Quatrième leçon de maths modernes : **THÉORIE DES GRANDEURS COMPLEXES**

(9 janvier 2022)

| ARGUMENTAIRE | 2 |
|--|-----------|
| Problématisation | 2 |
| Une révolution par adjonction-extension | 2 |
| Portée intellectuelle | 3 |
| UN LIVRE. | 5 |
| OUVERTURE | 8 |
| Deux points préalables | 8 |
| Rappels sur les mathématiques précantoriennes | 9 |
| « Analyse complexe » ? | 11 |
| Aujourd'hui | 12 |
| RAPIDE CHRONOLOGIE | 13 |
| Grandeurs complexes | |
| Analyse complexe | |
| UNE EXTENSION DES QUANTITÉS PAR ADJONCTION | 14 |
| L'énigme de i | 14 |
| POUR INTUITIONNER GÉOMÉTRIQUEMENT | 18 |
| 1. La multiplication complexe | 18 |
| 2) Le plan complexe | 22 |
| Nouveau parcours de notre spirale | 24 |
| I. ALGÉBRISATION DE LA GÉOMÉTRIE SPÉCIFIQUE DU PLAN COMPLEXE | 25 |
| I.a - Algèbre : le corps des complexes | 26 |
| $\mathbb{C}\neq I\mathbb{R},+,xI^2$ | 26 |
| I.b - Géométrie algébrisée : les coordonnées polaires | 28 |
| I.c - Géométrie : l'intrication dynamique au principe du plan complexe | 29 |
| II. INTERPRÉTATION (INTELLECTUELLE) | 33 |
| Préliminaires | <i>33</i> |
| II.a:-1=i*i | 36 |
| II.b : z=x+iy ou les quantités de type nouveau | 37 |
| II.c: Le plan amplirotatif \mathbb{C} | 38 |
| SUITE: L'ANALYSE COMPLEXE | 40 |
| « Complexe » ? | 40 |
| PETITE DOCUMENTATION | 41 |
| Livres | 41 |
| Vidéos | 41 |
| mamuphi | 41 |

ARGUMENTAIRE

Problématisation

La problématique des grandeurs complexes s'est constituée *algébriquement*: pourquoi l'équation $x^2-1=0$ a-t-elle deux racines (« réelles » : ± 1) et pourquoi l'équation $x^2+1=0$ n'aurait-elle pas également deux racines (d'un autre type)? D'où l'idée au XVIII° (Euler) d'imaginer un type nouveau d'être algébrique noté i (pour *imaginaire*) tel que $i^2=-1$ qui autoriserait alors que toute équation polynomiale de degré n ait bien n racines (« réelles » ou « imaginaires »).

Au début du XIX°, Gauss va interpréter *géométriquement* cet être algébrique « imaginaire » comme grandeur complexe du plan dit « complexe » (là où le nombre « réel » se représente comme un point de la droite dite « réelle »).

Vers 1838, Cauchy va étendre sa précédente révolution de l'analyse *réelle* (théorie des fonctions « réelles » ¹) en une analyse *complexe* (théorie des fonctions complexes).

L'enjeu de cette leçon sera de prendre mesure de la manière dont cette analyse complexe constitue un apport essentiel de la mathématique moderne pré-cantorienne, non seulement pour la mathématique proprement dite mais plus généralement pour les intellectualités modernes.

Une révolution par adjonction-extension

La théorie des grandeurs complexes se présente comme une extension de la théorie des nombres réels par adjonction d'une quantité i telle que i*i=-1 (on notera $i = \sqrt{-1}$), quantité numériquement paradoxale puisque son carré est négatif.

Ce faisant, elle configure une extension de la droite dite *réelle* \mathbb{R} en un plan dit *complexe* \mathbb{C} et une extension de l'analyse moderne des fonctions réelles $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ en une analyse des fonctions complexes $(\mathbb{C} \to \mathbb{C})$.

Comme toute adjonction-extension, cette révolution se scinde en deux versants opposés, fortement dissymétriques : un immense gain (aspect principal) et une perte circonscrite (aspect secondaire). Dans notre cas :

- 1) l'agrandissement *quantitatif* de l'espace de travail (qui passe de une à deux dimensions) se double d'un bouleversement *qualitatif* : le plan complexe \mathbb{C} diffère en effet radicalement du plan réel $\mathbb{R}^*\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ (nous verrons comment) ;
- 2) mais cette extension s'accompagne d'une contrepartie négative, d'un renoncement circonscrit, qui tient ici au fait que les nouveaux êtres complexes ne seront plus ordonnables comme le sont les nombres ² et donc qu'à proprement parler ces êtres complexes ne seront plus des nombres (d'où le nom de *grandeurs* complexes que leur donnera Gauss).

Algèbre et géométrie complexes

On explorera le nouvel espace complexe ainsi constitué selon la dialectique moderne d'une algèbre (théorie formalisatrice et calculatrice) et d'une géométrie (modèle interprétatif et intuitif).

La clef de voûte de la structure *complexe* de ce nouvel espace repose *algébriquement* sur un type nouveau d'opération multiplicative : la multiplication *complexe* qui va alors autoriser (par l'existence corrélative d'une division spécifique) le passage d'une structure d'anneau (sur le plan réel) à une structure de corps (sur le plan complexe).

Suivant le fil didactique de Tristan Needham, on interprètera géométriquement cette multiplication complexe comme une amplirotation, c'est-à-dire comme l'intrication d'une amplification et d'une rotation.

On suivra alors les effets de cette multiplication sur la structure algébrico-géométrique du plan

¹ qu'il a fondée sur le concept de *limite*, lequel abandonnait la problématique classique (Newton-Leibniz) des *infinitésimaux*, intenable tant que le concept mathématique d'*infini* n'avait pas été clarifié (il le sera seulement dans les années 1870 par Cantor et Dedekind).

² Toute paire de nombres (différents) comporte un plus petit et un plus grand en sorte que l'on peut intégralement ordonner tout ensemble de nombres du plus petit au plus grand.

complexe, ainsi doté d'une *semi-négation* ³ (qui « dynamise » le plan complexe par une « rotation » endogène) et d'une division complexe (essentielle pour que les complexes fassent « corps »).

Ainsi, cette opération algébrique configure géométriquement le passage du plan réel \mathbb{R}^2 (symétrique et statique) au plan complexe \mathbb{C} (dissymétrique - ses deux axes ne sont plus permutables - et ainsi rendu intrinsèquement dynamique).

Analyse complexe

L'analyse complexe va venir compléter cette structure algébrico-géométrique en y appropriant les opérateurs de différenciation et d'intégration issus de l'analyse réelle.

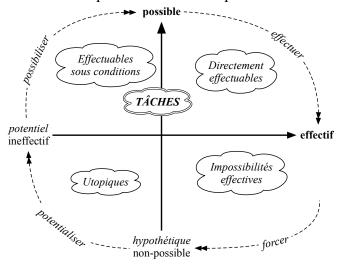
On en suivra les effets sur la différenciation complexe (par usage *local* de la division complexe df/dz), sur l'intégration complexe (par usage *régional* – chemin entre deux points - de la multiplication complexe Jf.dz) jusqu'au développement en séries entières (polynômes infinis) des fonctions complexes différentiables, développement qui les dotent d'une rigidité algébrique exceptionnellement féconde (autorisant leur « prolongement analytique »).

Portée intellectuelle

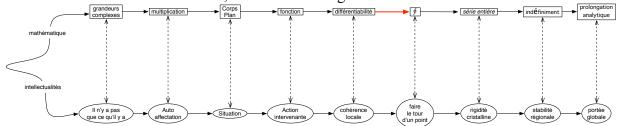
Pourquoi nous donner ainsi cette peine de mathématiciens aux pieds nus étudiant l'analyse complexe *élémentaire*? En quoi la différence radicale entre ces deux formes (réelle et complexe) de l'analyse moderne, toutes deux théorisées par Cauchy, est-elle susceptible d'intéresser les intellectualités contemporaines?

Interprétation

On proposera de motiver notre étude en suivant le fil interprétatif suivant : faisons comme si la dialectique mathématique « réel/imaginaire » formalisait la dialectique intellectuelle « effectif/possible » et tirons-en toutes conséquences selon l'interprétation suivante du plan complexe :



Ceci nous conduira à doubler l'enchaînement des concepts mathématiques par un enchaînement parallèle entre notions intellectuelles, selon le schéma général suivant :



³ Si la multiplication par (-1) constitue une sorte de négation, alors la multiplication par $i = \sqrt{-1}$ constitue une $\sqrt{n\acute{e}gation}$ (ou *semi-négation*) qui transforme tout nombre « réel » x en la grandeur « imaginaire » i.x et toute grandeur « imaginaire » i.x en le nombre « réel » négatif i^2 .x=-x. Cette opération algébrique est alors géométriquement interprétable comme une rotation de 90° dans le plan complexe.

Deux résultats décisifs

Cette interprétation nous conduira à deux thèses, centrales pour les intellectualités modernes.

1. « Il n'y a pas que ce qu'il y a!»

Une situation ne se réduit nullement à ce qu'elle comporte de manifestement effectif; penser une situation, tout spécialement en vue d'y intervenir, implique de la concevoir dynamiquement par inclusion de ses possibles propres.

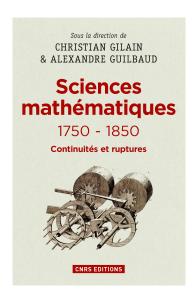
Il n'y a donc pas que l'effectif (c'est-à-dire ce qu'il y a manifestement là) car il y a également du possible qui relève d'un autre type d'il y a.

2. L'action moderne est restreinte car régionale.

Contre la doxa résignée de l'agir localement (se repliant bien vite en un agir sur soi), il convient de ressusciter l'action restreinte de Mallarmé en l'intelligeant comme action régionale (c'est-à-dire reliant deux localités différentes): ainsi, l'action restreinte (dans une situation incorporant ses possibilités internes) échappe à la dichotomie du local et du global pour établir l'instance intermédiaire du régional ⁴. Or, en ce point, le théorème dit du prolongement analytique va mettre au jour l'ambition globale dont une telle action régionale devient ipso facto détentrice. Nous l'interprèterons ainsi: l'action restreinte, s'attachant à tenir la dynamique d'une possibilité entre deux effectivités locales, autolimitant donc son affirmation à une région (ce qui la distingue aussi bien de l'action globale du classicisme que de l'action locale du postmodernisme), rend ainsi possible la transmission jusqu'au bout d'un point d'ores et déjà tenu entre deux lieux différents. À ce titre, l'action restreinte constitue le cœur même de l'action moderne.

⁴ Différentes politiques émancipatrices du XX° siècle n'ont-elles pas ainsi matérialisé leur ambition générale de révolution non par quelque insurrection immédiatement globale (imaginaire du Grand Soir) mais en créant des régions politiques de type nouveau, par exemple des zones libérées, ou inventant des Communes populaires, ou encore unifiant le lieu *usine* et le lieu *quartier populaire*?

Ouvrage collectif (2015)



Quatrième de couverture

Une tradition bien ancrée en histoire des mathématiques présente le passage du XVIIIe au XIXe siècle comme <u>une rupture radicale et globale</u>, <u>en liaison avec</u> les bouleversements sociopolitiques induits par <u>la Révolution française</u>. Fruit du travail d'un groupe composé de nombreux historiens des sciences, cet ouvrage se propose de discuter cette présentation standard liée à la périodisation classique établissant vers 1800 l'entrée dans l'ère de la « modernité » mathématique.

Dans cette perspective, les contributions rassemblées ici abordent le développement de <u>diverses</u> <u>sciences mathématiques</u>, <u>pures ou appliquées</u>, entre le milieu du XVIIIe siècle et celui du XIXe, à la fois en France, lieu scientifique essentiel pour la période considérée, et dans d'autres pays, en particulier l'Allemagne et la Grande-Bretagne. Elles considèrent <u>tout aussi bien les contenus</u> des textes scientifiques <u>que leurs contextes</u> institutionnels, sociaux, culturels ou politiques.

Centrée sur <u>l'analyse des continuités et des discontinuités sur le temps long de la période 1750-1850</u>, cette étude met en évidence <u>une complexité</u> de dynamiques historiques et de temporalités <u>bien</u> <u>éloignée de la dichotomie supposée entre les deux siècles</u>.

En deux mots...

Ouvrage d'historiens (ce qui n'est pas notre propre position subjective) qui relativise la dichotomie classique/moderne, centrée sur la Révolution française et 1800 en relativisant son caractère postulé global et radical. D'om ces deux questions :

• Est-ce bien global?

Pour relativiser ce point, le livre procède à un triple élargissement de son corpus :

- o des mathématiques pures aux mathématiques appliquées et aux sciences mathématisées (astronomie, physique...);
- o du contenu des textes à leurs contextes institutionnels, sociologiques, culturels...;
- o de la période historique : de 1800 à tout un siècle (1750-1850) à cheval sur XVIII° et XIX°.
- Est-ce bien radical?

Pour relativiser ce point, le livre met au jour différentes continuités par-delà la rupture de la Révolution française.

Il nous faudra étudier cela en détail.

Je n'en ai guère le temps cette année. J'inscris donc ce livre à mon (lourd !) programme de travail estival en sorte de pouvoir le discuter en début d'année prochaine (seconde année, cette fois dans le cadre de mamuphi).

Mais voici, d'ores et déjà, quelques repères.

Cinq différences...

Rappelons d'abord nos différences d'orientation par rapport à ce précieux travail d'historiens.

De prime abord, j'en vois cinq :

- 1) Notre étude ne relève pas d'une objectivité historienne mais plutôt d'une subjectivité militante au sens précis suivant : le militant est celui qui aborde une situation convaincu que, dans cette situation, « il y a plus que ce qu'il y a » l'examen détaillé de ce slogan va nous occuper aujourd'hui. Il l'aborde donc du point de ce qui lui semble possible et non pas seulement pour recenser exhaustivement ce qu'il y a. Un militant cherche les points d'appui en situation pour des possibilités jusque-là inaperçues ou mal exploitées. Bien sûr, il les cherche de matière matérialiste, en étant instruit des savoirs existants (et c'est pour cela qu'il ne saurait être question d'ignorer ce que ce livre peut nous apprendre et apporter à notre réflexion). Mais il ne s'agit pas pour lui de tout recenser car il s'agit pour lui de connaître plutôt que de savoir. Il ne s'agit pas pour lui de faire le tour exhaustif d'une question mais plutôt d'y dégager une coupure interprétative.
- 2) Notre étude se base sur le travail interne des mathématiques ici dites « pures », sur les bonds immanents qui s'y produisent, sans éprouver pour autant le besoin d'examiner les conditions de possibilité non mathématiques de ces bonds mathématiques. En particulier, nous ne nous intéressons pas ici au contexte non mathématique des bonds dans la pensée mathématique : pour le coup, nous les prenons comme des faits que l'on établit en intériorité à la pensée mathématique.
- 3) Nous nous attachons à caractériser le bond mathématiques *classiques*—*modernes* comme une pluralité de différents bonds dans chacune des disciplines préexistantes (arithmétique, géométrie, algèbre et analyse) et dans la création d'une nouvelle discipline (la topologie... ⁵) plutôt que comme un seul bond *global*.
- 4) Nous ne situons pas la coupure autour de 1800 mais plutôt de 1830. Autant dire que si contexte socio-politique il y a pour une telle coupure intra-mathématique, elle est moins celle de la Révolution française que celle, post-Révolution française, des nouvelles révolutions ouvrières antibourgeoises.
- 5) La radicalité des bonds relativement synchrones que nous étudions tient essentiellement à des révolutions par adjonction-extension plutôt que par destruction-reconstruction ou abandon-dépassement. Cette radicalité n'est donc aucunement la radicalité convenue de la table rase ⁶ ni celle de l'abandon intégral ⁷ et elle incorpore tout à fait naturellement des prolongations et des continuités.

En bref, si notre orientation s'oppose à celle de cet ouvrage, c'est a priori l'opposition d'une différence (paraconsistante) plutôt que l'opposition d'incompatibilités (de contradictoires ou de contraires) : triple différence sur l'objet (intériorité des théories mathématiques ou conceptions étendues à leurs contextes, faisceau de plusieurs bonds ou unité globale), sur le moment du bond (1800 ou 1830), sur ce que radicalité du bond veut dire...

Exemple de l'analyse

Concernant notre théorie du jour, l'analyse moderne, l'argumentaire du livre repose sur la mise en évidence d'anticipations et de réflexions précursives qui adoucissent l'idée de rupture par quelques continuités de réflexion.

Deux exemples:

- la notion de *limite* n'est pas inventée par Cauchy mais héritée de d'Alembert et Lacroix ;
- la notion de *fonction*, dont la clarification va de Euler (1748) à Dirichlet (1830), enjambe la césure au gré d'aménagements successifs : d'abord (Euler, 1848) la notion de fonction est attachée à l'existence d'une unique formule analytique qui la configure globalement ; puis (Euler, 1755) la notion admet l'existence de différentes formulations « par morceaux » engageant alors un examen local des fonctions aux points de raccordement ; pour finalement se détacher totalement et définitivement de la notion de formule avec Dirichlet (1829).

Mais, au total, l'existence de continuités maintenues n'invalide aucunement l'idée de révolution globale et radicale, sauf à n'admettre pour seules modèles de révolution que ceux de reconstruction

⁵ Nous le verrons avec Riemann...

⁶ révolutions par destruction-reconstruction...

⁷ révolutions par abandon-déplacement...

intégrale après table rase ou abandon total : nous avons vu comment la conception moderne de la révolution globale et radicale se dispose sous le nouveau paradigme des révolutions par adjonction-extension, révolution qui ont précisément pour propriété distinctive de ne pas détruire l'ancien mais de le maintenir circonscrit en sorte que les dimensions globale et radicale de ce type révolution se donnent plutôt par changement d'échelle et restriction corrélative de l'ancien – ici du *classique*.

Un exemple très connu de ce type de révolution est la révolution chrétienne du judaïsme qui lui adjoint la figure du Christ ressuscité pour inaugurer une foi radicalement changée d'échelle : d'où l'extension du particularisme juif à l'universalisme chrétien, sans que cela implique d'éliminer un Ancien Testament (hérésie « gauchiste » de Marcion) qui se trouve plutôt circonscrit à la première esquisse réduite d'un Nouveau Testament doté d'une tout autre ampleur.

Notons, au demeurant, que cette problématique semble étrangement tout ignorer de l'analyse moderne des fonctions complexes, point où pour nous se joue essentiellement le bond classique/moderne de l'analyse!

OUVERTURE

« L'introduction des grandeurs complexes dans les mathématiques révèle une harmonie et une régularité qui sans cela restent cachées. » Riemann (1851) ⁸ « On a pu écrire que la voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire. » Jacques Hadamard ⁹

« Cherche l'impossible. √-1 est le compte de l'impossible. » Vélimir Khlebnikov (1920) ¹⁰ « L'imaginaire ne doit pas être compris comme un signe d'irréalité. Le domaine des imaginaires est réel. » Pavel Floresky ¹¹ (1921) ¹²

Il s'agit là de notre quatrième leçon, la troisième sur les mathématiques précantoriennes.

Deux points préalables

Changement de calendrier

Il me faut progresser plus lentement, pour ne pas rester trop allusif et me donner les moyens de vous convaincre des trésors de pensée que recèlent ces maths modernes précantoriennes.

D'où que nous prendrons deux séances pour explorer l'analyse complexe, l'une aujourd'hui pour comprendre à fond ce qu'est une grandeur complexe du plan complexe; l'autre, dans un mois, pour comprendre ce qu'est une fonction complexe et l'analyse afférente.

D'où le décalage suivant de notre programme de travail :

- 4) 9 janvier 2022 : théorie *algébrico-géométrique* des grandeurs **complexes**
- 5) 6 février 2022 : théorie *analytique* des fonctions **complexes** (CAUCHY, 1838)
- 6) 20 mars 2022 : théorie algébrico-géométrique des quaternions (HAMILTON, 1843)
- 7) 3 avril 2022 : théorie géométrique de la courbure intrinsèque (GAUSS, 1828)
- 8) 22 mai 2022 : théorie topologique des variétés (RIEMANN, 1854)

Par ailleurs, nous ne pourrons ainsi boucler cette année l'examen des variétés riemanniennes.

Nous nous contenterons en mai d'examiner les variétés topologiques, renvoyant à l'année prochaine la suite de l'examen des variétés riemaniennes.

Je compte poursuivre ces leçons en 2022-2023 dans un tout autre cadre : celui de l'école *mamuphi* que nous comptons, l'année prochaine, mettre en place une fois par mois les samedis matin à l'Ircam.

D'ores et déjà, je compte donc programmer pour l'année prochaine (à des dates à fixer ultérieurement) les leçons suivantes :

- 1) Riemann (II) : les variétés différentielles et riemanniennes
- 2) Riemann (III) : la fonction Zeta et l'hypothèse de Riemann
- 3) L'algèbre de l'intrication tensorielle (Levy-Civita) ce faisant, cette leçon prendra pied dans les maths modernes postcantoriennes.

Je verrai ensuite comment éventuellement prolonger ce travail par les études

des groupes différentiels (Lie),

⁸ "Die Einführung komplexer Größen in die Mathematik" – cf. Bases d'une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" (Dissertation inaugurale, Göttingen, 1851)

⁹ Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique (1959 ; p. 114)

¹⁰ Œuvres (1919-1922), Verdier

¹¹ Les imaginaires en géométrie, p. 18, p. 78

¹² Comme on le voit, la Russie de l'époque soviétique s'est intéressée à la problématique des grandeurs complexes, comme extension de la réalité empiriquement immédiate.

- du calcul intégral post-Riemann (Lebesgue, Kurzweil-Henstock),
- des distributions (Schwarz),
- de l'analyse quaternionique (extension de l'analyse complexe),
- des topos de faisceaux (Grothendieck),
- des différents types logiques de négation,
- ..

Vidéo et texte!

Concernant maintenant les vidéos mises en ligne sous Youtube, petit conseil : suivre la vidéo texte en mains.

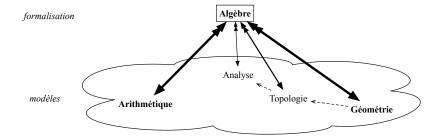
Pour ce faire, je publie systématiquement le texte (pdf) des leçons sur le site *Entretemps* et j'en indique les références sur Youtube, en commentaire de la vidéo.

Rappels sur les mathématiques précantoriennes

Je rappelle ma liste:

| Dedekind | Galois | Cauchy | Hamilton | Gauss | Riemann |
|--------------|---------|-----------|-------------|-----------|-----------|
| arithmétique | algèbre | analyse | | géométrie | topologie |
| coupures | groupes | complexes | quaternions | courbures | variétés |
| 1858 | 1830 | 1838 | 1848 | 1828 | 1854 |
| 6° | 2° | 3° | 4° | 1° | 5° |

Schématisons ainsi les rapports entre les différentes disciplines mathématiques :



L'ordre chronologique de la « modernisation » serait par contre le suivant :

- 1) géométrie (Gauss)
- 2) algèbre (Galois)
- 3) (Cauchy)
- 4) (Hamilton)
- 5) (Riemann)
- 6) arithmétique (Dedekind)

Pour les trois disciplines mathématiques de base (géométrie-algèbre-arithmétique), cet ordre chronologique (1. géométrie : 1828 ; 2. algèbre : 1830 ; 3. arithmétique : 1858) exemplifie, me semble-til, le point suivant : la primauté de <u>l'élan moderne des mathématiques vient de la géométrie</u>, non de l'algèbre, laquelle va plutôt venir formaliser cet élan (d'où <u>un élan formalisateur</u>, qui va prendre le dessus au XX°).

Posons, de manière métaphorique, que Gauss est le Père des mathématiques modernes, que Galois en est le Fils et que Dedekind en est le Saint-Esprit!

Thèse : la géométrie est le moteur des maths modernes et l'algèbre le carburant formel. D'où leur appariement moderne en une géométrie algébrisée nommée géométrie algébrique.

On retrouve en effet la géométrie au début des mathématiques modernes (Gauss), en leur milieu (à partir de Riemann) et jusqu'aux années 1960 avec Grothendieck – d'où le « tournant géométrique de la logique mathématique » (avec Jean-Yves Girard), récusant le pseudo tournant langa-

gier (années 1920) dont se réclame la pitoyable philosophie analytique...

Rappel : le traitement moderne de la géométrie sera au cœur des divisions internes de la réforme des maths modernes (années 1960 et 1970). Voir :

- Dieudonné: « À bas Euclide! » (1959)
- Gustave Choquet : *L'enseignement de la géométrie* (1964)
- Les cours de géométrie qui se sont alors enorgueillis d'être sans aucune figure, purement formels, et sans laisser place à l'intuition interprétative (formalisation strictement littérale qui vire au pur formalisme ¹³).

1. Pluriel

Mathématiques se dit donc au pluriel ¹⁴ depuis ses origines grecques : arithmétique & géométrie ¹⁵.

2. Unité

Unité de cette pluralité par l'algèbre,

- d'abord conçue comme opérations communes : <u>algèbre classique des équations algébriques</u>, communes aux nombres arithmétiques et aux grandeurs géométriques ;
- puis conçue comme structures communes : <u>algèbre moderne des groupes algébriques</u> Voir les groupes de substitution laissant invariants des structures qui groupent
 - des nombres par une même propriété : cf. tous les nombres ayant pour même propriété $\sum a_i x^i = 0$;
 - des figures par une même propriété : cf. toutes les figures reliées entre elles par un même type de transformation géométrique (translations, rotations, homothéties, etc.)

3. Invariants

D'où, au passage, l'idée que <u>ce qui compte dans une transformation, c'est ce qu'elle ne transforme pas</u>, ce qu'elle laisse invariant : le réel d'une transformation est ce qui lui est impossible à transformer!

Voir le programme d'Erlangen de Klein (1872 ¹⁶) : une géométrie (euclidienne, affine, projective, non euclidienne...) se particularise par ce que son groupe donné de transformations – celui qui spécifie cette géométrie - laisse invariant.

4. Mathématiques/logique

Dans l'unité dialectique *mathématiques / logique*, l'aspect principal, ce sont les mathématiques, non la logique.

La logique va être mathématisée à partir de la fin du XIX° (Boole, Cantor, Frege...) mais la mathématique ne visera à être « logicisée » (en vain...) que par les tenants de ce que l'on appellera « logicisme » (Hilbert...).

Posons que la mathématique est le modèle que la logique mathématisée vient ensuite formaliser. Bien sûr, il y a une rétroaction du secondaire sur le principal (il s'agit de dialectique, non de mécanique) : la logique cantorienne va ainsi rétroagir sur les mathématiques modernes, tout particulièrement en donnant une assise logico-mathématique au concept d'infini, concept qui mathématiquement devient alors inséparable de sa pluralisation infinie ¹⁷.

Mais stratégiquement, l'aspect principal est du côté des mathématiques.

Voir l'exemple récurrent d'Alain Badiou : un topos admettant l'axiome de choix a une logique

¹³ Appelons *formalisme* cette orientation de la formalisation qui transforme son autonomie en indépendance de toute interprétation...

¹⁴ Lequel n'est pas le multiple : le multiple est sans un quand le pluriel est fait d'uns (ici : les mathématiques sont faites de plusieurs disciplines mathématiques : l'arithmétique, la géométrie, etc.).

¹⁵ en une juxtaposition de deux unités aux objets mal unifiés : nombres & figures

¹⁶ 1849-1925. Thèse en 1868 (19 ans !). Il avait 23 ans quand il a pris la chaire de l'université de Erlangen et publié son programme de travail !!

¹⁷ L'infini mathématique naît comme gerbe infini d'infinis : les différents types d'infini mathématique sont infiniment plus nombreux que les différents types de fini !

classique. Mais la décision mathématique porte ici sur l'axiome mathématique - admettre ou non l'axiome de choix – pour se disposer ensuite sous la discipline de sa conséquence logique – la logique du topos sera ou non classique. C'est la mathématique qui décide et la logique se situe alors du côté des conséquences de cette décision mathématique, non l'inverse! 18

5. Avant Cantor

Si l'on veut saisir

- ce qu'il y a de moderne dans les mathématiques modernes, il faut le caractériser avant Cantor ;
- comment la modernité des mathématiques modernes intéresse les intellectualités contemporaines, il faut caractériser cette modernité mathématique avant Cantor.

Intellectualités et philosophie

Ici les intellectualités se distinguent donc de la philosophie, en particulier de celle d'Alain Badiou pour laquelle la contemporanéisation des concepts philosophiques de *vérité* et de *sujet* passe prioritairement par la logique mathématique cantorienne (théorie des ensembles, avec sa théorie des grands cardinaux) puis par d'autres composantes de la logique mathématique moderne (théorie des modèles, théorie des catégories).

Il faudrait à ce titre réexaminer la dialectique philosophie/intellectualités.

Je l'ai engagé concernant l'intellectualité musicale dans mon Monde-Musique.

Ce n'est pas ici notre sujet.

Indiquons simplement que ce cours de maths modernes est en proximité avec les travaux philosophiques de Lautman plutôt que de Cavaillès (le premier empoigne philosophiquement les mathématiques modernes quand le second saisit plutôt la logique mathématique moderne).

6. Dialectiques interne \rightarrow externe

Raison supplémentaire, pour nous, de rehausser le pluriel des mathématiques (et le pluriel étendu des mathématiques modernes) : c'est l'existence d'une dialectique (formalisatrice et interprétative) interne aux mathématiques (et par excellence aux mathématiques modernes) qui va autoriser l'existence d'une dialectique (formalisatrice et interprétative) externe aux mathématiques entre mathématiques modernes et intellectualités contemporaines.

D'où la grande importance du socle mathématique de cette dialectique interne qui tient aux rapports entre algèbre et géométrie (plus qu'entre algèbre et arithmétique), rapports qui vont être au cœur de notre étude des grandeurs complexes.

« Analyse complexe »?

L'analyse est l'examen des fonctions.

Le concept mathématique de *fonction* s'est dégagé à partir du XVIII° pour ne se clarifier qu'au XIX°. Ce concept mériterait une leçon par lui-même.

L'analyse réelle est la théorie des fonctions réelles c'est-à-dire entre nombres réels : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Les fonctions complexes seront alors les fonctions entre grandeurs complexes : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

L'analyse complexe sera l'étude de ces fonctions complexes.

Donc il nous faut commencer par l'étude de grandeurs complexes (mal nommés « nombres » complexes – nous verrons pourquoi). Ce sera l'objet de cette quatrième leçon.

Nous consacrerons la cinquième leçon à l'examen proprement dit des fonctions complexes et de l'analyse complexe.

D'où le plan de ces deux leçons :

- I) Les grandeurs complexes du plan complexe
- II) Les fonctions complexes et leur analyse complexe

¹⁸ Là encore, la philosophie analytique a tout faux, et d'autant plus faux qu'elle projettera d'assujettir la logique mathématique à la logique langagière, voire, pire encore, à un supposé « sens commun »...

Aujourd'hui...

Parcours en spirale, circulant à plusieurs reprises entre formalisation algébrique, interprétation géométrique, interprétation intellectuelle (extra-mathématique).

But de cette méthode : nous imprégner petit à petit de cette matière si particulière que sont les grandeurs complexes.

RAPIDE CHRONOLOGIE

Grandeurs complexes

1545 Cardan-Bombelli (1572) \rightarrow 1831 Gauss-Hamilton (1837)

Trois siècles!

En fait Cauchy n'a pas joué de rôle propre dans la constitution des grandeurs complexes. Son rôle va être décisif pour l'analyse complexe.

Les acteurs principaux concernant les grandeurs complexes sont donc :

- Cardan-Bombelli (Italie, XVI°)
- Euler (seconde partie du XVIII°) : « i »
- Gauss (début du XIX°) : la vision géométrique des complxes comme grandeurs.

Analyse complexe

1825 (Cauchy) → 1851-1859 (Riemann : surfaces-zêta)

30 ans seulement!

Soit dix fois moins de temps pour déployer l'analyse complexe une fois les grandeurs complexes constituées que pour constituer la notion même de grandeurs complexes, soit une accélération foudroyante, intéressante à retenir...

L'idée me semble la suivante : une fois les bases solidement clarifiées, la construction va dix fois plus vite.

Ceci est un formidable encouragement pour nous qui travaillons laborieusement à reclarifier les bases d'une modernité *maintenue*.

Dans son ouvrage de référence, Ian Stewart se demande aussi : pourquoi une telle différence 300/30 ans ? (p. 6) Pourquoi le problème des complexes a-t-il pris tant de temps quand sa solution s'avère si simple ? (p. 7)

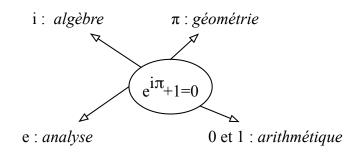
Réponse de Stewart : car il a fallu du temps pour que la question philosophique à l'origine du problème s'évapore, pour que les mathématiciens s'en désintéressent, pour qu'une nouvelle génération n'y voit plus un problème appelant une solution (p. 7).

Cette réponse me semble très faible : c'est une réponse pragmatique et/ou empirique (« c'était un faux problème métaphysique ou philosophique, encombrant »). Or le problème de savoir comment interpréter mathématiquement ce que l'on formalise mathématiquement reste un vrai problème mathématique!

Il me semble qu'il faut donc plutôt chercher la réponse à la question *pourquoi tant de temps*? dans ces trois directions :

- 1) le problème (« nombres » ?) demeure mais la problématisation change ;
- 2) la problématisation change avec l'algèbre moderne (Galois-Hamilton-Dedekind) : la structure de corps clarifie la structure que $\mathbb C$ partage avec $\mathbb R$, clarifie $\mathbb C$ comme extension de corps de $\mathbb R$ tout en épinglant la différence $\mathbb R/\mathbb C$ par la structure d'ordre ;
- 3) la problématisation change aussi avec le plan complexe c'est-à-dire avec une nouvelle articulation (non réduite à l'articulation cartésienne classique) entre algèbre et géométrie.

Bref, c'est l'ensemble du remaniement moderne des rapports entre disciplines mathématiques rénovées (préfiguré par l'équation canonique d'Euler $e^{i\pi}+1=0$) qui non pas dissout le problème mais y répond par la problématique de *grandeurs d'un type nouveau* (Riemann).



UNE EXTENSION DES QUANTITÉS PAR ADJONCTION

La révolution $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ se fait formellement par adjonction de la grandeur $i : \mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ c'est-à-dire que $\mathbb{C} = \{r+s.i\}$ avec r et s réels (r et s $\in \mathbb{R}$).

L'énigme de i

Tout le point porte alors sur ce qu'est cet objet i adjoint à \mathbb{R} .

C'est ici que la chose se complique singulièrement.

Abordons cela par contraposition avec une adjonction du même type que nous avons examinée lors de notre leçon sur Dedekind : l'adjonction de $\sqrt{2}$ à \mathbb{Q} notée $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{p+q,\sqrt{2}\}$ avec p et $q \in \mathbb{Q}$.

$$\mathbb{C}=\mathbb{R}[i]\neq\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

Dans \mathbb{Q} , nous ne connaissons pas $\sqrt{2}$ puisque ce nombre est irrationnel. Dans \mathbb{Q} , $\sqrt{2}$ n'est que le nom d'une quantité inconnue (tout comme, en un certain sens, l'algèbre nomme x la quantité inconnue dont l'équation algébrique vient formaliser les propriétés distinctives).

La propriété distinctive de la quantité inconnue $\sqrt{2}$ se formalise dans $\mathbb Q$ ainsi $(\sqrt{2}).(\sqrt{2})=2$ ou $(\sqrt{2})^2=2$.

On a vu comment les coupures de Dedekind donnent sens à ce nom, en interprétant la *quantité* ainsi nommée comme un *nombre* (irrationnel).

L'important est ici que la quantité inconnue, formalisée par le nom algébrique $\sqrt{2}$, s'avère bien un nombre, donc un objet arithmétique comme ceux peuplant \mathbb{Q} .

Je rappelle : au départ (c'est-à-dire chez les Grecs), $\sqrt{2}$ vient nommer la quantité que porte une grandeur géométrique (la diagonale du carré de côté 1), non un nombre arithmétique.

L'opération multiplicative q.√2 vient alors nommer l'action d'un nombre sur une telle quantité. Cette action produit une nouvelle quantité, et non pas à proprement parler un nouveau nombre.

Pensons par exemple à une grandeur physique comme la longueur ou la surface : chacune de ces grandeurs est mesurable par un nombre ayant une unité physique (un nombre de mètres ou de mètres carrés).

Le principe de ce nombre est qu'il mesure un rapport entre deux grandeurs physiques du même type : par exemple entre la circonférence d'un cercle donné et le mètre étalon déposé au Pavillon de Breteuil. Dire que cette circonférence vaudra par exemple 2π mètres voudra dire qu'elle vaut 2π fois la longueur du mètre-étalon.

L'homologie entre nombres (arithmétiques) et grandeurs (physiques ou géométriques) va donc reposer sur deux points :

- 1) on peut multiplier une grandeur par un nombre en sorte d'obtenir une nouvelle grandeur de même type ;
- 2) la grandeur-unité peut être considérée comme équivalente au nombre 1 car les grandeurs en question ont la même structure d'ordre que les nombres : dans notre exemple, non seulement on sait ce qu'une longueur nulle veut dire et on peut additionner deux longueurs pour en obtenir une troisième, mais surtout, de deux longueurs différentes, on peut toujours dire laquelle est la plus petite et laquelle est la plus grande.

Différence qualitative $i \neq \sqrt{2}$

On va voir qu'avec les grandeurs complexes, on perd cette structure d'ordre 19 , ce qui interdit de concevoir que la quantité r.i est un nombre comme la quantité q. $\sqrt{2}$ en est un.

Par exemple, on pourra comparer q et $q.\sqrt{2}$ (écrire par exemple : $q>0 \implies q< q.\sqrt{2}$) alors qu'on ne pourra comparer r et r.i, n e serait-ce que parce qu'on ne pourra dire si i<0 ou i>0.

¹⁹ Plus exactement, on perd toute structure d'ordre compatible avec les opérations arithmétiques élémentaires d'addition-soustraction et de multiplication-division...

$$\langle\langle i \rangle\rangle = ?$$

Que vient nommer i ? « De quoi i est-il le nom ? »

La lettre i (inventée par Euler pour *imaginaire*) vient nommer la quantité telle que, <u>multipliée</u> par elle-même, elle vaut -1.

Formalisons-le ainsi : i*i=-1 (ce qui se condensera formellement ainsi $i^2=-1$ puis ainsi $\sqrt{i}=-1$).

Mais quel sens donner à ce pur formalisme ? Comment interpréter mathématiquement cette quantité i, cette chose mathématique énigmatique ?

C'est là où la chose se complique car en général, la mathématique se contente de poser une telle formalisation, considérant qu'elle équivaut à celle de l'algèbre qui formalise d'une même lettre x un nombre arithmétique inconnu ou une grandeur géométrique inconnue.

Mais ceci n'est pas du tout vrai : la lettre « x » formalise algébriquement le caractère inconnu d'un type parfaitement connu de chose mathématique (type nombre ou type grandeur) et se dialectise donc à une interprétation mathématique parfaitement explicitée alors qu'on ne sait pas trop ce que la nouvelle lettre « i » vient formaliser, si bien que la formalisation algébrique tend ici à se rétracter en un pur formalisme.

Explorons le mystère de cette formalisation i*i=-1.

i est ici formellement défini comme cette quantité mystérieuse qui, multipliée par elle-même, donne -1.

En quelque sorte i*i=-1 est l'équation algébrique définissant i.

Mais le point essentiel, refoulé par cette formule, est alors le suivant : de quelle multiplication s'agit-il exactement ici ? S'agit-il de la multiplication numérique bien connue qui fait que 2.2=4 et (-1).(-1)=1 ? Manifestement non, car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x.x \ge 0$!

Nous avons donc manifestement à faire à une multiplication d'un autre type, d'un type non numérique!

C'est d'ailleurs pour cela que j'ai pris d'emblée la précaution de la formaliser non par un point « . » comme pour la multiplication numérique (arithmétique) mais d'une astérisque « * » :

$$(-1).(-1)=1$$
 alors que $i*i=-1$

Il va donc de soi qu'il nous faut, pour le moment (c'est-à-dire tant que nous n'avons pas clarifié le propre de la multiplication complexe), éviter la formulation résumée i² qui effacerait la distinction entre multiplication complexe (i*i=i²) et multiplication numérique (3.3=3²)

L'usage mathématique est pire encore : il est malheureusement de poser que i nomme le nombre $\sqrt{(-1)}$!

Cet usage a une généalogie algébrique : il vient du fait que les quantités complexes ont été introduites à partir des équations algébriques (polynomiales) pour rendre compte de ce que l'équation $x^2+1=0$ a deux racines, tout comme l'équation $x^2-1=0$:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}= \Rightarrow x=\pm1$$

 $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{(-1)} \Rightarrow x=\pm i$

Mais cette formalisation commune compactifie deux rationalités différentes : ce type de compactification est certes au principe de l'avantage incomparable de l'algèbre, en particulier en matière de calculabilité, mais elle a pour terrible contrepartie un effacement, un oubli et un aveuglement qui tendent alors bien vite à se redoubler (« oubli de l'oubli ») en une véritable forclusion!

À mes yeux, <u>le nom même de cette forclusion algébrique des complexes est le nom de *nombre* indûment attribué aux quantités complexes : parler de nombre complexe forclôt sa dimension, géométriquement constitutive, de grandeur.</u>

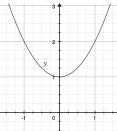
Il nous faut examiner cela en détail.

Pourquoi?

- 1) Pour une raison intra-mathématique : le pur formalisme (c'est-à-dire la formalisation algébrique devenant insoucieuse de toute interprétation géométrique ou arithmétique) interdit le travail de pensée des mathématiciens aux pieds nus je vous renvoie ici à notre première leçon l'ennemi du mathématicien aux pieds nus est le pur formalisme!
- 2) Pour une raison extra-mathématique : il s'agit pour nous de prendre appui sur ce travail (travail

pour comprendre les spécificités des nouvelles quantités complexes introduites par la modernité mathématique) pour mieux soutenir rationnellement l'idée suivante, intellectuellement très générale : comprendre une situation donnée, enquêter sur elle en vue d'y intervenir et pas seulement pour la décrire objectivement, se l'approprier subjectivement donc, la connaître et pas seulement la savoir, c'est très exactement apprendre à prendre en compte ce qu'elle contient comme possibilités endogènes et pas seulement comme réalités effectives, comme « faits » indubitables et indiscutables.

Et notre hypothèse va être que les possibles d'une situation effective, les possibles qui lui appartiennent en propre, qui la structurent secrètement comme ses effectivités la structurent explicitement, que ces possibles y ont le statut de grandeurs complexes, mal et bien dites imaginaires : imaginaires certes car elles n'y sont pas effectives, mais en même temps non imaginaires car elles existent bien en situation mais selon un mode propre d'existence, tout de même que les racines complexes d'un polynôme rationnel tel x^2+1 existent bien sans pour autant apparaître selon le mode numérique d'apparition - le mode arithmétique réaliste -, celui par exemple qui opère dans le tracé de la fonction afférente :



Pour nous, les quantités complexes vont se dialectiser aux nombres réels comme les possibilités d'une situation donnée vont se dialectiser à ses effectivités.

D'où l'importance extrême de bien comprendre ce que quantité complexe veut spécifiquement dire comme grandeur sans que ce discernement ne soit recouvert par l'aveuglement formel de l'algèbre.

Un exemple

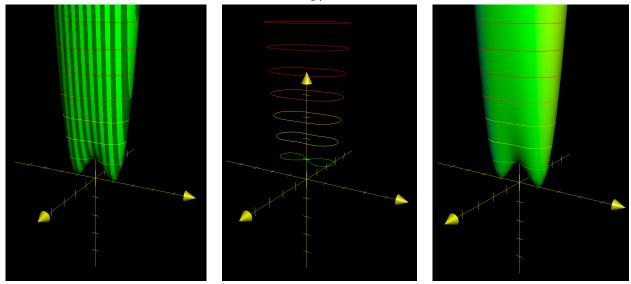
Et pour nous encourager dans l'investigation algébrique, toujours trop aveuglément calculatrice, voici par avance, le résultat que l'interprétation géométrique nous délivrera du « mystère » de deux racines complexes à existence fantomatique dans le monde des nombres réels pour la fonction $f(x)=x^2+1$.

Soit la fonction complexe $g(x,y)=(x+iy)^2+1$ qui étend au plan complexe notre fonction réelle $f(x)=x^2+1$.

On a bien
$$g(0,\pm i)=0$$
.
Autrement dit, $(x+iy)^2+1=0$ pour $x=0$ et pour $y=\pm i$ (comme $x^2+1=0$ pour $x=\pm i$)

Le module du nombre complexe $z=g(x,y)=(x+iy)^2+1=(x^2-y^2+1)+2ixy$ sera $(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2$. Traçons cette fonction du module $z=(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2$ dans \mathbb{R}^3 .

On obtient alors cette surface où l'axe des x pointe vers nous et l'axe des y (« imaginaires » ou complexes purs) vers la droite :



On discerne bien en 3D les deux racines complexes $\{0; \pm i\}$.

On comprend alors surtout pourquoi, si on coupe cette surface par le plan xOz perpendiculaire à l'origine à l'axe complexe Oy, on va obtenir notre courbe x^2+1 toujours positive et donc sans racine réelle!

Ainsi, le monde des nombres réels, qu'on fera équivaloir dans notre interprétation intellectuelle au monde des seules choses effectives, excluant les possibles immanents relevant de « l'imaginaire », s'avère la réduction par projection d'un monde plus vaste, seul à même de donner intelligibilité aux propriétés de ce monde.

Tel est le motif essentiel de cette leçon que nous allons explorer rationnellement.

Nous aurons dans cette leçon deux grands temps :

- 1) Un temps négatif : pourquoi la quantité complexe n'est pas un nombre ?

 Ce point sera le plus simple : les quantités complexes ne sont pas des nombres car elles ne sont pas bien ordonnables selon un ordre compatible avec leur structure de corps (c'est-à-dire avec les opérations d'addition-soustraction et de multiplication-division qui les structurent).
- 2) Un temps affirmatif : en quoi la quantité complexe est-elle une quantité d'un type nouveau ? Pour traiter ce point, il nlsu faura en remonter, une fois de plus, à la géométrie. Ceci va nous permettre de dégager en quel sens précis <u>les quantités complexes sont des grandeurs géométriques plutôt que des nombres arithmétiques.</u>

Repartons pour ce faire de la multiplication complexe, formellement inscrite de la lettre « * », cellela même qui opère pour définir i comme cette quantité telle que

i*i=-1.

POUR INTUITIONNER GÉOMÉTRIQUEMENT...

1. La multiplication complexe

1.a - Son formalisme algébrique

Avant d'en venir à l'élucidation de la multiplication complexe par la géométrie spécifique du plan complexe, continuons d'abord d'explorer les mystères algébriques de cette opération.

Comparaison de trois multiplications

Admettons l'existence d'une quantité « i » et de sa multiplication associée « * » telles que i*i=-1. On peut alors construire l'extension $\mathbb{R}[i]$ comme on a construit l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

$$\mathbb{R}[i] = \{x+y.i\} \text{ comme } \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{q+p\sqrt{2}\}$$

Chaque nouvelle quantité se formalise par le couple de deux nombres : $\{x, y\}$ ou $\{p, q\}$.

Multiplier deux quantités du même type pour en obtenir une troisième se formalise alors ainsi :

$${x ; y}*{x' ; y'}={x'' ; y''}$$

On peut concevoir cette multiplication formelle de trois manières :

1) Dans le cas de la multiplication complexe, on aura formellement :

$$(x+y.i)*(x'+y'.i)=(x.x'-y.y')+(x.y'+x'.y)*i$$

soit
 $\{x''; y''\}_{\mathbb{R}[i]}=\{x.x'-y.y'; x.y'+x'.y\}$

2) Dans le cas de la multiplication propre à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, on aurait par contre :

$$(x+y.\sqrt{2})*(x'+y'.\sqrt{2})=(x.x'+2.y.y')+(x.y'+x'.y)*\sqrt{2}$$

soit
 $\{x''; y''\}_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]}=\{x.x'+2.y.y'; x.y'+x'.y\}$

3) Dans le cas d'une multiplication directe sur $\mathbb{R}^*\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$, on aurait tout simplement :

$$\{x''; y''\}_{\mathbb{R}^2} = \{x.x'; y.y'\}$$

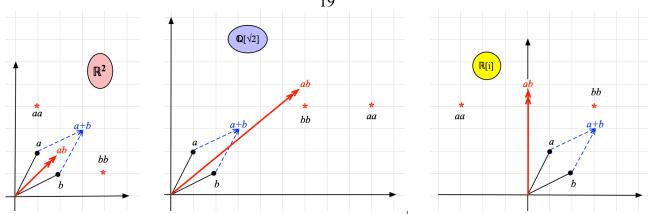
Exemple concret

Pour mieux comprendre les différences entre ces trois multiplications, prenons un exemple concret. Posons a={1; 2} et b={2; 1}.

On peut alors calculer (aveuglément) les résultats des différentes opérations d'addition et de multiplication dans chacune ces structures :

| | \mathbb{R}^2 | $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ | $\mathbb{R}[\mathrm{i}]$ |
|-----------------------------|----------------|----------------------------|--------------------------|
| ${x;y}+{x';y'}$ | {x=x'; y+y'} | | |
| $a+b=\{1;2\}+\{2;1\}$ | {3;3} | | |
| | | | |
| ${x ; y}*{x ; y}={x ; y}^2$ | $\{x^2; y^2\}$ | $\{x^2+2y^2; 2.x.y\}$ | $(x^2-y^2; 2.x.y)$ |
| {1;0}*{1;0} | | {1;0} | |
| $\{0;1\}*\{0;1\}$ | {0;1} | {2;0} | {-1;0} |
| $a*a=\{1;2\}*\{1;2\}$ | {1;4} | {9;4} | {-3;4} |
| $b*b=\{2;1\}*\{2;1\}$ | {4;1} | {6;4} | {3;4} |
| | | | |
| ${x;y}*{x';y'}$ | {x.x'; y.y'] | ${x.x'+2.y.y'; x.y'+x'.y}$ | ${x.x'-y.y'; x.y'+x'.y}$ |
| $\{1;0\}*\{0;1\}$ | $\{0\;;0\}$ | {0;1} | {0;1} |
| $a*b=b*a=\{1;2\}*\{2;1\}$ | {2;2} | {6;5} | {0;5} |

Figurons tout cela selon deux axes perpendiculaires formant un plan dessiné et inscrivons-y les différents points a, b, a+b, aa=a*a=a², bb=b*b=b² et ab=a*b:



Attention : dans le plan $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,

les normes des deux axes sont numériquement différentes :

l'unité de l'axe horizontal est 1 quand celle de l'axe vertical est $\sqrt{2}$ =1,414...

On voit que l'addition est la même dans nos trois structures car l'addition est une opération qui conjoint une disjonction : elle accole, juxtapose des données séparées.

La différence se fait par contre sur les multiplications car cette opération, dans les situations d'adjonction-extension, va <u>intriquer</u> les deux composantes (alors que la multiplication sur \mathbb{R}^2 les maintient séparées).

Notons que cette différence arithmétique entre addition (+) et multiplications (*) se retrouvera dans la différence catégorielle entre somme (Σ) et produits (\prod) ...

Après avoir pataugé dans le formalisme algébrique, attachons-nous maintenant à le comprendre et non plus seulement à calculer aveuglément en dégageant l'interprétation géométrique dont ce formalisme algébrique va s'avérer la formalisation.

1.b – Son interprétation géométrique

Multiplier un nombre réel par (-1), c'est renverser un point de la droite réelle symétriquement par rapport au centre 0 de cette droite.

Multiplier par (-1) tout nombre réel, c'est retourner cette droite autour de son centre 0.

Mais cette opération ne peut géométriquement se réaliser dans l'espace à une seule dimension de la droite : pour réaliser cette opération, il faut étendre cet espace unidimensionnel à deux en sorte de pouvoir faire pivoter la droite autour de son centre cette fois dans un plan.

On a le même problème avec des figures énantiomorphes ²⁰ du plan comme l'à-plat d'une main gauche et d'une main droite : ces deux figures sont symétriques mais non superposables (leur superposition implique un retournement qui n'est possible qu'en recourant à une troisième dimension).

Il en ira de même pour la symétrie entre deux orientations possibles d'un même trièdre dans un espace 3D : on ne peut superposer l'une à l'autre qu'en passant par un espace imaginaire à 4 dimensions.

On appelle « chiralité » ²¹ cette propriété de symétrie non superposable.

Examinons-la plus en détail dans nos trois cas.

De la chiralité

Pour que ce type chiral de figures devienne superposable, il faut impérativement « sortir des limites de l'épure » et mobiliser une dimension supplémentaire autour de laquelle faire pivoter de telle figure.

Espace à une dimension : la droite

La chiralité se manifeste exemplairement sur une droite en y disposant deux flèches de sens con-

²⁰ « forme inverse » non superposable

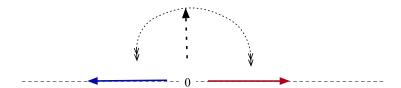
²¹ du mot grec nommant la main...

traires, autant dire mathématiquement deux vecteurs opposés.

Soit ces deux vecteurs, symétriques par rapport au centre et d'orientations opposées.



On ne peut, en restant sur la droite, c'est-à-dire en translatant les vecteurs de gauche ou de droite, les faire se recouvrir. Pour les faire se recouvrir, il faut sortir de la droite et opérer une rotation dans le plan.

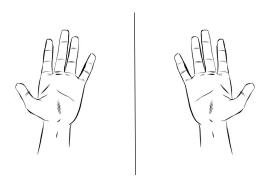


Pour « travailler » l'orientation possible d'un segment de droite, pour la modifier, il faut donc sortir de son espace et se situer dans le plan obtenu par adjonction d'une dimension verticale à la dimension horizontale de départ.

Comme on va le voir pour le plan complexe, ce pivotement à 180° se décompose de la manière la plus simple possible en deux rotations successives de 90°, ce qui va être formalisé par la multiplication d'un nombre réel par i puis par i*i=-1.

Espace à deux dimensions : le plan

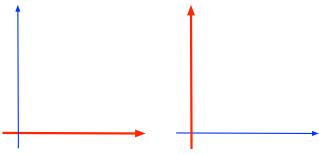
Soit maintenant ces deux mains dans le plan. On a la même configuration : elles sont symétriques, orientées de manières opposées mais non superposables en restant dans le plan (en faisant glisser sur le plan ces deux figures).



Pour les superposer, il faut sortir une main du plan, la faire pivoter sur une troisième dimension orthogonale au plan et la rabattre alors sur l'autre.

À nouveau, pour « travailler » l'orientation possible d'une telle main (supposée plane et sans épaisseur), pour la modifier, il faut se situer dans l'espace euclidien (3D) obtenu en adjoignant une troisième dimension orthogonale au plan de départ.

On a le même phénomène de chiralité dans le plan avec ces deux repères orthonormés, complémentaires mais non superposables :



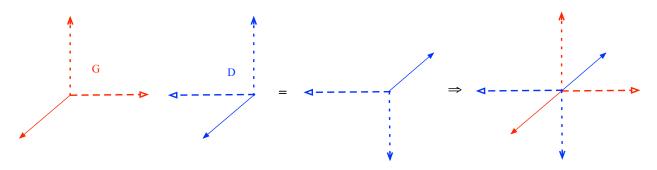
Espace à trois dimensions : le 3D euclidien

Soit maintenant ces deux trièdres (ou repères orientés) dans l'espace 3D usuel (ici figuré par quelque grossière perspective).



Ils sont à nouveau symétriques, orientés de manières opposées et non superposables (c'est dans cet espace usuel à trois dimensions qu'on parle surtout de *chiralité* car c'est dans cet espace que main gauche et main droite ne sont pas superposables).

Au demeurant nos deux trièdres inverses sont complémentaires, ce qu'on peut illustrer de la manière suivante, en faisant pivoter celui de droite en sorte de l'accoler à celui de gauche :



L'idée est que cette chiralité fait indice d'une dimension supplémentaire (une « 4° dimension », non immédiatement expérimentable) qui autorise seule la rotation permettant de convertir un trièdre en l'autre. Cette rotation ne nous est pas visible (pas plus que la rotation dans le plan n'est visible sur la droite, ou la rotation en 3D n'est visible dans le plan).

Retenons donc que le phénomène ordinaire de la chiralité dans notre espace usuel fait symptôme d'une dimension excédentaire qui y manque.

Au passage, rappelons que cette question de la chiralité, prise comme symptôme des questions d'orientation dans l'univers, a été au principe de la philosophie kantienne de l'espace comme le détaille par exemple son texte de 1768 : *Du premier fondement de la distinction des régions dans l'espace* ²².

Pour indication complémentaire, Albert Lautman a traité en détail de cette référence kantienne dans le chapitre *Propriétés intrinsèques et propriétés extrinsèques* de son *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques* (1937).

C'est précisément cette dimension géométrique manquante que l'algèbre complexe vient formaliser, en formalisant le pivotement hors-espace de la droite par une multiplication de type nouveau.

Ainsi, si multiplier par (-1) la droite réelle, c'est la faire pivoter de 180° dans un plan, la multiplier par $\sqrt{(-1)}$ sera la faire pivoter de 90° en sorte de la verticaliser.

On « voit » maintenant comment l'algèbre formalise l'opération géométrique jusque-là implicite qui autorisait de décomposer l'opération « multiplier par (-1) » en la semi-opération répétée « multiplier deux fois par $\sqrt{(-1)}$ » : pour obtenir une droite réelle entièrement retournée, il faut être passé par l'extension d'un plan dans lequel on la fait pivoter d'abord de 90° puis à nouveau d'autant.

²² http://www.educ-revues.fr/CPHILO/AffichageDocCompl.aspx?doc=Z103098A.HAT&pos=1

Cette décomposition en deux temps d'une opération géométrique d'inversion par pivotement en 2D se formalise comme multiplication par la quantité i telle que i*i=(-1)!

Continuons notre premier tour de spirale pour explorer notre domaine « complexe » en passant de la multiplication complexe au plan complexe.

2) Le plan complexe

Idée directrice

Le principal à comprendre, c'est que

grandeur complexe \neq quantité numérique réelle \Leftrightarrow multiplication complexe \neq multiplication numérique \Rightarrow plan complexe \neq plan réel xOy \Rightarrow $\bigcirc \vdash \mathbb{R} \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Or les deux plans en question sont par ailleurs analogues : ils sont tous deux orthonormés, identiquement paramétrables en sorte qu'un « même » point y a les deux mêmes coordonnées $\{x, y\}$, etc. L'idée directrice est que ces deux plans diffèrent par le fait que le plan \mathbb{R}^2 est symétrique (par rapport à l'axe y=x) quand le plan complexe ne l'est pas ; de plus, cette <u>dissymétrie</u> (« brisure de symétrie ») génère un <u>dynamisme endogène</u> qui lui est propre (le plan complexe incorpore une dynamique immanente qui se trouve inconnue du plan $\mathbb{R}.\mathbb{R}$).

Cette dissymétrie, caractérisant le plan \mathbb{C} , provient d'une opération immanente qui lui est propre, la multiplication complexe, opération qui va doter le second axe (dit *imaginaire*) du plan complexe d'une <u>double fonction</u>:

- 1) comme dans \mathbb{R}^2 , c'est un second axe, équivalent au premier;
- 2) mais il est aussi (et cela est le propre du plan \mathbb{C}) ce qu'on appellera une « seminégation » (entendue comme $\sqrt{n\acute{e}gation}$) du premier, ce qui correspond à sa propriété constituante : $\mathbf{i}^*\mathbf{i} = \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$

Autrement dit, i a une <u>double fonction</u>: de grandeur statique (norme unité du second axe) et d'opérateur dynamique.

Interprétation intellectuelle

Notre interprétation intellectuelle (et plus géométrique) de la théorie des grandeurs complexes ²³ se fera dans un « modèle » structuré par l'opposition de l'effectif et du possible, c'est-à-dire dans une situation au regard de laquelle il y a lieu de poser « il n'y a pas que ce qu'il y a » car, en sus de ce qu'il y a d'effectif dans cette situation (disons : les existences sur lesquelles tout le monde s'accorde), il y a aussi des possibles (qui, par définition, ne sont pas « effectuées ») et des potentialités (c'est-à-dire des possibilités de possibilités : par définition, une potentialité n'est pas exactement une possibilité mais elle désigne la possibilité que telle chose devienne possible, à condition alors de réunir les « conditions de possibilité » - exemple canonique : Lénine en 1917 déclare en avril que la révolution bolchevique est à l'ordre du jour non comme possibilité immédiate mais comme potentialité et donc que la tâche du parti bolchevik est de travailler à réunir les conditions de possibilité pour une telle révolution bolchevique ; fin septembre 1917 par contre, Lénine déclare que désormais la révolution est possible et que tout le parti bolchevik doit immédiatement se consacrer à l'effectuer).

²³ L'interprétation *géométrique* des *quantités* complexes formalisées par l'algèbre dégage la notion de *grandeur* complexe.

L'interprétation intellectuelle des grandeurs complexes théorisées par la mathématique dégage la notion d'intrication entre effectifs et possibles d'une situation donnée.

On interprètera donc l'opposition mathématique mal nommée {réel | imaginaire} comme l'opposition {effectif | possible}.

On interprètera la grandeur complexe x+iy (qui « additionne » un « réel » et un « imaginaire ») comme l'intrication en un point d'une effectivité et d'une possibilité : le point $x = x_{effectif} + y_{possible}$. On interprètera le plan complexe $\mathbb C$ et ses différents domaines comme un <u>plan d'intervention</u> et les différentes situations qui peuvent s'y distinguer.

On interprètera une fonction complexe $z \rightarrow f(z)$ sur un domaine donné du plan $\mathbb C$ comme un projet d'intervention dans une situation donnée c'est-à-dire comme transformation, en tout point z dju domaine considéré, du rapport entre effectivité et possibilité :

$$z=x+iy \rightarrow f(z)=z'=x'+iy'$$

 $f(x_{effectif} + y_{possible}) = x'_{effectif} + y'_{possible}$

RSI?

La nomination mathématique (complexe=réel+imaginaire) suggèrerait de traiter le complexe z comme symbole nouant un réel et un imaginaire, autant dire comme nœud borroméen lacanien de R et I par S.

L'interprétation qu'on va suivre ici va s'écarter de cette suggestion, que je crois une fausse bonne idée. En effet le « réel » des nombres réels n'est pas le Réel lacanien, lequel, comme on sait, est le nom même de l'Impossible (alors que le « réel » de l'arithmétique est tout au contraire le possible du numérique).

En fait le « réel » de l'arithmétique désigne de manière plus appropriée ce que Lacan appelle « la réalité » qui constitue le règne de ce qui est manifestement possible puisqu'effectué aux yeux de tous !

On renommera ici cette réalité en l'appelant « effectivité » et on l'opposera alors non pas à l'imaginaire mais au « possible ». Certes, pour identifier un possible en un point d'une situation, il faut « l'imaginer » plutôt que la constater (les conflits d'existence portent prioritairement sur cette dimension des possibles : existe-t-il en tel point – c'est-à-dire en tel endroit de telle situation à tel moment donné – telle possibilité ?). Mais, dans ce cas, « imaginer » ne veut pas dire « rêver » mais plutôt dire « penser », c'est-à-dire avoir *l'idée* du possible (et il serait réducteur de registrer une telle idée au seul imaginaire). On ne retiendra donc pas le nom « imaginaire » pas plus qu'on ne retiendra celui de « réel ».

J'espère qu'il va de soi pour chacun que la polarité effectif/possible n'est aucunement analogue à la polarité actuel/virtuel. Qu'il suffise pour cela d'indiquer par exemple qu'une possibilité en situation est parfaitement actuelle (la possibilité de faire la révolution bolchevique était parfaitement actuelle début octobre 17 et tout le combat de Lénine au sein de son propre parti était d'en convaincre ses camarades) en sorte que tout le plan qu'on va dessiner sur l'orthogonalité effectif \(\perp possible\) sera le plan d'une situation actuelle. S'il devait alors y en avoir un supplément virtuel, il se situerait en orthogonalité à ce plan et non pas en son intérieur.

Semi-négation

Notre <u>interprétation intellectuelle</u> du trait constituant l'originalité du plan complexe sera d'opposer <u>le possible</u> (axe de **i** allant du non-possible au possible) à <u>l'effectif</u> (axe de **1** allant de l'ineffectif à l'effectif), non pas comme sa négation mais comme sa « semi-négation » :

$$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$$
possibilité = $\sqrt{ineffectivit}$

Selon cette interprétation, le possible n'est pas la pure négation de l'effectif (le possible n'est pas un pur et simple ineffectif) sans être pour autant effectif. Il est à cheval sur l'opposition effectif-ineffectif, à mi-chemin. Il est une « semi-négation ».

On posera : possibilité*possibilité=possibilité2=possibilité de possibilités=potentialité \Rightarrow potentialité=ineffectivité (ce qui ne sera pas dire impossibilité : il est important de distinguer non-possibilité et impossibilité 24).

²⁴ comme on doit par exemple distinguer non-présent et absent...

Quatre plans

Il nous faudra donc bien distinguer quatre manières différentes de formaliser un point d'un plan orthonormé :

- 1) comme un point géométrique doté de deux coordonnées cartésiennes ⇒ le plan cartésien ;
- 2) comme une paire de réels c'est-à-dire un élément du plan $r\acute{e}el~\mathbb{R}^2$;
- 3) comme un vecteur, élément du plan vectoriel;
- 4) comme un complexe, élément du corps $\mathbb{C} \Longrightarrow le plan complexe$.

Soit quatre plans différents, différant par leur structure endogène :

- 1. Dans le plan *cartésien*, <u>il n'y a pas</u> de multiplication des points!
- 2. Dans le plan $r\acute{e}el \mathbb{R}^2$ on peut avoir <u>une multiplication</u> symétrique mais alors <u>sans division</u> (nous le montrerons plus loin).
- 3. Dans le plan *vectoriel*, on n'a <u>pas de multiplication</u> mais <u>deux produits</u> : le produit scalaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et le produit vectoriel $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$!
- 4. Dans le plan *complexe*, on a <u>une multiplication dynamique</u> $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ <u>avec division</u>.

| Plans | multiplication | division |
|-----------|------------------------------|----------|
| cartésien | Ø | ∄ |
| réel | 1 | ∄ |
| vectoriel | Ø [mais deux « produits »] | ∄ |
| complexe | 1 | Э |

Nouveau parcours de notre spirale

Reprenons.

Dans ces leçons, je privilégie un parcours en spirale plutôt que strictement linéaire, en approfondissant progressivement une question selon plusieurs retours cumulatifs.

Notre question du jour est double :

- I. Qu'est-ce que les quantités complexes ont de de mathématiquement spécifique ?
- II. De quelle pratique intellectuelle seraient-elles considérables comme la formalisation proprement mathématique ?

Soit toujours notre idée princeps : c'est parce que la pluralité des mathématiques dialectise *de manière endogène* formalisations et interprétations, théories et modèles, que les mathématiques sont à même d'être dialectisées, *de manière cette fois exogène*, avec les intellectualités c'est-à-dire d'être intelligées comme formalisant mathématiquement des interprétations non-mathématiques, comme théorisant des modèles intellectuels.

I. ALGÉBRISATION DE LA GÉOMÉTRIE SPÉCIFIQUE DU PLAN COMPLEXE

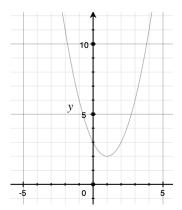
Une quantité complexe z se présente formellement comme la donation d'une paire ordonnée de deux nombres (réels) $\{x, y\}$ reliés entre eux par la quantité complexe i (formellement caractérisée par la propriété i*i= i^2 =-1), d'où la notation synthétique que l'on doit à Euler (fin XVIII°) : z=x+i.y

Notons qu'à partir de maintenant on appellera *complexes* aussi bien des quantités purement complexes telles i ou i.y que des quantités mixtes telles z=x+i.y

En langage plus strict, on parlerait d'imaginaires pour i.y et de complexes pour x+i.y

Cette notation purement formelle permet de tenir qu'une équation algébrique (polynomiale) de degré n aura n racines complexes.

Par exemple l'équation $z^2-2z+3=0$ aura bien les deux solutions complexes $z=1\pm i\sqrt{3}$ lors même que la fonction réelle $y=x^2-2x+3$, n'intersectant pas l'axe des x, l'équation (sur les réels) $x^2-2x+3=0$ n'a pas de solutions dans les réels :

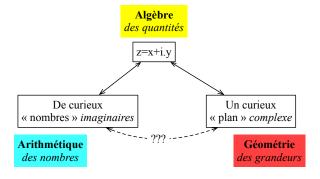


À partir de la notation eulérienne z=x+iy (fin XVIII°), la mathématique moderne va se scinder en deux :

- une interprétation <u>géométrique</u> élaborée par Gauss (début XIX°) qui conduit au <u>plan</u> complexe et qui va comprendre la *quantité* complexe comme <u>grandeur</u> géométrique ;
- une théorisation <u>algébrique</u> élaborée par Hamilton (milieu du XIX°) qui conduit au <u>corps</u> des complexes et qui tend à comprendre la *quantité* complexe <u>comme si</u> elle était un <u>nombre</u> arithmétique, un nombre alors *fictif* ou *imaginaire*.

Il nous faut examiner de quelle manière s'opère cette scission dialectique produisant deux objets de type nouveau : des « quantités » de type nouveau que sont les complexes (on va voir que ce type nouveau n'est pas exactement le type arithmétique des nombres) et un « plan » de type nouveau (on va voir que ce type nouveau n'est ni exactement le type géométrique du plan réel ordinaire \mathbb{R}^2 ni non plus celui géométrique du plan vectoriel ordinaire).

Tout l'intérêt des complexes tient à cet embrouillamini dialectique qui les spécifie et qui interdit de les rabattre sur les effectivités arithmétiques et géométriques ordinaires. Et comme dans toutes les mathématiques modernes, ce sera l'unité calculatrice et aveugle d'une même formalisation algébrique qui va venir formaliser cette unité dialectique de type nouveau :



Examinons donc:

- la structure algébrique de corps qu'ont les complexes ;
- la structure géométrique de plan qu'ont les complexes ;
- la dialectique formalisatrice entre les deux qui autorise de tenir que ce sont les mêmes complexes !

Nous allons procéder ainsi:

- a. structure algébrique de corps ;
- b. formalisation alternative des complexes par coordonnées polaires on parlera ici de géométrie algébrique ;
- c. compréhension géométrique de l'opération qui spécifie le type complexe comme type nouveau (de quantités et grandeurs) : la multiplication.

Notre parcours – typiquement « moderne » - cheminera ainsi de l'algèbre à la géométrie algébrique pour déboucher sur la géométrie.

I.a - Algèbre : le corps des complexes

Multiplication

Dans sa formulation algébrique, la multiplication complexe reste mystérieuse!

$$(x,y)*(x',y')=(xx'-yy', xy'+x'y) !?!?$$

Elle s'explicite certes facilement via la notation x+iy

$$(x+iy)*(x'+iy') = (xx'-yy') + i.(xy'+x'y)$$

mais le mystère ici n'a fait que se déplacer pour se concentrer dans le mystère de i et de son opération multiplicative i*i=-1!

Toujours est-il que ce formalisme dote bien les complexes d'une structure d'anneau.

Division

On peut tout de même dégager formellement une division complexe via la notion de complexes conjugués : si z=x+i.y, son conjugué est $\bar{z} = x - i.y$ en sorte que l'on a $z * \bar{z} = (x^2 + y^2) \ge 0$. On en tire facilement la définition de l'inverse de z, $\forall z \ne 0$ c'est-à-dire tel que $x^2 + y^2 \ne 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z * \bar{z}} = \frac{x - i.y}{x^2 + y^2}$$

Corps algébrique

Avec ces deux opérations, l'ensemble des quantités complexes est doté d'une structure algébrique de corps.

Cette structure est très importante car elle assure une complétude algébrique de l'ensemble des complexes : on peut additionner et soustraire, multiplier et diviser les complexes, ces opérations sont compatibles entre elles et assurent qu'on reste bien dans l'ensemble en question. Ainsi <u>les quantités complexes font corps !</u>

On verra à la prochaine leçon que la multiplication complexe devient décisive pour la \mathbb{C} intégration : f(z).dz et que la division complexe intervient formellement (algébriquement) pour la \mathbb{C} -différenciation : df(z)/dz.

$\mathbb{C}\neq [\mathbb{R},+,x]^2$

Pour prendre mesure du gain, comparons cela aux quantités purement réelles formellement définies par la même paire ordonnée {x, y} dans le plan réel.

Multiplication « réelle »

Munissons \mathbb{R}^2 d'une multiplication notée « x », de même forme que l'addition :

$$(a, a')+(b, b')=(a+b, a'+b')$$
 avec $(0, 0)$ pour élément neutre

soit:

$$(a, a')x(b, b')=(a.b, a'.b')$$
 avec $(1, 1)$ pour élément neutre

On voit la différence avec la multiplication complexe car, pour cette multiplication réelle, on a :

$$(0, 1)x(0, 1)=(0, 1)$$

et non plus, comme pour la multiplication complexe :

$$\{0, 1\} * \{0, 1\} = \{-1, 0\}$$

Ainsi, privée de l'opération multiplicative complexe, la paire de nombres (x, y) n'est plus intriquée mais seulement juxtaposée.

On obtient ce faisant une multiplication commutative, avec élément neutre, qui est associative et bien distributive par rapport à l'addition 25 . Donc $(\mathbb{R},+,x)^2$ est bien **un anneau commutatif**.

Peut-on à partir de là doter cet anneau d'une division en sorte de le constituer en corps ?

Ce point est important car il va exhausser, par l'exemple négatif du plan réel, l'importance de l'intrication, propre à la dynamique complexe, entre nos deux axes (ici nos deux nombres x et y).

Pensée « complexe »

Ce point, purement mathématique, est d'une considérable importance intellectuelle car il indique que, dans l'interprétation intellectuelle que nous allons avancer (axe Ox = celui des effectivités / axe Oy = celui des possibilités), effectivités et possibilités d'une même situation interagissent et ne sont pas indifféremment juxtaposées l'une à l'autre.

Nous verrons tout à l'heure en quoi ceci donne droit à l'idée même d'intervention dans cette situation pour transformer les effectivités en opérant sur les possibilités : multiplier une pure possibilité i.y par (-i) (c'est-à-dire, comme on va y revenir, faire tourner le plan complexe de la situation de -90°) reviendra à la rendre effective : i.y*(-i)=y!

S'il y a sens donc à prôner une « pensée complexe », c'est donc bien en ce sens : penser la complexité d'une situation, c'est la concevoir comme intriquant effectivités (« faits ») et possibilités sur le mode mathématique des grandeurs complexes.

$[\mathbb{R},+,x]^2$ n'est pas un corps

L'anneau $(\mathbb{R},+,x)^2$ n'est pas un corps car

- on a par exemple: (1, 0)x(0, 1)=(0, 0) et il y a donc des diviseurs de (0, 0);
- l'élément non nul (1, 0) n'a pas d'inverse car l'équation (a, b)x(1, 0)=(1, 1) n'a pas de solution (a, b) puisque $\forall a$ et $b \in \mathbb{R}$, on $a : (a, b)x(1, 0)=(a, 0)\neq(1, 1)$!

Rappelons que ce qui distingue le corps de l'anneau, c'est la division, laquelle n'existe pas ici pour tout élément de \mathbb{R}^2 .

Nous verrons la fois prochaine que la division va être ce qui discrimine le plus clairement la dynamique du plan complexe $\mathbb C$ de celle du plan réel $\mathbb R^2$ puisque la différenciation va les discriminer plus clairement que l'intégration.

Rappelons également que, si (1/a, 1/b) est bien ici l'inverse de (a, b) quand a et $b\neq 0$ car (1/a, 1/b)x(a, b)=(1, 1), il faut, pour avoir un corps, qu'existe un inverse <u>pour tout élément (a, b) différent de l'élément neutre de l'addition</u> lequel est (0, 0); il faudrait donc que (a, 0) ou $(0, b) \neq (0, 0)$ aient aussi des inverses, ce qui, comme on l'a vu, n'est pas possible car $\forall a$ ' et b' $\in \mathbb{R}$ on a :

- $(a, 0)x(a', b') = (a.a', 0) \neq (1, 1)$
- $(0, b)x(a', b') = (0, b.b') \neq (1, 1) !$

Multiplication spécifique

La clef de voute de toute la construction des complexes est donc bien la multiplication complexe.

• Elle se distingue de celle dans \mathbb{R} .

Voir la fameuse « erreur » d'Euler (1770) posant « $\sqrt{-2}$. $\sqrt{-3} = \sqrt{6}$ »!

L'erreur vient du fait que la multiplication « * » des complexes (et donc des imaginaires purs) n'est pas la même que la multiplication « . » des réels !

Il faut calculer
$$\sqrt{-2} * \sqrt{-3}$$
 et non pas $\sqrt{-2}$. $\sqrt{-3}$

Ainsi
$$\sqrt{-2} = \sqrt{(-1) \cdot 2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{2} = i\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{-2} * \sqrt{-3} = i^2 \sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

• Elle se distingue de la multiplication dans \mathbb{R}^2 et de la multiplication vectorielle. On a en fait trois opérations :

²⁵ (a,a')x[(b,b')+(c,c')]=(ab+ac, a'b'+a'c')

- o un produit *vectoriel*, mais dans \mathbb{R}^3 et un produit *scalaire* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mais dans \mathbb{R} car il engendre un réel ;
- o une multiplication dans \mathbb{R}^2 ;
- o une multiplication complexe.

La multiplication complexe *intrique* (cf. *adjonction>ajout*) les deux directions orthogonalement opposées et non pas les juxtapose (comme dans le produit cartésien $\mathbb{R}.\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$).

• C'est la spécificité de la multiplication complexe qui autorise l'existence d'une division et donc la constitution de $\mathbb C$ en corps.

Pour autant, le corps des complexes n'est pas un corps de nombres.

Point essentiel : un nombre n'est pas seulement ce qu'on peut additionner-soustraire et multiplierdiviser mais aussi ce que l'on peut comparer (plus grand/petit) par une relation d'ordre.

Autrement dit, les nombres ne sont pas seulement <u>calculables</u> mais ils doivent également être <u>or</u>donnables.

Sur tout ceci, voir l'excellent Le Nombre et les nombres d'Alain Badiou.

Or, les quantités complexes ne peuvent être bien ordonnées : ce ne sont donc pas des nombres si l'on adopte comme caractérisation des nombres que ce sont des extensions par étapes des entiers, des rationnels et des réels telles que l'on puisse toujours comparer deux éléments des différents ensembles et dire par exemple :

$$2 < \frac{7}{3} < \sqrt{5} < \pi$$

entier | rationnel | algébrique | transcendant

Or on ne peut totalement ordonner les quantités complexes selon un ordre qui serait compatible avec leur structure de corps et qui assurerait donc que si z et z' sont >0, on ait bien z*z'>0 c'est-à-dire qui assurerait la compatibilité de la structure de corps avec la multiplication numérique.

Prenons par exemple cet ordre : $\{x, y\} < \{x', y'\}$ si x < x' ou si x = x' avec y < y'; $\{x, y\} = \{x', y'\}$ si x = x' et y = y'.

Cet ordre est bien total et respecte les lois de la relation d'ordre :

- réflexive : $\{x, y\} \le \{x, y\}$
- antisymétrique : $\{x, y\} \le \{x', y'\}$ et $\{x', y'\} \le \{x, y\} \implies \{x, y\} = \{x', y'\}$
- transitive: $\{x, y\} \le \{x', y'\}$ et $\{x', y'\} \le \{x'', y''\} \implies \{x', y'\} \le \{x'', y''\}$

Le point est alors que cet ordre entraı̂ne $i=\{0, 1\} > \{0, 0\}$ mais que $\{0, 1\} * \{0, 1\} = \{-1, 0\} < \{0, 0\}$!

Démonstration générale par l'absurde

S'il y avait un ordre total, on pourrait comparer i et 0.

i étant différent de 0, il devrait alors être soit <0, soit >0.

Mais dans les deux cas, i^2 et $(-i)^2$ devraient alors être >0 pour que l'ordre soit compatible avec la multiplication numérique. Or i^2 comme $(-i)^2$, valant -1, sont au contraire <0!

I.b - Géométrie algébrisée : les coordonnées polaires

Pour mettre au jour ce dont la multiplication complexe, algébriquement formulée, est l'interprétation, il est préférable d'examiner le passage des coordonnées cartésiennes $\{x, y\}$ qui sont jusqu'à présent les nôtres aux coordonnées dites polaires $\{\text{module, argument}\} = \{\rho, \theta\}$.

Cela va nous permettre de mettre en évidence la multiplication complexe comme *amplification* (produit des modules) et *rotation* (somme des arguments) c'est-à-dire comme « amplirotation » et, surtout, de comprendre ce qu'une telle multiplication complexe veut dire.

Ces coordonnées polaires reposent sur une représentation vectorielle de la quantité complexe là où les coordonnées cartésiennes reposent sur une représentation ponctuelle :

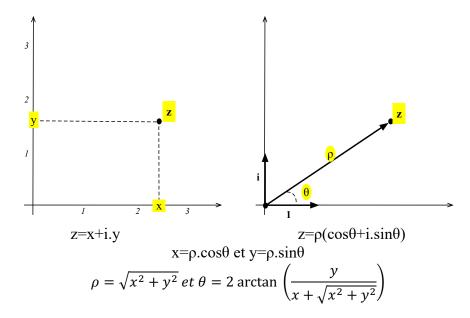
| coordonnées cartésiennes | {x, y} | point | du plan réel |
|--------------------------|--|---------|-------------------|
| coordonnes polaires | $\{\text{module, argument}\}=\{\rho, \theta\}$ | vecteur | du plan vectoriel |

Le module |z| de la quantité complexe z désigne sa taille ; son argument arg(z) désigne l'angle qu'il

forme avec l'axe horizontal des réels.

L'<u>argument</u> θ de la quantité complexe z se mesure en radians :

 θ = longueur de l'arc de cercle / rayon du cercle (\Rightarrow 0 à 2n π).

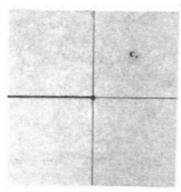


Euler a proposé cette notation compacte $z=\rho(\cos\theta+i.\sin\theta)=\rho.e^{i\theta}$ Elle est très commode pour formuler la multiplication complexe : $z*z'=\rho\rho'.e^{i(\theta+\theta')}$

Attention au point délicat suivant :

- $z \rightarrow |z|$ est une fonction $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ car le module est unique ;
- mais z→arg(z) n'est pas unique (θ±n.2π) et ne constitue donc pas une fonction.
 On pose donc Arg(z) ∈]-π, π]

Noter que $-\pi$ n'appartient pas à l'intervalle pour ne pas compter deux fois -1 : comme $e^{i\pi}$ et comme $e^{i\pi}$!



La fonction Arg ainsi définie n'est donc pas continue sur la partie ≤ 0 de l'axe réel! Il faut donc ôter cette partie \Longrightarrow le plan « coupé » $\mathbb{C}_{\pi} = \mathbb{C} \setminus \{y=0, x\leq 0\}$

Au total, le fait que l'argument θ n'est pas unique va avoir un coup important : « la non-unicité de θ est un phénomène qui a de terribles ramifications dans la théorie. » (Stewart, 20). Nous examinerons cela en détail la prochaine leçon.

Cette représentation vectorielle par coordonnées polaires va nous permettre d'éclairer le sens géométrique latent de la multiplication des complexes.

I.c - Géométrie : l'intrication dynamique au principe du plan complexe

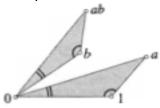
De quelle opération géométrique l'opération algébrique de multiplication est-elle le nom ?

Je propose de l'intelliger en deux temps :

- comme *amplirotation*;
- comme transfert de coordonnées dans un nouveau référentiel.

« Amplirotation »

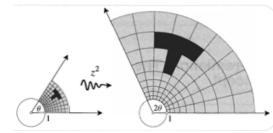
Needham 26 , parle de « amplitwist » \Rightarrow amplirotation :



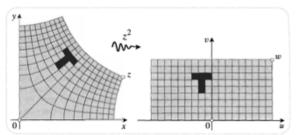
Ceci est clair en coordonnées polaires :

$$\begin{array}{c} \rho e^{i\theta}.\rho' e^{i\theta'} \!\!=\!\! \rho.\rho' e^{i(\theta+\theta')} \\ \Longrightarrow \rho.\rho' \!\!=\!\! \text{amplification et } \theta \!\!+\!\! \theta' = \!\!\! \text{rotation.} \\ z \!\!\!=\!\! \textit{amplification.} e^{i.\textit{rotation}} \end{array}$$

Exemple pour la fonction : $z \rightarrow z^2$



transformation de cercles et rayons en cercles et rayons



transformation de deux hyperboles (x²-y²=c^{te} et 2xy=c^{te}) en droites parallèles aux axes

Cf.
$$z^2=(x^2-y^2)+i.2xy \Rightarrow$$

- si z varie en assurant que x²-y²=c¹e, alors z² varie seulement selon sa partie « imaginaire » i.2xy c'est-à-dire sur une droite verticale ;
- si z varie en assurant que 2xy=c^{te}, alors z² varie selon sa partie « réelle » (x²-y²) c'est-à-dire sur une droite horizontale.

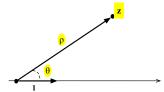
Transfert

Cette amplirotation peut être comprise comme transfert direct des coordonnées polaires dans un nouveau référentiel. Je m'explique.

Poser que

$$z=\{module, argument\}=\{\rho, \theta\}=\rho(cos\theta+i.sin\theta)=\rho.e^{i\theta}$$

c'est « mesurer » le vecteur \vec{z} au seul vecteur unitaire $\vec{1}$ de l'axe horizontal :



Notons ainsi le fait que le vecteur \vec{z} est coordonné par le vecteur unitaire $\vec{1}$ selon $\{\rho, \theta\}$:

²⁶ p. 190

$$\vec{z}_{\vec{1}} = \{\rho, \theta\}$$

Multiplier z par z' (z*z') revient alors à construire un vecteur $\overrightarrow{z*z'}$ ayant les mêmes coordonnées $\{\rho, \theta\}$ par rapport à \vec{z}' que celles de \vec{z} par rapport à $\vec{1}$:

$$\overrightarrow{z*z'}_{\overrightarrow{z'}} = \{\rho,\theta\}$$

Multiplier, c'est donc garder les mêmes coordonnées $\{\rho, \theta\}$ par rapport à un vecteur unitaire ainsi modifié $\vec{1} \rightarrow \vec{z'}$.

Multiplier est donc une sorte de changement d'échelle par modification de l'unité de mesure (un peu comme si l'on transférait en physique des mesures dans un nouveau référentiel, à la fois agrandi et pivoté).

Retenons donc les principes suivants :

Multiplier z par z' consiste à trouver $\overrightarrow{z*z'}$ tel que, mis à l'échelle du nouveau vecteur unitaire \vec{z} , il équivaille à \vec{z} :

$$\vec{z} \equiv \overrightarrow{z} * \overrightarrow{z}'_{\vec{z}}$$

 $\vec{z} \equiv \overrightarrow{z*z'}_{\vec{z'}}$ Corrélativement, diviser z par z' consiste à trouver $\overrightarrow{z/z'}$ tel que $\overrightarrow{z'}$ équivaille à \vec{z} mis à l'échelle du nouveau vecteur unitaire $\overrightarrow{z/z'}$:

$$\overrightarrow{z'} \equiv \overrightarrow{z}_{\overline{z/z'}}$$

On voit la parenté de ces formulations avec celles de l'arithmétique ordinaire :

$$z = \frac{z \cdot z'}{z'} et z' = \frac{z}{\frac{z}{z'}}$$

Formalisation algébrique et interprétation géométrique

Les complexes sont introduits comme complétion de corps (un polynôme d'ordre n a n racines) par un formalisme algébrique qui, pendant 300 ans, a posé des problèmes d'interprétation mathématique : on ne vovait pas clairement ce que ce formalisme formalisait!

C'est l'interprétation géométrique (Gauss) qui va stabiliser le nouvel objet et dégager que les quantités complexes ne sont pas numériques mais de nature géométrique. D'où son choix de parler de grandeurs complexes.

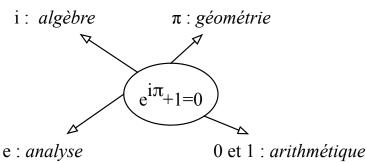
Nous examinerons la prochaine leçon les fonctions complexes $(\mathbb{C} \to \mathbb{C} \neq \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ et leur théorie (analyse complexe proprement dite).

Entrelacement des disciplines mathématiques

Il est d'ores et déjà remarquable que la théorie mathématique des grandeurs complexes entrelace :

- arithmétique (nombres)
- algèbre (équation polynomiale)
- géométrie (plan)
- topologie et analyse (continuité)
- trigonométrie (exponentielle)...

Voir à nouveau la formule d'Euler :



Les complexes constituent ainsi une sorte de <u>noyau ou de clef de voute de la mathématique moderne</u>.

Ils ouvrent la mathématique moderne que, peut-être, le programme de Langlands vise à boucler...

Ils apprennent à voir une chose sous différents angles, à mettre en œuvre le nœud symbolique (écriture à la lettre) d'une formalisation algébrico-analytique et d'une interprétation topologico-géométrique.

On peut interpréter intellectuellement le fait qu'une théorie formelle est la symbolisation d'un modèle existant via une interprétation-formalisation comme un nouage borroméen RSI où le modèle joue le rôle de R, la théorie formelle celui de S et l'interprétation-formalisation celui de I.

II. INTERPRÉTATION (INTELLECTUELLE)

Examinons maintenant la portée intellectuelle extra-mathématique de cette adjonction-extension $\mathbb{C}=\mathbb{R}[i]$ et de la dynamisation interne du plan complexe qu'elle configure.

Pour interpréter intellectuellement (c'est-à-dire extra-mathématiquement et non plus seulement géométriquement) ces quantités de type nouveau, il nous faut interpréter successivement :

- 1) la quantité dite *imaginaire* « i » et la multiplication complexe « * » telles que i*i=-1;
- 2) la grandeur complexe z=x+iy et donc le sens, qui ne va nullement de soi, de cette addition entre quantités numériques (x) et *imaginaires* (iy) ;
- 3) le plan complexe C, dynamiquement constitué par amplirotations.

Préliminaires

Éviter RSI

Pour interpréter ce formalisme mathématique, empiriquement opaque, il nous faut d'abord nous méfier d'une interprétation que les noms mathématiquement employés suggèreraient : il en irait, dans l'intrication entre « réels » et « imaginaires », du nouage borroméen RSI mis au jour par Lacan.

Je ne pense pas que « l'imaginaire mathématique i » ait grand-chose à voir avec « l'Imaginaire lacanien I » et, moins encore, le réel des nombres avec le Réel R de Lacan... Écartons donc cette voie interprétative, tissée de faux-amis.

J'ai rappelé précédemment qu'à mon sens, le nouage borroméen RSI renverrait plutôt au nouage *modèle-formalisme-interprétation*.

Opération constituante/constituée

S'orienter dans une interprétation intellectuelle de **i*i=-1** implique d'interpréter du même geste la *quantité* de type nouveau « i » et l'*opération* de type nouveau « * » : l'équation constituante des quantités complexes doit en effet se lire plutôt dans ce sens :

$$-1=i*i$$

c'est-à-dire que (-1) peut se diviser – se scinder en deux - selon une loi multiplicative interne, ce qui se notera alors ainsi :

$$\sqrt{-1} = i$$

C'est donc l'opération « * » qui constitue la quantité « i », ce que la malheureuse notation $\sqrt{-1} = i$ va tendre plutôt à effacer.

Autant dire : c'est la multiplication complexe qui constitue la quantité complexe, non l'inverse.

Opérateurs?

Ceci explique peut-être la thèse d'Alain Badiou dans *Le Nombre et les nombres* selon quoi les complexes sont des opérateurs, opérateurs de nouage entre algèbre et géométrie par opérations sur les nombres (réels).

À mon sens, l'inconvénient majeur de cette interprétation est qu'elle évacue la question des complexes comme quantités ou grandeurs de type nouveau et qu'elle court-circuite donc ainsi le point qui m'importe au plus haut point : comment l'opérateur complexe « * » scinde la quantité réelle (-1) en deux quantités identiques « i » telle que i*i=-1, ce qui est aussi bien dire que cet opérateur divise (-1) en deux composantes identiques :

$$\frac{-1}{i} = i$$

Il nous faut donc interpréter d'un bloc l'équation constituante des grandeurs complexes -1=i*i en saisissant dès l'abord l'unité dialectique entre *opération* « * » et *grandeur* « i ».

Pour cela, il nous faut interpréter « l'imaginaire i » comme autoconstitué par l'opération (de multiplication) qui lui est propre.

Je propose, pour ce faire, de l'interpréter comme « possible » ou mieux comme « possibilité » s'il est vrai que l'affirmation d'une possibilité dans une situation donnée saisit indissociablement une

opération (de discernement) et une réalité de type nouveau (un possible non présenté et pourtant activable *hic et nunc*) : en effet, une possibilité n'est pas présentée en situation comme le sont les effectivités.

L'exemple des positions du jeu d'échecs

Prenons ici pour paradigme élémentaire les positions d'un jeu d'échecs.

En voici par exemple trois : une position (paradoxale) de début de partie, une de milieu et une de fin.



Il serait absurde d'examiner chacune de ces positions de manière purement statique : en se contentant de décompter les pièces et leur emplacement.

Il va de soi que l'intelligence de chaque position implique tout au contraire :

- 1) de comprendre comment on en est venu là (c'est le problème spécifique que pose la première position) ²⁷;
- 2) et surtout d'examiner ce que les Blancs peuvent jouer et plus encore doivent jouer (c'est le problème spécifique que pose la troisième position : les Blancs font mat en deux coups ²⁸).

D'où qu'il faille bien sûr lire dynamiquement ce genre de positions, en formalisant par exemple les opérations possibles et judicieuses – ici par exemple le fameux « coup du berger » :



On voit donc, sur ce petit exemple, que l'examen d'une situation implique une double prise en compte intriquée :

- celle des places et forces effectives ;
- celle des possibilités dynamiques (tactiques et stratégiques) : ici les changements de places entrainant un changement des forces respectives.

Ceci, bien sûr, présuppose qu'on examine dans notre cas une situation de jeu c'est-à-dire une situation où, par construction, il s'agit d'intervenir et non pas une situation qu'il serait loisible de con-

²⁷ La réponse pourra ici être la suivante : 1. C b1-c3 ; d7-d6 ; 2. C c3-b1 ; d6-d5

²⁸ La réponse est la suivante : 1. C b3-c1 ; R b2-b1 ; 2. F b'-c3 : mat !

templer comme on peut le faire par exemple pour ce tableau de Caravage :



D'où l'orientation d'interprétation que je vous propose :

- interpréter les *réels* comme les effectivités d'une situation donnée : ce qu'il y a d'effectif, ou encore les faits de la situation ;
- interpréter les *imaginaires* comme les possibles d'une situation donnée : en ce point, ce sont les subjectivités qui se prononcent sur l'existence ;
- interpréter les *complexes* (= réels + imaginaires) comme les possibilités associées à un projet d'intervention en situation (mettant en jeu simultanément effectivités et possibilités) : associer un fait à un possible configure une possibilité de transformer la situation ;
- interpréter l'opération « racine carrée de -1 » comme une semi-négation qui scinde l'inversion par (-1) en deux étapes cumulatives ;
- interpréter l'opération « multiplication complexe * » comme amplirotation du plan qui, lorsqu'elle a lieu de préférence dans le sens des aiguilles d'une montre (multiplication par -1), transforme les potentialités en possibilités, les possibilités en effectivités, les effectivités en nonpossibilités, et les non-possibilités en potentialités : on nommera *effectuation* une telle multiplication par (-1) (ou rotation de 90° dans le sens inverse du sens trigonométrique).

Lénine, avril 1917

Pour illustrer la distinction ainsi avancée des possibilités et des potentialités, reprenons pour modèle la Russie d'après la révolution de février 1917.

Lénine déclare en avril 1917 ²⁹ que la révolution bolchevique est à l'ordre du jour, non pas encore comme possibilité immédiate mais pour le moment comme potentialité. Bien sûr, il ne s'agit pas là pour lui d'un simple constat mais de la caractérisation des tâches révolutionnaires en situation.

Il en conclut donc que la tâche du parti bolchevik est désormais de travailler à réunir les conditions de possibilité pour une telle révolution bolchevique ³⁰.

Fin septembre par contre, Lénine déclarera que désormais, grâce à l'évolution de la situation et au travail du parti bolchevik, la révolution est maintenant possible et que le parti bolchevik doit immédiatement se consacrer à effectuer l'insurrection qui s'impose.

Le possible n'est pas le virtuel pas plus que l'effectif n'est l'actuel.

Reprécisons bien ici que notre polarité effectif/possible n'est pas celle de l'actuel et du virtuel : en effet, une possibilité en situation est parfaitement actuelle (la possibilité de faire la révolution bolchevique était parfaitement actuelle début octobre 17 et tout le combat de Lénine au sein de son propre parti était précisément d'en convaincre ses camarades).

Ce point est important : le plan complexe qu'on va dessiner sur l'orthogonalité effectif $\perp possible$ sera le plan d'une situation actuelle mais comprise de manière étendue.

²⁹ Ce sont ses fameuses *Thèses d'avril*

³⁰ Ralliement d'un grand nombre d'ouvriers à la problématique des Soviets, transformation de la conscience révolutionnaire chez les paysans, etc.

L'enjeu de cette interprétation est précisément de tenir qu'une situation donnée comporte en son sein ses propres possibilités, qu'il y a donc des possibilités actuelles comme il y a des effectivités actuelles!

« Il n'y a pas que ce qu'il y a!»

C'est en ce sens que toute cette interprétation intellectuelle peut se déployer sous le slogan intellectuel : « il n'y a pas que ce qu'il y a » car une situation donnée ne se réduit pas aux effectivités qu'il y a manifestement aux yeux de tous mais inclut les possibilités actuelles qu'il y a également dans cette situation même si leur mise au jour implique cette fois l'intervention d'une pensée non empirique — l'image des positions du jeu d'échec illustre la différence entre une comptabilité purement factuelle de l'état des pièces et une intelligence prospective des possibilités c'est-à-dire d'intervention dans cette situation effective.

Reprenons pas à pas notre interprétation :

- 1) de la quantité dite *imaginaire* « i » et de la multiplication complexe « * » telles que **i*i=-1**;
- 2) de la grandeur complexe z=x+iy et donc le sens de l'addition « + » entre quantités numériques (x) et *imaginaires* (iy) ;
- 3) du plan complexe C, dynamiquement constitué par amplirotations.

II.a: -1=i*i

La semi-négation

Ce que j'appelle ici « semi-négation » désigne $\sqrt{négation}$ ou *négation* $\frac{1}{2}$.

Ce n'est donc pas ce que la linguistique française appelle « semi-négation » et qui désigne l'utilisation du seul « ne » dans la négation complète « ne pas » (d'où, par exemple, le « ne » explétif et des expressions comme « *je ne sais* ... » ou « *j'aime pas !* »).

La semi-négation au sens *linguistique* désigne donc $\frac{négation}{2}$ plutôt que $\sqrt{négation}$ comme le désigne par contre ma semi-négation.

Le paradigme interprétatif ici proposé est celui du possible par rapport à l'effectif [+1] : le possible [+i] est effectuable (à ce titre, c'est un *semi-ineffectif*) ; par contre le possible du possible, appelé potentiel [-1], est clairement *ineffectif* (il faut réunir des conditions de possibilité pour qu'il devienne effectivement possible, c'est-à-dire effectuable). Reste alors le quatrième pôle [-i] qui sera celui du non-possible ³¹.

On propose donc <u>le possible</u> (axe de **i** : du non-possible au possible) à <u>l'effectif</u> (axe de **1** : de l'ineffectif à l'effectif), non pas comme sa négation mais comme sa « semi-négation » :

$$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$$
possibilité = $\sqrt{ineffectivité}$

Selon cette interprétation, le possible n'est donc pas la pure négation de l'effectif (le possible n'est pas un pur et simple ineffectif) sans être pour autant effectif. Il est à cheval sur l'opposition effectif-ineffectif, à mi-chemin. Il est une « semi-négation ».

« Il n'y a pas que...»

Notons que, dans notre slogan « Il n'y a pas que ce qu'il y a », le travail du négatif est encore un peu différent :

- Soit l'énoncé : « dans une situation donnée, il n'y a que les faits (ou les effectivités) qui comptent » ; la négation (« ne... que... ») y est dite *exceptive* ³² c'est-à-dire qu'elle procède à une exception : « rien n'existe si ce ne sont les faits ».

³¹ qui n'est pas exactement l'impossible, c'est-à-dire le réel de la situation...

³² Marc Wilmet: Grammaire critique du français (de boeck – duculot; 2010; p. 602...)

- Soit maintenant la négation dite confirmative (« ne... pas ») de cette négation exceptive : « il n'y a pas que les faits ». On a affaire ici à ce type de double négation que j'appellerai *négation doublée* car les deux négations qui s'y multiplient ne sont pas de même type.
- La négation doublée « il n'y a pas que ce qu'il y a » vaudra alors affirmation de « il y a aussi, en sus des faits, les possibles! »

<u>Négation</u>

Dans notre plan complexe, la négation complète se fera par multiplication de notre semi-négation ou *négation* $^{1/2}$: tout de même que

$$\sqrt{-1} * \sqrt{-1} = i * i = -1$$

on posera:

$$\sqrt{n\acute{e}gation} * \sqrt{n\acute{e}gation} = n\acute{e}gation$$
 $possibilit\acute{e}*possibilit\acute{e}=possibilit\acute{e}=potentialit\acute{e}$
 $\implies potentialit\acute{e}=ineffectivit\acute{e}$

ce qui ne sera pas dire *impossibilité*: en effet, on peut logiquement distinguer non-possibilité et impossibilité: l'impossible (lacanien = le réel) est à <u>forcer</u> quand le non-possible est à <u>rendre possible</u> par travail des potentialités c'est-à-dire par <u>travail sur les conditions</u> de possibilité.

La multiplication

On a vu qu'on pouvait interpréter multiplication et division via une transformation de vecteur unitaire mesurant longueurs (modules) et angles (arguments).

Mais, plus encore que la multiplication, la division (au principe de la différenciation) va intéresser notre interprétation car <u>effectuer un possible</u>, c'est le diviser par i ce qui revient à le multiplier par -i et donc à le faire tourner, <u>dans le sens contraire du sens trigonométrique</u>, de $-\pi/2$.

Intuitivement, multiplier un effectif (un « réel ») par i, c'est le transformer en « imaginaire », en « possible ».

À l'inverse, effectuer, c'est transformer du possible en de l'effectif. Il s'agit donc alors de faire l'inverse, c'est-à-dire de transformer un « imaginaire » en un « réel » et donc bien de le diviser par i (c'est-à-dire de le multiplier par -i).

L'opération de multiplication reste la base mais ce qui dirige l'intervention, c'est la division.

Ainsi, dans notre interprétation, on a une dissymétrie entre multiplication (base) et division (facteur dirigeant), tout de même – on le verra à notre prochaine leçon – qu'on va avoir une dissymétrie entre différenciation (première et basée sur la pure division $\partial f/\partial z$) et intégration (seconde et mobilisant l'addition de multiplications $\int f.dz$).

On a donc:

$$effectuer \equiv \frac{possible}{i} \equiv possible_i$$

Effectuer une possibilité, c'est l'évaluer dans une base tournée de 90°.

C'est la mesurer à l'aune de i.

Cinq cas dans l'élévation d'une notion au carré

Notons, cette fois dans la pensée langagière, l'existence de différents cas d'« auto-multiplication » d'une notion, de son élévation au carré :

- 1. la possibilité de la possibilité est une potentialité, donc une ineffectivité : Y*Y=~X!
- 2. la confiance dans la confiance est la croyance : Y*Y=X [cf. Théorie du sujet d'AB];
- 3. la peur de la peur est l'essence de la peur : Y*Y=Y;
- 4. *l'amour de l'amour n'est pas l'amour* : Y*Y=~Y [contre St Augustin] ;
- 5. il n'y a pas d'Autre de l'Autre, de vérité de la vérité... : ∃Y mais ∄ Y*Y [cf. Lacan...].

II.b: z=x+iy ou les quantités de type nouveau

La quantité complexe est de type nouveau, lors même que son formalisme ordinaire z=x+iy tend, tout au contraire, à la fusionner aux quantités numériques.

À nouveau, le formalisme algébrique compactifie en oubliant, si ce n'est en forclosant...

Remarquons qu'ici le signe «+» est trompeur car cette « addition » de parties réelle/imaginaire

n'est pas du même type que l'addition de réels x+x' !: ce n'est pas une addition arithmétique de nombres !

On avait déjà le même type de problème avec l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$: $p+q\sqrt{2}$ car le (+) n'opère plus ici dans les rationnels et on a donc à faire à deux types d'additions différentes avec $p+p'+\sqrt{2}(q+q')$: une addition entre rationnels et une addition entre rationnels et irrationnels.

Mais $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ étant un corps ordonnable de nombres comme \mathbb{Q} , il n'y avait pas ici d'ambiguïté gênante.

Cela diffère qualitativement pour les complexes car si $p+q\sqrt{2}$ et $p'+q'\sqrt{2}$ étaient comparables (\leq ou >), ce n'est plus le cas pour x+iy et x'+iy' puisque le corps $\mathbb C$ n'est pas bien ordonnable (selon un ordre compatible avec sa structure de corps).

En toute rigueur, il faudrait donc utiliser un nouveau signe d'addition (adoptons +) comme nous avons proposé d'utiliser « * » comme signe de la nouvelle multiplication complexe pour la différencier de la multiplication arithmétique des nombres.

On notera alors:

$$z=x + i.y$$
 avec $i*i=-1$.

L'important est de comprendre que les deux composantes (« réelle » et « imaginaire ») d'une grandeur complexe ne s'additionnent pas à proprement parler (c'est-à-dire au sens arithmétique du terme « addition ») ni se somment statiquement (au sens catégoriel du terme « somme ») mais s'intriquent dynamiquement.

Comme on le verra lorsqu'on examinera la théorie des tenseurs, la figure moderne du produit tensoriel \otimes promeut l'intrication des dimensions que l'analyse tend à séparer et à mettre à plat (ici à mettre « en plan »).

Du point de notre interprétation intellectuelle, un complexe sera la formalisation d'une possibilité qui associe un fait à un possible, la formalisation donc d'une matière pour une tâche ou pour une intervention envisageables.

Logique de l'effectuable...

Mon interprétation privilégie donc, dans l'activité subjective, la notion d'<u>effectuabilité</u>: un complexe pointe un effectuable (que l'on entendra aussi bien comme possibilité d'effectuation que comme effectuation d'une possibilité: l'intrication des deux dimensions – ici leur « + » - est commutative) c'est-à-dire, concrètement, comme désignant un projet, une tâche à accomplir.

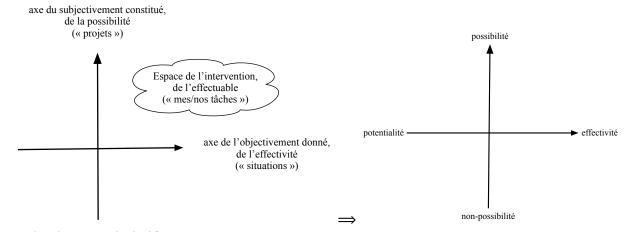
De ce point de vue, le vieil intitulé classique « La situation actuelle et nos tâches » est un raccourci qui oblitère l'existence déterminante d'un troisième terme, en vérité le premier dans l'ordre subjectif : l'existence d'une orientation subjective fondamentale (celle des militants politiques concernés par cet intitulé) qui va être celle qui retient « une situation actuelle » et qui indique le nous à l'origine de l'énonciation de ces tâches.

II.c : Le plan amplirotatif $\mathbb C$

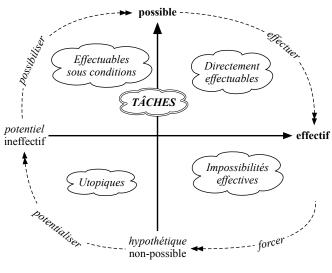
<u>Interprétation</u>

Posons pour cela que l'axe des réels est l'axe des effectivités et l'axe des imaginaires l'axe des possibilités.

Posons ici qu'il y a l'axe horizontal de la situation, du <u>objectivement donné</u>, et qu'il y a l'axe vertical du projet général, du <u>subjectivement constitué</u>.



D'où le plan récapitulatif :



SUITE: L'ANALYSE COMPLEXE

Nous examinerons la prochaine fois (6 février 2022) les fonctions complexes et le calcul différentiel et intégral que l'analyse peut établir sur ces fonctions complexes.

Nous apprendrons ainsi à réfléchir sur la différence capitale entre décrire une situation et y intervenir pour la transformer.

Nous y apprendrons en particulier le ressort éminemment moderne de l'action restreinte conçue moins comme autolimitation (par rapport à une action globale inatteignable) que comme ambition, rationnellement confirmable, d'étendre la simple action locale.

« Complexe »?

Nous continuerons ainsi de vérifier que le complexe, loin d'être une complication interdisant la visée universelle, est la voie simplificatrice pour l'ambitionner rationnellement via des objectifs régionaux.

Ainsi, si *complexe* s'oppose nettement à *compliqué*, on peut même dire que les complexes vont démontrer exemplairement ce point : <u>le complexe est moins compliqué et finalement plus simple que</u> l'élémentaire.

La loi générale est alors celle-ci : <u>la complexification des objets simplifie les opérations</u> (cf. globalement ³³, l'analyse complexe s'avèrera plus simple que l'analyse réelle).

C'est même pour cela qu'on introduit algébriquement les complexes : pour que tout polynôme d'ordre n ait toujours n racines, ce qui simplifie considérablement les opérations algébriques sur ce nouveau corps algébriquement complet !

<u>Théorème</u>: le complexe est moins compliqué que l'élémentaire.

<u>Lemme</u>: la complexification des objets simplifie les opérations.

<u>Corollaire</u>: une conception de la situation comme complexe simplifie l'intervention dans cette situation.

Toutes ces leçons sont utilement opposables aux tenants d'une idéologie de la « pensée complexe » (Edgar Morin en tête) qui, en compliquant, déconstruisent, *nolens volens*, toute possibilité d'orientation universelle pour se rabattre sur les ressources empiriques d'un pragmatisme utilitaire du cas par cas...

³³ même s'il restera, comme toujours, un prix à payer pour ce faire : l'analyse complexe perdra une simplicité de l'analyse réelle puisque, si toute fonction réelle continue a une primitive, ce ne sera plus le cas pour toute fonction complexe.

PETITE DOCUMENTATION

(pour une documentation détaillée et commentée, voir le polycopié mamuphi)

Livres

Analyses

Analyse réelle et complexe

Jean Mawhin: Analyse. Fondements, techniques, évolution (De Boeck Université, 1992)

Analyse complexe

Ian Stewart & David Tall: Complex Analysis (Cambridge University Press, 2° édition 2018)

Première édition (1983):

https://b-ok.cc/book/3559849/035bc4

Tristan Needham: Visual Complex Analysis (Clarenron Press – Oxford, 1997)

https://b-ok.cc/book/974187/196adc

Philosophie

Badiou : Le Nombre et les nombres (Seuil)

Pavel Florensky: Les imaginaires en géométrie (1902-1922; éd. française: Zones sensibles, 2016)

Histoire

Dominique Flament : Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie (Ed. CNRS, 2003)

Vidéos

Jean Mawhin : *Surprises et beautés en passant du réel au complexe* (Bruxelles le 14 mars 2014) https://www.youtube.com/watch?v=kquIrE46G1s

mamuphi

(exposés et polycopié de F. Nicolas)

Exposés

- Enquête mamuphi sur les complexes comme grandeurs structurant un espace dynamique de type nouveau $[\mathbb{C}\neq\mathbb{R}^2]$ (16 novembre 2019)
- De la puissance propre de l'action restreinte (25 janvier 2020)

Polycopié

Polycopié mamuphi (2019-2020) de 120 pages dont voici la table des matières :

PRÉSENTATION

Ouverture

Annonce

Plan

Introduction

Idée directrice

IAN STEWART

Préfaces

- 0 Les origines de l'analyse complexe
- 1 Algèbre du plan complexe
- 2 Topologie du plan complexe
- 3 Rappels sur les séries entières
- 4 Différenciation

- 5 Fonction exponentielle
- 6 Intégration
- 7 Logarithmes et indices d'enroulement
- 8 Théorème de Cauchy
- 9 Homotopie
- 10 Séries de Taylor
- 11 Séries de Laurent
- 12 Résidus
- 13 Transformations conformes
- 14 Prolongement analytique
- 15 Infinitésimaux
- 16 Homologie
- 17 Au-delà...

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

BILAN

APPORTS de cette enquête mamuphi

SUITES

L'ACTION RESTREINTE (janvier 2020)
