La théorie arithmétique des coupures par Dedekind (1858),
paradigme des révolutions modernes par adjonction-extension
(21 novembre 2021)

Introduction

Les coupures de Dedekind permettent de fonder l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Depuis les Grecs, un nombre est dit *rationnel* s'il est la division de deux nombres entiers.

L'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi construit contient l'ensemble de départ $\mathbb{Q}$ (tout nombre rationnel est également un nombre réel). On dira que $\mathbb{R}$ est une *extension arithmétique* de $\mathbb{Q}$.

> Il y a des nombres réels qui ne sont pas rationnels, et qui seront donc dits *irrationnels* : échappant à la conception grecque de la rationalité numérique (laquelle est fondée sur les nombres entiers), un nombre qui n'a pas de mesure entière et qui est ainsi incommensurable aux entiers sera dit *irrationnel*.

Il y a certes d'autres manières de fonder les nombres réels à partir des nombres rationnels, d'étendre donc $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$: par exemple celle, inventée préalablement, des suites de Cauchy. Mais nous privilégierons ici la méthode des coupures de Dedekind en raison de son immense portée intellectuelle, tant dans les mathématiques que dans de tout autres domaines de pensée.

Portée intellectuelle

Cette portée intellectuelle s'attache à une méthode générale qu'on dira celle de l'*adjonction-extension* [AE] :

- on ajoute d'abord à un ensemble de départ (ici $\mathbb{Q}$) un élément ou une opération construits de l'intérieur de cet ensemble ;
- on combine ensuite ce nouveau terme avec tous les éléments de l'ensemble de départ (c'est pour cette raison qu'on parle alors d'*adjonction* et pas simplement d'ajout) en sorte d'étendre l'ensemble de départ d'un cortège infini d'éléments de type nouveau ;
- on récapitule enfin les premiers éléments et ces éléments de type nouveau dans un nouvel ensemble (ici $\mathbb{R}$) dont la taille se trouve immensément étendue (d'où le nom d'*extension*) ;
- au total, toute l'opération est purement immanente : le nouveau terme est intrinsèquement construit (ce n'est pas une météorite) et les nouveaux éléments engendrés le sont de manière endogène (ce n'est pas une pluie fertilisante).

Une telle adjonction-extension [AE] révolutionne donc l'ensemble de départ en construisant, terme à terme, son immersion dans un domaine infiniment plus vaste.

À l'arrivée, le domaine de départ (ici $\mathbb{Q}$) est préservé comme tel mais il se trouve désormais restreint à une sorte de petite île survivant au sein d'un vaste océan (l'île de Pâques dans le Pacifique), circonscrit à une minuscule principauté, primitive voire archaïque (Monaco ou Andorre) au sein d'une immense empire moderne.

Trois manières de révolutionner un domaine de pensée

Cette manière [AE] de révolutionner un domaine constitue une invention de la modernité. Elle se distingue de deux autres plus anciennes :

- une manière *primitive* qui abandonne un domaine devenu saturé et stérile pour se déplacer vers un nouveau domaine fertile où prendre un nouvel élan ; on parlera dans ce cas de révolution par *abandon-déplacement* [AD] ;
- une manière *classique* qui détruit l'organisation ancienne saturant un domaine donné pour y reconstruire une organisation de type nouveau ; on parlera ici de révolution par *destruction-reconstruction* [DR].

Trois exemples

La pratique différenciée de ces trois manières [AE, AD et DR] de révolutionner un domaine se retrouve dans bien des domaines de pensée : elle s'avère opérer implicitement au cœur des différentes modernités.

Donnons-en trois exemples, très dissemblables.

Calcul différentiel

Face aux impasses du calcul différentiel basé, dans la mathématique classique (Leibniz puis Euler), sur une problématique empirique des *infinitésimaux*, l'analyse moderne va explorer trois orientations :

- une révolution du calcul différentiel par abandon-déplacement sera d'abord engagée par Cauchy au début du XIX° : elle va abandonner purement et simplement le recours à toute problématique d'éléments infiniment petits pour reconstruire le calcul différentiel sur une tout autre base, celle de la nouvelle notion de « limite » ;
- une révolution de l'analyse par adjonction-extension sera ensuite menée par Robinson dans les années 1960 (*analyse non-standard*) par adjonction axiomatique d'un élément non-standard infiniment petit ;
- une autre révolution des nombres par destruction-reconstruction sera enfin conçue par Conway dans les années 1970 : elle va reconstruire une problématique rigoureuse et ordonnée de tous les nombres à partir de la nouvelle notion de nombre *surréel* (entendu comme paire d'un ordinal et d'une partie de cette ordinal).

Organisation des analystes par Lacan

Face à l'académisation de l'organisation anglo-américaine des analystes (l'*International Psychoanalytical Association* – IPA), Lacan va pratiquer successivement trois types de réorganisations radicales :

- en 1953 par adjonction-extension : en adjoignant à l'IPA un « retour à Freud » qui entend l'étendre, en France d'abord, selon une *Société française de psychanalyse* (SFP) ;
- en 1964 par abandon-déplacement : en abandonnant tant l'IPA que la SFP et se déplaçant rue d'Ulm pour fonder l'*École freudienne de Paris* (EFP) ;
- en 1980 par destruction-reconstruction : en dissolvant l'EFP pour reconstruire une organisation de type nouveau, l'*École de la cause freudienne* (ECF).

Révolutions politiques

On peut distinguer trois types de révolutions politiques :

- par abandon-déplacement dans les *antiques* révolutions antiesclavagistes (Spartacus, Quilombos au Brésil…) qui abandonnent le monde oppressif à son sort pour fonder ailleurs des républiques libres ;
- par destruction-reconstruction dans les *classiques* révolutions française (1789) et russe (1917) qui détruisent l'ancien État oppresseur pour reconstruire un État de type nouveau ;
- par adjonction-extension dans la *moderne* révolution communiste engagée en Chine à partir de 1958 par adjonction des Communes populaires à la société socialiste en sorte d'étendre l'organisation politique du pays, jusque-là réservée à l'État-Parti, à l'échelle des masses paysannes et ouvrières.

Arithmétique

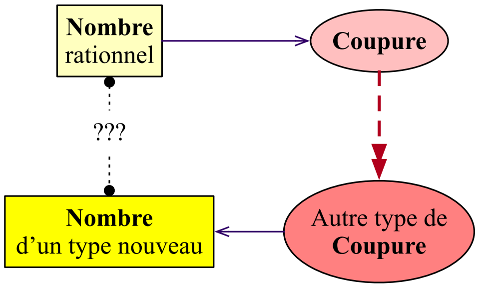
Il s'agira, dans cette leçon, d'étudier en détail la mathématique de l'adjonction-extension telle qu'elle opère dans les coupures de Dedekind.

> Comme nous le reverrons dans la leçon suivante, la méthode d'adjonction-extension avait déjà été précédemment inventée par Galois (c'est lui qui formule le premier les notions d'adjonction et d'extension en 1830). La principale différence de méthode avec Dedekind est que Galois adjoint un élément (une « racine » d'un polynôme, d'où une extension *algébrique*) quand Dedekind adjoint une opération (la « coupure »), et ceci va nous permettre de mieux cerner la fécondité de cette méthode (c'est pour cette raison que la leçon Dedekind précède la leçon Galois).

L'opération *coupure*

Nous partirons de l'invention, aussi simple que géniale, de la notion de *coupure* par Dedekind le 24 novembre 1858.

L'idée princeps est la suivante : si un nombre rationnel peut couper en deux la droite rationnelle, alors toute autre procédure coupant également en deux cette même droite définira un nombre de type nouveau.



L'exemple canonique d'un autre type de coupure est de séparer les rationnels positifs en deux parties selon que leur carré sera inférieur ou supérieur à 2.

Nous suivrons alors, étape par étape, l'arithmétique de ces coupures - le caractère numérique de ce travail facilitera la clarté intégrale de toute la construction mathématique ainsi engagée.

Nous pourrons, *in fine*, thématiser chacune de nos futures leçons sous ce même chef : adjonction d'un **i** *imaginaire* aux réels pour les étendre aux complexes ; adjonction de **j** et **k** aux complexes pour les étendre aux quaternions ; adjonction des atlas aux hypersurfaces pour les étendre aux variétés…

Prix à payer

Ce faisant, nous mettrons en évidence un point secondaire, rarement pris en compte mais intellectuellement capital : l'extension immense que produit une telle adjonction a pour nécessaire contrepartie un renoncement délimité si bien que le gain gigantesque de l'extension s'accompagne malgré tout de la perte d'une propriété (dialectiquement formulé, le bond qualitatif et quantitatif a pour contraire une perte qualitative) : par exemple celle de la *dénombrabilité* dans le cas des coupures, celle de la *résolubilité* dans le cas des groupes algébriques, celle de l'*ordre* dans le cas des complexes, celle de la *commutativité* dans le cas des quaternions…

Conséquences intellectuelles

Nous serons alors armés pour discuter la considérable portée intellectuelle de tout ceci pour toutes les subjectivités modernes : mathématiques bien sûr, mais également militantes, musicales et artistiques, voire amoureuses.

I. Problématisation mathématique

Problématisation grecque

À proprement parler, ce ne sont pas les Grecs qui ont découvert l'irrationalité de √2 – les Chinois par exemple la connaissaient également – mais ce qui singularité les Grecs, c'est d'avoir constitué cette irrationalité en problème mathématique, et par là en problème pour toute la rationalité.

> Les Chinois s'arrangeaient pragmatiquement d'un calcul, approché d'aussi près qu'on veut, par développement décimal.
>
> Pas plus que les Babyloniens ou les Égyptiens, ils ne disposaient la démonstration au cœur de leur rationalité mathématique : là aussi, ce n'est pas qu'ils ignoraient la procédure démonstrative mais simplement qu'ils ne l'élevaient pas au rang de principe transcendantal de leur rationalité.
>
> Leçon essentielle à retenir : il n'y a problème qu'au regard d'une problématisation constituante, il n'y a de problème que construit par une problématisation préalable, si bien que le même fait peut être vu par l'un comme ne posant pas problème et intégrable comme tel à sa pratique antérieure et pour l'autre comme un problème.
>
> On sait que le nihilisme postmoderne prolifère sur l'idée de systématiquement déconstruire au fallacieux prétexte que penser par soi-même voudrait dire déconstruire ce que l'humanité a pensé jusque-là – il est patent que le paradigme d'une telle déconstruction généralisée se trouve dans le capitalisme (voir les pages célèbres du *Manifeste du parti communiste* dès 1848).

Une faune arithmétique totalement sauvage

Depuis la découverte par l'Antiquité de l'irrationalité de √2, faune disparate de nombres non rattachables conceptuellement aux nombres entiers :

- √2 (⟹ les nombres irrationnels « algébriques »)
- π (⟹ les nombres irrationnels « transcendants »
- le cortège ordonnée des nombres décimaux non périodiques…

⟹ Combien de tels nombres ? Quelle structure ?

Comment, à partir des nombres entiers, et donc des nombres rationnels, construire l'ensemble des nombres réels, à commencer par celui qui siège au principe de toutes les mathématiques (démonstration par l'absurde chez les Grecs) √2 ?

Le problème posé par les Grecs à la fin du V° siècle av. J.-C. ou au début du IV° ne sera résolu qu'au milieu du XIX° ap. J.-C., autant dire 2250 ans après (plus de 2 millénaires !: cela donne une échelle de la résolution par l'humanité des problèmes qu'elle se pose).

> Par exemple, Dedekind rappelle en 1872, que « d'authentiques théorèmes tel √2.√3=√6 n'ont jusqu'ici jamais été démontrés ! » [1]
>
> Comme il s'agit de définir une structure générale des nombres, Dedekind insiste alors sur le fait qu'il s'agit définir les nombres irrationnels « d'une seul coup » [2] et non pas bien sûr *un par un*.

Saisissons un peu mieux le problème.

Le problème

√2 nomme un « nombre » tel que son carré vaut 2. Mais ce « nombre » ne peut être « rationnel » (au sens que l'arithmétique donne à ce nom c'est-à-dire un nombre résultat de la division de deux nombres entiers).

> Démonstration.

---

[1] Voir annexe sur les écrits de Dedekind.

[2] Lettre à Lipchitz du 27 juillet 1876 (voir annexe)

Si $\sqrt{2}=a/b$ avec a et b entiers, on a alors à faire au couple d'un nombre pair (2p) et d'un nombre impair (2n+1) et l'on a donc deux possibilités et deux seules : $\sqrt{2}$=impair/pair ou $\sqrt{2}$=pair/impair.

1) $\sqrt{2}=(2n+1)/(2p) \Rightarrow 2=(2n+1)^2/(4p^2) \Rightarrow 8p^2=(2n+1)^2$: pair=impair !
2) $\sqrt{2}=(2n)/(2p+1) \Rightarrow 2=(4n^2)/(2p+1)^2 \Rightarrow (2p+1)^2=2n^2$: impair=pair !

$\Rightarrow \sqrt{2}\neq a/b$!

On dit que ce « nombre » $\sqrt{2}$ est irrationnel, non pas parce qu'il ne répond à pas à la rationalité humaine mais parce qu'il n'a pas de « raison » numérique au sens grec c'est-à-dire qu'il n'entretient pas de proportionnalité avec les nombres entiers.

Par contre, on peut l'approximer d'aussi près qu'on veut par des nombres rationnels : $\sqrt{2}$=1,414213562… ou 1,414…

$$1{,}414=\frac{1.414}{1.000}$$

On démontre qu'un tel nombre irrationnel correspond à un développement décimal illimité non périodique c'est-à-dire qui ne répète pas.

A contrario, si le développement décimal est limité ou s'il est illimité mais périodique, alors le nombre est rationnel. Exemples :

- développement limité : 10/4=2,5 ou 35/8=4,375
- développement illimité périodique : 10/3=3,3333… ou 10/7=1,42857 42857 42857…

Démontrons, sur un exemple, que si un nombre a un développement décimal périodique, il est alors rationnel.

Soit q=4,7212121…
Écrivons q=4,7+0,0212121…
4,7=47/10 est rationnel.
Voyons alors ce qu'il en est de r=0,0212121…

10r=0,212121… et 1000r=21,212121… $\Rightarrow$ 1000r=21+10r
$\Rightarrow$ r=21/990=7/330

On aura donc : **4,7212121…** = 4,7+7/330 **= 779/165**
Cqfd

De plus, il y a des nombres encore plus étranges que $\sqrt{2}$ (qu'on rapporte facilement à 2 par son carré et qu'on appelle pour cela nombre *algébrique*), tel π=3,14… (qui mesure le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre).

Avec ce fatras de « nombres », on peut faire de l'arithmétique empirique et approchée (les additionner et les soustraire, les multiplier et les diviser, les exponentier n^p et les ordonner, etc.) mais on ne sait exactement comment ils s'organisent, séparément et avec les nombres rationnels.

Bref, alors que les rationnels sont organisés selon une structure arithmétique claire (ils font « corps »), ils se voient accompagnés d'une poussière innombrable d'autres nombres qui s'intercalent partout et qu'on ne sait structurer.

Ce point soucie les Grecs car pour eux, la mathématique est un lieu de pensée démonstrative et pas seulement calculatoire. D'où que la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ait constitué pour eux un séisme mental.

Pour les autres (Babyloniens, Égyptiens, Chinois…), cette même découverte n'a pas été un séisme : ils s'en sont simplement arrangés dans leurs procédures calculatrices, sans se poser d'autres questions, un peu comme le font encore tous les lycéens de France.

Pour ma part, je n'ai pris mesure de ce gouffre mental que lorsque mon professeur de maths en hypotaupe a commencé l'année en nous exposant précisément les coupures de Dedekind :c'est cette affirmation qui, d'un coup, m'a fait prendre mesure des gouffres arithmétiques que je fréquentais inconsciemment jusque-là.

Formulons plus avant notre problème.

Appelons nombres « algébriques » les nombres solutions d'une équation algébrique c'est-à-dire d'une équation polynomiale à coefficients entiers.

Par exemple $\sqrt{2}$ est un nombre algébrique car il est solution de l'équation $x^2-2=0$

Tout de même $(1+\sqrt{5})/2$ est un nombre algébrique car il est solution de l'équation algébrique :

$$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+2=0$$

Appelons nombres « transcendants » les nombres irrationnels qui ne sont pas algébriques. On démontre qu'il en existe et même que, loin d'être une rareté, ils sont infiniment plus nombreux que les rationnels qui sont dénombrables.

Par exemple le nombre π (approximable, lui aussi, par un développement décimal illimité non périodique : π=3,14 159 265 358 979…). π est irrationnel (il n'est pas un rapport de nombres entiers) mais il n'est pas algébrique (il n'existe pas de polynôme à coefficients rationnels dont π serait la racine : la démonstration de ce point est très tardive (Ferdinand von Lindemann, 1882).

Les mathématiciens ont découvert, un par un, d'autres nombres transcendants : par exemple e=2,71828… C'est le seul nombre r tel que la dérivée de la fonction r^x soit la fonction r^x.

Donc, les nombres irrationnels sont soit algébriques, soit transcendants.
Appelons nombres « réels » l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels.

On peut certes calculer de manière approchée sur tous ces nombres réels grâce aux développements décimaux approchés d'aussi près qu'on veut mais on ne sait plus trop comment ce fatras de nombres, tous ordonnables (en sorte d'être représentables comme les points d'une seule droite : la droite qu'on dira « réelle »), est organisé.
Les exemples de nombres irrationnels (surtout de nombres algébriques car les nombres transcendants sont extraordinairement plus difficiles à distinguer) foisonnent mais on n'a aucune idée de leur abondance, de leur répartition, de leur organisation propre, de leur structuration interne.
Or la pensée mathématique ne peut se contenter de calculer sur des entités empiriquement rencontrées ou découvertes. Elle se donne pour tâche propre de comprendre la structure des objets qu'elle étudie : en l'occurrence celle des nombres.
D'où la question, toujours ouverte au milieu du XIX° siècle : comment construire systématiquement les nombres irrationnels à partir des nombres rationnels tout de même qu'on a construit systématiquement les nombres rationnels à partir des nombres entiers, et les nombres entiers à partir des nombres entiers positifs ?

Sa solution par Dedekind

La solution à ce problème dans la seconde moitié du XIX° va prendre deux formes :
- la définition des nombres irrationnels comme limite des suites de Cauchy (sur les nombres rationnels) : ce sera la voie de Cantor ;
- la définition des nombres irrationnels par les coupures (sur les nombres rationnels) : ce sera la voie de Dedekind. C'est la voie que nous allons étudier aujourd'hui.

Pourquoi privilégier ici cette seconde approche ?
Outre le fait qu'elle a constitué mon chemin de Damas dans ma longue marche mathématique [3], je la privilégie car elle a une considérable portée intellectuelle.

[3] Mon autobiographie de mathématicien aux pieds nus passe par quatre moments décisifs : elle commence avec la découverte du x de l'algèbre (que je dois à mon père, à la fin du Primaire) ; elle prend un tournant décisif avec les coupures de Dedekind à l'entrée en classes prépas (que je dois à Jacques Syros : automne 1964) ; puis elle se suspend avec la rencontre de Laurent Schwartz à l'X (1967) dont le génie lumineux me dissuade de la recherche mathématique, pour finalement prendre son élan définitif – les mathématiques comme lumière intellectuelle - par la rencontre un peu plus tard (début des années 70) d'Alain Badiou (qui me fait en particulier découvrir Albert Lautman)…

II - La théorie arithmétique proprement dite

Continuité et nombres irrationnels : 1872 [Coupures : 24 novembre 1858, un mercredi !]
Was sind und was sollen die Zahlen ? Que sont et que représentent [à quoi servent] les nombres ? : 1888

La coupure d'un ensemble E totalement ordonné est la donnée d'un couple de ses parties A|B qui le partitionne et tel que tout élément de A est inférieur à tout élément de B.
Une coupure de Dedekind est la donation dans $\mathbb{Q}$ d'une partition stricte A|B (A et B sont des complémentaires dont aucun n'est vide) avec a<b (pour tout a de A et tout b de B) – on précise, par commodité, que s'il y a un rationnel frontière (on parlera alors de coupure « de première espèce »), il appartient par convention à B.

Rappel : dans $\mathbb{R}$, tout ensemble majoré admet une borne supérieure (qui est le plus petit des majorants [4]) mais bien sûr pas dans $\mathbb{Q}$.

Exemple canonique : dans $\mathbb{Q}$, A$\{a^2<2$ <u>ou</u> $a<0\}$ et B$\{b^2>2$ <u>et</u> $b>0\}$

Panorama général

Voir détails complets en annexe I

On vérifie que les coupures sont ordonnées : pour deux coupures données C et C', on peut toujours les classer C<C' ou C'<C (au sens arithmétique du <).
On construit alors les opérations qui vont donner aux coupures une structure de groupe (additif), puis d'anneau, puis de corps : addition, soustraction, multiplication, division.
On le fait en construisant de nouveaux couples de parties dans $\mathbb{Q}$.

Ainsi si x:= a|b et y:= c|d, on va examiner (a|b)+(c|d):=(a+c)|(b+d)…

Il faut alors montrer, pour chaque opération, que la nouvelle paire de parties ainsi définie est bien une coupure c'est-à-dire que dans la nouvelle partition obtenue,

- tout rationnel est bien classé ;
- chaque élément de gauche est bien inférieur à chaque élément de droite ;
- les deux ensembles sont bien adjacents [5] : $\forall\varepsilon>0\in\mathbb{Q}$ $\exists a\in A$ et $\exists b\in B$ tels que $(b-a)<\varepsilon$

Alors l'opération en question définira bien une coupure donc un nouveau nombre qu'on appellera respectivement x+y, x-y, xy,…

Il faut ensuite montrer que l'addition est bien associative, commutative et possède un élément neutre.

En construisant de même la soustraction, on obtient un groupe additif.
Le travail sur la multiplication est déjà plus délicat car il faut tenir compte des signes (+.+, +.- ou -.+, -.-). En construisant la division (sauf par 0), on obtient un groupe multiplicatif sauf pour 0.
On vérifie la distributivité et on obtient donc <u>un corps sur les coupures</u> qu'on appelle $\mathbb{R}$ corps des réels.
On vérifie que ce corps $\mathbb{R}$ concorde avec $\mathbb{Q}$ pour les coupures de première espèce (c'est-à-dire les coupures définissant un rationnel).
On démontre enfin que ce nouveau corps des réels $\mathbb{R}$ est lui-même complet : toute coupure de même type sur les réels définit un réel.

Autre construction des nombres réels par les suites de Cauchy

<u>Suites de Cauchy ⟹ extensions *analytiques*</u>
Suite de nombres se rapprochant uniformément à l'infini :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \text{ et } q \geq n,\ |r_p-r_q|<\varepsilon$$

Une telle suite dans $\mathbb{Q}$ converge dans $\mathbb{R}$.

[4] En un certain sens, la borne supérieure est la borne inférieure des majorants, et la borne inférieure est la borne supérieure des minorants.
[5] Voir en annexe la problématique de Jacques Syros

Autres coupures : les nombres surréels

John Conway : *On Numbers and Games* (1974)
Harry Gonshor : *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers* (1986)
Alain Badiou : *Le Nombre et les nombres* (1990)
Un Nombre est la « *donnée conjointe d'un ordinal (la* matière *du Nombre) et d'une partie de cet ordinal (sa* forme*)* ».

Autres adjonctions : les extensions algébriques

Ce sont des adjonctions d'un élément (voir Galois ⟹ Cohen) et non pas d'une opération.
Une extension algébrique E du corps $\mathbb{Q}$ est telle que tout élément de E est algébrique c'est-à-dire solution d'un polynôme sur $\mathbb{Q}$.

Clôture algébrique

Tout polynôme y a toutes ses solutions. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est algébriquement clos.
Cf. théorème fondamental de l'algèbre : tout polynôme de degré p a p racines dans $\mathbb{C}$.

Les coefficients du polynôme peuvent être rationnels, réels ou complexes.
Noter : il n'y a pas de démonstration purement algébrique de ce théorème car il faut, à un moment ou à un autre, faire intervenir des considérations analytiques (ou topologiques) de continuité.

Exemples d'extension par adjonction de racines

Cf. Paul Cohen : « *The situation is analogous to the construction of the extension of a field k formed by adjoining the root α of an irreducible equation f(x)=0. The elements of the extension field are all of the form p(α) where p is a polynomial and α is taken as a formal symbol, but we identify p(α) and q(α) if p(x)-q(x) is divisible by f(x)*. » (p. 113)
J'explique, en inscrivant k, p et q en majuscules :
Les éléments de l'extension vont être les classes d'équivalence sur les polynômes (à coefficients dans K) avec pour relation d'équivalence P(x)≡P'(x) si P(*x*)-P'(*x*)=Q(x).f(*x*)

Deux exemples : avec $f(x)=x^2-1$ et $f(x)=x^2+1$.
Dans ces deux cas, on va exploiter la propriété, facile à vérifier, que pour tout P(x), on a, avec $f(x)=rx^2+sx+t$:

$$P(x)/(rx^2+sx+t) = Q(x) + (ax+b)/(rx^2+sx+t)$$
soit
$$P(x)= Q(x).(rx^2+sx+t) + (ax+b)$$
ou
$$P(x)=Q(x).f(x) + ax+b$$

et donc, avec $P'(x) = Q'(x).(rx^2+sx+t) + (cx+d)$, on aura

$$P(x)-P'(x)=[Q(x)-Q'(x)].(rx^2+sx+t) + [(ax+b)-(cx+d)]$$

Pour $x=\alpha$, on a $f(\alpha) = r\alpha^2+s\alpha+t = 0$ et on a donc :

$$P(\alpha)-P'(\alpha)=(a-c).\alpha + (b-d)$$

P et P' sont dits équivalents si a=b et c=d c'est-à-dire si $P(\alpha)-P'(\alpha)=0$ c'est-à-dire si $P(x)-P'(x)=[Q(x)-Q'(x)].(rx^2+sx+t)$.
Une classe d'équivalence est donc l'ensemble des polynômes P de forme

$$P(x) = Q(x).f(x) + (a\alpha+b)$$

Un élément de l'extension sera de la forme $r\alpha^2+s\alpha+t$

$\mathbb{Q}$ et √2

Prenons $f(x)=x^2-1$. Deux solutions : ±√2 qui n'existent pas dans $\mathbb{Q}$.
Un élément de l'extension est de la forme s√2+t avec s et t rationnels.
Exemple de polynômes équivalents :

- $P(x)=7x^3+5x^2+3=(7x+5)(x^2-2)+14x+13$
- $P'(x)=5x^3+7x^2+4x+1=(5x+7)(x^2-2)+14x+13$

On vérifie facilement que P(√2)=P'(√2)=14√2+13

Clôture algébrique de $\mathbb{Q}$

On répète l'opération précédente pour tout nombre algébrique $\sqrt{q}$ où q est un rationnel positif, c'est-à-dire pour toute équation $f(x)=x^2-q=0$.
Attention : avec cela, on n'obtient pas $\mathbb{R}$ car on n'obtient pas les nombres transcendants. On aboutit d'ailleurs ici à un corps étendu restant dénombrable.

$\mathbb{R}$ *et i*

Prenons $f(x)=x^2+1$. Deux solutions : $\pm\sqrt{(-1)}=\pm i$ qui n'existent pas dans $\mathbb{R}$.
Un élément de l'extension sera de la forme ai+b avec a et b réels, c'est-à-dire un nombre complexe.

III - Triple portée intellectuelle pour les différentes modernités

Cette théorie mathématique des coupures engage trois types d'interprétations, engageant une triple portée intellectuelle du propos :

1) une problématique des points, ou victoire de l'unité dialectique entre continuité et points ;
2) une problématique de la création par retournement dialectique entre aspects principal et secondaire, ici en constituant et constitué : ce sera l'opération dialectique au principe de l'adjonction ;
   cas particulier : une problématique de la nomination créatrice.
3) une problématique de l'adjonction-extension ;

1. Problématique des points

La construction des coupures représente une victoire de la dialectique et, plus précisément, de son cœur : l'existence d'une unité des contraires. En effet, on détermine ici la continuité des nombres réels par une opération essentiellement discontinue : la coupure !

Dedekind le résume ainsi pour Lipschitz (lettre du 10 juin 1876) : « Le théorème que j'ai démontré est : *le système de toutes les coupures du domaine, en soi discontinu, des nombres rationnels constitue une multiplicité continue*. »

Le continu se constitue à partir du discontinu (la coupure).

Réciproquement, le continu est ce qui autorise qu'une coupure

1) ne tombe pas dans le vide (comme les coupures sur les rationnels) mais sur « quelque chose » ;
2) attrape un et seul élément (un et un seul nombre), pas un paquet inséparable aux éléments indiscernables. [6]

Ainsi le point se trouve uni dialectiquement à son contraire : le continu !

Les points constituants

Tout ceci est un grand encouragement à la théorie des points subjectifs, ceux qu'un sujet s'efforce de tenir (points constituants du sujet plutôt que points constitués par lui) : il est possible que tenir un point constitue un sujet.

Et tenir un point, c'est couper dans la réalité en séparant binairement deux parties globales (en politique, cela prend facilement la forme d'une séparation entre ultra-gauche et droite).

De même tenir le point de l'égalité se fait en coupant net entre deux points de vue sur les inégalités : les réduire (parlementaires de Gauche), les accepter comme naturelles (parlementaires de Droite). Ici, le point de l'égalité sera le 0 à partir duquel élever la droite orthogonale de l'égalité.

La coupure interprétative

Badiou attrape tout cela sous l'angle plutôt de « la coupure interprétative » - voir le chapitre 15 de *Le Nombre et les nombres*.

Contre le conservatisme contemporain (« *La réalité est trop dense pour qu'on puisse y isoler un point. Toute problématique prétendant dégager un point séparé dans la coalescence naturelle relève d'une dangereuse brutalisation.* »), il y a l'idée que la continuité du dense est précisément ce qui fonde la coupure et permet par là de <u>constituer un point</u> : <u>la continuité est constituante des points</u> et nullement constituée à partir d'eux ! Autrement dit, <u>aucune complexité n'interdit de trancher</u>. Tout au contraire, la complexité supérieure du continu permet de trancher dans le dense.

Ceci légitime par exemple *la coupure interprétative* dans un texte aride et dense : la pensée d'un tel texte s'indique précisément de sa capacité à y faire coupure, à en prélever un point susceptible de la partager globalement, et donc de l'intelliger en le divisant en deux.

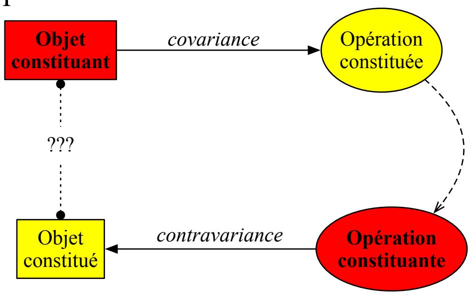
---

[6] On verra, a contrario, que tel est le cas pour Galois car un polynôme de degré supérieur à 4 va en général attraper un paquet de n nombres inséparables par les moyens algébriques utilisés pour définir le paquet en question…

L'opération coupure opère donc ici comme l'opération dialectique par excellence du « un se divise en deux » selon un point précis et délimité.

2. Création : de l'opération constituée à l'opération constituante

On l'a vu : l'objet « nombre rationnel » constituant d'une coupure (constituée) suscite la création d'une coupure constituante d'un objet de type nouveau (constitué) : le « nombre irrationnel ».
On a donc le schéma suivant, que l'on peut voir comme le renversement d'une relation covariante (Δ objet $\rightarrow$ Δ opération) en une relation contravariante (Δ opération $\rightarrow$ Δ objet) : on adjoint à un objet une opération covariante que l'on étend. L'adjonction contravariante d'un objet correspondant aux nouvelles opérations étend le domaine initial des objets :

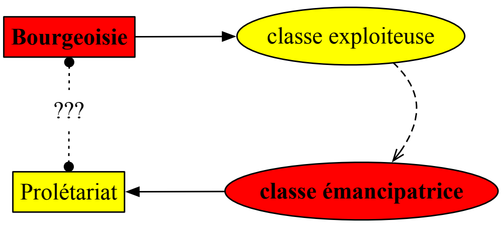


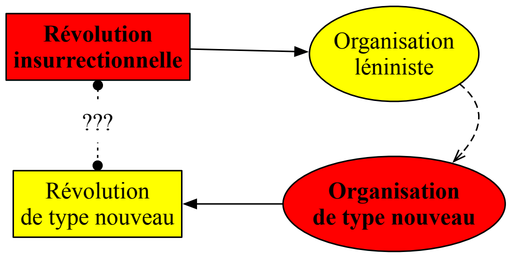
À bien y regarder, un tel type de création conceptuel se retrouve dans bien des domaines de pensée.

Exemples

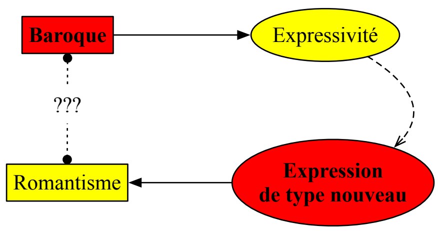
<u>En politique…</u>

Deux exemples bruts :





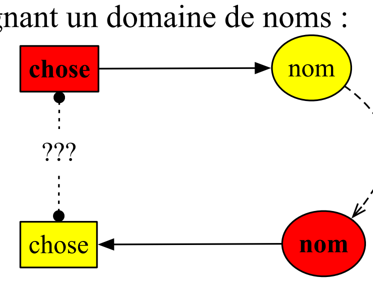
<u>En musique…</u>



Cas particulier : la nomination créatrice

« *C'est proprement le nom qui crée la chose.* » Alain Badiou [7]

On peut également interpréter notre retournement objet→opération comme le retournement du rapport de nomination entre une chose et son nom : chose→nom $\Longrightarrow$ nom→chose : on étend le domaine des choses en lui adjoignant un domaine de noms :



---

[7] *L'être et l'événement* (p. 415), concernant la procédure du forcing par Cohen…

Dans un premier temps, les coupures comme les classes de polynômes opèrent comme « noms » dans la situation de départ pour désigner les « objets ajoutés ».
Dans un second temps, les opérations sur ces noms dans la situation de départ autorisent un contrôle dans cette situation de ce qui se passe dans l'extension : ainsi l'addition des coupures dans $\mathbb{Q}$ contrôle l'addition des irrationnels dans $\mathbb{R}$.
L'adjonction se fait donc de l'intérieur, de manière endogène, non par apport extérieur, et par greffe. Elle engendre non pas le nouvel objet qui ne peut apparaître dans le domaine de départ mais son nom : « coupure » est le nom « rationnel » d'un « irrationnel » !
Et la prolifération inhérente à une adjonction susceptible d'engendrer une extension est intérieurement contrôlée : l'adjonction ouvre finalement à l'extension des opérations classiques dans le domaine de départ à de nouveaux types d'objets : non pas les nombres irrationnels, inaccessibles dans $\mathbb{Q}$, mais leurs noms.

L'adjonction non seulement se compose de l'intérieur mais se construit explicitement : on ne saurait se contenter d'une démonstration d'existence par l'absurde (qui indiquerait qu'une telle adjonction ser**ait** possible, envisageable) ; il faut l'exhiber, la construire effectivement.
Elle se construit alors en mobilisant l'intégralité des éléments de la situation de départ : une coupure est une partition de tous les rationnels ; une extension va se faire par classement de tous les polynômes sur $\mathbb{Q}$ en classes d'équivalence. La construction passe par une mobilisation intégrale du domaine de départ.

Forcing de Cohen

Tout ceci se retrouve chez Cohen mais en plus compliqué car il s'agit de construire un ensemble générique, ce qui semble un projet absurde car intrinsèquement contradictoire – un ensemble générique est précisément un ensemble non constructible ! En fait, il va s'agir de construire le nom propre d'un ensemble générique spécifique (et non pas le nom propre de la classe de tous les ensembles génériques ou de ce que générique veut dire !).

> On retrouve là un paradoxe bien connu qui consiste à parler d'un ensemble quelconque, d'un triangle quelconque, d'un nombre réel quelconque : comment faire ? On ne saurait le montrer car alors on exhibera forcément un ensemble, un triangle, un réel aux propriétés particularisées et donc qui n'est plus quelconque ! Si l'on peut enterrer un soldat inconnu car cet enterrement ne le rend pas plus connu, on ne peut par contre montrer un homme quelconque, l'homme de la rue, car le simple fait de le sélectionner et de le présenter le distingue de tous les autres.
> D'où cette règle d'airain de la pensée : l'innommable – pas seulement l'innommé – est ce qui quantitativement prolifère - ainsi par exemple des nombres transcendants, si difficiles à montrer et qui sont pourtant en quantité astronomique puisque ce sont eux qui font passer du dénombrable au continu (les nombres algébriques, polynomialement construits, et donc les irrationnels algébriques, sont toujours dénombrables).
>
> > Songeons au parallèle avec le boson de Higgs ou les neutrinos dont la quantité astronomique [8] est très difficilement individualisable (un peu comme si l'on vous demandait d'exhiber un grain de poussière et un seul !).

3. Révolution d'un domaine par adjonction-extension

Ici, on ne s'intéresse plus à l'élémentaire de l'opération-coupure mais à ce que Dedekind appelle [9] « définir d'un coup » l'ensemble des irrationnels.
Cette manière de révolutionner un domaine (ici celui du corps des nombres rationnels) s'oppose à deux autres manières :
- par abandon-déplacement (ex. la révolution du calcul différentiel et intégral par Cauchy par abandon de la problématique des infinitésimaux et par recours à la notion de limite sur la base de la toute nouvelle méthode dite de « ε et δ »).

[8] Notre corps physiologique recevrait par seconde 500.000 milliards de neutrinos dont 80% du soleil !
[9] Lettre à Lipchitz du 27 juillet, p. 53

- par destruction-reconstruction (dans le même espace mathématique du calcul différentiel, on pourrait prendre pour exemple la construction des nombres surréels par Conway).

En politique, la différence de ces trois types de révolution est particulièrement claire.
Tout ceci est détaillé en annexe 3.

ANNEXE 1 : LES COUPURES PAR JACQUES SIROS [10]

Louis-le-Grand, Math. Sup. HX1 (automne 1964)

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$. α partage $\mathbb{Q}$ en deux parties A_1 et A_2 selon que $a \in \mathbb{Q}$ ($a \neq \alpha$) est tel que $a<\alpha \Leftrightarrow a \in A_1$ ou que $a'>\alpha \Leftrightarrow a' \in A_2$.

Cf. Dedekind : on peut associer α à l'une ou l'autre des deux parties.

On notera la coupure ainsi : $A_1|A_2$ ou $A_1|_\alpha A_2$ ou

$$\overset{\alpha}{A_1|A_2}$$

Appelons cela « coupure » de $\mathbb{Q}$ en deux parties complémentaires telles que

- [classement intégral] tout rationnel (ici autre que α) y est classé c'est-à-dire appartient à l'une des deux parties A_1 ou A_2 ; autrement dit la coupure partitionne strictement $\mathbb{Q}$ (la réunion des deux parties donne $\mathbb{Q}$).
- [ordre] chaque rationnel de A_1 est inférieur à chaque rationnel de A_2 ;
- [adjacence] les deux ensembles sont adjacents : $\forall \varepsilon>0$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$), $\exists a \in A_1$ et $\exists a' \in A_2$ tels que $(a'-a)<\varepsilon$.

Dedekind ne rajoute pas cette propriété qui découle en réalité du fait que tous les rationnels sont ici répartis et que $\mathbb{Q}$ est dense dans lui-même : $\forall q$ et q' avec $q<q'$, $\exists q''$ tel que $q<q''<q'$). Mais, didactiquement, il est intéressant de vérifier l'adjacence car la densité de $\mathbb{Q}$ est plutôt à établir dans $\mathbb{R}$ [11] : or il s'agit ici de construire $\mathbb{R}$!

Démonstration constructive.

$\forall \varepsilon$, soit $a=\alpha-\varepsilon/3$ et soit $a'=\alpha+\varepsilon/3$. On a alors $a<\alpha \Rightarrow a \in A_1$, $a'>\alpha \Rightarrow a' \in A_2$ et $(a'-a)=2\varepsilon/3<\varepsilon$

On peut maintenant construire de telles coupures de $\mathbb{Q}$ (que Syros appelle « coupures de première espèce » [12] et que nous appellerons « coupures avec traits » par référence aux traits dessinés sur une règle graduée) par d'autres moyens qu'un nombre rationnel.

Soit par exemple la coupure $A_1|_{\sqrt{2}}A_2$ ainsi définie :

- $q<0 \Rightarrow q \in A_1$;
- $q \geq 0$: si $q^2<2$ alors $q \in A_1$ et si $q^2>2$, alors $q \in A_2$.
- on sait par ailleurs qu'il n'y a pas de rationnel q tel que $q^2=2$.

On vérifie facilement que c'est bien une coupure :

1) tout rationnel appartient à A_1 ou à A_2 ;
2) tout rationnel de A_1 est inférieur à tout rationnel de A_2 ;
3) les deux parties sont adjacentes.

   Démonstration constructive

   Pour le rationnel $\varepsilon>0$, soit $a>0$ avec $a^2=2-\varepsilon/3$ et soit $a'>0$ avec $a'^2=2+\varepsilon/3$

   On a alors $a \in A_1$ et $a' \in A_2$ avec $(a'^2-a^2)=2/3\varepsilon$

   Mais $(a'^2-a^2)=(a'-a)(a'+a)$ avec $(a'+a)>1$ [en fait $a'+a=2\sqrt{2}=2,828…$]

   $\Rightarrow (a'-a)=(a'^2-a^2)/(a'+a)<(a'^2-a^2)=2/3\varepsilon<\varepsilon \Rightarrow (a'-a)<\varepsilon$

On pose qu'une telle coupure (dite « coupure de seconde espèce » ou « coupure sans trait » [13]) définit un nombre d'un autre type que rationnel qu'on appellera nombre irrationnel et qu'on nommera ici $\sqrt{2}$.

On a ainsi construit la notion de coupure sur $\mathbb{Q}$ (partition en deux) à partir d'un nombre rationnel.

---

[10] 1911-2002. Agrégation de mathématiques en 1937 (en même temps que Laurent Schwartz et Gustave Choquet)

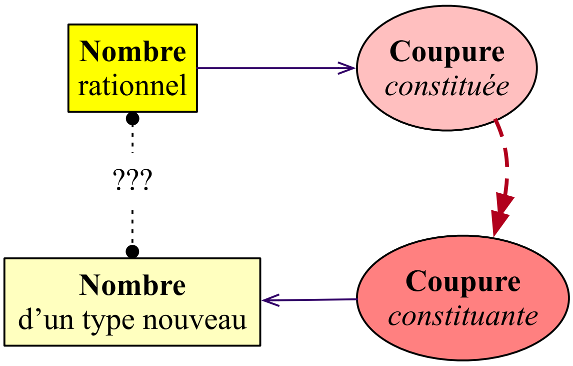
[11] Tout espace topologique est dense dans lui-même.
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.
Noter que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (ensemble des irrationnels) est également dense dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: cela veut dire que les rationnels peuvent approcher tous les réels (que $\mathbb{Q}$ peut approcher tout $\mathbb{R}$).

[12] et que Lavendhomme appelle « coupures avec nœuds »…

[13] Lavendhomme parle de « coupure sans nœud ».

Puis on a démontré qu'il existe d'autres coupures sur $\mathbb{Q}$ qui ne correspondent plus à un nombre rationnel.

	OBJET	*[adjonction]*	OPÉRATION	
	nombre (rationnel)	$\Longrightarrow$	coupure (avec trait)	*Le point coupe.*
[extension]	$\Uparrow$?		$\Downarrow$	
	nombre (irrationnel)	$\Longleftarrow$	coupure (sans trait)	*La coupure pointe.*



On va maintenant raisonner sur l'ensemble de telles coupures $A_1|A_2$.

> Il faudrait ici en passer par la théorie des ensembles pour démontrer qu'un tel ensemble existe.
> Si $\mathbb{Q}$ existe, il existe en effet l'ensemble de ses parties noté $\wp(\mathbb{Q})$.
> Or une coupure est la donation de deux parties complémentaires de $\mathbb{Q}$. Elle est donc la donation de deux éléments de $\wp(\mathbb{Q})$; autant dire qu'elle est un élément de l'ensemble $\wp[\wp(\mathbb{Q})]$, lequel existe bien puisque $\wp(\mathbb{Q})$ existe.
> L'ensemble des coupures est alors un élément de l'ensemble $\wp\{\wp[\wp(\mathbb{Q})]\}$ lequel existe également puisque $\wp[\wp(\mathbb{Q})]$ existe.

On va construire les quatre opérations arithmétiques classiques (avec leurs éléments neutres) sur cet ensemble de coupures pour démontrer que cet ensemble constitue bien un corps abélien (commutatif) ordonné de nombres.

Mais avant cela (cf. point de vue Dedekind plutôt que celui de Syros), assurons que les coupures sont ordonnables.

> Voir plus haut : Dedekind privilégie la dimension <u>ordinale</u> des nombres sur leur dimension <u>cardinale</u> (voir le point de vue de Frege) et donc le nombre 1 (le nombre 0 pour Frege).

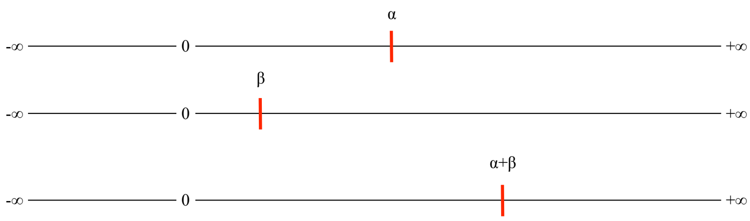
Relation d'ordre

$A_1|A_2<B_1|B_2 \Leftrightarrow A_1\subset B_1$ c'est-à-dire $\forall a\in A_1 \Longrightarrow a\in B_1$

Transitivité de l'ordre : $x<y$ et $y<z \Longrightarrow x<z$

> Si $A_1|A_2<B_1|B_2<C_1|C_2$, alors $A_1|A_2<C_1|C_2$
> Démonstration triviale par transitivité de l'inclusion

1 : addition… → groupe



Addition

Par exemple $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (=1,414…+1,732…=3,146…)

Définition : $(A_1|A_2)+(B_1|B_2) := (A_1+B_1)|(A_2+B_2)=C_1|C_2$

c'est-à-dire

- $c\in(A_1+B_1)=C_1$ si $\exists$ ($a\in A_1$ et $b\in B_1$) avec $a+b\geq c$;
- dans le cas contraire, $c'\in(A_2+B_2)=C_2$ [14]

Il faut alors vérifier que $(A_1+B_1)|(A_2+B_2)$ est bien une coupure c'est-à-dire que

1) tout rationnel appartient bien à (A_1+B_1) ou à (A_2+B_2) ;
   Démonstration : par définition de la coupure additive, on range tout rationnel d'un côté ou de l'autre.
   Pour q donné :
   - soit $\exists$ ($a\in A_1$ et $b\in B_1$) avec $a+b\geq q$ et alors $q\in(A_1+B_1)=C_1$
   - soit $\nexists$ ($a\in A_1$ et $b\in B_1$) avec $a+b\geq q$, alors $q\in(A_2+B_2)=C_2$

2) tout rationnel de (A_1+B_1) est inférieur à tout rationnel de (A_2+B_2) ;
   Démonstration
   $c\in C_1 \Leftrightarrow \exists$ ($a\in A_1$ et $b\in B_1$) avec $a+b\geq c$
   $c'\in C_2 \Leftrightarrow \nexists$ ($a\in A_1$ et $b\in B_1$) avec $a+b\geq c'$
   On ne peut alors avoir $c'<c$ car alors $c'<c\leq a+b \Rightarrow c'\in C_1$!

3) les deux parties (A_1+B_1) et (A_2+B_2) sont adjacentes c'est-à-dire que $\forall\varepsilon>0\in\mathbb{Q}$ $\exists c\in(A_1+B_1)$ et $\exists c'\in(A_2+B_2)$ tels que $(c'-c)<\varepsilon$.
   Démonstration constructive.
   Soient a et a' tels que $(a'-a)<\varepsilon/4$ (ils existent car $A_1|A_2$ est une coupure) et soient b et b' tels que $(b'-b)<\varepsilon/4$ (ils existent aussi car $B_1|B_2$ est une coupure).
   Alors $[(a'+b')-(a+b)]<\varepsilon/2<\varepsilon$ et donc, si l'on prend $c=a+b$ et $c'=a'+b'$, on a bien $c'-c<\varepsilon$

4) Il faut encore vérifier que cette addition des coupures correspond bien à l'addition des rationnels !
   Soient les nombres rationnels α et β correspondant aux coupures $A_1|A_2$ et $B_1|B_2$
   Alors tout nombre $c\in(A_1+B_1)=C_1$ est tel que $c\leq a+b<\alpha+\beta$ car $a<\alpha$ et $b<\beta$.
   Et aucun nombre $c'\in(A_2+B_2)=C_2$ n'est tel que $c'<\alpha+\beta$ car on aurait alors un rationnel positif q tel que
   $$q=\alpha+\beta-c' \Rightarrow c'=(\alpha-q/2)+(\beta-q/2)$$
   Et dans ce cas, comme $\alpha-q/2<\alpha\in A_1$ et $\beta-q/2<\alpha\in B_1 \Rightarrow c\in C_1$!
   Donc la coupure $C_1|C_2$ est bien produite par la somme rationnelle $\alpha+\beta$.

On dira qu'aux nombres x et y respectivement définis par les coupures $A_1|A_2$ et $B_1|B_2$, on associe le nouveau nombre $z=x+y$ associé à la coupure $(A_1+B_1)|(A_2+B_2)$.

Commutativité et associativité de l'addition

$(A_1+B_1)|(A_2+B_2)=(B_1+A_1)|(B_2+A_2)$

$(A_1+[B_1+C_1])|(A_2+[B_2+C_2])=([A_1+B_1]+C_1)|([A_2+B_2]+C_2)$

Démonstrations laborieuses mais aux calculs triviaux…

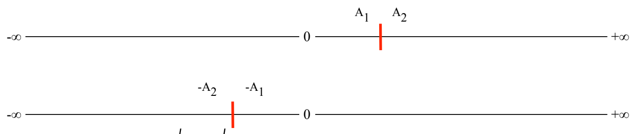
[14] J'ai pataugé en ce point lors de l'exposé oral car, le nez sur le tableau et toutes notes de cours oubliées, j'ai caractérisé inexactement la somme de deux coupures.
La bonne manière de procéder est celle présentée ci-dessus.
La double erreur commise était
- de poser que $q\in C_1$ si $\exists(a1\in A_1$ et $b_1\in B_1)$ tels que $q=a_1+b_1$ (au lieu de $q\leq a_1+b_1$) ;
- de poser que $q\in C_2$ si $\exists(a_2\in A_2$ et $b_2\in B_2)$ tels que $q=a_2+b_2$ (au lieu de définir tout simplement C_2 comme partie complémentaire de C_1 dans $\mathbb{Q}$).

Élément neutre de l'addition : 0

Soit la coupure 0:=négatifs|positifs = N|P
On aura bien x+0=x avec $x=A_1|A_2$

Démonstration
$A_1|A_2+N|P=(A_1+N)|(A_2+P)$.
Mais si $x\in(A_1+N)$ donc $x\leq a+n$ (avec $a\in A_1$ et $n\in N$ c'est-à-dire $n<0$), alors $x<a$ et donc $x\in A_1$.
Et si $x\in(A_2+P)$, $x\notin(A_1+N)$, donc $x\notin A_1 \Longrightarrow x\in A_2$
Donc $(A_1+N)|(A_2+P)=A_1|A_2$

Opération inverse de l'addition : la soustraction



Par exemple $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (=1,414…-1,732…=-0,318…)

Attention : il faut inverser !

$$-(A_1|A_2) := (-A_2)|(-A_1)$$

Il faut montrer que $A_1|A_2-(A_1|A_2)=A_1|A_2 + (-A_2)|(-A_1)=0=N|P$

Principe de la démonstration :
$A_1|A_2-(A_1|A_2) = A_1|A_2 + (-A_2)|(-A_1) = \{a-a'|a'-a\}$
Comme $a\in A_1$ et $a'\in A_2$, $a<a' \Longrightarrow a+(-a')=a-a'<0$ et $a'+(-a)=a'-a>0$
On a donc bien la coupure 0=N|P

Groupe additif

On a donc un groupe additif.

2 : multiplication… → corps

Multiplication

Par exemple $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ (=2,449…)

Pour $x=A_1|A_2$ et $y=B_1|B_2$, on va définir $x.y := (A_1|A_2).(B_1|B_2) = A_1B_1|A_2B_2$
Il faut démontrer qu'on obtient bien ainsi une coupure et que cette coupure recouvre la multiplication des rationnels.
Il faut examiner trois cas :

- deux nombres positifs ;
- un nombre positif et un nombre négatif ;
- deux nombres négatifs.

Démonstration pour deux nombres positifs :

x	y
0.a|a'	0.b|b'

1) tout rationnel appartient à A_1B_1 ou à A_2B_2 ;
2) tout rationnel de A_1B_1 est inférieur à tout rationnel de A_2B_2 :$ab<a'b'$
3) les deux parties sont adjacentes : $\forall\varepsilon>0$, $\exists a,a',b,b'$, tels $a'b'-ab<\varepsilon$

Pour cela, on passe par $a'b'-ab=(a'-a)b'+a(b'-b)$.
Peut-on assurer que $(a'-a)b'+a(b'-b)<\varepsilon$?
Soit $(a'-a)=\alpha\varepsilon$ et $(b'-b)=\beta\varepsilon \Longrightarrow(a'-a)b'+a(b'-b)=(\alpha b'+\beta a)\varepsilon$
Assurer $(\alpha b'+\beta a)\varepsilon<\varepsilon$, c'est assurer que $\alpha b'+\beta a<1$.
Deux cas :

- $a<b' \Longrightarrow\alpha b'+\beta a<b'(\alpha+\beta)$
- $b'<a \Longrightarrow\alpha b'+\beta a<a(\alpha+\beta)$

Dans les deux cas, on peut choisir α et β aussi petits qu'on veut en sorte que $b'(\alpha+\beta)<1$ ou $a(\alpha+\beta)<1$.

Il suffit pour cela, dans le cas par exemple où $a<b'$, de se donner un b'_0 avec $b'<b'_0$ puis de choisir un β tel que $(b'-b)<(b'_0-b)=\beta\varepsilon<\varepsilon$ et enfin de choisir un α tel $b'(\alpha+\beta)<b'_0(\alpha+\beta)<1$.

Idem pour le cas où $b'<a$.

C'est plus compliqué pour les deux autres cas mais la logique est la même.

Élément neutre de la multiplication : 1

Soit $1:=\alpha|_1\beta$ avec $\alpha<1$ et $\beta>1$

Il faut démontrer que $\forall x=A_1|A_2$, on a $x.1=x$ c'est-à-dire $(A_1|A_2).(\alpha|_1\beta)=A_1|A_2$

On voit que $a\alpha<b\beta$ si $a<b$ et qu'on a alors bien $\alpha<1<\beta$…

Opération inverse de la multiplication : la division

Par exemple $\sqrt{2}/\sqrt{3}=\sqrt{(2/3)}$ (=0,816…)

Attention :

$$\frac{1}{A_1|A_2} := \frac{1}{A_2}\Big|\frac{1}{A_1}$$

avec

$$(A_1|A_2).\left(\frac{1}{A_2}\Big|\frac{1}{A_1}\right) = 1$$

Il faut en particulier démontrer que les deux ensembles sont bien adjacents.

Principe de la démonstration

Trouver a et b tels que $\forall\varepsilon>0$, $(1/a)-(1/b)<\varepsilon \Leftrightarrow (b-a)/ab<\varepsilon$.

On choisit un a_0 tel que $a>a_0$ et $b>a_0 \Longrightarrow ab>a_0^2 \Longrightarrow 1/ab<1/a_0^2$

Il suffit alors de prendre $b-a<\varepsilon a_0^2$…

Il faut aussi vérifier que $1/x := 1/b|1/a$ est bien l'inverse de $x=a|b$…

Démonstration en exercice…

Commutativité et associativité de la multiplication

$x.y=y.x$

$x.(y.z)=(x.y).z$

Démonstration en exercice…

Distributivité

$x(y+z)=xy+xz$

Démonstration en exercice…

Corps $\mathbb{R}$

Au total, on obtient le corps commutatif (abélien) des réels nommé $\mathbb{R}$ où tout nombre réel est caractérisé comme une coupure sur $\mathbb{Q}$.

Bien sûr, il faut pour cela imaginer des coupures qui ne soient pas uniquement « algébriques » mais également « transcendantes » : par exemple la coupure séparant les rationnels entre ceux pour qui 2x sera inférieur au périmètre d'un cercle de rayon 1 et ceux pour qui 2x sera supérieur (ce qui revient à comparer 2x à 2π).

Le corps des réels est complet pour l'opération coupure.

On peut définir, avec la même définition, une coupure sur les réels.

On vérifie facilement que tout réel est ainsi classé, que tout rationnel l'est également et que donc cette coupure sur $\mathbb{R}$, l'étant tout autant sur $\mathbb{Q}$, définit bien un réel.

Démontrons qu'une coupure sur $\mathbb{R}$ définit bien un réel.

Soit $A_1|A_2$ une coupure sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'elle ne définisse pas de réel.

Prenons alors la même coupure sur $\mathbb{Q}$ qui définit un réel a. Ce réel doit alors appartenir à A_1 ou A_2 (puisque la coupure est censée ne pas définir de réel). Supposons par exemple que $a \in A_1$.

Alors, puisque a ne « coupe » pas $A_1|A_2$, c'est que $\exists b \in \mathbb{R}$ avec $b > a$ et $b \in A_1$. Mais alors $\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b \in A_1$ ce qui n'est pas possible car a est défini par la coupure $A_1|A_2$ sur $\mathbb{Q}$.

Donc la coupure définit bien un réel. Cqfd

$\mathbb{R}$ est complet pour l'opération coupure.

Par ailleurs, $\mathbb{R}$ est <u>analytiquement complet</u> car toute suite de Cauchy y est convergente.

Attention de bien distinguer cette complétude *analytique* de l'incomplétude *algébrique* de $\mathbb{R}$ (tout polynôme sur $\mathbb{R}$ d'ordre n n'y a pas n solutions réelles).

ANNEXE 2 : LES DIFFÉRENTS NOMBRES

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ [$\subset \mathbb{D}$] $\subset \mathbb{Q}$ [$\subset \mathbb{A}$] $\subset \mathbb{R} \Longrightarrow$ bifurcation : $\mathbb{R} \subset \mathbb{S}$ / $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
[$\mathbb{D}$: décimaux (à développement fini) ; $\mathbb{A}$: algébriques ; $\mathbb{S}$: surréels]

$\mathbb{Z}$ est un groupe additif et un anneau (c'est même le prototype de la structure d'anneau).
$\mathbb{Q}$ est un corps, dense sur $\mathbb{R}$, mais non complet (toute suite de Cauchy n'y converge pas) et non borné supérieurement.
Le dénombrable inclut $\mathbb{A}$. Le continu commence avec $\mathbb{R}$ (il y faut donc les nombres transcendants, c'est-à-dire non algébriques, lesquels sont donc les « responsables » du saut dans la cardinalité).

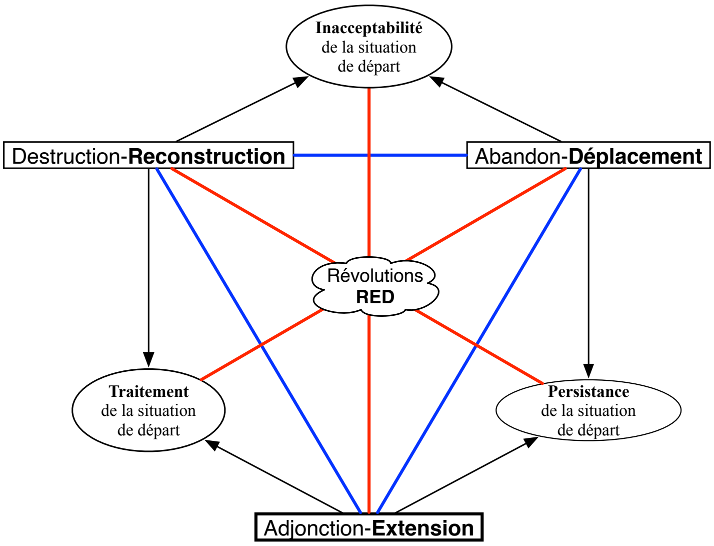
Après $\mathbb{R}$, il faut choisir entre deux propriétés : l'ordre (d'où $\mathbb{S}$ par nouvelles « coupures ») ou l'algébricité ($\mathbb{C}$ = clôture algébrique de $\mathbb{R}$).
Bifurcation donc de la voie extensive : par coupures d'un nouveau type (préservant la propriété d'ordre), par extension algébrique (assurant l'existence de solutions aux calculs algébriques).

Un Nombre, « *donnée conjointe d'un ordinal (*<u>*matière*</u> *du Nombre) et d'une partie de cet ordinal (*<u>*forme*</u> *du Nombre*) » (Alain Badiou), est donc du naturel mis en forme.

ANNEXE 3 : LES RÉVOLUTIONS PAR ADJONCTION-EXTENSION

Trois types différents de révolutions

La modernité mathématique révolutionne les mathématiques classiques et par là toute l'intellectualité.
Ce faisant, elle met au jour une nouvelle manière de révolutionner un domaine, qu'on dira *par adjonction-extension*, dont le travail arithmétique de Dedekind va nous servir de paradigme.
Cette nouvelle manière de révolutionner un domaine donné se différencie et s'oppose à deux autres : par destruction-reconstruction et par abandon-déplacement.
Ces trois manières **RED** [R(econstruction)-E(xtension)-D(éplacement)] composent un hexagone logique :



Avec Dedekind, nous pouvons examiner en détail ce que adjonction-extension veut dire.

Cinq caractéristiques de la révolution par AE

L'idée de la révolution par AE est la suivante : on va révolutionner une situation de départ en lui ajoutant une opération immanente qui, appliquée à tous les éléments de la situation, va l'étendre dans des proportions incommensurables.

1) L'opération ajoutée est endogène, intrinsèque : ce n'est pas une manipulation extérieure mais entièrement immanente.
2) Cette opération ne fait pas que s'ajouter aux opérations internes déjà existantes et elle ne se contente pas d'ajouter des nouveaux éléments mais elle recombine l'ensemble de ce qui existe, et c'est en ce sens que c'est une adjonction et pas un simple ajout latéral, pas l'accolage d'un prolongement, pas une simple supplémentation.
3) Cette opération d'adjonction débouche sur une nouvelle situation dans laquelle l'ancienne n'est pas détruite mais circonscrite comme une sorte de réserve, de cave ou de grenier : l'ancien est incorporé au nouveau et préservé comme tel ; il n'est pas dissous dans le nouveau mais il reste, avec ses propres traits d'ancienneté originaire, dans un espace délimité.
4) Par contre la taille du nouvel espace est incommensurablement plus grande que celle de l'ancien : entre les deux, les rapports de taille ne sont pas mesurables selon les anciennes normes.
5) Enfin, dernier trait non négligeable : ce bond tant quantitatif que qualificatif a pour contrepartie un renoncement délimité ; il y a en quelque sorte un prix à payer pour cette AE, prix non exorbitant au regard du gain considérable, prix circonscrit mais prix réel.

Portée dans les maths modernes avant Cantor

		adjonction (immanente)	**extension** (démesurée)	**renoncement** (circonscrit)

arithmétique	Dedekind	coupures	rationnels → réels discret → continu	dénombrabilité
géométrie	Gauss	courbures	espaces non euclidiens	unicité de la platitude euclidienne
algèbre	Galois	groupes	des équations polynomiales	résolubilité classique
analyse	Cauchy	imaginaires	réels → complexes	ordre
topologie	Riemann	atlas	(hyper)surfaces → variétés intrinsèque : connaissance→constitution	univocité fonctionnelle
…	Hamilton	+ 2 dimensions	complexes 2D → quaternions 4D	commutativité

Exemples des trois types de révolutions

Évoquons la portée intellectuelle générale de cette tripartition par les exemples suivants prélevés en mathématiques, en politique et en psychanalyse.

Deux exemples mathématiques

	Destruction- **R**econstruction	*Adjonction-* **E**xtension	*Abandon-* **D**éplacement
Débuts de la modernité mathématique ⟹ révolution	?	• de l'arithmétique classique par Dedekind (adjonction des coupures) • de l'analyse classique par Cauchy (adjonction de i) • de la géométrie euclidienne par Riemann (adjonction d'un atlas)	du calcul différentiel par Cauchy
Infinitésimaux	Conway reconstruit tous les nombres (surréels) y compris des surréels infinitésimaux par des paires {un ordinal, une partie de cet ordinal}	Robinson (analyse non standard) adjoint axiomatiquement des infinitésimaux	Cauchy abandonne les infinitésimaux et déplace le calcul différentiel avec sa notion de limite (méthode ∀ε ∃δ)

Trois exemples politiques

	Destruction- **R**econstruction	*Adjonction-* **E**xtension	*Abandon-* **D**éplacement
Révolutions historiques	La Révolution française La Révolution bolchévique (destruction de l'ancien État – reconstruction d'un État de type nouveau)	La Révolution communiste dans un pays socialiste (adjonction des Communes populaires et ouvrières…)	Révolutions des esclaves : • Spartacus • Les quilombos au Brésil (XVII°) Dans la Révolution démocratique chinoise, zones libérées qui encerclent les villes par les campagnes
Révolutions chinoises	Révolution socialiste (1953)	Révolution communiste (1958 & 1966)	Révolution démocratique (1927 : encercler les villes par les campagnes)
Conceptions de la Révolution communiste	par Lin Piao	par Mao (adjonction des mouvements communistes de masse pour un parti de type nouveau)	par l'UCF-ml (abandon du Parti et déplacement vers des organisations politiques)

Un exemple psychanalytique

	Destruction- **R**econstruction	*Adjonction-* **E**xtension	*Abandon-* **D**éplacement
Lacan révolutionne la psychanalyse	en 1980 en dissolvant l'EFP [15] et fondant l'ECF [16] (1981)	en 1953 en adjoignant un « retour à Freud » à l'IPA [17] et l'étendant par une SFP [18]	en 1964 en quittant l'IPA et la SFP pour fonder l'EFP

[15] *École freudienne de Paris*
[16] *École de la cause freudienne*
[17] *International Psychoanalytical Association*
[18] *Société française de psychanalyse*

ANNEXE 4 : ÉCRITS DE DEDEKIND

J'utilise ici la traduction par Claude Duverney aux éditions du Tricorne
(voir documentation finale).

Continuité et nombres rationnels (1872)

Préface

Découverte/invention des coupures le **24 novembre 1858** à l'École Polytechnique Fédérale de Zurich

Absence d'un fondement vraiment scientifique de l'arithmétique (9)
L'intuition géométrique est indispensable sur le plan didactique mais insatisfaisante ⟹ nécessite de trouver un fondement purement arithmétique à l'analyse différentielle.
Pas la moindre explication de la continuité ⟹ acquérir une vraie définition de l'essence de la continuité §10)
L'essence de la continuité : le domaine des nombres réels est complet. (11)

§1. Propriétés des nombres rationnels

L'acte arithmétique le plus simple [est] celui de compter. (13)
L'addition est la réduction à un seul acte d'une répétition de cet acte.
La limitation des possibilités […] est le véritable motif d'un nouvel acte de création.
Une propriété de $\mathbb{Q}$ encore plus importante que celle d'être un corps est d'être un domaine ordonné. (14)

Cf. un nombre = un compte et un ordre mais le second est encore plus important que le premier (voir les complexes !).
Attention : Dedekind note $\mathbb{Q}$ par R et $\mathbb{R}$ par $\mathscr{R}$.

L'arithmétique ne doit pas être tributaire de représentations qui lui sont étrangères telles les représentations géométriques

§2. Comparaison des nombres rationnels avec les points d'une ligne droite

L'analogie entre les nombres rationnels et les points d'une droite donne lieu à une véritable correspondance. (17)

§3. Continuité de la ligne droite

Je réclame que l'arithmétique se développe à partir d'elle-même. (19)
Il faut s'efforcer de définir complètement les nombres irrationnels par les biais des seuls nombres rationnels.
Il s'agit de fournir un caractère précis de la continuité. (20)
J'ai fini par trouver ce que je cherchais. La trouvaille consiste en ceci : tout point de la droite engendre un découpage de celle-ci en deux parties telles que tout point de l'une ses parties se situe à gauche de tout de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque : si tous les points de la droite se divisent en deux classes telles que tout point de la première classe se situe à gauche de tout point de la deuxième, alors il existe un et un seul point qui produit cette répartition, cette coupure de la droite en deux parties.
Il n'est pas nécessaire que l'espace soit continu. (21)

La coupure constituante est réciproque de la coupure constituée.
La complétude, et non pas la densité, caractérise la continuité.
La continuité n'est pas une propriété géométrique.

§4. Création des nombres irrationnels

[Il ordonne les coupures avant de calculer/compter sur elles.] (25)

§5. Continuité du domaine des nombres réels

Dans la coupure $A_1|A_2$ par le rationnel α, α peut être attribué au choix dans la première ou la deuxième classe.

§6. Calculs avec des nombres réels

Je m'en tiendrai à l'exemple le plus simple : l'addition. (31)

$A_1|A_2+B_1|B_2=C_1|C_2$: q rationnel quelconque est rangé dans C_1 si $\exists a_1 \in A_1$ et $b_1 \in B_1$ tel que $a_1+b_1 \geq c_1$. Sinon q est rangé dans C_2.

Noter $\geq$ et non pas = !

D'authentiques théorèmes tel $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ n'ont jusqu'ici jamais été démontrés ! (32)

Il y reviendra plusieurs fois dans sa correspondance avec Lipschitz (lequel n'est pas d'accord) en soulignant qu'il faut pour cela construire la multiplication des irrationnels et non pas se contenter de supposer qu'elle opère comme sur les réels.

Par exemple « démontrer » cela en écrivant

L'épouvantable lourdeur attachée à la formulation de la proposition [détaillant ce que veut dire que les opérations arithmétiques possèdent une continuité] nous convainc que quelque chose doit être entrepris ici pour venir en aide au langage. (33)

Point-clef : la formalisation pour ne pas normer ou mesurer la pensée mathématique à une formulation langagière.

§7. Analyse infinitésimale

Le théorème « si x est croissant et borné, alors x s'approche d'une valeur limite » est équivalent au principe de continuité. (34)

L'intérêt de définir la continuité-complétion par les coupures sera indiqué plus loin : on complète d'un seul coup les rationnels par tous les irrationnels en une unique opération.

Correspondance avec Lipschitz (1876)

Cf. opposition entre le point de vue arithmétique de Dedekind et le point de vue géométrique de Lipschitz

Dedekind (10 juin)

Je ne suis absolument pas susceptible. (40)

J'ai gardé pour moi durant presque quatorze ans ma conception des nombres rationnels.

Le théorème que j'ai démontré est : *le système de toutes les coupures du domaine, en soi discontinu, des nombres rationnels constitue une multiplicité continue*. (41)

La plus grande partie (en fait la quasi intégralité) des théorèmes qui constituent l'édifice de l'arithmétique n'ont pas été démontrés jusqu'ici et, pour pousser si possible la contradiction à l'extrême, je dis que le théorème $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ n'a encore jamais été prouvé. J'ai naturellement examiné toute une série d'ouvrages de divers pays et qu'y trouve-t-on ? Rien d'autre que les cercles vicieux les plus grossiers comme : $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, parce que $(\sqrt{a}.\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2.(\sqrt{b})^2=ab$; il n'y a pas la moindre explication du produit de deux nombres irrationnels qui précède le théorème $(m.n)^2=m^2.n^2$, démontré pour des nombres rationnels *m, n* et appliqué sans aucune hésitation aux nombres irrationnels eux aussi. Mais n'est-il pas proprement révoltant que l'enseignement des mathématiques à l'école passe pour un moyen éminemment efficace pour former l'entendement, alors qu'aucune autre discipline (comme par exemple la grammaire) ne tolèrerait un seul instant des infractions si grossières à la logique ? Si l'on ne peut pas procéder scientifiquement, ou si on ne peut le faire faute de temps, que l'on soit au moins honnête et qu'on l'avoue aussi franchement aux élèves déjà si enclins à *croire* un théorème sur parole du maître ; cela vaudrait mieux que d'étouffer ce sens pur et noble de la vraie démonstration en usant de pseudo-démonstrations. (41-42)

L'introduction des grandeurs dans la pure doctrine des nombres ne me plaît guère. (42)

Cf. grandeurs = géométrie et nombres = arithmétique

Voir déjà la séparation par Aristote pour les démonstrations…

Lien (43) par le nombre comme rapport entre grandeurs de même espèce : cf. *nombre x grandeur = grandeur* (et non pas *nombre* !)

Lipschitz (6 juillet)

Euclide conçoit une grandeur comme déterminée par la mesure d'une ligne définie. (47)

Il défend que sa conception de la coupure arithmétique était déjà à l'œuvre géométriquement chez Euclide.

Dedekind (27 juillet)

J'ai maintenant peu d'espoir que l'on parvienne à s'accorder. (51)
Je souhaite faire ressortir le plus clairement possible mon point de vue par opposition au vôtre.
La complétude ou la continuité (52, 53, 55)

Cf. il s'agit pour Dedekind de la continuité d'un ensemble et non d'une fonction. Et pour un ensemble, il considère que la continuité n'est pas assurée par sa densité mais que continuité=complétude.

Avec la coupure, les nombres irrationnels peuvent être <u>définis d'un seul coup</u> sur la seule base de l'arithmétique des nombres rationnels, donc sans aucun recours au concept assez obscur et compliqué de <u>grandeur</u> et, ce qui est le plus important, avec cette <u>complétude (continuité</u>) suffisante. (53)
Faire reposer l'arithmétique sur le concept du rapport de grandeurs n'est absolument pas suffisant. (54)

Noter qu'à la différence d'Aristote, il refuse un tel fondement mais pas forcément qu'une démonstration arithmétique puisse recourir à la géométrie…

Rien n'est plus dangereux en mathématique que de *supposer* <u>l'existence de choses</u> sans preuves suffisante.

Pour « choses », voir plus loin…

Le recours à la géométrie pour fonder l'arithmétique pure va totalement à l'encontre de mes inclinations. (56)
Pour moi, le concept d'espace est totalement indépendant, totalement séparable de la représentation de la continuité.

Que sont et à quoi servent les nombres ? (1888)

Préfaces

En science, <u>ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration</u>. (61)

Cf. si l'on peut, l'on doit !

Je considère le concept de nombre comme entièrement indépendant des représentations ou des intuitions de l'espace et du temps.
Les nombres sont des créations libres de l'esprit humain, ils servent de moyens pour appréhender plus facilement et finement <u>la diversité des choses</u>.
Voir la capacité qu'a l'esprit de <u>relier des choses à des choses</u> (62)
À la suite des nombres dits naturels, on doit procéder à l'extension graduelle du concept de nombre sans y mêler des représentations étrangères (comme par exemple celle des grandeurs mesurables). (64-65)

§

1. <u>J'entends par chose tout objet de notre pensée</u>. Afin de pouvoir parler commodément des choses, on les désigne par signes, p. ex. par des lettres. (79)
Une chose est parfaitement déterminée par tout ce qu'on peut affirmer ou penser d'elle.
2. Pour certaines raisons, nous exclurons totalement ici <u>le système vide</u>, celui qui ne contient aucun élément, bien qu'il puisse être commode de concevoir un tel système dans d'autres investigations. (80)

Voir AB (*Le Nombre et les nombres*, 25)

59. *Théorème de l'induction complète*

Dedekind démontre la validité de la démonstration par récurrence ou par induction…

64. *Définition.* Un système S est dit <u>*infini*</u> s'il est semblable à une de ses parties propres ; dans le cas contraire, S est un système fini. (99)

« Système » = *ensemble*
« Semblable » = *équipotent* (il existe une bijection)

66. *Théorème*. Il existe des systèmes infinis.

Théorème et pas axiome !!!

Démonstration. L'univers de mes pensées, c'est-à-dire la totalité S de toutes les choses qui peuvent être objet de ma pensée, est infini.

Dedekind postule que cette totalité existe c'est-à-dire fait système-ensemble !
Il se situe alors dans ce qu'on appellera la théorie naïve des ensembles.

Plus tardivement, le paradoxe de Russell montrera qu'il n'en est rien.

Noter que, pour Dedekind (§1), {pensées}={objets de pensée}={choses} !!!

Car si s désigne un élément de S, alors la pensée s' selon laquelle s peut être objet de ma pensée, est elle-même un élément de S.

s' se distingue de s comme la réflexion (penser de la pensée) se distingue de la simple pensée : penser la musique est une chose ; penser la pensée musicale (c'est-à-dire réfléchir musicalement ou réfléchir la musique) en est une autre.

[*Soit S' la partie ainsi engendrée par s, s', s", etc.*] S' est bien une partie propre de S car il existe en S des éléments (p. ex. mon propre moi) qui sont différents de toute pensée s' de ce genre et qui ne sont donc pas contenus dans S'.

Pour démontrer que S'≠S, il faut exhiber une pensée, élément de S, qui n'est pas dans S'.

Comme pour Dedekind (§1), {pensées}↔{objets de la pensée}↔{choses}, il faut dégager une pensée qui échappe à l'arraisonnement par un objet spécifique de pensée et il exhibe le Cogito c'est-à-dire cette pensée spécifique dont l'objet propre n'est que le fait même de penser. Il appelle cet objet entièrement singulier « mon propre Moi » en une sorte d'équivalence postulée entre « je pense moi » et « moi, je pense ».

Dedekind fonde ainsi l'existence de l'infini sur ce que Sartre appelle « le cogito pré-reflexif » [19] et ainsi sur une la catégorie spécifiquement philosophique de sujet.

[*Donc S' est infini et est bien une partie propre de S.*] Par suite, S [*qui contient une partie propre S' infinie comme lui*] est infini. c.q.f.d. (99-100)

Sa « démonstration » est manifestement philosophique et aucunement mathématique, ne serait-ce que parce qu'elle pivote entièrement sur une notion philosophique (le Moi – autant dire le sujet) et aucunement mathématique !

Sur tout ceci, voir AB chapitre 4 :

1) Dedekind est cartésien par le Cogito qui exclut l'inconscient (il y a des pensées qui ne sont pas pensées comme telles et qui échappent ce faisant au savoir) et donc le « système » de Dedekind ne saurait faire tout de la pensée ;
2) Dedekind est spinoziste par l'idée de l'idée qui légitime l'idée de suite récurrente, cette récurrence de nature spinoziste ne saurait y être fondatrice puisque chez Spinoza, cette récurrence n'est nullement constituante de l'idée d'infini mais bien constituée comme telle par l'infinité de la substance préalablement posée.
3) (mais cette récurrence ne saurait être fondatrice : elle n'est pas constituante mais bien constituée chez Spinoza par l'infinité de la substance).

71. *Définition*. Un système N est dit simplement infini [*c'est-à-dire dénombrable*] [en gros s'il existe une application succession à partir d'un élément premier tel que tout élément de N appartienne à cette succession]. Nous appelons cet élément, que nous nous désignons par le symbole 1 dans la suite, l'*élément de base* de N.

Dedekind fonde donc les entiers naturels à partir de 1 et non pas de 0.

73. [Définition des nombres naturels comme <u>nombres ordinaux</u>]

D'où que Dedekind va ensuite aborder l'ordre des entiers (§81, bien avant leur addition : §135).

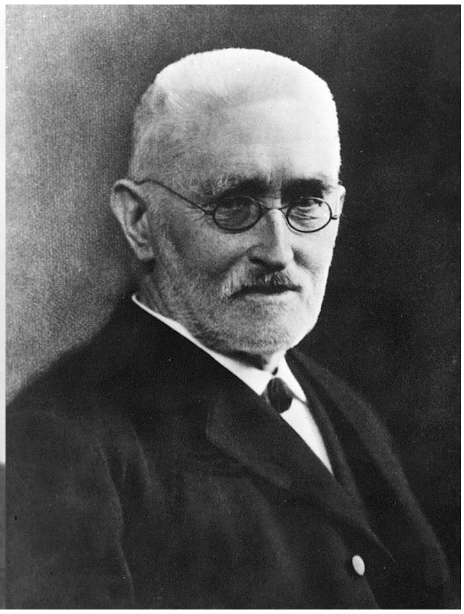
C'est parce que Dedekind privilégie la dimension ordinale des nombres entiers qu'il les a commencés par 1.

AB l'oppose à Frege qui privilégie leur dimension cardinale et part alors de 0 c'est-à-dire de la quantité nulle.

---

[19] Voir AB p. 55

DOCUMENTATION

Écrits de Dedekind

- traduction par Hourya Benis Sinaceur : *La création des nombres* (Vrin, 2008)
- traduction par Claude Duverney : *Traités sur la théorie des nombres* (éditions du Tricorne, 2006)
- traduction par Judith Milner : *Les nombres- Que sont-ils et à quoi servent-ils ?* (Ornicar, 1978)

Sur Richard Dedekind

- *Une approche idéale de la théorie des nombres* (coll. Génies mathématiques, 2018
- Alain Badiou : *Le Nombre et les nombres* (en particulier le chapitre 15)

***