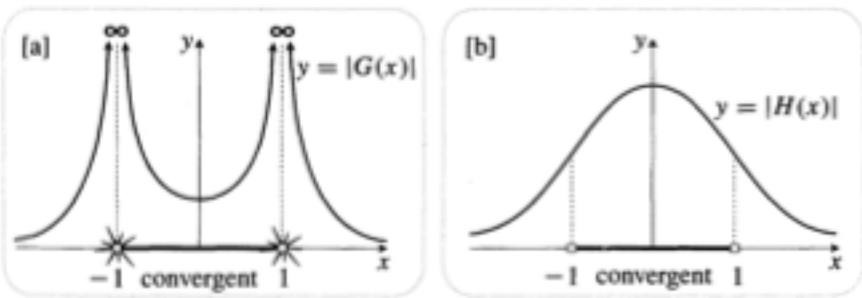


Par contre la fonction complexe g(z) a deux singularités {±i} que f(x) ne laissait pas présager.

Si nous représentons g(z) par sa surface modulaire :

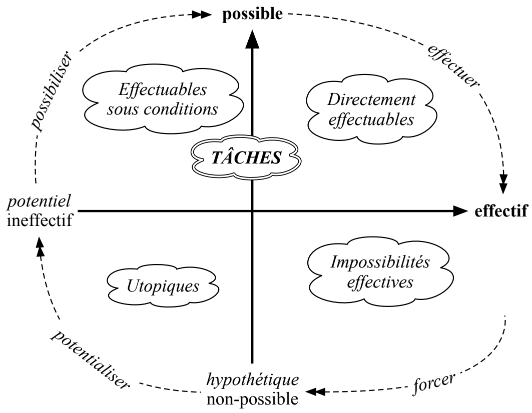


on comprend alors pourquoi sectionner cette surface selon l'axe des imaginaires capte les deux singularités de g(z) quand la sectionner selon l'axe des réels restituait la courbe f(x) sans singularité :



Interprétation intellectuelle

Une fonction complexe formalise une intervention globale (sur un domaine ou sur $\mathbb{C}$ en entier) qui transforme tout point (tout complexe entendu comme fixant un rapport entre effectivités et possibilités en ce point) en un autre point (donc en un autre rapport transformé entre possible et réalisé).
Elle transforme donc les rapports dans une situation donnée (le « domaine »), entre effectivités et possibilités.



I.2 - DIFFÉRENTIABILITÉ

Maintenant que nous nous sommes dotés d'une notion de fonction complexe, le point va être : peut-on la connaître localement, peut-on mieux connaître comment elle varie en un point donné.
Tel va être l'enjeu de la différenciation de la fonction en un point donné.
Que veut dire en effet différencier la fonction w=f(z) au point z_0 ? On dira qu'une fonction complexe f(z) sera différentiable au point z_0 si le résultat dw=df d'une action minimale de f sur dz reste commensurable à son origine minimale dz, c'est-à-dire s'il existe une grandeur complexe qu'on notera f'(z_0) telle que dw=df=f'(z_0).dz
La réponse mathématique va être la suivante : pour que la fonction f(z) soit différentiable au point z_0 autrement dit pour que la grandeur complexe f'(z_0) existe, il faut que la fonction f(x) vérifie au point z_0 des conditions particulières qu'on appelle conditions de Cauchy-Riemann [CCR].
On va voir que ce point mathématique nous conduit à préciser une importante condition locale pour notre action intervenante, condition qui va gager que cette action est bien de type cristallographique (ceci va s'avérer indispensable à la possibilité ensuite de la prolonger globalement) : il faut que les résultats d'une minime intervention restent commensurables à ses minimes origines, et pour ce faire, il faut qu'au point d'intervention considéré, cette minime intervention ne dépende pas de l'angle d'attaque du point en question.

Détaillons d'abord la différenciation complexe, ensuite les CRR pour qu'elle existe, enfin les conséquences mathématiques et intellectuelles de tout cela.

2.a – Différenciation complexe

La différenciation complexe s'avance comme une généralisation de la dérivation réelle.

On présente usuellement ce type d'opération comme la limite d'une division.
Dans le cas réel, si y=f(x) :

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

D'où dans le cas complexe, si w=f(z), on aurait :

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{df}{dz}$$

On voit qu'une telle différenciation complexe fait intervenir la division des complexes (on l'où retrouve l'importance que $\mathbb{C}$ soit un corps comme $\mathbb{R}$ l'est lui-même).
Mais une différence essentielle entre les nombres réels et les grandeurs complexes s'introduit au point suivant : z peut se rapprocher de z_0 selon les différentes directions du plan complexe alors que le nombre x ne peut approcher x_0 que selon une seule direction : celle de la droite « réelle ».
Or il ne va pas de soi que si z=x+iy approche z_0 par exemple horizontalement (par Δx) ou s'il l'approche par exemple verticalement (par Δy), on ait automatiquement la même limite !

Dans notre interprétation intellectuelle, cela veut dire que le résultat de la différenciation peut ne pas être le même si on approche le point à transformer par l'axe des effectivités (est-il vraiment effectif, est-ce bien un fait ?) ou par celui des possibilités (est-ce vraiment possible ?) !

Un contre-exemple

Donnons l'exemple d'une fonction complexe continue qui ne sera pourtant pas différentiable car sa différenciation selon l'axe horizontal des réels et selon l'axe vertical des imaginaires vont différer.
Soit f(z)=$\bar{z}$ c'est-à-dire que w=f(z) est le conjugué de z : x+iy→x-iy
Approchons un point « z_0 » ($z_0=x_0+iy_0$) de deux manières :

- horizontalement par $z_k=z_0+x_k=(x_0+x_k)+iy_0$ avec $x_k\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \overline{z_k} = (x_0 + x_k) - iy_0 = \overline{z_0} + x_k$$
$$\Rightarrow \frac{\overline{z_k}-\overline{z_0}}{z_k-z_0} = \frac{x_k}{x_k} = 1 \Rightarrow lim\frac{\overline{z_k}-\overline{z_0}}{z_k-z_0} = 1$$

c'est-à-dire que df=dz

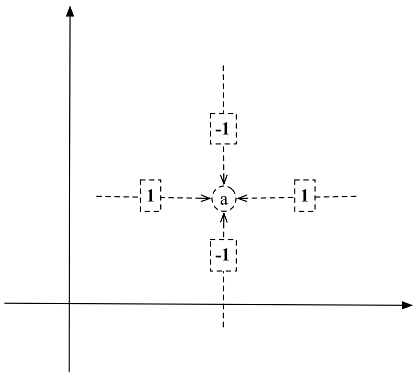
- verticalement par $z_k=z_0+i.y_k=x_0+i(y_0+y_k)$avec $y_k\in\mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \overline{z_k} = x_0 - i(y_0 + y_k) = \overline{z_0} - i.y_k$$

$$\Longrightarrow \frac{\overline{z_k}-\overline{z_0}}{z_k-z_0} = \frac{-i.y_k}{i.y_k} = -1 \Longrightarrow lim\frac{\overline{z_k}-\overline{z_0}}{z_k-z_0} = -1$$

c'est-à-dire que df=-dz

On n'a donc pas la même limite selon que l'on approche le même point « a » horizontalement ou verticalement !



Interprétation intellectuelle

Intuitivement, dans notre interprétation effectif⊥possible du plan complexe, ceci est assez clair : par définition, la fonction conjugaison de z=x+iz inverse sa composante possible/non-possible en $\bar{z}$=x-iy.
Si l'on approche alors z en neutralisant cette composante verticale (horizontalement donc), ce renversement du possible en non-possible n'opère plus et l'on se meut donc systématiquement dans l'opération identité **1** (fz=dz). Si on approche par contre le même point z cette fois verticalement, en ne retenant donc de la fonction conjugaison que sa part inversion possible/non-possible, alors on se meut systématiquement dans l'opération inversion **-1** (df=-dz).

D'où l'importance des conditions pour que ces différentes approches conduisent au même résultat et fasse exister en z_0 une seule dérivée f'(z_0).
Ainsi, une fonction complexe s'avère plus difficilement différentiable qu'une fonction réelle (cf. conditions de Cauchy-Riemann) mais par contre, si elle l'est, elle aura alors des propriétés remarquables que n'ont pas automatiquement les fonctions réelles (toute fonction complexe différentiable le sera indéfiniment !) et qui feront que tout sera alors plus simple pour les fonctions complexes différentiables !

Différenciabilité ⟹ continuité

Précisons : comme pour les réels, si une fonction f est différenciable en z_0, alors elle y est continue.
Mais attention : l'inverse n'est pas vrai : une fonction continue peut ne pas être différentiable, comme sur les réels une fonction continue peut être non dérivable.

Autres généralisations de ℝ à ℂ

Plus généralement, comme on va continuer de le voir, la généralisation de ℝ à ℂ marche bien pour
- les notions (limites…),
- les opérations (addition, multiplication et composition) sur les fonctions,
- les démonstrations

mais elle bute sur l'existence de conditions de différentiabilité pour ℂ.

Propriétés

Si f' et g' existent, on a alors bien les propriétés habituelles :
(f±g)'=f'±g'
(f.g)'=f'.g'
…

2.b – Conditions de Cauchy-Riemann

Pour qu'il y ait différentiabilité de la fonction complexe au point z_0, il faut donc s'assurer qu'on a le même résultat <u>local</u> en approchant ce point par l'axe horizontal des réels ou par l'axe vertical des imaginaires : il faut que les différents types d'approche convergent.

Conditions nécessaires

L'existence d'une différenciation de f(z)=u(x,y)+i.v(x,y) va imposer deux conditions sur les dérivées partielles :

$$u'_x=v'_y \text{ et } v'_x=-u'_y$$

<u>Démonstration</u>

Approchons le point z d'abord par z+h=(x+h)+iy avec $h\in\mathbb{R}$ (c'est-à-dire par approche horizontale selon l'axe des nombres réels), ensuite par z+ik=x+i(y+k) avec $k\in\mathbb{R}$ (c'est-à-dire par approche verticale selon l'axe des grandeurs imaginaires) et assurons leur égalité.

1)

$$\begin{aligned} f'(z) &= lim\frac{u(x+h,y)+iv(x+h,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{h} \\ &= lim\frac{[u(x+h,y)-u(x,y)]+i[v(x+h,y)-v(x,y)]}{h} \\ &= u'_x+iv'_x \end{aligned}$$

car lim(f+g)=lim(f)+lim(g)

2)

$$\begin{aligned} f'(z) &= lim\frac{u(x,y+k)+iv(x,y+k)-u(x,y)-iv(x,y)}{i.k} \\ &= lim\frac{[u(x,y+k)-u(x,y)]+i[v(x,y+k)-v(x,y)]}{i.k} = \frac{u'_y}{i}+v'_y \\ &= v'_y-iu'_y \end{aligned}$$

$1) = 2) \Longrightarrow$

$$u'_x=v'_y \text{ et } v'_x=-u'_y$$

<u>Exemple</u> : $f(z)=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy$

$u(x,y)=x^2-y^2$; $v(x,y)=2xy$

$\Longrightarrow u'_x=2x$ et $v'_x=2y$; $u'_y=-2y$ et $v'_y=2x$

$\Longrightarrow u'_x=v'_y$ et $v'_x=-u'_y$. Donc $f(z)=z^2$ satisfait aux CCR.

<u>Notre précédent contre-exemple</u> : $f(z)=\bar{z}$,

On vérifie que les CCR ne sont pas ici toutes vérifiées :

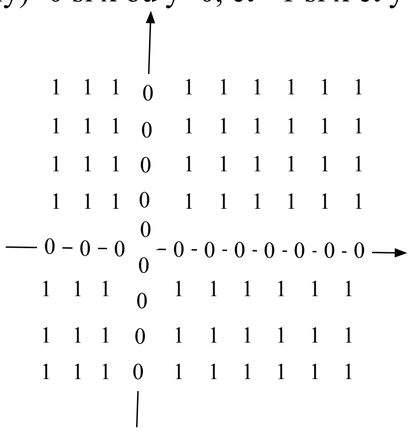
f(z)=x-iy $\Longrightarrow$ u(x,y)=x et v(x,y)=-y $\Longrightarrow$ $u'_x=1$, $u'_y=0$, $v'_x=0$, $v'_y=-1$.

Donc, si on a bien $v'_x=-u'_y$, par contre $u'_x\neq v'_y$!

Conditions non suffisantes

Attention, ces CCR sont nécessaires mais non suffisantes.

Cf. contre-exemple : soit f(x+iy)=0 si x ou y=0, et =1 si x et y ≠0.



Les CCR sont bien satisfaites mais f n'étant pas continue à l'origine, elle ne peut y être différentiable.

2.c - Différentielle f'(z) résultante

Condition supplémentaire : pour que f(z) soit différentiable, il ne suffit pas que les CCR soient satisfaites ; il faut aussi que toutes les dérivées partielles u'_x, u'_y, v'_x et v'_y soient continues.

D'où le **théorème** :

Si $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ est une fonction complexe définie sur un ouvert D et si en un point $z_0=x_0+iy_0$ les dérivées partielles u'_x, u'_y, v'_x et v'_y sont continues, existent, et vérifient $u'_x=v'_y$ et $v'_x=-u'_y$, alors f est différentiable en z_0 et l'on a :

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h,k\to 0} \frac{[u(x_0+h, y_0+k)+iv(x_0+h, y_0+k)]-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{h+ik}$$
$$= u'_x(z_0)+iv'_x(z_0) = v'_y(z_0)-iu'_y(z_0)$$

Démonstration : Stewart (p. 81)

La démonstration utilise le lemme intermédiaire suivant (p. 80) :

$$u(x+h, y+k) - u(x, y) = h(u'_x+\varepsilon) + k(u'_y+\eta)$$
où $\varepsilon(h, k)$ et $\eta(h,k) \to 0$ quand h et k $\to 0$

Exemple

Pour $f(z)=z^2$, on obtient :

$$f'(z)=2x-2iy=2\bar{z}$$
(et non pas 2z !)

Résultat intéressant

Si f est différentiable sur un domaine D connexe et si $f'(z)=0$ $\forall z\in D$, alors f est constante.

Démonstration : Stewart (p. 82)

On voit qu'assurer la différentiabilité est plus compliqué pour une fonction complexe que pour une fonction réelle (pour laquelle on n'a pas l'équivalent des CCR).

Par contre, on va voir que si la fonction complexe est différentiable, elle va être dotée d'extraordinaires propriétés qui vont considérablement simplifier son action.

Cf. image parlante de Stewart (p. 80) : l'analyse complexe, c'est « *démarrer une machine bien huilée sur la glace* » car, dans le passage $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, le difficile, c'est le départ mais, une fois parti, les enchaînements sont simples : cf. ∞-différentiabilité.

Interprétation intellectuelle

CCR

Interprétons u(x,y)+iv(x,y) ainsi E(e,p)+P(e,p) avec E/e = effectivités et P/p= possibilités !

$\Rightarrow u'_x = E'_e$; $u'_y = E'_p$; $v'_x = P'_e$; $v'_y = P'_p$

Simplifions l'interprétation en posant que l'examen des effectivités est marqué par l'objectivité quand l'examen des possibilités convoque plus immédiatement la subjectivité (telle possibilité est-elle intéressante ou néfaste, à encourager ou à combattre ? etc.).

- u'_x : rapport objectif à question objective $\Rightarrow$ comment la modification des effectivités (qui sont matérialisées dans le point à traiter) va-t-elle affecter les nouvelles effectivités (du point transformé) ?
- u'_y : rapport subjectif à question objective [6] $\Rightarrow$ comment le traitement des possibilités (en jeu dans le point à traiter) va-t-il affecter les effectivités (du point transformé) ?
- v'_x : rapport objectif à question subjective $\Rightarrow$ comment la modification des effectivités (matérialisées dans le point à traiter) va-t-elle affecter les possibilités (du point transformé) ?
- v'_y : rapport subjectif à question subjective $\Rightarrow$ comment le traitement des possibilités (en jeu

[6] car l'action objective « u » est vue du point subjectif de « y »…

dans le point à traiter) va-t-il affecter les nouvelles possibilités (du point transformé) ?
L'idée interprétative : il faut que le projet d'intervention en un point converge – qu'il soit donc possible de parler **du** projet d'une intervention et non pas d'un fatras disparate, désordonné, incohérent et contradictoire selon que l'on examine le point du côté d'une variation d'effectivité ou d'une variation de possibilité, qu'il y ait donc bien **une** ligne de conduite - qu'on l'aborde sous l'angle des seules effectivités, des pures possibilités ou de leurs différentes intrications.
En un certain sens, il s'agit de s'assurer de la cohésion locale (c'est-à-dire au point d'intervention) du principe

« il n'y a pas que ce qu'il y a car il y a aussi ce qu'il y a de possible »

ce qui revient à s'assurer de la compatibilité locale des quatre occurrences de la même locution « il y a » (en appelant ici « local » un voisinage du point considéré).

Autrement dit, l'enjeu est de passer d'une *analytique* du point à une décision *synthétique* le concernant : l'*analytique* procède par décomposition en tâches élémentaires selon différentes dimensions projectives mais elle doit déboucher sur la détermination d'une ligne coordonnant et *synthétisant* les différents angles d'attaque du point.

« Théorèmes »

Appelons cela le théorème du « il y a » : le principe d'intervention « il n'y a pas que ce qu'il y a » sera localement cohérent si le projet d'intervention assure la compatibilité locale de ses différents angles d'approche intervenante (cf. CCR en ce point).
Appelons **ligne** une telle cohérence.
On en déduira le lemme suivant (« théorème de la ligne ») : une intervention sera consistante si elle suit une ligne solidement fixée, apte à régulariser les inévitables aléas d'approche du point.

I.3 - INTÉGRALE DE CONTOUR

L'intégration est l'opération duale de la différenciation : la différenciation examine le comportement local d'une fonction au voisinage d'un point ; l'intégration examine le comportement étendu d'une fonction sur une étendue donnée.
Pour une fonction sur un plan, telle la fonction complexe, une telle étendue peut être de deux types : une courbe ou une surface.
L'analyse complexe privilégie la première c'est-à-dire l'intégrale sur un chemin, un lacet ou un contour, c'est-à-dire l'intégrale d'une fonction lorsque son point se déplace linéairement plutôt que lorsqu'il couvre une surface.
C'est cette intégrale qui va nous mettre sur la piste d'une action ∫ reliant les deux extrémités d'un parcours, action que nous appellerons alors régionale (par opposition à une action globale, sur la surface d'un domaine : ∬ ou ∭).

La dualité différentielle/intégrale est au principe du théorème fondamental de l'analyse, c'est-à-dire du **calcul différentiel et intégral**.
Ce théorème se formalise ainsi :

$$\int_a^b f'(x).dx = f(b) - f(a)$$

soit l'équation (intuitive et non rigoureuse) suivante :

intégration ⊗ différenciation = identité

∫f'=f

Mais définir l'intégrale complexe par analogie avec l'intégrale réelle (tout comme établir la relation inverse entre dérivation et intégration) bute sur un point capital de différence entre ℂ et ℝ :

comment aller de z_0 à z_1 dans l'intégrale suivante

$$\int_{z_0}^{z_1}$$

puisqu'il n'existe pas de bon ordre sur ℂ comme il en existe un sur ℝ ?

On avait déjà un tel type de problème avec la différenciation mais il était alors *local* (voisinage du point) alors qu'il devient ici *régional* (entre deux points).

Où l'on voit que la différence ℂ≠ℝ en matière de dérivation et d'intégration repose bien sur le fait que ℂ n'est pas ordonnable comme l'est ℝ c'est-à-dire que les grandeurs complexes ne sont pas numériques !

D'où une problématique des chemins-lacets.

Intégration réelle le long d'un chemin

Il est commode pour ce faire de procéder à un paramétrage du chemin sur lequel il va s'agit d'intégrer la fonction.
Dans le cas d'une fonction réelle dans le plan réel $\mathbb{R}^2$, cela prend la forme de l'intégrale dite de Riemann-Stieltjes.

Intégrale Riemann-Stieltjes

Soit une courbe γ du plan réel paramétrée par la variable réelle t. On a γ(t)∈ℝ.

∀t∈{a, b}∈ℝ on a γ(t)={x(t), y(t)}∈$\mathbb{R}^2$.

Soit la fonction réelle f(x, y) sur le plan réel : ∀{x, y}∈$\mathbb{R}^2$ on a f(x, y)∈ℝ
L'intégrale de Riemann-Stieltjes va formaliser l'intégration de cette fonction sur le segment de la courbe parcouru quand t va de a à b - c'est-à-dire la sommation de l'ensemble des valeurs prises par la fonction f sur ce segment.

$$\int_a^b f[\gamma(t)].\gamma'(t).dt$$

Un résultat décisif, que l'on retrouvera en analyse complexe, est que, pour une fonction f primitivable en F (f=F'), une telle intégrale sur une courbe reliant deux points A et B du plan réel va s'avérer indépendante du chemin utilisé pour aller de A en B car on aura alors :

$$\int_a^b f[\gamma(t)].\gamma'(\mathrm{t}).dt = F(B) - F(A)!$$

Intégration complexe le long d'un chemin

Le « bon » chemin

Il faut d'abord s'assurer que notre chemin est un bon chemin pour notre problème c'est-à-dire qu'il a une longueur finie (et donc, par exemple, qu'il n'est pas fractal), qu'il est continu (sans sauts) et lisse (sans aspérités).
Un chemin γ sera dit lisse si γ' existe et est continue sur l'intervalle de définition du chemin.

Être lisse est une condition suffisante pour que le chemin ait une longueur.

On aura alors :

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(\mathrm{t})|.dt$$

Intégrale

Résultat : pour f continue définie sur un domaine D et pour un chemin lisse γ : [a,b]→D, on a :

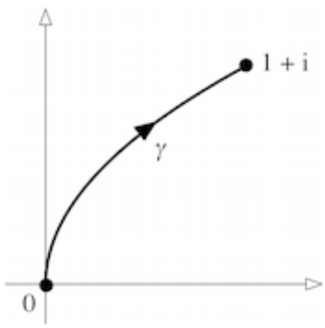
$$\int_\gamma f = \int_a^b f[\gamma(t)].\gamma'(\mathrm{t}).dt$$

Noter que γ'(t) est complexe alors que dt est un réel (scalaire).

Démonstration : Stewart p. 115 (elle fait intervenir des calculs relativement compliqués).
Le point important est que notre paramétrage du chemin complexe par la variable réelle t vient ainsi mettre un ordre (l'ordre arithmétique des nombres réels) sur un chemin du plan complexe, lequel (comme on l'a vu) n'admet pas de bon ordre (compatible avec la structure de corps de ℂ et donc avec les opérations arithmétiques entre grandeurs complexes).

Exemple
Soit $f(z)=z^2$ à intégrer « entre » les deux points du plan complexe ℂ qui sont $z_0=0$ et $z_1=1+i$.
Établissons un chemin γ(t) avec γ complexe et t réel (évoluant de 0 à 1), tel que z[γ(0)]=0 et z[γ(1)]=1+i.
Soit par exemple $\gamma(t) = t(t+i) = t^2+it$

On a alors bien t=0→γ=0 et t=1→γ=1+i



On a $f(z)=z^2$, $\gamma(t) = t^2+it$ $(0\leq t\leq 1) \Longrightarrow \gamma'(t)=2t+i \Longrightarrow$

$$\int_\gamma f = \int_a^b f[\gamma(t)].\gamma'(\mathrm{t}).dt = \int_0^1 (t^2+it)^2.(2\mathrm{t}+\mathrm{i}).dt = \int_0^1 (2t^5-4t^3).dt + i\int_0^1 (5t^4-t^2).dt$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

La fonction $f(z)=z^2$ s'avérant primitivable (on n'examinera pas ici ce point en détail), notre intégrale sera indépendante du chemin γ choisi et on pourra donc écrire, sans plus de précisions sur γ :

$$\int_0^{1+i} z^2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

Primitive

On a le théorème fondamental suivant :

si f:D→ℂ est continue, si F:D→ℂ est la primitive de f et si γ est un contour dans D de z_0 à z_1, alors

$$\int_\gamma f = F(z_1) - F(z_0)$$

Dans cette circonstance, l'intégrale ne dépend pas du chemin mais seulement de ses points extrêmes (voir notre exemple de $f(z)=z^2$).

Problème : l'existence d'une primitive est moins assurée dans le cas complexe que dans le cas réel.
Sur ℝ, toute fonction continue a une primitive.
Ce n'est plus le cas sur ℂ car une fonction continue mais non différentiable ne peut y avoir une primitive ; en effet, on montrera plus tard que, sur ℂ, toute fonction qui est une fois différentiable l'est alors autant de fois qu'on veut ; donc si ∃F ⇔ f=F', alors ∃(F')'=f' et donc f est différentiable.

Voir dans Stewart, l'exemple 6.37 (p. 136) d'une fonction continue non différentiable : f(z)=1/z à intégrer entre -1 et 1.

On commence à voir les différences entre fonctions réelles et complexes :
- situations identiques : une fonction différentiable est continue (mais pas l'inverse) ;
- avantages des fonctions réelles : si elles sont continues, elles ont une primitive, et ce même si elles ne sont pas différentiables ;
- avantages des fonctions complexes : si elles sont différentiables, elles le sont indéfiniment.

Contour

On appellera contour un collage de chemins.
Si le contour γ est le collage des chemins γ_i ($\gamma=\sum\gamma_i$), on définira ainsi l'intégrale de contour :

$$\int_\gamma f = \int_{\sum\gamma_i} f$$

On démontre alors facilement (Stewart, p. 132) que l'intégrale sur une somme de chemins est la somme des intégrales sur chaque chemin :

$$\int_{\sum\gamma_i} f = \sum \int_{\gamma_i} f$$

Intégration le long d'un contour fermé

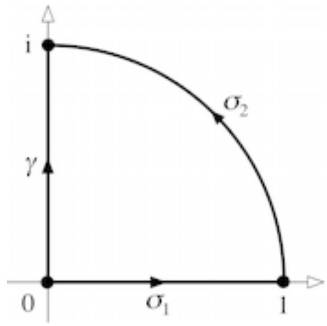
Voyons maintenant ce qui se passe pour un chemin dont les points de départ et d'arrivée sont les mêmes, c'est-à-dire qui forment ce qu'on appelle des **boucles**.

Cette notion de boucle a une importance géométrique particulière car elle renvoie à la notion topologique cruciale de voisinage : le voisinage d'un point sera en effet (on examinera cela dans la dernière leçon de cette année consacrée aux variétés topologiques de Riemann) une partie qui en fait le tour…

En ce point, l'intégration complexe s'écarte à nouveau de l'intégration réelle.
- Sur ℝ : $\int_a^a f = \oint_\gamma f = 0$
- Sur ℂ, ceci n'est plus automatiquement le cas !
  Ce sera la même chose seulement s'il existe une primitive, c'est-à-dire si f est non seulement continue mais également (indéfiniment) différentiable.
  Exemple de fonction continue non différentiable pour lequel on n'a pas $\int_a^a f = 0$:
  Soit f(z)=|z| à intégrer entre 0 et i. [7]
  C'est une fonction réelle sur les complexes : ℂ→ℝ. Mais son intégrale sur un chemin complexe sera par contre une fonction complexe.
  Cette fonction n'est pas différentiable.
  Si on l'intègre selon deux chemins différents, on obtiendra i/2 (chemin γ verticalement di-

[7] Voir Stewart p. 145

rect) ou i-1/2 (chemin composé σ_1 passant par 1) !



Interprétation

Tout ceci va être très important dans notre interprétation intellectuelle : tenir un fil entre deux points peut ne pas aboutir à la même « chose » selon qu'on passera par tel endroit ou par tel autre entre les deux points donnés !

On dira qu'on dispose d'une ligne à tenir si le fil en question est doté de la propriété ici formalisée comme primitivation : une ligne (*ligne de conduite, ligne politique, fil rouge, leitmotiv*, etc.) n'est pas n'importe quel fil mais un fil tel qu'il soit doté d'une consistance dynamique endogène. D'où qu'il n'aille nullement de soi de constituer une ligne susceptible d'être tenue entre deux points donnés.

Exemples

Une enquête militante en cours privilégie deux points du monde contemporain : les bidonvilles et les grandes usines. Quelle ligne peut les connecter ? Il faut ici l'inventer, et cette invention ne saurait être transitive à la caractérisation des deux points : elle ne saurait directement s'en déduire.

Tout de même, peut-on tenir une ligne entre musique et politique, entre musique et mathématiques, entre musique et philosophie ? À chaque fois, plusieurs chemins sont envisageables ; parmi eux, plusieurs constituent de véritables lignes (cela suppose par exemple que ces chemins ne soient pas purement empiriques) et il y a alors une lutte entre différentes lignes concevables (par exemple entre les raisonances de mamuphi et les applications de MaMuX).

Formule intégrale de Cauchy

Nous avons vu que l'intégrale le long d'un chemin équivaut à la différence des primitives aux deux points extrêmes du chemin :

$$\int_{\gamma} f = F(z_1) - F(z_0)$$

La formule intégrale de Cauchy va nous donner maintenant une corrélation inverse : non plus $F(z) \rightarrow \oint f$ mais $\oint f \rightarrow F(z)$.

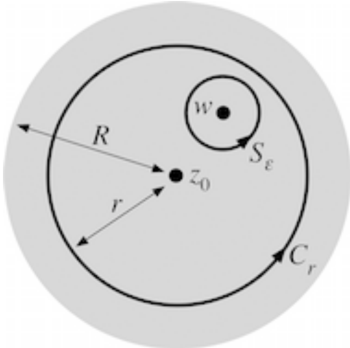
Ainsi, la valeur de la fonction f en un point donné w va équivaloir à l'intégrale d'un chemin qui en fait le tour !

> Autrement dit, on peut connaître un point d'intervention par intégration du tour complet qu'on peut en faire !

La formule intégrale de Cauchy nous dit ceci :

- Soit f différentiable dans un disque de centre z_0 et de rayon R.
- Soit C_r un disque de même centre et plus petit (de rayon r avec $0<r<R$).
- On a alors, pour tout point w interne à ce cercle C_r c'est-à-dire pour $|w-z_0|<r$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-w} dz$$



f(w) égale l'intégrale de contour sur le disque C_r (qui n'est pas nécessairement centré en w : faire le tour de w n'implique pas de le disposer au centre de ce tour)

Démonstration

w fixé, on définit

$$F(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

avec

$$F(z) = \frac{\Delta f}{\Delta z} \xrightarrow{z \to w} f'(w) = \frac{df}{dz}$$

Mais, via le théorème de Cauchy généralisé [8], on a :

$$\oint_{C_r} F(z)dz = \oint_{S_\varepsilon} F(z)dz$$

où S_ε est un cercle centré sur w et de rayon ε.

Avec S_ε, on peut désormais majorer $\oint_{S_\varepsilon} F(z)dz$.

En effet, en faisant alors tendre ε→0, on montre [9] que

$$\oint_{S_\varepsilon} F(z)dz = 0$$

D'où

$$\oint_{C_r} F(z)dz = 0$$

Mais

$$F(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \Rightarrow \oint_{C_r} F(z)dz = \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - w} dz - \oint_{C_r} \frac{f(w)}{z - w} dz.$$

$$Or \oint_{C_r} F(z)dz = 0$$

D'où

$$\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - w} dz = \oint_{C_r} \frac{f(w)}{z - w} dz$$

et, comme f(w) est une constante, on a :

[8] Le théorème démontre (Stewart, p. 181) que, si la composition de différents contours clos γ_i a un *indice d'enroulement* nul, alors la somme des intégrales de contour correspondantes est nulle :

$$\sum_i \oint_{\gamma_i} f = 0$$

[9] via le lemme d'estimation (Stewart, p. 140)

$$\oint_{C_r} \frac{f(w)}{z-w} dz = 2\pi i . f(w)$$

soit notre résultat recherché :

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Ainsi, on connaît f(w) en intégrant un tour complet de w !

Interprétation intellectuelle

Mesurer les effets d'une intervention en un point s'avère donc équivalent à mesurer les effets de cette même intervention sur un tour complet du point c'est-à-dire sur le pourtour d'un voisinage de ce point !

Retour sur les primitives

Dans le cas réel, toute fonction continue f possède une primitive F, qui n'est pas forcément facile à trouver et qui peut même, dans certains cas, n'être pas exprimable en une formule élémentaire.

Ainsi f(x)=e^{-x^2}, qui intervient dans la distribution statistique normale, ne peut être calculée que numériquement ! [10]

Dans le cas complexe, f devra être analytique (nous verrons plus loin ce que cela veut exactement dire) pour que F existe (rappel : f=F' laquelle est alors indéfiniment différentiable ⟹ f l'est aussi !). Il est donc inutile d'espérer qu'existe une primitive pour les intégrales des fonctions complexes continues non-analytiques !

L'existence d'une primitive entraîne que l'intégrale est indépendante du chemin (cf. théorème fondamental de l'intégration complexe : si ∃F primitive, alors $\oint$f=0).

L'inverse est également vrai ⟹ une intégrale indépendante du chemin permet alors la définition suivante de la primitive :

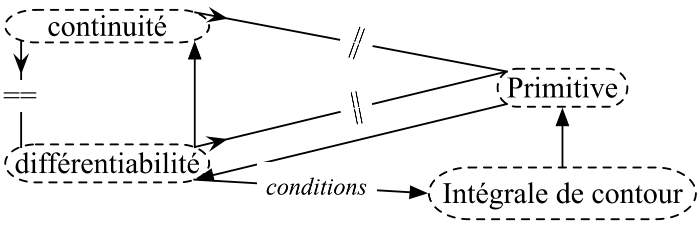
$$F(Z) = \int_A^Z f(z) dz$$

Mais, attention aux éventuels trous dans le domaine (je n'ai pas le temps ici de m'étendre sur ce point important).

D'où

- le théorème de Cauchy (1825) : $\oint$f=0 si la boucle n'enroule aucun point du domaine.
- la notion de *domaine étoilé* D* c'est-à-dire d'un domaine sans trous (liaison par segments de droite) : il existe alors des primitives régionales (c'est-à-dire sur tout le domaine D).
- cet autre résultat : $\int_\gamma$ et $\oint$ dépendent des indices d'enroulement autour des trous éventuels. Si cet indice est nul, alors $\oint$f=0.

Au total, on peut grapher de cette manière les enchaînements entre nos différentes notions :



Interprétation

On peut impunément tourner en rond autour d'un point (cela ne changera pas le résultat de l'action) mais on ne tournera pas impunément autour d'un trou du domaine !

Rappel sur la différence ∂ / ∫

[10] Stewart, p. 379, 408

La différenciation est *locale*. L'intégration complexe le long d'un parcours est *régionale*.
Les deux mobilisent une dynamique : *locale* pour ∂ (approche d'un point) et *régionale* pour $\int$ (chemin d'un point à un autre).
Les deux rappellent des conséquences du fait qu'il n'y a pas un bon ordre sur $\mathbb{C}$ (d'où l'infinité des parcours possibles).

La montée f→F se conquiert <u>marche par marche</u> quand la descente F→f ou f→f', une fois engagée, se fait automatiquement et indéfiniment.
La dissymétrie (entre une descente par différenciation et une montée par intégration) est constituée dès le début de la construction, laquelle commence en effet par le travail <u>local</u> d'un ∂ pour établir *dz*. Puis on passe à $\int$ par somme régionale de dz. Et finalement, F est définie comme « anti-dérivée » c'est-à-dire par F'=f.

II.4 – DÉVELOPPEMENT INDÉFINI EN SÉRIES ENTIÈRES

Nous sommes désormais dotés d'une notion de fonction complexe différentiable et intégrable le long de parcours tracés dans un domaine donné du plan complexe.
C'est cette notion que nous allons interpréter comme intervention régionale, matérialisation moderne de l'action restreinte mallarméenne (que nous allons entendre comme une action à ambition globale mais effectivement restreinte à une région donnée).
Nous allons maintenant entamer la seconde grande partie de notre périple : démontrer mathématiquement qu'une telle fonction est ipso facto dotée d'une structure algébriquement rigidifiée, « cristalline », autorisant l'existence d'un prolongement dit *analytique* au-delà du domaine de définition de la fonction. Nous interpréterons cette propriété comme montrant que toute action régionale peut légitimement – rationnellement, de manière matérialiste et non pas idéaliste ou utopique – ambitionner une portée d'ensemble.
Attention ! : nous conclurons qu'elle est prolongeable c'est-à-dire qu'elle peut être prolongée ce qui n'est nullement dire que son prolongement effectif est acquis par simple généralisation, par continuation répétitive : encore faudra-t-il construire un tel prolongement, ce qui n'est pas rien, mais à tout le moins il est assuré qu'un tel prolongement est possible ! *Une intervention prolongeable n'est pas ipso facto une intervention prolongée.*

Cette seconde partie se fera en deux temps :

4. Examiner comment *localement* une telle fonction complexe différentiable se décompose algébriquement en séries entières et va donc se comporter comme un polynôme infini (somme indéfiniment différentiable de monômes). Ce faisant, on va redescendre de la puissance du continu de $\oint f$ à la puissance du dénombrable de $\sum a_n z^n$ – c'est la phase cruciale d'algébrisation locale de la fonction continue.
5. Examiner comment cette structuration cristallographique, régionalement constituée, est ipso facto prolongeable sur tout le domaine considéré.

Notre quatrième séquence (première de la seconde grande partie) se décompose ainsi :

A. Séries entières : montrer comment une fonction complexe différenciable se développe localement en série entière c'est-à-dire se décompose en un polynôme infini.
B. Séries de Taylor : montrer que ce développement en série entière correspond à une série de Taylor dont les coefficients sont fonction des différentielles successives de la fonction.
C. Zéros : montrer que deux fonctions différentiables, égales seulement sur une partie bien choisie de zéros, seront partout égales (c'est l'avantage des polynômes !).

A) Séries entières

C'est ici le cœur de notre parcours : passer de l'analyse à l'algèbre, par un développement en séries entières c'est-à-dire par équivalence locale de la fonction à un polynôme infini.
L'existence de l'intégrale de contour va autoriser une algébrisation locale de notre fonction en un polynôme infini à valeur locale. Notre action va ainsi se révéler avoir une structure cristalline : rigidité, homogénéité, prolongation « naturelle »…

Pour f différentiable (et donc, comme on va le voir, indéfiniment différentiable) sur un domaine D, on aura, alors dans tout disque intérieur de centre z_0 et de rayon R, pour $|h|<R$:

$$f(z_0+h)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n h^n$$

avec

$$a_n=\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right]$$

où C_r est un disque plus petit, centré sur z_0 et de rayon r avec $0<r<R$.

Pour la démonstration, à partir de la formule intégrale de Cauchy, voir Stewart pp. 209-211.

Le principe de la démonstration repose sur le développement en série entière de $\frac{1}{z-(z_0+h)}$:

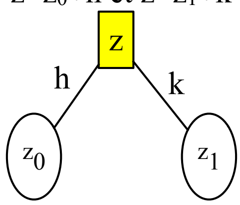
$$\frac{1}{z-(z_0+h)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{h^i}{(z-z_0)^{i+1}} + reste_n$$

avec $reste_n \to 0$ quand $n \to \infty$

Mais attention : ce n'est pas que f <u>est</u> un polynôme (infini) ; c'est seulement que partout, f <u>équivaut localement</u> à un polynôme (infini). Le point capital est en effet que ce polynôme (infini) ne va pas être le même partout pour la même fonction f : sa formule exacte ne vaudra qu'au voisinage d'un point donné.

Ainsi, si le même point z peut se formuler différemment, par distance à deux points z_0 et z_1 :

$z=z_0+h$ et $z=z_1+k$



on aura alors deux polynômes différents équivalents (donc deux séries entières différentes) au même point z :

$$f(z)=f(z_0+h)=\sum a_n h^n$$
$$f(z)=f(z_1+k)=\sum b_n k^n$$

Fonctions analytiques

On dira alors qu'une fonction complexe sur un domaine D de $\mathbb{C}$ est <u>analytique</u> si, en tout point z de D, elle a une expansion en séries entières du type :

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

C'est la propriété essentielle : f ainsi algébrisée se voit dotée d'une structure cristallographique qui va nous permettre de boucler notre parcours en examinant comment une telle fonction dispose ipso facto dotée d'un prolongement analytique.

Mais avant cela, quelques points complémentaires.

Fonction ∞-différentiable

Une fonction analytique est indéfiniment différentiable car son développement polynomial en séries entières l'est.

Elle également indéfiniment primitivable pour la même raison.

Fonctions holomorphes et méromorphes

Une fonction (sur $\mathbb{C}$) est dite *holomorphe* si elle est (∞)-différentiable sur tout $\mathbb{C}$.

Une fonction (sur $\mathbb{C}$) est dite *méromorphe* si elle est (∞)-différentiable sur des parties de $\mathbb{C}$ (ou en tout $\mathbb{C}$ sauf en certains points).

holo-morphe où *holo*=entier [11] / *méro*=partie

Global ≠ local généralisé

On vérifie ici un point essentiel : une propriété locale en tout point ne fait nullement une propriété globale (ici une fonction, partout localement équivalente à un polynôme infini, n'est pas pour autant un <u>unique</u> polynôme infini).

Il est très important de comprendre cette différence.

---

[11] *holo-causte* : brûlé en entier

Exemple

Prenons un exemple très métaphorique.

Soit la réalité globale qu'est l'humanité.

Posons qu'elle est localement composée d'individus humains, chaque être humain étant ainsi une réalisation locale de l'humanité comme telle.

Or chaque localisation de l'humanité est, sauf accident, dotée de deux bras et de deux jambes.

Pour autant on voit bien qu'on n'en induit nullement que l'humanité serait elle-même dotée de deux bras et de deux jambes !

Ainsi la propriété locale, partout valide (*générale* donc), ne correspond à aucune propriété globale (en vocabulaire ensembliste plutôt que topologique, le tout n'a pas la propriété élémentaire générale).

Global≠général ou total

Autrement dit, le global n'est pas une généralisation du local, et les propriétés globales d'un domaine ne sont nullement des propriétés partout valides ; ce sont des propriétés d'un type propre, qui concernent le domaine vu non plus comme ensemble de points et de leurs voisinages mais comme domaine d'un seul tenant.

Ou encore : ce qui fait l'unité propre du global, ce n'est pas l'unité d'une sommation ou d'une généralisation – le global n'est pas une somme de localisations - mais une unité sui generis, d'ordre indécomposable.

On avait déjà abordé cette distinction avec les groupes de Galois non résolubles, ces groupes étant caractérisés par une propriété globale (leur groupe de Galois irrésoluble) qui n'est pas une propriété distinctive de chacun de ses membres. Certes la propriété globale (groupe irrésoluble) entraîne alors une propriété individuelle générale (chaque racine est irrésoluble par radicaux) mais propriété globale et propriété locale générale restent distinctes.

B) Séries de Taylor

Le développement indéfini en séries entières des fonctions analytiques s'interprète ensuite très directement comme série de Taylor, c'est-à-dire série dont les coefficients sont fonction des différentes différentielles de la fonction considérée. On va ainsi avoir :

$$f(z+h) = \sum \frac{f^{(n)}(z)}{n!} h^n$$

avec

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z+h)}{h^{n+1}} dz$$

Ne nous étendons pas ici plus avant sur ce point mais mentionnons simplement deux conséquences significatives.

Théorème de Liouville

Si f complexe et différentiable est bornée sur tout C, alors elle est constante.

Intuitivement : penser à un polynôme réel infini qui, s'il est borné quand x→∞, est forcément constant.

Démonstration

On montre facilement [12] que dans ce cas f'(z)=0 via l'estimation de Cauchy pour la dérivée.

Théorème général de l'algèbre

Si P est un polynôme, alors il a un zéro : ∃w avec P(w)=0

Démonstration par l'absurde

Architecture de la preuve : si P(z) n'a pas de zéro, P(z) est différentiable sur tout C. Mais alors

[12] Stewart p. 213

|1/P(z)| est bornable, donc constant (Liouville). Donc P(z) est constant, ce qui est impossible pour un polynôme non nul.

C) Zéros

Si f équivaut localement à un polynôme infini, ce polynôme infini a alors une infinité de zéros qui le définissent : rappelons-nous (cf. leçon sur Galois) que tout polynôme est défini par ses zéros-racines puisque $\sum a_i z^i = \prod(z_j - r_j)$

Prenons alors la série de Taylor à proximité d'un de ces zéros, par exemple z_0 :

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$$

On a donc : $f(z_0)=a_0=0$

Deux cas s'ouvrent alors :

- tous les $a_i=0 \Longrightarrow f(z)=0$
- le premier a_i non nul est a_m. Alors m sera l'ordre (fini) du zéro : $f^{(n)}_{n<m}(z_0)=0$

Un zéro est isolé s'il n'y en a pas d'autre dans un disque le contenant.

On démontre (Stewart p. 215) qu'un zéro d'ordre fini est isolé.

On en vient alors au point important : soit S l'ensemble (infini) des zéros de la fonction f différentiable sur D.

Si S a un point limite z_0 (c'est-à-dire s'il existe dans S une séquence z_n qui tend vers z_0) qui appartient à D, alors f(z)=0 sur un disque centré en z_0.

Démonstration

Comme z_0 est un point-limite, il n'est pas isolé ; donc, pour un disque de rayon h, on a $f(z_0 + h) = \sum a_n h^n$ avec tous les a_n nuls.

D'où un théorème important.

Théorème d'identité

Si deux fonctions différentiables sont égales sur l'ouvert S d'un domaine D, cet ouvert comportant un point limite dans D, alors elles sont égales sur tout le domaine ! [13]

L'idée – métaphorique - est que S doit ne pas flotter sur D mais lui être ancré par un point d'accumulation. Dans ce cas, ce qui vaut pour tout S vaut pour tout D !

Interprétation intellectuelle

Le zéro-limite formalise un ancrage du domaine d'intervention dans la situation.

Pour une action restreinte, un zéro veut dire un point que l'action annule, compte pour rien, neutralise : rien d'effectif et rien de possible n'y compte pour l'intervention considérée !

Les zéros d'une action-intervention cernent donc sa part neutre : ce qui, de la situation de départ, est neutre pour l'action.

Le résultat, inattendu, sera alors que deux actions qui neutralisent une même série de points convergeant dans le domaine d'intervention sont identiques.

Ici l'identité se valide par la part neutre et non pas constructive ou destructive de l'action.

Mais, attention, l'action ne se réduit bien sûr pas à cela, aux points-zéros-limites, lesquels points neutres forment une sorte de charpente polynomiale, algébrique donc, de l'action.

Si l'algèbre polynomiale des séries entières (et/ou séries de Taylor) structure, ossature l'action à partir de sa dimension neutre, le reste de la fonction relève plutôt d'une sorte de topologie souple, « entre » les zéros-limites.

Prenons cette image : si l'action édifie un chapiteau de cirque, les zéros-limites figurent le réseau des piliers du chapiteau et toutes les autres valeurs figurent la toile tendue au-dessus de ce réseau de piliers.

C'est en ce sens que les points neutres de l'intervention pitonnent dans la situation et autorisent par là d'ossaturer l'intervention.

[13] Stewart p. 216

Ce qui est remarquable, c'est donc que deux actions seront identiques si la structure algébrique de leur pouvoir de neutralisation est le même. Mais attention : c'est parce que la fonction est différentiable, c'est-à-dire parce que l'action est consistante.

D'où cette directive pour l'action restreinte : assurer que ce qu'elle neutralise (que ses zéros donc) dégage un point d'accumulation dans D : l'action restreinte s'ancre dans la situation par un point d'accumulation de ce que l'action restreinte neutralise, compte pour zéro, et qui va constituer les points d'appui immobiles au sol pour sustenter la toile qu'elle va déployer.
Comme on le voit, ce qu'une intervention ne modifie pas n'est pas une part morte et insignifiante de l'intervention mais tout au contraire constitue le **socle d'invariance** sur lequel elle va pouvoir engager ses propres transformations !

> Où l'on retrouve un grand principe de la modernité (voir le programme géométrique d'Erlangen de Felix Klein) : l'invariant est la mesure des variations et, si la géométrie n'est plus la science des figures mais celle de leurs modifications, alors une géométrie se distinguera d'une autre (comme pour nous une intervention se distinguera d'une autre) par ce qu'elle laisse inchangé en propre.

II.5 - Prolongement analytique

Deux questions

Deux questions dans notre dernière étape :

- Peut-on prolonger analytiquement une fonction selon ses développements locaux en série entière ?
- Si tel est le cas, le prolongement analytique est-il ou non unique ?

L'existence d'un prolongement analytique accuse la différence de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}$.

- Dans $\mathbb{R}$, il n'est pas vrai que si une fonction rationnelle et une série entière ont les mêmes valeurs sur un intervalle donné, elles ont alors les mêmes valeurs sur tout intervalle contenant le premier.
- Dans $\mathbb{C}$ par contre, si, sur un domaine donné, deux fonctions analytiques ont mêmes valeurs en tous points d'une courbe de ce domaine, alors elles sont partout égales dans ce domaine. C'est ce résultat extraordinaire qui nous intéresse centralement ! Voyons comment on peut l'établir à partir de tout ce que l'on a précédemment dégagé.

Exemple de $1/(1-z^2)$

La fonction $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ est analytique dans $\mathbb{C}\backslash\{-1, 1\}$ avec deux singularités (pôles simples [14]) à ±1.
Construisons, en différents points, la série entière centrée sur chacun d'eux :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

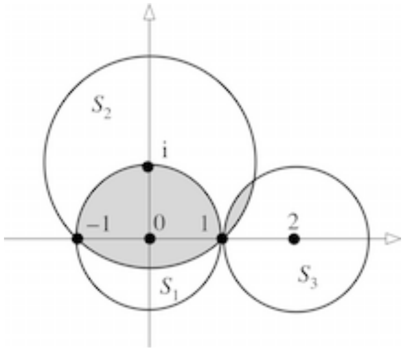
1) Point **0**
   Autour de $z_0=0$, la série entière suivante converge pour $|z|<1$:
   $$f(z)=1+z^2+z^4+z^6+\ldots=\sum_n z^{2n}$$
   donc elle converge pour le disque ouvert D_1 de rayon 1 centré sur 0 : $D_1=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$
2) Point **i**
   Autour de $z_0=i$, la série entière suivante a un rayon de convergence de $\sqrt{2}$:
   $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+i}\left(\frac{-1}{1+i}\right)^n+\frac{1}{1-i}\left(\frac{1}{1-i}\right)^n\right](z-i)^n$$
   donc elle converge cette fois pour le disque ouvert D_2 de rayon $\sqrt{2}$ centré sur i : $D_2=\{z\in\mathbb{C} : |z-1|<\sqrt{2}\}$ [15]
3) Point **2**
   Autour de $z_0=2$, la série entière suivante a un rayon de convergence de 1 :
   $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\tfrac{1}{2}(-1)^n+\tfrac{1}{6}(-\tfrac{1}{3})^n\right](z-2)^n$$
   donc elle converge pour le disque ouvert de rayon 1 centré sur 2 : $D_3=\{z\in\mathbb{C} : |z-2|<1\}$

Tout de même, en tout autre point z_0, on aurait une série entière spécifique selon la version locale de la série de Taylor.

La série entière prend donc trois formes différentes aux voisinages de nos trois points {0, i, 2} :

---

[14] « pôle simple » = singularité en « petit point » : ici, il s'agit de racines simples et non pas multiples. Cf. les « gros points » sont des pôles multiples.
[15] Pour le détail, voir Stewart p. 289…



Ainsi une même fonction analytique (ici définie synthétiquement par $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$) a trois développements différents en séries entières en trois points différents.

Où l'on retrouve la différence entre : tout point a un développement et tout point a le même développement.

On a le même type de différence entre continuité *simple* et continuité *uniforme*.

On dira donc que <u>le développement en série entière n'est pas uniforme</u>.

Faudrait-il alors abandonner l'idée d'utiliser les séries entières pour prolonger une fonction analytique ?

Non !

Cf. logique anti-pragmatique : « *c'est un principe cardinal en mathématiques de ne pas rejeter une bonne idée simplement parce qu'elle ne marche pas*. » [16]

Et, comme on va le voir, « *souvent en mathématiques, la solution d'un problème vient d'un point de vue plus général, le problème jouant alors un rôle de stimulation psychologique pour hausser nos pensées à des exigences plus élevées*. » [17]

C'est en ce point qu'il nous faut introduire les nouveaux noms de Weierstrass et de Riemann.
Pour cette séance, je me contenterai du premier, renvoyant l'examen du traitement de la question via les surfaces de Riemann à notre dernière leçon.

Point de vue de Weierstrass

Weierstrass va renverser notre problème (pour une même fonction, nous avons en trois points un développement différent en séries entières) et se demander : différentes séries entières aux voisinages de points différents peuvent-elles représenter la même fonction en sorte de former ainsi le prolongement analytique d'une seule et même fonction ?
Soit l'inversion suivante :

si *une* fonction ⟹ *différentes* séries entières,
comment *différentes* séries entières ⟹ une *unique* fonction ?

L'idée naturelle pour cela est de comparer les séries entières sur l'intersection (le recouvrement) de leur domaine de convergence : sur les zones grises de notre graphique précédent.

Lemme

Soient f(z) et g(z) deux fonctions analytiques sur le domaine D.
Soient P et Q deux ouverts de D d'intersection non nulle c'est-à-dire tels que $\emptyset \neq P \cap Q \subseteq D$.
Soient p(z) et q(z) les développements en série entière de f sur P et de g sur Q.
Dans ce cas, si p(z)=q(z) sur l'intersecion $P \cap Q$, alors f(z)=g(z) <u>sur tout D</u>.

La démonstration [18] est une conséquence directe du théorème d'identité qui, je vous le rappelle, démontre que si deux fonctions différentiables sont égales sur un ouvert ayant un point limite dans D, alors elles sont partout égales.

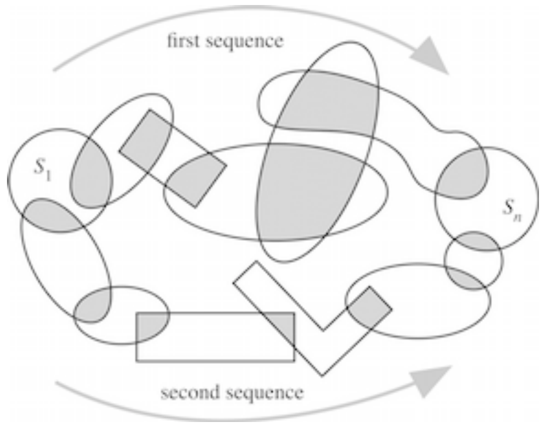
Dans ce cas (recouvrement non vide des disques de convergence), on dira que g prolonge analyti-

[16] Stewart p. 291
[17] Stewart p. 293
[18] Stewart p. 292

quement f (ou l'inverse) de manière *directe*.

Mais que fait-on si ce n'est pas le cas, si au point z_0, f(z) n'a pas de continuation directe en z_1 pour quelque ouvert Q contenant z_1 et non contenu dans l'ouvert P ?
S'il n'y a pas de prolongement direct, on va construire un prolongement *indirect*, passant par d'autres prolongations directes, un peu comme dans notre exemple $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ où S_1 et S_3 ne se recouvrant pas, on passe de l'un à l'autre via S_2 qui a des recouvrements avec l'un et l'autre.

Un problème surgit alors : si on prolonge ainsi indirectement S_1 sur S_n (via S_2, S_3, … S_i, …) par deux continuations analytiques différentes, obtient-on nécessairement le même résultat ?



Le résultat est : non !
Ceci nous oriente alors vers les fonctions <u>multiformes</u> c'est-à-dire les fonctions telles que pour certains z, f(z) n'est plus unique (on dit aussi que f est alors <u>multivaluée</u>).
Ceci nous engage géométriquement dans la problématique des surfaces de Riemann que nous étudierons ici en fin d'année.

Fonction analytique complète

Ceci dit, ne désespérons pas car il nous est d'ores et déjà possible d'assurer l'existence d'un unique prolongement analytique via la nouvelle notion de fonction analytique <u>complète</u> qui va désigner une classe d'équivalence sur les fonctions analytiques.

L'idée très simple est la suivante : elle consiste à affaiblir la relation d'**égalité** (entre fonctions) en une relation d'**équivalence** (entre fonctions) en posant qu'une fonction f_1 analytique sur le domaine D_1 équivaut à une autre fonction f_2 sur le domaine D_2 s'il existe une continuation analytique entre les deux : $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$

Cette relation est clairement d'équivalence car elle est réflexive ($f\sim f$), symétrique ($f\sim g \Rightarrow g\sim f$)et transitive ($f\sim g$ et $g\sim h \Rightarrow f\sim h$).

On définira alors une fonction analytique complète comme une classe d'équivalence sur l'ensemble des fonctions analytiques c'est-à-dire comme le paquet $\{f_i, D_i\}$ des fonctions analytiques qui sont entre elles prolongeables.

Nous sommes ainsi arrivés à notre terme : une fonction analytique, directement prolongée entre deux points séparés d'un domaine donné, est indirectement prolongeable sur tout le domaine considéré, sans que ceci garantisse pour autant l'unicité de ce prolongement mais assure tout du moins une équivalence entre les différents prolongements possibles.

Voyons maintenant comment interpréter intellectuellement ce résultat mathématique.

Interprétation intellectuelle

Deux volets

« Théorème » de l'action régionalement restreinte

Il va de soi que le mot « théorème » opère ici métaphoriquement : à proprement parler, il n'y a pas de théorème dans une intellectualité donnée – il n'y a de théorème que mathématique – et, moins encore, il ne s'agit ici de dire que la rigueur mathématique validerait d'elle-même ces considérations sur l'action régionalement restreinte, comme si l'on appliquait la rigueur mathématique à nos domaines intellectuels.
Entre mathématique et intellectualité, il peut y avoir raisonance, non déduction.
« Théorème » veut seulement désigner ici l'existence d'une argumentation rationnelle pour des conclusions matérialistes, tout comme « mathème » désigne une formalisation littérale, analogue à une formule mathématique.

Posons que dans une situation donnée, l'action dite « complexe » ambitionne de transformer les rapports internes à cette situation entre effectivités, possibilités et potentialités (sans se contenter donc, comme le fait l'action « réaliste », de gérer les effectivités existantes, c'est-à-dire ce qu'il y a bien déjà là, au vu et au su de tous et sans non plus se contenter, comme le fait la problématique pragmatiste, de mesurer son action aux transformations des effectivités, négligeant ainsi par exemple les transformations de potentialités en possibilités [19]).
Supposons qu'une telle action assure la délicate cohésion de son intervention transformatrice (sa « différentiabilité ») : cette cohésion est en effet plus difficile à assurer pour une action « complexe » (c'est-à-dire intervenante) que pour une action dite « réaliste » ou « pragmatiste ».
Si une telle action

- restreint son intervention à un parcours régional reliant a minima deux localisations différentes
- et assure son ancrage dans la situation par un point d'accumulation de ce qu'elle ne transformera pas (point qui fixera le zéro central de son propre repère),

alors une telle action « complexe » peut avoir légitimement l'ambition d'être prolongée, éventuellement de différentes manières *équivalentes*, à échelle globale de la situation concernée (sans se limiter donc au seul « agir localement ») : sa réussite régionale fondera alors de manière matérialiste l'espérance de ses extensions globales.

> Rappelons une fois encore qu'être prolongeable ne veut nullement dire qu'il suffirait de généraliser l'action initiale : une prolongation n'est pas une simple généralisation mais une invention. Une éventuelle prolongation impliquera donc d'inventer de nouveaux développements en séries entières, de nouvelles formules et non pas de répéter mécaniquement les développements régionalement acquis.
> Autrement dit, la possibilité est garantie sans que cela éponge la différence à laquelle nous sommes désormais habitués en matière de grandeurs complexe entre possibilités et effectivités : encore une fois, prolongeable n'est pas prolongé (tout comme, on va y revenir, l'espérance n'est pas l'espoir !)

Espérance individuelle

En un certain sens, toute existence humaine individuelle est une telle action régionalement restreinte sur les 60 ans de vie qui relie le travail à 20 ans et le travail à 80 ans ! Cette fenêtre, non choisie, sur l'épopée globale de l'humanité constitue le domaine d'une possible action régionalement restreinte qui fonde une espérance en l'humanité, cette espérance qu'il nous faut aujourd'hui consolider de matière matérialiste – cet exposé voudrait y contribuer à sa manière.
Mais bien sûr pour qu'une telle existence restreinte constitue une telle région, encore faut-il que les partis pris existentiels soient continués, vaille que vaille, sur l'étendue de la vie humaine considérée. Il faut donc que l'existence concernée s'attelle à continuer les choix et décisions qui ont constitué

[19] Voir ici le travail exemplaire de Lénine et du Parti bolchevik pour transformer les potentialités révolutionnaires d'avril 1917 en les urgentes possibilités d'octobre 1917…

cette existence en excès d'une simple survie.
D'où l'importance du point qui suit.

Mener le bon combat jusqu'au bout pour pouvoir transmettre…

« *J'ai mené le bon combat et l'ai mené jusqu'au bout !* »
Paul transmettant le flambeau à son disciple Timothée
« *Une volonté, à l'insu, qui dure une vie, jusqu'à l'éclat multiple…* »
Mallarmé (*L'action restreinte*) [20]

Le « bon combat » de Paul veut dire pour nous *action intervenante ;* « mené jusqu'au bout » veut dire : jusqu'à relier effectivement deux points éloignés en assurant un ancrage (minimum : il suffit d'un point) dans la situation.

L'énoncé de Mallarmé s'élucide ainsi :
- « une volonté » ? L'action intervenante, dotée d'une ferme ligne ;
- « à l'insu » ? À proprement parler, on ne la construit pas : on la poursuit et on ne saurait contrôler ses effets au-delà de leur localisation immédiate ;
- « qui dure une vie » ? C'est là notre dimension régionale ;
- « jusqu'à l'éclat multiple » ? jusqu'à l'éclat de ses prolongations insues…

Au total l'intervention constitue un bâton de témoin relayable à qui voudra étendre le travail régionalement réalisé.
Mais attention : les testaments ne font pas les héritages (« *Notre héritage n'est précédé d'aucun testament.* » Char). Le bâton de témoin relayable sera-t-il effectivement transmis ? Cela relève de l'espoir.
Ce qui relève de l'espérance, c'est que le résultat, régionalement établi, a bien potentielle valeur globale. Ce résultat sera-t-il bien effectué globalement ? L'espérance n'en tranche pas.
L'espérance (qui ne trompe pas) assure l'effectuable. L'espoir (trompeur) serait que cet effectuable sera bien, ipso facto, effectué. L'espérance repose par contre sur la certitude qu'il y a bien en mer une bouteille qui circule !

***

[20] Pléiade, 1945, p. 369

PETITE DOCUMENTATION

(pour une documentation détaillée et commentée, voir le polycopié *mamuphi*)

Livres

Analyses

Analyse réelle et complexe

Jean Mawhin : *Analyse. Fondements, techniques, évolution* (De Boeck Université, 1992)

Analyse complexe

Ian Stewart & David Tall : *Complex Analysis* (Cambridge University Press, 2° édition 2018)
https://web.math.ucsb.edu/~agboola/teaching/2021/winter/122A/st.pdf
Tristan Needham : *Visual Complex Analysis* (Clarenron Press – Oxford, 1997)
https://b-ok.cc/book/974187/196adc
https://b-ok.cc/dl/974187/405935

Histoire

Dominique Flament : *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie* (Ed. CNRS, 2003)
Carlo Oswaldo Suarez Aleman : *Cauchy : la rigueur de l'analyse mathématique* (coll. *Génies des mathématiques* ; 2019)

Philosophie

Badiou : *Le Nombre et les nombres* (Seuil)
Pavel Florensky : *Les imaginaires en géométrie* (1902-1922 ; éd. française : *Zones sensibles*, 2016)

Vidéos

Jean Mawhin : *Surprises et beautés en passant du réel au complexe* (Bruxelles le 14 mars 2014)
https://www.youtube.com/watch?v=kquIrE46G1s

mamuphi

Il s'agit ici de mes propres interventions dans le séminaire mamuphi (2019-2020).

Exposés

1) *Enquête mamuphi sur les complexes comme grandeurs structurant un espace dynamique de type nouveau* [$\mathbb{C}\neq\mathbb{R}^2$] (16 novembre 2019)
2) *De la puissance propre de l'action restreinte* (25 janvier 2020)

Polycopié

Polycopié mamuphi (2019-2020 ; 120 pages)

***