

INTRODUCTION GÉNÉRALE
(3 octobre 2021)

ARGUMENTAIRE	2
INTRODUCTION GÉNÉRALE	2
Pourquoi ces leçons ?	2
Brèves monographies	4
Qu'appellera-t-on ici « maths modernes » ?`	4
Notre méthode.....	6
Notre programme	7
SIX THÉORIES.....	10
I : Dedekind.....	10
II : Galois.....	10
III : Cauchy	11
IV : Hamilton	12
V : Gauss	12
VI : Riemann.....	12
TROIS BRÈVES MONOGRAPHIES	13
A. Novalis et l'algèbre (fin XVIII°)	13
L'algèbre comme formalisation	14
« Romantiser »... ..	14
Dialectique fini-infini... ..	15
Trois points	15
Trois directives	16
Florilège complémentaire	16
B. Marx et le calcul différentiel classique (fin XIX°).....	18
Orientation générale.....	18
Du travail du négatif dans la dialectique de l'époque... ..	18
Paradoxes du CD classique.....	19
Cauchy et la notion de limite	20
Le travail du négatif dans le CD classique	20
Pas de postérité	21
Petit bilan de cette incursion dans les MMM.....	21
C. La réforme franco-belge des maths modernes (fin XX°).....	23
France : la réforme dite « des maths modernes » (1966...).....	23
La réforme en Belgique.....	27
Bilan ?	28
Trois leçons pour nous	30
Bibliographie.....	30
Lectures	31

« La pure mathématique est une contemplation de l'intelligence considérée en tant qu'univers. » ¹

« La plus haute vie est mathématique. »

« Les mathématiciens sont les seuls heureux. » ²

Novalis

ARGUMENTAIRE

Étudier Gauss-Galois-Cauchy-Hamilton-Riemann-Dedekind (1828-1858) en mathématiciens aux pieds nus

Voir feuille spéciale

INTRODUCTION GÉNÉRALE

« Sans enthousiasme, point de mathématiques. » ³

Novalis

Il s'agit donc pour moi aujourd'hui de vous enthousiasmer pour le travail qui nous attend cette année !

Pourquoi ces leçons ?

- Car notre époque est dans un creux dans le cours de la vaste spirale de la pensée humaine, creux attendant à la fin d'un cycle couvrant globalement les XIX^e et XX^e siècles :
 - communisme politique : 1848-1976 (125 ans)
 - dialectique philosophique : 1812 ⁴-1982 ⁵ (170 ans)
 - modernité mathématique : 1828-1970 ⁶ ? (142 ans)
 - modernité musicale : 1827 ⁷- années 70 ⁸ (150 ans)

Résumons : **début des années 30 du XIX^e - fin des années 70 du XX^e (150 ans : un siècle et demi).**

- Pluralité des pensées et des intellectualités. Mais raisonances. Pour ma part, j'aime marcher sur trois jambes : politique, musique, mathématiques (l'amour, pour moi, n'est pas directement référé à une intellectualité spécifique).
- Ici, ressources générales des mathématiques : trésors à notre disposition guère utilisés par les intellectualités modernes (victoires remportées et qui n'ont pas encore eu d'effets globaux sur la pensée humaine).
- D'où le principe de ces leçons : « diverses intellectualités à la lumière des mathématiques modernes et à l'ombre de la philosophie contemporaine ».
 - maths modernes ? Nous allons préciser.
 - philosophie contemporaine ? Pour moi, celle d'Alain Badiou après *Théorie du Sujet* (1982), c'est-à-dire à partir de *L'être et l'événement* (1988) c'est-à-dire à partir du retournement d'une dialectique classique (dont la négativité est le principal moteur) à une dialectique affirmative...
- S'intéresser plus particulièrement au début des mathématiques modernes, dans leur foisonnement disciplinaire (5 domaines + leur croisement, en particulier en matière de géométrie algébrique), car c'est une renaissance subjective pour les mathématiques quand la fin des mathématiques classiques est morose : les sentiments d'échec (à résoudre les questions d'algèbre – résolution des

¹ *Die reine Mathematik ist die Anschauung des Verstandes als Universum.*

² *Die Mathematiker sind die einzig Glücklichen.*

³ *Ohne Enthusiasmus keine Mathematik.*

⁴ Hegel : début de la *Science de la Logique*

⁵ Badiou : *Théorie du sujet*

⁶ Retrait de Grothendieck

⁷ Romantisme musical : cf. mort de Beethoven, *Voyage d'hiver* de Schubert... L'année suivante, Robert Schumann rencontre Clara Wieck...

⁸ 1968 : Berio-Stockhausen ; début des années 70 : fin du free-jazz et donc du jazz ; 1977 : création de l'Ircam ; 1981 : *Répons* ; 2016 : mort de Boulez...

équations polynomiales de degré 5 – et d’analyse, la nouvelle discipline mathématique classique – théorie rigoureuse des infinitésimaux) conduisent à un climat de défaite subjective. Or, l’échec est une chose, la défaite en est une tout autre, beaucoup plus grave (la défaite est à l’échec comme la mélancolie l’est à la nostalgie).

Lagrange, le dernier mathématicien classique (lettre à d’Alembert du 21 septembre 1781) :

« Je commence à sentir que ma force d’inertie augmente peu à peu, et je ne réponds pas que je fasse encore de la Géométrie dans dix ans d’ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde, et qu’à moins qu’on ne découvre de nouveaux filons, il faudra tôt ou tard l’abandonner. La physique et la chimie offrent maintenant des richesses plus brillantes et d’une exploitation plus facile ; aussi le goût du siècle paraît-il entièrement tourné de ce côté-là, et il n’est pas impossible que les places de la Géométrie dans les Académies ne deviennent un jour ce que sont actuellement les chaires d’arabe dans les Universités. »

Cauchy, un des premiers mathématiciens modernes à venir (discours *Sur les limites des connaissances humaines* le 14 novembre 1811 à Cherbourg) :

« On est tenté de croire que les connaissances de l’homme peuvent croître et se multiplier à l’infini. »

« Cependant si l’on observe que toute notre intelligence et nos moyens sont renfermés entre des limites qu’ils ne peuvent jamais franchir, on se persuadera sans peine que nos connaissances sont bornées comme nos facultés. »⁹

« Que dirais-je des sciences exactes : la plupart paraissent parvenues à leur plus haute période. L’arithmétique, la géométrie, l’algèbre, les mathématiques transcendantes sont des sciences que l’on peut regarder comme terminées, et dont il ne reste plus à faire que d’utiles applications. »

Repartir comme en 1843

Repartir ? Cf. Novalis = « celui qui cultive du nouveau ! »

1843

Hamilton

Invention des quaternions $\Rightarrow$ orientation !

Marx-Engels

Entre leurs deux premières rencontres : fin 1842 à Cologne, automne 1844 à Paris

Marx commence l’étude du travail émancipé ($\Rightarrow$ *Manuscrits de 1844*).

Engels enquête à Manchester auprès des ouvriers du textile ($\Rightarrow$ *La Situation de la classe laborieuse en Angleterre*).

Étude et liaison de masse !

Romantisme musical

Dans l’élan premier du romantisme musical (beaucoup plus tardif que le premier romantisme littéraire, celui d’Iena), celui que Schubert engage en 1827 avec le *Voyage d’hiver* à la mort de Beethoven. Cf. 15 ans après son début :

- Wagner crée le *Vaisseau Fantôme* et attaque *Tannhäuser*.
- Schumann compose son quintette pour piano en Mi b et crée *Le Paradis et la Péri*
- Chopin compose son 3^o Impromptu, sa 4^o Ballade, 2 Nocturnes, 3 Mazurkas
- Liszt arrête de composer des fantaisies sur des thèmes d’opéras pour composer des paraphrases : *Paraphrase de concert sur « Dom Sebastien », Réminiscences de Norma...*
- Mendelssohn compose sa 2^o Sonate pour violoncelle (op. 58)
- Berlioz écrit son *Grand traité d’instrumentation et d’orchestration modernes*

⁹ Où l’on retrouve la matrice sophistiquée du motif contemporain de la finitude : ce qui est borné ne saurait être infini et la limite interdirait l’infini !

Rappelons pourtant que la cardinalité de toute infinité est bornée par la cardinalité de l’ensemble de ses parties, et que l’infinité n’est jamais l’illimité.

- Verdi crée *Nabucco*

Enjeu : réincorporer le romantisme musical à la modernité musicale (vaste chantier pour moi : voir mamuphi).

Brèves monographies

Trois tentatives

Cf. trois tentatives précédentes d'éclairer les modernités par les mathématiques :

- fin XVIII° : modernité artistique romantique $\Rightarrow$ Novalis & algèbre
- fin XIX° : modernité politique communiste $\Rightarrow$ Marx & calcul différentiel
- fin XX° : modernité d'enseignement $\Rightarrow$ la réforme Lichnerowicz & Bourbaki

Trois échecs !

La modernité mathématique se développe séparément des autres modernités (politique, musicale, psychanalytique...) : les autres l'ignore.

- Le romantisme ensuite oublie cela $\Rightarrow$ polarisation opposant deux finitudes : romantisme religieux / positivisme technicien.
En musique : Ø. Plus tard, approche calculatrice ou applicatrice pour structures (Babbitt...).
Sinon, poids de l'acoustique ! + imposture intellectuelle d'un Xenakis...
Boulez l'ignore. Stockhausen aussi. Ne parlons pas de Berio...
- L'intellectualité politique n'embraye pas :
mathématiques classiques pour Marx qui ne semble pas avoir pris mesure de la révolution moderne des mathématiques de son temps (50 ans de retard).
Ensuite mathématiques appliquées : cf. retour pendant GRCP sous le signe unilatéral de l'application aux sciences de la nature (cf. un certain matérialisme l'emporte sur la dialectique).
- Échec $\Rightarrow$ schizophrénie mathématicienne : repli sur soi de la pensée mathématique et développement des mathématiques calculatrices (mathématiques financières, big data, IA).
Exception : voir le magnifique livre d'Yves André (ses cours de mathématiques contemporaines à mamuphi en 2008-2009)

YVES ANDRÉ

DIX REGARDS SUR LA MATHÉMATIQUE CONTEMPORAINE



Pensées Mathématiques

Spartacus

Qu'appellera-t-on ici « maths modernes » ?

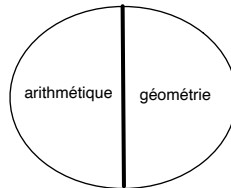
Son enjeu : mettre en relief le tournant qui s'opère autour de 1830 dans la pensée mathématique plurielle (arithmétique, géométrie, algèbre, analyse) en synchronie frappante avec le tournant qui s'opère au même moment en musique (romantisme) et en politique (socialisme et communisme).

Cette synchronie vaut-elle contemporanéité ? C'est un des enjeux de notre étude.

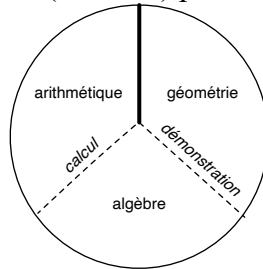
Notre périodisation

Périodisation des mathématiques

- **Pré-mathématiques** : avant les Grecs
- Mathématiques **antiques** : grecques (**arithmétique et géométrie**)
Dualité arithmétique (Pythagore) -géométrie (Euclide).
 - Pythagore (V^e av. JC) : primat de l'arithmétique sur la géométrie pour $\Rightarrow$ formalisation des nombres par la géométrie (nombres triangulaires, carrés, rectangulaires...) et démonstration géométrique des propriétés arithmétiques.
 - Euclide (III^e av. JC) : primat de la géométrie sur l'arithmétique - cf. ses principes sont géométriques $\Rightarrow$ interprétation des nombres comme des grandeurs mais ceci bute sur l'interprétation des multiplications de plus de 3 nombres (cf. géométrie à 4 dimensions !).
 - Aristote (IV^e av. JC) : séparation de l'arithmétique et de la géométrie (nombre discret et grandeur continue), en particulier de leurs démonstrations



- Mathématiques **préclassiques** : arabes (IX^e-XI^e) puis italiennes (XVI^e) (+ **algèbre**)



Périodisation de l'algèbre :

- **Protoalgèbre** des équations : Diophante (IV^e ap. JC)
- Invention de l'algèbre des **équations** (IX^e-XI^e)
- Algèbre **formelle** et littérale (Viète : fin XVI^e) et géométrie algébrique (Descartes, XVII^e)
- Algèbre **structurale** (Galois...)
- Mathématiques **classiques** : XVII^e-XVIII^e (+ **analyse**)
Leibniz invente le concept de *fonction* (1673), puis le calcul infinitésimal (différentiel et intégral)
Début XIX^e, concept de *limite* (Cauchy, 1821) formalisé par Weierstrass ($\forall \epsilon \exists \delta \dots$)
- Mathématiques **modernes** : depuis 1830 (+ **topologie**)
- Les mathématiques dites « **contemporaines** » sont les mathématiques modernes d'aujourd'hui.
- Il n'y a pas de mathématiques **post-modernes**.

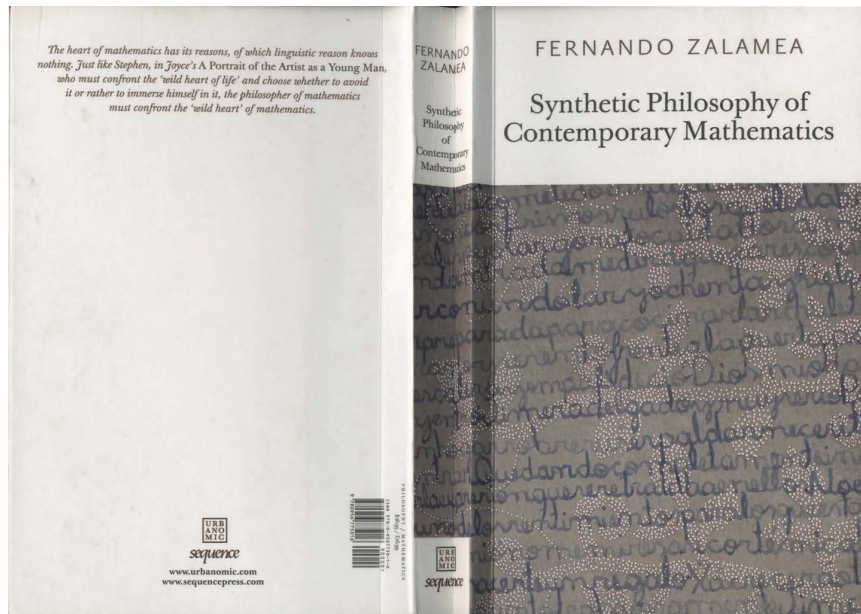
Périodisation des maths modernes

- 1) **M-I** : 1830-1870 (de Gauss-Galois à Dedekind) = constitution ;
 - 2) **M-II** : 1870 à la seconde guerre (de Cantor à Artin) = formalisation axiomatique ;
 - 3) **M-III** : de 1945 à 1980 (de Bourbaki-Grothendieck à Langland) = intrication globale sous le signe de la géométrie algébrique ;
 - 4) **M-IV** : maintenant = mathématiques contemporaines.
- Cette année, M-I c'est-à-dire avant Cantor (avant l'axiomatisation logique des mathématiques) $\Rightarrow$ 1828-1858

Autres périodisations

Les mathématiques modernes commencent plus tôt : au XVII^e (avec Descartes)

Les mathématiques modernes terminent plus tôt $\Rightarrow$ mathématiques contemporaines : par ex. Zalemea



Notre méthode

Affirmative

D'abord affirmative :

- s'approprier le contenu de pensée en comprenant (« prendre avec soi ») les idées et leurs enjeux ;
- créer des raisonnances intellectuelles.

Négative

Mais aussi négative sur deux fronts

- ni *formalisme* (de la tour d'ivoire),
- ni *positivisme* (de la fonctionnalité applicatrice)

Faire réellement des mathématiques

Pour comprendre, il faut faire $\Rightarrow$ faire des mathématiques

- formaliser algébriquement & interpréter géométriquement
- s'inscrire dans la reduplication mathématique : **un énoncé mathématique est mathématiquement énoncé**, il relève d'une énonciation mathématique. Cela implique deux choses :
 - un énoncé mathématique est mathématiquement évalué du point de sa démonstration : il est une conjecture ou un théorème ;¹⁰
 - un théorème est inséré dans une théorie.
- démontrer
- des théories et pas seulement des théorèmes $\Rightarrow$ des régions théoriques (régions dans une théorie donnée).

Mathématiciens aux pieds nus

En faire à notre manière : celle de mathématiciens aux pieds nus

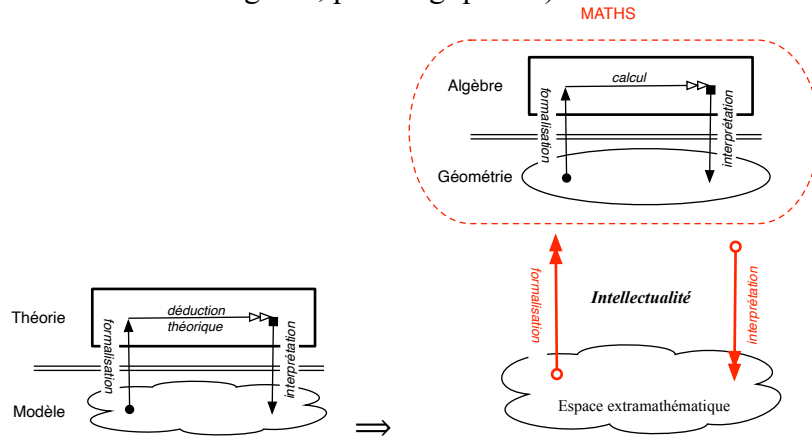
- lentement
- en mettant en raisonance la dialectique intramathématique (formalisation littérale algébrique /interprétation schématique géométrique) et une dialectique extramathématique (interprétation intellectuelle / formalisation mathématique)

formalisation et interprétation

Cf. la formalisation d'une situation de départ produit une *maquette théorique* dont les résultats

¹⁰ Cf. les mathématiques naissent avec la démonstration et donc avec les Grecs...

(théoriques) sont à interpréter dans la situation de départ prise alors comme *modèle canonique* ou *paradigme* (il y a des modèles hétérogènes, pathologiques...) :



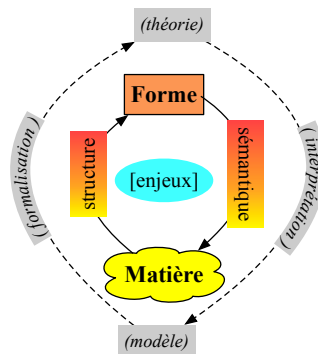
Attention : la forme est directrice, et non pas purement instrumentale, exécutrice, car effectivement calculatrice.

Distinguer :

- *formalisation* littérale (solfège, algèbre...) ;
- *formulation* langagière (cf. intellectualités...) ;
- *mise en forme* non systémique (sans système formel) : par exemple spatialisations par dessin, croquis, diagramme (tel celui ci-dessus).

Dialectique **forme/matière** selon **enjeux** respectifs (de la forme pour la matière, de la matière pour la forme).

Non pas : forme/contenu...



Notre programme

Six théories

Régions de 6 théories, couvrant le champ des premières mathématiques modernes (arithmétique, géométrie, algèbre, analyse, topologie et leurs intrications) :

Mathématiques grecques :

- arithmétique : Dedekind (1858)
- géométrie : Gauss (1828)

Mathématique préclassique :

- algèbre : Galois (1830)

Mathématique classique :

- analyse : Cauchy (1838)

Mathématiques modernes

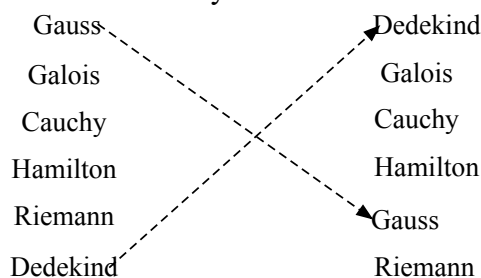
- topologie : Riemann (1854)
- intrication : Hamilton (1843)

Ni cet ordre, ni l'ordre chronologique, mais, pour des raisons didactiques :

Quel ordre ?

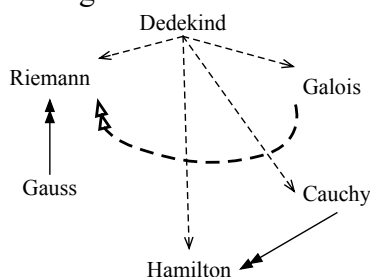
Pas l'ordre chronologique (Gauss-Galois-Cauchy-Hamilton-Riemann-Dedekind) mais

Dedekind-Galois-Cauchy-Hamilton-Gauss-Riemann :



Raisons ? Pour

- 1) exhausser le paradigme des révolutions par adjonction-extension, inventé par Dedekind mais servant de modèle pour 4 d'entre eux : Galois (adjonction des groupes), Cauchy (adjonction de i), Hamilton (adjonction de j et k), Riemann (adjonction des atlas à Gauss) ;
- 2) enchaîner Hamilton des grandeurs quaternioniques au Cauchy des grandeurs complexes ;
- 3) enchaîner Riemann à Gauss (les variétés sont une extension de l'intrinsèque des hypersurfaces par adjonction d'atlas) ;
- 4) aller globalement de l'algèbre vers la géométrie.



Six adjonctions-extensions

Dedekind nous fournira le modèle – le paradigme – des révolutions modernes qui va éclairer les cinq autres théories :

		<i>adjonction immanente</i>	<i>extension démessurée</i>	<i>renoncement circonscrit</i>
arithmétique	Dedekind	coupures	rationnels → réels discret → continu	dénombrabilité
géométrie	Gauss	courbures	espaces non euclidiens	unicité de la platitude euclidienne
algèbre	Galois	groupes	des équations polynomiales	résolubilité classique
analyse	Cauchy	imaginaires	réels → complexes	ordre
topologie	Riemann	atlas	(hyper)surfaces → variétés intrinsèque : connaissance → constitution	univocité fonctionnelle
intrication	Hamilton	+ 2 dimensions	complexes 2D → quaternions 4D	commutativité

Enjeux

			Enjeux
Gauss	1828	géométrie	Du savoir extrinsèque à la connaissance intrinsèque
Galois	1830	algèbre	L'organisation moderne
Cauchy	1838	analyse	« Il n'y a pas que ce qu'il y a » car, en sus de ce qu'il y a effectivement, il y a les possibles.
Hamilton	1843		Il faut 3+1 dimensions pour s'orienter (se repérer, se situer et se diriger)
Riemann	1854	topologie	Constitution intrinsèque

Dede-kind	1858	arithmétique	Les révolutions modernes sont par adjonction-extension
-----------	------	--------------	--

Nos livres de travail

- **(Gauss)** - François Rivière : *Initiation à la géométrie de Riemann. Première partie : Surfaces et géométrie de Gauss*
(Calvage & Monnet, 2016)
- **(Galois)** - Ian Stewart : *Galois Theory* (Chapman & Hall/CRC, third edition, 2004)
- **(Cauchy)** - Ian Stewart et David Tall : *Complex Analysis* (Cambridge University Press, 2018)
Tristan Needham : *Visual Complex Analysis* (Clarendon Press 1997- Oxford)
- **(Hamilton)** - Romain Vidoine : *Groupe circulaire, rotations et quaternions* (Ellipses, 2001)
Andrew J. Hanson : *Visualizing Quaternions* (Elsevier, 2006)
- **(Riemann)** - John M. Lee : *Introduction to Topological Manifolds* (Springer, 2011)
Introduction to Smooth Manifolds (Springer, 2013)
Introduction to Riemannian Manifolds (Springer, 2018)
- **(Dedekind)** - Richard Dedekind : *La création des nombres* (Vrin, 2008)

I : Dedekind

Problématique

Question de révolutions : 3 types $\Rightarrow$ passage de révolutions critiques à révolutions affirmatives.

- Exemple des révolutions politiques
- Voir aussi révolutions organisationnelles (c'est-à-dire du corps groupé d'un sujet) : Église catholique, psychanalystes lacaniens en France...

Résultats

On ne perd pas l'ancien qui est préservé dans une « réserve » muséale.

Mais il faut renoncer en un point circonscrit : il y a un prix délimité à payer.

II : Galois

Problématique

Constitution de groupe ? $\prod$ ou $\sum$?

Abord classique : une équation polynomiale fixe une propriété individuelle distinctive par sommation de différents rapports à soi (« puissances »). D'où, si le rapport à soi va jusqu'à la puissance n (x^n), il y aura n individus.

Une telle équation qui caractérise une inconnue x , vise à passer de l'inconnu au connu, c'est-à-dire à être résolue, c'est-à-dire à s'évaporer comme équation.

Révolution moderne : cette même équation de degré n *groupe* n individus en formalisant une propriété en partage mais sans pour autant les individualiser. Ainsi le nombre-racine n'est pas individualisé puis additionné aux autres mais il est épinglé par une propriété distinctive non individualisante.

L'équation, maintenant, caractérise un groupe de racines. Elle n'est pas destinée à être résolue individuellement et donc à s'évaporer mais tout au plus à mettre son groupe au jour.

C'est un peu comme pour un groupe militant : chacun (chaque-un) est un militant, aux propriétés distinctives claires et définies (par les tâches militantes propres au groupe) mais pour autant, son identité individuelle extramilitante n'est pas précisée. D'où souvent l'emploi de pseudonymes.

Résultats

Dès que le groupe est d'au moins 5 membres, ceux-ci ne sont plus en général identifiables avec les moyens mis en œuvre pour constituer le groupe (ici moyens algébriques).

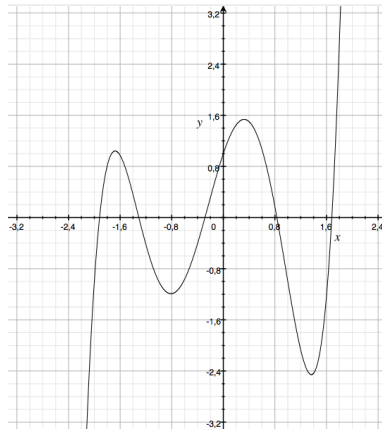
Un groupe moderne n'est pas un cartel qui se met en place « un par un ».

Cf. parabole de la ZAC de Nantes ! Les cinq racines réelles $\{-1.9..., -1.3..., -0.2..., +0.8..., +1.6...\}$ de l'équation $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$ resteront à jamais algébriquement clandestines, opposant une pseudonymie résolue à l'injonction de l'algèbre classique : « *Racines, vos papiers !* »

Exemple

$$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$$

Cette équation a 5 racines réelles comme la courbe de la fonction $P(x)=x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$ en atteste



Nomination par valeurs croissantes : A, B, C, D, et E.

$\Rightarrow A \approx -1,91... ; B \approx -1,30... ; C \approx -0,28... ; D \approx 0,83... ; E \approx 1,68...$

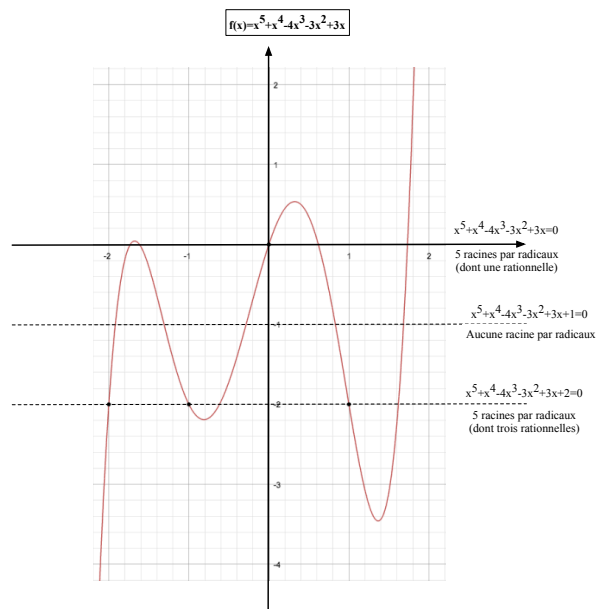
mais A, B, C, D et E sont algébriquement innommables ; ils ne peuvent avoir de carte d'identité algébrique comme en ont les 5 racines d'équations très proches :

- $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3)(x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow \{0, \pm\sqrt{3}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$
 - $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1)(x+2)(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow \{-2, \pm 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$
- $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1,91...)(x+1,30...)(x+0,28...)(x-0,83...)(x-1,68...) = 0$

Si l'on dessine le graphe de la fonction $f(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x$ et qu'on examine ses points d'intersection avec les trois droites horizontales $y=0$, $y=-1$ et $y=-2$, on voit sans voir ce qui se passe :

- on voit l'existence et le déplacement des 5 zéros,
- mais on ne voit aucunement pourquoi la troisième a 3 racines entières et pourquoi la deuxième (la nôtre) n'a aucune racine algébriquement formulable.

Autant dire que le secret ici à l'œuvre est bien algébriquement gardé !



III : Cauchy

Problématique des grandeurs complexes

Une situation en deux dimensions s'enrichit si les deux dimensions ne sont plus homogènes et simplement croisées, mais si elles sont hétérogènes (si l'une est réelle et l'autre imaginaire) et intriquées (car alors, y multiplier, c'est y tourner) : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

On interprètera les réels comme les effectifs et les imaginaires comme les possibles.

L'intrication $x+iy$ est une grandeur d'un type nouveau (algébrique-géométrique) et non pas un nombre.

Théorème de l'action restreinte

Si une fonction holomorphe relie deux points, alors elle peut relier deux points quelconques. Toute action régionale (reliant deux localités disjointes) a une portée globale !

Attention : relier par une fonction holomorphe est une contrainte forte qui, politiquement, correspond à une unification et non pas à une convergence des luttes ou une coalition d'intérêts !

IV : Hamilton

Problématique

De la même manière qu'on est passé de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, pourrait-on passer de $\mathbb{C}$ au 3D en adjoignant j à i ?

Résultats

C'est impossible car cela ne ferme pas.

Il faut passer de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{H}$ en adjoignant à i la paire j & k .

D'où un 4D qui est structuré comme 3+1 : il y a une dimension qui paramètre et mesure l'ensemble (en politique, c'est l'organisation – d'où l'opposition politique : cet opérateur d'organisation politique est-il l'État, un Parti ou une organisation d'un autre type ?)

Il faut une telle structure pour s'orienter : se repérer, se situer et se diriger.

Exemples

- Espace-temps
- Le quaternion communiste
- Dans la philosophie de Badiou : l'être, l'apparaître, l'événement + les Vérités-sujet

V : Gauss

Problématique

Espaces courbes ? D'où la courbure d'une surface à partir de son examen extrinsèque.

Il va construire une courbure qui sera intrinsèque (à la différence de celle de Sophie Germain) mais qui sera caractérisée par restriction ou projection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$.

Résultats

Il y a intelligence intrinsèque de la courbure : la surface est intrinsèquement saisissable, intelligible ; on peut la saisir en intériorité, sans se référer à un point de vue en surplomb. Il y a une connaissance intrinsèque et pas seulement des savoirs extrinsèques.

Il y a des espaces non euclidiens.

VI : Riemann

Problématique

Une fois la généralisation faite surfaces → hypersurfaces, peut-on étendre l'intrinsèque ?

Oui, par adjonction d'un atlas (c'est-à-dire d'un ensemble cohérent d'images mentales), on va passer des hypersurfaces aux variétés qui existent de manière purement intrinsèque, sans espace ambiant constituant.

On passe de la possibilité d'une connaissance intrinsèque (Gauss) à une constitution intrinsèque de la situation : l'intrinsèque constitue l'inspect !

Résultats

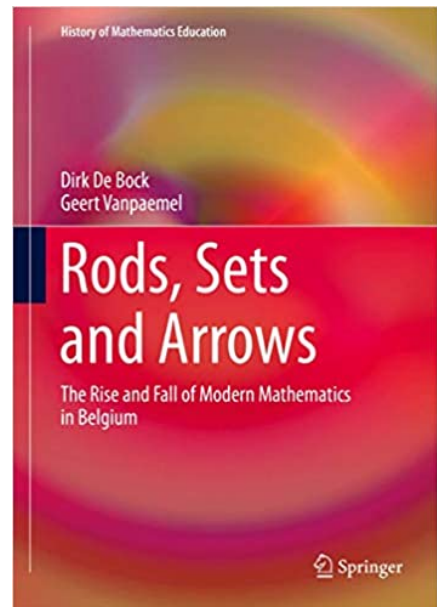
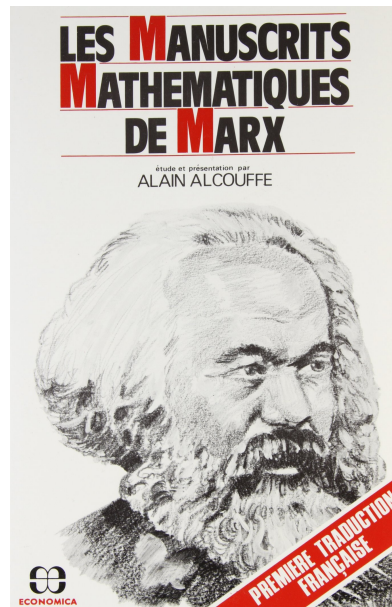
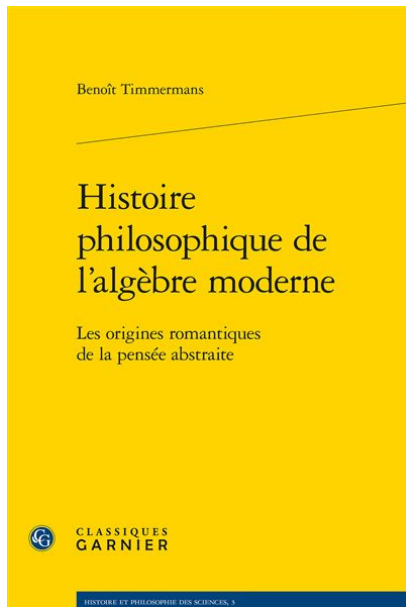
Immanence radicale. Plus besoin de surplomb, de sujet supposé savoir, d'universitaires, de point de vue de Sirius, de géopolitique, de musicologues, etc. !

La variété peut s'orienter elle-même sans avoir besoin de s'orienter à un extérieur (à un ciel).

Et si elle le peut, alors dualité : deux et deux seulement.

Tout n'est pas politique, tout n'est pas sexuel mais si une situation est politisable ou sexualisable, alors elle l'est de deux et seulement de deux façons.

TROIS BRÈVES MONOGRAPHIES



- (Novalis) - Benoît Timmermans : *Histoire philosophique de l'algèbre moderne. Les origines romantiques de la pensée abstraite* (Classiques Garnier, 2012)
- (Marx) - *Manuscrits mathématiques de Marx*, traduits par Alain Alcouffe (Economica, 1985)
- (Réforme des maths modernes) - Dirk De Bock et Geert Vanpaemel : *Rods, Sets and Arrows. The Rise and Fall of Modern Mathematics in Belgium* (Springer, 2019)

A. Novalis et l'algèbre (fin XVIII^e)

Novalis (1772-1801) $\Rightarrow$ brève vie intellectuelle de seulement 6 ans.

Novalis est son nom de plume qui veut dire « Celui qui cultive du nouveau ».

Novalis a une formation d'ingénieur (il se destinait à la gestion des salines).

À la toute fin du XVIII^e, les mathématiques sont devenues un désert en Allemagne :

- Lagrange, qui avait pris la succession d'Euler à Berlin, est parti pour Paris en 1777 suite à la mort de Frédéric II de Prusse ;
- Gauss n'émergera qu'à partir de 1801.

Plus largement, les mathématiques classiques sont alors dans un très mauvais état subjectif (voir plus haut).

Par contre le premier romantisme – le romantisme allemand dit de Iéna – se constitue, avec Fichte (à partir de 1794) et les frères Schlegel (à partir de 1798 : la revue *Athenæum*).¹¹

Novalis, loin d'ignorer les mathématiques, et moins encore de les mépriser (comme le feront la plupart des romantiques français beaucoup plus tardifs, il est vrai organisés dans une rivalité implicite avec le positivisme contemporain d'Auguste Comte pour savoir qui a l'exclusivité de la vérité : l'art romantique ou la science positiviste ?), les encense : on trouve sous sa plume un hymne (poétique ou littéraire) aux mathématiques qui aura pour seul successeur celui de Lautréamont, à la fin du XIX^e.

Voir, dans ses *Fragments* (collection bilingue Aubier-Montaigne, 1973), ses « fragments mathématiques » de 1799-1800.

Novalis déclare vouloir « romantiser le monde » et précise que « romantiser, c'est comme algébriser » !¹²

¹¹ Sur tout ceci, voir le livre de Nancy et Lacoue-Labarthe : *L'absolu littéraire*

¹² « Romantisiren ähnlich dem Algebraisiren » Brouillon n°10, in *Schriften*, vol. 3, p. 242

Ce faisant, Novalis se rapporte à l'algèbre comme paradigme de pensée, mais sans donner de détails techniques. En fait, il se rapporte à l'idée d'algèbre plutôt qu'à sa réalité contemporaine (comme on sait, la théorie algébrique est alors enlisée dans les problèmes de résolution de l'équation quintique). D'où pour nous deux questions :

- 1) Quelle idée de l'algèbre a-t-il ?
- 2) Pourquoi cette idée intéresse-t-elle son projet romantique ?

Répondons rapidement à ces deux questions, non dans un esprit historiographique mais pour dégager ce qui de cette expérience intellectuelle peut intéresser notre travail, 250 ans plus tard !

Je m'appuierai ici non seulement sur le livre de Timmermans mais également sur les précieux éclairages historiques apportés par les travaux de Philippe Séguin ¹³.

L'algèbre comme formalisation

Mon hypothèse ¹⁴ est que Novalis se rapporte à l'algèbre pour son pouvoir de formaliser la pensée mathématique et par là la pensée scientifique et finalement toute la pensée humaine, l'algèbre formalisant littéralement les problèmes de la pensée en construisant pour ce faire des équations donnant forme au problème considéré.

Novalis fait ainsi souvent référence à la problématique dite « combinatoire » de Hindenburg (1799) qui, s'appuyant sur le binôme de Newton ¹⁵, propose un développement polynomial infini (*développement en série*) qu'il appelle « *infinîtome* » ¹⁶ dont le modèle est pris dans le développement en série de Taylor (1715), développement d'une fonction au moyen de la série infinie de ses dérivées qui, moyennant quelques compléments, va finalement autoriser l'écriture de formules comme celle-ci pour x au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

L'idée de Hindenburg était de faire de l'algèbre le fondement de l'analyse, c'est-à-dire de la discipline mathématique proprement classique (qui se trouvait alors engluée dans un calcul non rigoureux de quantités infinitésimales - nous allons y revenir avec Marx).

« Romantiser »...

Or, pour Novalis, la tâche intellectuelle – pas seulement poétique ou littéraire – est de « *romantiser le monde* ». Qu'entend-il par là ? Lisons-le :

« Le monde doit être romantisé [romantisiert]. Ainsi sera retrouvé le sens [Sinn] originel. Romantiser [romantisieren] n'est rien d'autre qu'une élévation en puissance [Potenzierung] qualitative. Le soi [Selbst] inférieur se trouve identifié dans cette opération à un Soi meilleur. Nous sommes nous-mêmes une pareille série de puissances [Potenzenreihe] qualitatives. C'est là une opération qui est encore totalement ignorée. Quand je donne aux choses communes [Gemeinen] un sens plus élevé [hohen Sinn], un air mystérieux à ce qui est habituel, la dignité de l'inconnu à l'ordinaire et au connu, un miroitement infini au fini, alors je les romantise [romantisieren]. Et pour le sublime, l'inconnu, le mystique, l'infini, l'opération est à l'inverse : au moyen de ce rajustement on le logarithmise [logarithmisiert]. Cela devient une expression courante. Philosophie romantique. Lingua romana. Élévation [Wechselerhöhung] et

¹³ Voir en particulier ses deux articles :

- *La recherche d'un fondement absolu des mathématiques par l'École combinatoire de C. F. Hindenburg (1741-1808)* (<https://journals.openedition.org/philosophiascientiae/380>)
- *Un rêve poético-mathématique de Novalis et C.F. Hindenburg* (<http://revel.unice.fr/alliage/images/pdf.gif>)

¹⁴ Je ne suis pas très savant sur cette séquence historique de l'Allemagne, et plus précisément de la Prusse...

¹⁵

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

Par exemple : $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

¹⁶ très mal traduit par « multinôme »

abaissement [Erniedrigung]. »

Romantiser, c'est élever le fini à la dignité de l'infini, tout comme un développement en série infinie élève une formule de quelques lettres ($\frac{1}{1-x}$) à la dignité d'une formule sommant une infinité de lettres ($\sum_0^\infty x^n$).

Ce passage du fini à l'infini, Novalis l'appelle une « *élévation en puissance* » (le modèle algébrique est patent) et le mouvement inverse de l'infini au fini, il l'appelle « *logarithmisation* » (puisque le logarithme est l'inverse de l'exponentielle).

Cette dialectique du fini et de l'infini, Novalis l'appelle « *expression* ».

Notons que cette dialectique expressive relève du bond, non de la transition progressive : « *La nature se transforme par bonds. [...] Mesure constante du génie, le bondisseur par excellence.* »

Dialectique fini-infini...

Arrêtons-nous là.

Pour Novalis, il s'agit de saisir le fini dans son unité dialectique avec l'infini ¹⁷.

Le paradigme formel d'une telle unité, Novalis le trouve dans l'algèbre des séries infinies (convergentes ¹⁸).

À la lumière de la formalisation algébrique, penser implique donc de donner forme à cette pensée.

Donner forme à la pensée générale de cette unité dialectique se fera par le langage car « *la langue est un mètre de la pensée [Gedankenmeter]* » et « *il en va du langage [Sprache] comme des formules mathématiques* ».

Ainsi, romantiser le monde, c'est l'exprimer en le plongeant dans l'infini – et « *rien n'est plus accessible à l'esprit que l'infini.* ».

Autrement dit, romantiser, c'est exprimer le potentiel infini du fini en le faisant émerger selon une langue prenant confiance dans le formalisme algébrique.

Novalis, ce faisant, installe la pensée dans une scission dialectique de ce que *mettre en forme* veut dire : l'unité d'une formalisation littérale (algébrique) et d'une formulation discursive (littéraire).

Trois points

Pour nous modernes du début du XXI^e siècle, reprenons tout ceci en trois points.

1) L'enjeu de la pensée vraie est la dialectique fini-infini.

Le romantique Novalis engage cette dialectique dans le sens chrétien d'un rachat du fini par l'infini – l'homme relevé en Dieu, l'animal humain pécheur élevé à la dignité de fils de Dieu. D'où le romantisme comme désir d'infini, inassouissable sur terre...

La suite de la modernité va renverser la dialectique et la remettre sur son socle infini : le fini, depuis Badiou, peut être compris comme le déchet d'un infini premier – mieux : d'une infinité intriquée d'infinis (sans unique Infini Maître : si la montée vers l'Absolu est bien bornée, il n'y a cependant pas pour autant d'Infini maximum). Nous, modernes du XXI^e siècle, vivons ainsi dans la prolifération infinie des infinis et la production d'œuvres, elles spécifiquement finies, devient alors la marque de notre grandeur propre : si l'infini est le milieu divin, nous sommes des dieux capables de créer du fini !

2) Mettre en œuvre cette dialectique fini-infini, c'est lui donner forme.

Ce point est décisif : il marque une rupture – un saut dirait Novalis – par rapport à la pensée classique qui dialectise forme et fond en faisant ainsi de la forme une sorte d'habillage, de revêtement, d'apparence apte à *contenir* un fond, devenu contenu de la forme.

La conception moderne de la forme est plutôt de structurer une matière de pensée dans une situation donnée (qui sert à la pensée de « modèle » au sens de la théorie des modèles) : la forme

¹⁷ Cette question n'est pas celle du classicisme. Elle est la question qui ouvre le romantisme et qui, ce faisant, inscrit le romantisme dans la modernité naissante.

¹⁸ La question de la convergence n'est pas encore clarifiée à cette époque. Il faudra pour cela attendre Cauchy and C^o...

ossature une matière en la dotant d'une structure émergente.

On reverra tout ceci en détail lorsqu'on examinera la théorie algébrique des groupes de Galois : l'équation polynomiale n'y sera plus une forme littérale donnée à une inconnue x , forme destinée à la faire apparaître comme connaissable mais la même équation deviendra la forme constituante d'une structure de type nouveau : le groupe des symétries entre les racines. Autrement dit, la forme polynomiale n'est plus l'apparence constituée d'un individu, apparence en éclipse permettant d'identifier en épongeant l'équation, mais la structure constituante d'un groupe collectif qui ne saurait se réduire à quelque collection d'individus identifiables.

Pensons aussi à la problématique (moderne) du poète Gerard Manley Hopkins : l'*intension* (l'*instress*) fait émerger l'*inspect* (aspect interne ou forme intérieure)...

- 3) Mettre en forme, c'est dialectiser une formalisation (déposant un formalisme littéral) et une formulation discursive.

La formalisation littérale autorise le calcul à la lettre. La formulation discursive autorise l'interprétation signifiante.

En mathématiques, et ce depuis l'invention de l'algèbre au IX^e siècle, cela prend la forme privilégiée (mais pas exclusive) d'une dialectique entre formalisme calculatoire algébrique et interprétation intuitionnante géométrique.

Force est malheureusement de constater que l'orientation du romantisme selon cette lumière algébrique n'a pas été reprise et prolongée par le romantisme artistique et littéraire du XIX^e.

Bien sûr, il y aura bientôt Hegel, mais c'est une autre affaire que la nôtre...

Trois directives

Je propose de tirer de tout cela trois directives pour notre aujourd'hui :

- 1) Penser implique de mettre en forme c'est-à-dire de structurer, de donner à la pensée un squelette formel.

Par exemple en politique, formaliser une ligne, c'est l'organiser, et l'organisation politique n'est aucunement une forme administrative secondaire mais la mesure exacte de la mise en œuvre de cette politique (voir par exemple la réunion politique comme lieu de pensée et de décision, comme juste mesure du travail politique).

- 2) Dans la modernité, mettre en forme dialectise une formalisation et une formulation c'est-à-dire intrique une formalisation plus abstraite et une interprétation plus intuitive (interprétation mathématique des lettres de l'algèbre dans les figures de la géométrie et interprétation intellectuelle des structures conceptuelles dans les mots de la langue).

- 3) De ce point de vue, il faut sans doute incorporer le romantisme dans la modernité.

En particulier pour la musique contemporaine (entendue comme la musique moderne d'aujourd'hui), il faut incorporer, la musique romantique (de Schubert à l'expressionnisme post-romantique de Schoenberg en passant par Schumann et Wagner) dans la modernité musicale, une modernité musicale qui se constitue contre – tout contre ! – le classicisme musical plutôt que, comme Boulez le voulait, radicalement contre le romantisme.

Vaste affaire qui implique d'intriquer plus étroitement constructivisme et expressionnisme.

Petite publicité personnelle : ma prochaine création Ircam, dans ce théâtre même en octobre 2022, intitulée *Petrograd 1918*, marque une avancée significative dans ce sens, en particulier par rapport à mon ancienne œuvre *Duelle* (2001).

Florilège complémentaire

« Toute personne composée de personnes est une personne à la deuxième puissance, - autrement dit un génie. »

« Le public est une personne intéressante, variée, nombreuse et vaste à l'infini. »

Le public comme sujet collectif...

« Nous ne savons une chose qu'autant que nous l'exprimons, c'est-à-dire que nous pouvons la faire. Mieux nous pouvons produire diversement et achever parfaitement quelque chose, mieux nous la connaissons. »

Connaître, c'est pratiquer, et pratiquer c'est exprimer...

« *Toutes les limites qui existent, c'est seulement et tout simplement pour qu'elles soient franchies.* »

L'infini comme franchissement du fini...

« *La patience est double : supporter calmement le manque, la privation – supporter calmement le surcroît, l'excès.* »

Dialectique du manque et de l'excès...

« *L'égalité absolue, voilà le suprême chef d'œuvre.* »

Ici, la problématique romantique du génie sert celle de l'égalité plutôt qu'elle ne s'y oppose. Où

B. Marx et le calcul différentiel classique (fin XIX^e)

Voir étude plus détaillée dans un fichier spécial

Les manuscrits mathématiques de Marx [MMM] ont été rédigés en 1881 à destination de Engels, donc deux ans avant la mort de son auteur.

Ils sont privés et n'étaient aucunement destinés à la publication.

Orientation générale

Marx s'intéresse aux mathématiques depuis longtemps ; il en fait « pour se détendre », pour l'exercice intellectuel en soi et non en vue de quelque application utilitaire ¹⁹ :

« *Je fais de l'algèbre pour calmer mon impatience.* » (6 mai 1859)

« *La seule activité grâce à laquelle je puisse conserver la tranquillité d'esprit indispensable, ce sont les mathématiques.* » (23 novembre 1860)

« *Pendant mes loisirs, je fais du calcul différentiel et intégral.* » (6 juillet 1863)

« *Dans les intervalles, puisqu'on ne peut écrire sans interruption, je fais du calcul différentiel dx/dy .* » (20 mai 1865)

Les MMM sont centrés sur le calcul différentiel [CD] en lien avec l'étude par Marx de la *Science de la Logique* de Hegel où le calcul infinitésimal ²⁰ tient une place importante.

Point décisif : Marx traite du CD tel qu'il se présentait pour Hegel c'est-à-dire dans sa version classique ²¹, avant la version moderne que Cauchy va lui donner dans les années 20. Plus généralement Marx ignore tout des mathématiques modernes qui existent pourtant alors depuis plus de 50 ans.

On prend ici mesure de ce qu'il ne s'agit pas pour Marx d'éclairer sa pensée – c'est-à-dire sa philosophie et plus précisément sa dialectique - par les mathématiques (classiques) mais, à l'inverse, de mettre les mathématiques du CD à l'épreuve de sa dialectique : la flèche va donc clairement de la dialectique aux mathématiques (dialectique → mathématiques) et non pas l'inverse.

Du travail du négatif dans la dialectique de l'époque...

S'agissant d'une collection de notes personnelles, non d'un traité rédigé comme tel, notes dont nous n'avons pas le temps d'examiner ici le détail, je procèderai synthétiquement en vous livrant mon hypothèse globale.

Pour Marx, l'enjeu philosophique de ce travail est de prendre mesure, dans le CD, des différences entre sa dialectique et celle de Hegel, et ce sur un point précis : que produit exactement le travail du négatif lorsqu'on le mesure à la productivité de la double négation ?

Je m'explique.

Avec Hegel s'engage un nouveau cycle stratégique de la dialectique (n'oublions pas que celle-ci remonte à Héraclite, c'est-à-dire à la fin du VI^e siècle grec avant JC !

Ce cycle centre la dialectique sur le travail propre du négatif et sa puissance créatrice : c'est le négatif (la critique, l'opposition, la contradiction, la lutte, le conflit, etc.) qui opère au principe de toute dynamique sous la forme de l'unité des contraires. Et ce négatif avère sa productivité propre par la négation de la négation, par la double négation donc, car celle-ci ne ramène nullement à l'affirmation de départ mais à sa relève.

À partir de quoi va s'engager un immense cycle stratégique allant de la *Science de la Logique* de Hegel (1812...) jusqu'à *Théorie du sujet* de Badiou (1982) en passant bien sûr par le Mao des essais philosophiques (*De la contradiction*, 1937).

Pour une restitution de cette histoire, je conseille le petit livre de Badiou *Théorie de la contradiction* (1975) dont j'ai installé une version consultable en ligne sur mon site *Entretemps* ²².

¹⁹ En particulier, il n'en traite aucunement dans le but de formaliser mathématiquement son économie politique.

²⁰ Calcul infinitésimal = calcul différentiel & calcul intégral

²¹ Hegel écrit sa *Science de la Logique* pendant un suspens du développement mathématique, la mathématique classique étant alors en panne et la mathématique moderne n'étant pas encore engagée.

²² <http://www.entretemps.asso.fr/Badiou/Theorie-de-la-contradiction.pdf>

Depuis le milieu des années 80, Badiou²³ engage un nouveau cycle stratégique sur la dialectique, en raisonance avec le nouveau cycle stratégique que la politique communiste doit engager après l'échec de la Révolution culturelle chinoise, que l'on nommera celui d'une dialectique affirmative (où l'affirmation est au principe de la dynamique, la négation intervenant désormais en rang secondaire et non plus principal).

Appelons donc ce grand cycle 1812-1982 (170 ans) celui d'une dialectique négative, non pas au sens adornien d'une hypernégativité, mais au sens d'une primauté donnée au travail du négatif.

Tout ceci rappelé pour dire que Marx est à la recherche d'une trace, dans les mathématiques du CD, de cette puissance créatrice du négatif.

Paradoxes du CD classique

Marx va le lire dans ce résultat du CD classique, qu'il formule paradoxalement ainsi :

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ et } \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{0}{0} !!!$$

Disséquons ce paradoxe et ses conséquences intellectuelles.

Pour comprendre l'imbroglio dans lequel se trouve le CD classique en fin de son parcours – c'est-à-dire avant la grande réforme conceptuelle que Cauchy va impulser au début du XIX^e (1817...) ²⁴ - formalisons le CD classique ainsi :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$$

où dy et dx désignent des quantités infinitésimales (c'est-à-dire infiniment petites) alors que Δy et Δx désignent des quantités simplement finies. En effet, le CD classique conçoit la différenciation (ou la dérivation) c'est-à-dire le rapport dy/dx comme une division entre quantités infinitésimales.

1) Le calcul présuppose implicitement que la limite du rapport Δy/Δx est le rapport des limites 0/0. Or ceci est en général faux :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \neq \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)}$$

$$\text{Exemple : } y = x^2 + x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 1 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = 1 \text{ quand } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y) = 0 \text{ et } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) = 0$$

2) On ne dispose pas alors d'une notion mathématique claire de l'infini, moins encore de l'infiniment petit et donc l'hypothèse d'existence de quantités infiniment petites va conduire le CD à des calculs intuitifs et peu rigoureux qui vont faire se multiplier les paradoxes.

Voici un exemple d'arithmétique bricolée sur les infinitésimaux :

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2x \cdot dx + (dx)^2}{dx}$$

Le point clef est alors de considérer (dx)² comme négligeable par rapport à dx.

D'où la dérivée de x² :

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

La difficulté devient alors : comment fait-on avec les dérivées secondes - qui nécessitent de ne plus négliger (dx)² - et ainsi avec ces quantités, dans un premier temps négligées puis réintégrées dans le calcul ?

On pressent la difficulté de déployer une arithmétique rigoureuse de quantités infiniment petites alors que les mathématiques classiques n'ont pas de notion claire

- 1) des nombres réels (il faudra attendre Dedekind- ce sera l'enjeu de notre prochaine leçon),
- 2) de l'infini (ce sera à nouveau l'affaire de Dedekind)
- 3) et moins encore de nombres infiniment petits (ce sera l'affaire, dans la seconde partie du XX^e, des nombres hyperréels de Robinson – analyse non-standard – et des nombres surréels de

²³ Voir *L'être et l'évènement* (1988) et ses suites...

²⁴ Voir en particulier son fameux cours d'analyse à l'École polytechnique publié à partir de 1821.

Conway).

Cauchy et la notion de limite

Cauchy va sortir cette mathématique de l'impasse en reconstruisant le CD sur la notion de limite, qui ne fait plus appel à des quantités infinitésimales mais seulement à un contrôle rigoureux des quantités ordinaires.

Je rappelle l'idée, telle qu'elle sera formalisée par Weierstrass :

$$f(x) \rightarrow f(a) \text{ quand } x \rightarrow a \text{ si } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tels que } |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, on peut approcher $f(a)$ d'aussi près qu'on veut par contrôle de l'écart sur la variable x .

Le CD moderne va contrôler cette réduction de $\Delta x = |x-a|$ autant qu'on veut et jusqu'à sa limite en la notant d'une nouvelle lettre « d » qui désigne un opérateur sur « x » et non plus une quantité infinitésimale :

$$\Delta x \xrightarrow{dx} 0$$

Dans le CDD moderne, le rapport de Δx à dx n'est donc plus un rapport entre quantités finies Δx et infiniment petites dx mais un rapport entre une *quantité* (finie) et un *opérateur* (qui réduit dynamiquement cette quantité).

On passe ce faisant d'un calcul arithmétique sur des quantités infinitésimales à un calcul algébrique sur un opérateur différentiel.

Ce qu'il faut alors bien comprendre, c'est que l'écriture dy/dx ne va plus nommer une division arithmétique mais noter un opérateur composé rapportant l'opération dx à l'opération dy .

La formule dx/dy de la dérivée n'est donc plus une division des différentielles séparées dx et dy si bien que passer de $dy/dx = f'(x)$ à $dy = f'(x).dx$ n'est plus l'opération arithmétique qui fait passer $A/B = C$ à $A = C.B$ mais c'est une abréviation commode pour l'écriture rigoureuse

$$\frac{dy}{du} = f'(x) \frac{dx}{du}$$

où x et donc $y=f(x)$ sont fonctions d'une variable auxiliaire quelconque u .

Le travail du négatif dans le CD classique

Revenons au CD classique que pratique Marx et le paradoxe qui le fascine :

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ et } \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{0}{0}!$$

Marx s'y intéresse philosophiquement et lit ce paradoxe comme formalisant le travail dialectique du négatif.

En effet, $0/0$ est mathématiquement indéterminé - c'est une expression sans sens mathématique (« une chimère », « un rapport extravagant ») – alors que $\Delta y/\Delta x$ est parfaitement déterminé.

Voici ce qu'écrit Marx à ce sujet :

- « *La consolation à laquelle se raccrochent quelques mathématiciens rationalisant et selon laquelle dy et dx ne seraient quantitativement en réalité qu'infiniment petits, [leur rapport] tendant seulement vers $\frac{0}{0}$, est une chimère.* »
- « *La dérivée apparaît comme la valeur-limite du rapport des différentielles, un rapport de quantités évanouies.* »
- « *$\frac{0}{0}$ [est un rapport « extravagant »] dans lequel le numérateur est indissociable du dénominateur.* »
- « *$\frac{0}{0}$ peut prendre n'importe quelle valeur mais ici [dans la différentielle dy/dx] $\frac{0}{0}$ apparaît égal à une valeur particulière tout-à-fait déterminée.* » « *Ici $\frac{0}{0}$ apparaît comme équivalent symbolique d'une valeur réelle tout à fait déterminée.* »

Donc la formule paradoxale $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{0}{0}$ manque le point décisif : elle manque la dialectique effective entre dy et dx , qui loin de se perdre dans l'indéterminé du paradoxe, produit du déterminé (la dérivée

ou la tangente qui sont parfaitement déterminés).

Et cette dialectique différentielle met en œuvre la puissance du négatif de part en part. C'est donc que le travail du négatif est bien en capacité de déterminer et pas seulement de détruire.

Mais comment lire le travail du négatif dans l'opération différentielle ?

Le travail du négatif apparaît doublement dans l'opération différentielle :

- d'abord comme double négation (c'est-à-dire négation de la négation) dans l'opérateur différenciant dx ;
- ensuite comme rapport entre deux doubles négations dans l'opérateur différentialisant dy/dx .

Détaillons tout cela.

L'opérateur différenciant dx est un opérateur de double négation

D'abord que veut dire dx ? dx désigne l'opération qui annule la petite différence première $\Delta x = x - x_0$, qui donc fait s'évanouir la différence inscrite par Δx .

- On a ici une première négation de x_0 par introduction d'un x différent et proche. Δx mesure ce premier travail du négatif : ce travail de différenciation de x par rapport à x_0 .
- Ensuite dx vient réduire à rien cette différenciation en rapprochant x de x_0 .

Au total, dx formalise une double négation de x_0 : une première négation par $x \neq x_0$ et la négation de cette négation par annulation de cette différence première.

À ce niveau, la double négation n'est productrice de rien du tout car $dx \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$ c'est-à-dire quand $x \rightarrow x_0$ ce qui ramène purement et simplement x à son point de départ x_0 .

Fécondité de l'opérateur différentialisant dy/dx

La productivité du travail du négatif va seulement apparaître quand on met en rapport les deux différences évanouissantes dy et dx puisque cette fois $dy/dx \rightarrow y'$ et non pas $dy/dx \rightarrow 0/0$.

Ainsi le travail du négatif s'avère ici productif non via le simple travail d'une double négation mais par la mise en rapport de deux doubles négations, en l'occurrence de deux différences évanouissantes : dy/dx

Et cette productivité se donne dans la capacité différentielle de déterminer l'indéterminé c'est-à-dire dans un bond qualitatif puisque le calcul quantitatif débouche sur une mutation qualitative du résultat : sur une détermination de la limite du rapport et non pas sur son indétermination.

Pas de postérité

Voilà donc, me semble-t-il, ce qui intéresse Marx dans son étude du CD classique.

Il n'en tire pas de conséquences politiques – son but n'était pas là : il s'agissait pour lui de mettre son matérialisme dialectique à l'épreuve des mathématiques différentielles.

Il est vrai qu'il va mourir deux ans plus tard.

Force est de constater qu'aucun marxiste après lui ne reprendra la question – il faudra attendre la Révolution culturelle chinoise qui, dans les années 70, ressortira ces MMM des placards. Malheureusement, cela se fera dans une conception utilitariste des mathématiques...

Ainsi les marxistes ne vont plus prendre appui sur la pensée mathématique jusqu'aux années 60 du XX^e : Lénine va s'intéresser à la logique plutôt qu'à la mathématique et Mao restera complètement à l'écart d'une intellectualité mathématique. Il faudra attendre Badiou pour remettre les mathématiques, cette fois modernes, sur l'établi du marxisme en privilégiant, il est vrai, la nouvelle logique mathématique ²⁵ à la notable exception de son bijou sur les nombres surréels en 1990.

D'où l'importance, pour une intellectualité politique contemporaine, de reprendre tout cela.

Petit bilan de cette incursion dans les MMM

Marx s'est amusé – « détendu » - à trouver dans le CD classique une illustration de cette créativité dialectique où le travail de la double négation – différence évanouissante – débouche sur le bond

²⁵ celle de la théorie des modèles en 1969, celle de la théorie des ensembles en 1988, celle de la théorie des catégories en 2006, celle des grands cardinaux en 2018

qualitatif de l'indéterminé au déterminé.

Il s'en tiendra là dans ces manuscrits.

Bien sûr, nul ne songerait à le lui reprocher ; mais ce petit exercice – en quelque sorte un travail d'illustration mathématique - ne mérite pas non plus certains éloges qu'on a pu en faire en Chine comme s'il ouvrait quelque voie dans un abord matérialiste des mathématiques !

Notre ambition sera donc tout autre : non pas retrouver dans les mathématiques ce qui est déjà bien connu par ailleurs en sorte de montrer que la pensée mathématique est bien partie prenante de la pensée humaine mais, à l'inverse, nous instruire de la pensée mathématique pour mieux comprendre ce qu'une intellectualité contemporaine peut mettre en œuvre. Et pour ce faire, travailler sur les mathématiques modernes et non plus classiques, celles-là même dont notre temps hérité s'il est vrai que les mathématiques contemporaines sont les mathématiques modernes de notre temps.

D'où nos six régions théoriques qui vont cette fois nous apprendre des choses que nous ne connaissions pas auparavant, mieux encore : nous apprendre des choses que nous n'aurions pu connaître et comprendre sans leur appui en sorte que nous pourrions alors reprendre à notre compte le deuxième chant du poète Lautréamont (1869) :

« Ô mathématiques sévères, merci pour les services innombrables que vous nous rendez. Merci pour les qualités dont vous enrichissez notre intelligence. Sans vous, nous serions peut-être vaincus. Vous nous donnez la froideur, la prudence opiniâtre, la logique. Avec vos syllogismes, notre intelligence sent s'accroître ses forces audacieuses. »

C. La réforme franco-belge des maths modernes (fin XX°)

Cf. premier cours l'année dernière : le 11 octobre 2020 ²⁶

Cf. séminaire mamuphi à venir le 11 décembre 2021

⇒ aujourd'hui, présentation succincte d'un dossier inachevé...

France : la réforme dite « des maths modernes » (1966...)

Historique

Quatre étapes

0) Préhistoire (avant 1959) et contexte

- 1952 : Rencontre à Melun de Dieudonné, Choquet et Lichnerowicz avec Jean Piaget.
- 1956 : réunion de l'APMEP à Sèvres où Gustave Choquet compare les professeurs de mathématiques à des « *gardiens de musée, qui montrent des objets poussiéreux dont la plupart n'ont pas d'intérêt* ».
- Guerre froide : premier Spoutnik en 1957 ! L'Occident craint d'accuser un retard technologique ! ⇒ création en 1958 par l'**OCDE** d'une Commission chargée de rendre plus efficace l'enseignement des sciences et des techniques.
- Mutation scolaire :
 - 1959 : réforme Berthoin qui prolonge la scolarité de 14 ans jusqu'à 16 ans ⇒ la sélection qui se faisait à l'entrée du secondaire va devoir se faire dans le secondaire (cf. création d'un cycle commun 6°-5° avant orientation en 4°).
 - 1960 : suppression de l'examen d'entrée en sixième
 - 1963 : réforme Fouchet : collège unique (6°-3°) : Collèges d'enseignement supérieur (CES)

1) 1959 : Prise de conscience et réflexion

novembre 1959 : colloque Royaumont de l'OECE (future OCDE) sur la réforme de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Dieudonné y intervient et y énonce : « À bas Euclide ! »

2) 1964-1967 = Étape préparatoire : cf. groupes de travail

1964 : création des « Chantiers mathématiques » de l'APMEP ²⁷

Janvier 1967 : création de la Commission Lichnerowicz. La plupart des 18 membres appartiennent à l'APMEP.

Janvier 1968 : Colloque de l'APMEP ⇒ papier préparatoire « *Les étapes et les perspectives d'une Réforme de l'enseignement mathématique* ».

Avril 1968 : charte de Chambéry par l'APMEP - *Pourquoi l'enseignement mathématique doit être réformé ? Pourquoi cette réforme est possible ? Comment réaliser cette réforme ?*

⇒ création d'IREM ²⁸

1. - enseigner à tous une mathématique utile au monde moderne
 - une volonté démocratique « *de rendre mieux accessible un niveau d'abstraction anciennement réservé à des privilégiés* »
 - enseigner une mathématique contemporaine qui doit faire partie de la culture de tous, « *à l'époque des ordinateurs et de l'automatisation* »
2. enseigner la mathématique par une pédagogie active : « *L'introduction d'un nouveau contenu dans l'enseignement des mathématiques sera inopérante, voire néfaste, si elle ne s'accompagne d'une pédagogie appropriée : active, ouverte, la moins dogmatique possible, faisant appel au travail par groupe et à l'imagination des enfants* »

²⁶ <http://www.entretiens.asso.fr/Nicolas/mathsmodernes/1.Ouverture.html>

https://www.youtube.com/watch?v=ZwVkwylwGhw&list=PLfaS0zIQOD6T8l_q5vI7dttEMc_YkdeeF&index=6

²⁷ Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public

²⁸ Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques

3. créer des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

La réalisation des réformes commence par une expérimentation pédagogique sérieuse, par un effort accru pour la formation des maîtres »

Réalisation d'expériences pédagogiques et promulgation des nouveaux programmes ²⁹

3) Début des années 1970 : mise en œuvre, progressivement généralisée.

4) Années 80... : Enlisement, arrêt, retour, réaction

Calendrier très politique

Cf. corrélation tant avec la géopolitique de la guerre froide qu'avec la mutation gaulliste du capitalisme français (colonialisme→impérialisme) puis avec l'élan intellectuel émancipateur des années 60 culminant dans les événements de Mai 68.

Corrélation élan-tournant-recul avec l'histoire politique mondiale qui pivote au milieu des années 70 vers le néolibéralisme actuel.

Motivations

Dieudonné

« Rien de ce qui est enseigné au lycée en mathématiques n'a été découvert après 1800. » ³⁰

Aucune mathématique moderne n'était alors enseignée au lycée ! Je peux en témoigner personnellement.

Anna Sierpiska

« Il s'agissait de bâtir le savoir mathématique des élèves dès les premières classes et même dès la maternelle comme un grand édifice unifié, sur la base de concepts généraux tels que *ensemble, ordre, relation, groupe*, etc. »

Ceci engage la grande question didactique : l'ordre logique d'exposition d'une théorie est l'inverse de son ordre chronologique de constitution.

L'ordre didactique de compréhension doit-il épouser le premier (ordre axiomatique), le second (ordre empirique) ou doit-il se faire d'une troisième manière qui lui est propre ?

Telle serait plutôt ma position : l'ordre didactique de compréhension doit constamment marcher sur les deux jambes de la mathématique (formalisation et interprétation) en formulant ses enjeux de pensée.

André Lichnerowicz

« Ce n'est pas pour former des mathématiciens professionnels purs ou appliqués qu'un renouvellement de l'enseignement mathématique à l'école a été nécessaire ; ce l'est surtout et d'abord pour les futurs citoyens, [...] qui ne devront pas subir passivement les trames variées qui leur seront proposées ou imposées, qui ne devront pouvoir dire non à tels manipulateurs trop adroits d'ordinateurs, et ne pas capituler devant un terrorisme pseudo-scientifique » ³¹

Point de vue étatique : le parlementarisme suppose des citoyens éclairés.

APMEP

Pédagogie

- Pédagogie logique plutôt que mathématique : *la structure des mathématiques peut contenir toute*

²⁹ Par exemple *Initiation aux mathématiques modernes*, par le CNAM en 1969 :

« Le professeur René CHENON, titulaire de la chaire de mathématiques au CNAM, expose l'objet et le contenu du cours d'initiation aux mathématiques modernes proposé par le Conservatoire national des arts et métiers. Il présente les personnes invitées à suivre ce cours : Monsieur de BERANGER, ingénieur qui s'occupe du traitement de l'information en entreprise, Madame Catherine LEHMANN, professeur agrégée de philosophie, et Monsieur THEODORE, spécialisé dans les questions d'analyse numérique. Puis il commence la première leçon, portant sur les ensembles et les parties. En fin de leçon, les invités font quelques remarques ou posent des questions sur le contenu du cours. »

<http://www.ina.fr/video/CPF88004772>

³⁰ Pour l'honneur de l'esprit humain, 1987

³¹ L'école libératrice, janvier 1973

théorie rationnelle relative à toute activité humaine. Les mathématiques sont la science du raisonnement et proposent des plans de raisonnement pour les autres sciences ! » Le mathématicien Jean Colmet ³²

- Pédagogie « citoyenne »
 1. Enseigner à tous une mathématique utile, « rendre mieux accessible un niveau d'abstraction anciennement réservé à des privilégiés ».
 2. Enseigner la mathématique par une pédagogie active : cf. travaux de Piaget, Wallon, Freinet. Le résultat en sera paradoxal : après l'application de cette réforme, se voulant démocratique (1) et pédagogique (2), l'enseignement des mathématiques restera par excellence l'objet de la sélection scolaire ! Où l'on retrouve que « démocratie » est désormais le nom d'un régime de classe...

Bourbaki ?

La réforme a été pilotée par l'APMEP, non par Bourbaki.

Bourbaki ne prit aucunement part à la réforme. Le groupe a toujours regardé cette réforme avec beaucoup de méfiance.

Dieudonné n'a pas joué de rôle officiel dans la conception des nouveaux programmes.

Pierre Cartier : « *Bourbaki a été très hypocrite avec la réforme dans l'enseignement secondaire. Il a eu pas mal d'influence, mais il en a décliné les responsabilités.* »

Un se divise en deux...

Comme on le verra mieux ensuite, en examinant en particulier la même réforme en Belgique, on voit que cette réforme se divise en deux :

- une voie mathématicienne prônant la pensée mathématique moderne pour tous et en particulier pour les jeunes et donc aussi les enfants (voir Papy) ;
- une voie institutionnelle et étatique, prônant une formation technique mise à jour, étendue aux nouveaux besoins de l'économie et dispensée à plus d'élèves (cf. besoin accru de personnel qualifié).

Ce qui est rétrospectivement frappant, c'est que ce débat, cette opposition ne semble jamais avoir été formulée à l'époque en termes explicitement politiques !

La Réforme

Ses grandes lignes

Les arrêtés des nouveaux programmes de juillet 1968 à juin 1971

- 1) au collège :
 - disparition des cas d'égalités des triangles et de l'initiation à la démonstration en 6°-5° ;
 - introduction d'un langage ensembliste en 6°-5° ;
 - construction des corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$;
 - la géométrie affine de 4° est tournée vers l'algèbre linéaire.
- 2) au lycée :
 - lien du vocabulaire ensembliste et relationnel avec la logique ;
 - la géométrie affine et euclidienne, fondée sur l'algèbre linéaire ;
 - calcul différentiel : continuité, limites, dérivation de fonctions numériques d'une variable réelle en terminale ;
 - calcul intégral : sommes de Riemann, équations différentielles ;
 - probabilités sur un ensemble fini.

La difficulté : la Géométrie

APMEP ³³ : « *Puisque la conclusion est qu'il faut enseigner la géométrie, le vrai problème est d'améliorer sa présentation : il sera alors presque évident que l'étude des espaces vectoriels rend à la géométrie sa place dans un enseignement adapté aux conditions actuelles de la science et du*

³² *La structure des mathématiques modernes* (1961, bulletin de l'APMEP)

³³ Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public

monde. »³⁴

Problème avec les fondements de la géométrie « moderne »

- la géométrie axiomatique de David Hilbert (1899)
- le programme d'Erlangen de Felix Klein (1872)
- l'algèbre linéaire et vectorielle du début XX^e siècle

D'où :

Par définition une droite affine D est un ensemble E muni d'une famille Φ de bijections de E sur R telles que
 a) pour tout f élément de Φ , et pour tout élément (a,b) de $R^* \times R$, l'application définie par $g(M) = a f(M) + b$ appartient aussi à Φ
 b) réciproquement si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de Φ , il existe (a,b) appartenant à $R^* \times R$ tel que $f_2(M) = f_1(M) + b$.
 L'ensemble E est appelé le support de la droite affine D , un élément M de E est appelé un point de la droite affine D .
 Commentaires du Programme de 4^e (décembre 1971)

Critiques par de grands mathématiciens bourbakistes

Leray

« Les “mathématiques modernes” sont une accumulation de définitions de noms dont les propriétés caractéristiques (c'est-à-dire les axiomes) ne sont pas énoncées, dont aucune propriété remarquable n'est établie ; on ne peut donc ni raisonner logiquement avec elles, ni s'y intéresser. Les apprendre est un exercice de mémoire nocif à l'intelligence. »³⁵

Schwartz

« Les enseignants, parents, enfants, n'apprenaient pas là les “mathématiques modernes”, mais juste le langage de base élémentaire qui sous-tend une mathématique moderne extraordinairement vaste [...] dont ces définitions données dans les lycées et écoles (du monde entier !) n'étaient que l'A.B.C. [...] Une mathématique est riche si elle introduit peu de concepts et de structures, et beaucoup de théorèmes à leur sujet : la mathématique moderne des écoles ou collèges introduisait énormément de concepts et de définitions, et presque pas de théorèmes, c'est une mathématique très pauvre. »³⁶

Traiter les mathématiques comme un langage logique !

Choquet

Il proteste en 1973 contre « une attaque contre la géométrie et le recours à l'intuition » :

« L'idée directrice de la réforme était que, les fondements étant indispensables à toute construction logique, il importe de les enseigner d'abord : logique, ensembles, algèbre, algèbre linéaire. Le résultat ne pouvait qu'être catastrophique. » (1990)

Dieudonné

« une nouvelle scolastique [...], une forme encore plus agressive et stupide placée sous la bannière du modernisme » (1974)

Échec

Maurice Mashaai : Bourbaki (2002)

« Pourquoi les “mathématiques modernes” échouèrent-elles à l'école ? Aujourd'hui encore, il semble manquer une analyse suffisamment objective et détaillée de ces questions. Des éléments de réponse existent à travers les nombreuses critiques exprimées ici et là, mais il ne s'en dégage pas une vision globale et claire permettant de comprendre précisément les mécanismes de l'échec et de tirer les leçons pour l'avenir. »

Logique étatique de cette réforme.

Réaction ultérieure

En abandonnant la réforme, on a jeté le bébé avec l'eau du bain.

³⁴ Les chantiers mathématiques, 1964-65

³⁵ Gazette, octobre 1971

³⁶ décembre 1981

« Après un coup de balancier, la période de la réforme a été suivie par la mode des pseudo-activités, un activisme à tout crin. Pas de construction cohérente des savoirs et connaissances, pas d'édification d'un langage qui lie, même en informatique. »

La réforme en Belgique

Dirk De Bock et Geert Vanpamel : *Rods, Sets and Arrows* (Springer, 2019)
Réglettes ³⁷, ensembles et flèches

Historique

Longue maturation 1945-1960.

Réforme pédagogique de Ovide Decroly, marxiste.

Fin des années 40

mouvement pour une géométrie intuitive. Cf. Paul Libois, géomètre, qui conçoit la géométrie comme une partie de la physique !

Début des années 50.

Intervention de la psychologie $\Rightarrow$ confrontation Bourbaki-Piaget

Milieu des années 50

Prépondérance de Willy Servais

De Royaumont (1959) à Athènes (1963)

Dieudonné (« À bas Euclide ! ») est la pièce maitresse. Pas besoin en géométrie d'avoir défini le triangle !

Problème : la réforme pour qui ? Pour débutants, pour ceux qui connaissent déjà, pour esprits déjà formés ?

Débat Choquet/Dieudonné.

Séparer ou non l'algèbre de l'ensemble des mathématiques ?

Seulement ensembles, relations et structures ?

Années 60

La différence-opposition Georges Papy (algébriste) / Paul Libois (géomètre)

1963 : début de *Mathématique moderne* de Papy pour les élèves de 12 à 18 ans. L'enseignement secondaire est unifié selon les thèmes, inspirés par Bourbaki, d'ensembles, de relations et de structures algébriques.

Après 10 ans d'expérimentation, décision politique de faire entrer les mathématiques modernes dans le secondaire en septembre 1968, puis, quelques années plus tard, également dans le primaire. Réforme radicale qui restera le paradigme dominant pendant plus de 20 ans

Années 70

Les années 60 voient la constitution d'une opposition anti-mathématiques modernes. Durant les années 70, cette opposition devient muette mais rompt le silence au début des années 80 en critiquant l'abstraction du langage et ses aberrations.

³⁷ Matériel pédagogique de George Cuisenaire (1891-1975) : réglettes parallélépipédiques de couleurs (« nombres en couleurs ») qui aident les enfants à apprendre le calcul et l'arithmétique :



À la fin des années 70, une « réforme dans la réforme » intervient dans la communauté française : voir Nicolas Rouche. Cela débouche sur la création du *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*.

Années 80

À partir du milieu des années 80 et dans les années 90, le modèle des mathématiques modernes est adapté puis finalement abandonné. Ceci prend place dans une réforme instaurant un État fédéral qui distingue trois communautés (flamande, française et allemande) ayant la responsabilité propre de l'éducation ! La communauté flamande va s'inspirer du modèle hollandais, amplifiant le rôle d'application et de modélisation des mathématiques.

Acteurs

Paul Libois (1901-1991)

Marxiste, PC belge (de 1932 à 1956)

Pour lui :

- la géométrie est une partie de la physique !
Pour lui, les espaces géométriques représentent les différents d'objets ou phénomènes physiques. Il y a, pour lui, une fondation physique des raisonnements géométriques.
 - l'enjeu est l'étude de la réalité ;
Logique aristotélicienne...
 - grande importance de l'histoire des mathématiques.
« L'abstraction ne tombe pas du ciel. » (15)
- Il est porteur de la voie de la géométrie intuitive.

Willy Servais (1913-1979)

Inspiré par Bourbaki, il met l'accent sur le fait de démarrer par un langage mathématique abstrait.

Georges Papy

Opposant au départ à la réforme, puis rallié enthousiaste. (98)

Unifie autour des notions d'ensembles, de relations et de structures algébriques (99)

Nicolas Rouche

Bilan ?

Pas de bilan clair

Il ne semble pas y en avoir de bilan clairement partagé : cf. point de vue rapporté plus haut de Maurice Mashaai.

Comme souvent, l'État abandonne sans véritablement se donner les moyens d'une pensée critique.

Cela a débouché sur une « contre-réforme » en vérité obscurantiste : brutal retour en arrière de type « pédagogisme », qui a profité de la réintroduction du calcul pour, petit à petit, recentrer les mathématiques sur l'apprentissage du calcul, effaçant progressivement les démonstrations et conduisant l'enseignement du lycée à ignorer à peu près tout des mathématiques depuis 1800.

Orientation logico-langagière

La mathématique est principalement définie comme « un langage abstrait et universel » $\implies$

- cours de vocabulaire ! $\implies$ nommer sans comprendre. Cours de grammaire...
- opposition concret/abstrait, le concret étant alors hors-mathématique et l'abstraction étant hors pensées non mathématiques !
- universalité argumentée par l'application à toutes les techniques modernes $\implies$ d'où la sélection sociale selon la capacité à parler une telle langue technique universelle.

Dans les livres produits en France par cette réforme, les maths modernes ont été surtout vues comme

un nouveau langage mathématique.

Curieux triomphe de l'orientation analytique où les mathématiques seraient un langage plutôt qu'une pensée.

D'où une catastrophe car la pensée mathématique s'y est trouvée évaporée : ses questions propres, ses modes propres d'investigation, le mode pulsatif du « faire des mathématiques », etc.

Comme la musique ou la politique, la mathématique se fait avant de se dire.

Ordre d'exposition

La primauté donnée à une méthode d'exposition partant des fondements pour aller au plus complexe conduit à une catastrophe !

Cette méthode tend à logiciser les mathématiques : le fondement n'est premier que d'un point de vue logique, mais du tout d'un point de vue heuristique ou de la pensée ; partir des fondements ne se justifie que logiquement et non pas mathématiquement.

Les fondements des mathématiques sont axiomatiques.

Mais l'axiomatisation des mathématiques s'est faite à rebours de la logique des fondements : par exemple, l'axiomatisation de la base des nombres (les entiers) s'est faite en dernier (Peano).

Le mouvement de pensée des mathématiques n'est pas : axiome $\rightarrow$ déduction $\rightarrow$ théorème.

Il est :

- une situation mathématique ;
- une idée sur/dans cette situation ;
- une tentative de lui donner forme, de la formaliser ;
- des énoncés conjecturaux ;
- seulement à la fin des théorèmes.

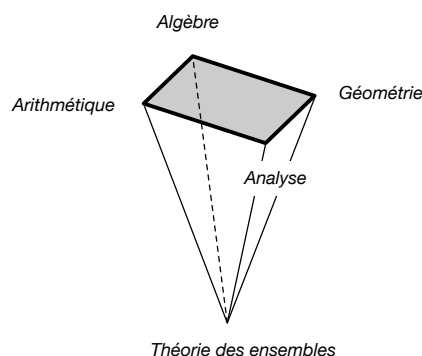
Donc la présentation axiomatique est un résumé a posteriori commode car économe mais il n'est pas la voie de travail, du « faire des mathématiques ».

Donc **confusion du fondement et du faire**.

Or il s'agit d'apprendre à faire des mathématiques : on n'apprend pas plus à faire des mathématiques en apprenant la théorie des ensembles qu'on n'apprend à faire de la musique en apprenant le solfège ou qu'on n'apprend à militer politiquement en apprenant « les principes du léninisme » !

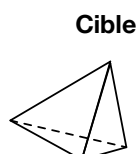
La double pyramide

Formalisons ainsi, de manière extrêmement élémentaire, la construction mathématique : comme un tétraèdre posé sur une pointe :

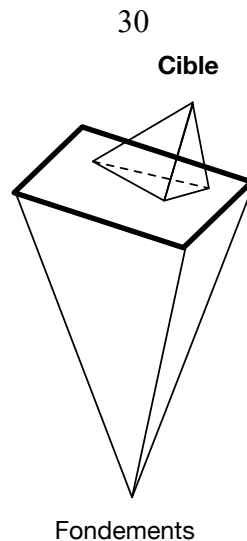


Il se construit logiquement de bas en haut : à partir de son fondement axiomatique en théorie des ensembles, puis par développements et ramifications (voir le plan de Bourbaki : algèbre-topologie-analyse-arithmétique)

Mais faire des mathématiques, ce n'est pas construire ce tétraèdre ; c'est le mobiliser pour un enjeu de pensée, pour une idée :



Ce faisant, on procède par va-et-vient verticalement : on problématise une région et on l'oriente vers un enjeu-cible. L'ensemble prend alors cette forme-ci :



Trois leçons pour nous

La défaite de cette réforme nous suggère trois leçons pour apprendre à faire des mathématiques modernes :

- 1) explorer les mathématiques modernes par la pluralité articulée de leurs théories initiales plutôt que par la mise en forme ultérieure de leur unité axiomatique-logique sous forme d'ensembles ;
- 2) dialectiser la formalisation algébrique avec une interprétation intra-mathématique (géométrie...) et non pas une application extra-mathématique (physique...) ;
- 3) corréler le monde des mathématiques aux autres mondes de pensée par des conceptualisations et des *raisonances* (résonances entre raisons) plutôt que par des applications ou des modélisations.

Bibliographie

Georges Papy (1920-2011)

- Repères ³⁸
- Biographie ³⁹
- Publications ⁴⁰
- *La géométrie dans l'enseignement moderne de la mathématique* (1966) ⁴¹

Sur la réforme des « maths » modernes

APMEP

- Charte de Chambéry (1968) ⁴²

Articles

- Wikipedia : *Mathématiques modernes* ⁴³
- R. D'Enfert et H. Gispert : *Une réforme à l'épreuve des réalités* (2008) ⁴⁴
- Jean Leray : *Les mathématiques « modernes »* (1971) ⁴⁵
- Bernard Charlot : *Le virage des mathématiques modernes* (1984) ⁴⁶
- Henri Bareil : *La « réforme des mathématiques modernes » vue par un enseignant « du terrain »* (1992) ⁴⁷

³⁸ <http://www.rkennes.be/Articles%20de%20Papy/ListesArticles.htm>

³⁹ <http://www.rkennes.be/Papy-Minicomputer/Biographie.pdf>

⁴⁰ <http://www.rkennes.be/Articles%20de%20Papy/Publications%20de%20Georges%20et%20Frederique%20Papy.pdf>

⁴¹ <http://www.rkennes.be/Articles%20de%20Papy/Documents-van-Praag/Papy-Moscou.pdf>

⁴² <https://www.apmep.fr/La-charte-de-Chambéry-1968> <https://www.apmep.fr/CHARTRE-DE-CHAMBERY-1968>

⁴³ https://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques_modernes

⁴⁴ <https://histoire-education.revues.org/2357>

⁴⁵ <http://michel.delord.free.fr/leray71.pdf>

⁴⁶ <http://www.r-lecole.fr/colllok/charlot84.html>

⁴⁷ <https://www.apmep.fr/La-reforme-des-mathematiques>

- Gilbert Walusinski : *L'instructive histoire d'un échec* (1986) ⁴⁸

Evelyne Barbin

- *Les effets pervers de la réforme dite des « mathématiques modernes »* [1989] ⁴⁹
- *La réforme des mathématiques modernes et l'APMEP* ⁵⁰
- *The role of the French association of Mathematics teachers APMEP in the introduction of modern mathematics in France (1956-1972)* [2012] ⁵¹

En Belgique

Dirk de Bock & Geert Vanpaemel : *Rods, Sets and Arrows. The Rise and Fall of Modern Mathematics in Belgium* (Springer, 2019)

Lectures

Bourbaki : « Éléments de mathématique »

Noter le singulier.

« Mode d'emploi du traité »

1. Le traité prend les mathématiques à leur début. [...] Le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université.
2. Le mode d'exposition est axiomatique et abstrait. [...] Le choix de cette méthode est imposé par l'objet principal du traité, qui est de donner des fondations solides à l'ensemble des mathématiques modernes. [...] Les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations s'apparaîtra donc au lecteur que s'il possède déjà des connaissances assez étendues.
6. L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les définitions, les axiomes et les théorèmes de ce chapitre.
9. La terminologie suivie dans ce traité a fait l'objet d'une attention particulière.
10. On s'est efforcé, sans sacrifier la simplicité de l'exposé, de se servir toujours d'un langage rigoureusement correct.
11. Le texte étant consacré, en principe, à l'exposé dogmatique d'une théorie, on n'y trouvera qu'exceptionnellement des références bibliographiques.

Division du traité :

- Livre I – Théorie des ensembles
- Livre II – Algèbre
- Livre III – Topologie générale

Georges Papy : « Mathématique moderne » (1963...)

Noter le singulier (comme chez Bourbaki) qui privilégie l'unification de la pluralité des continents par la théorie de ensembles et la problématique bourbakiste des structures.

Il commence en Belgique son enseignement expérimental à la fin des années 50.

Le premier volume sort en 1963 mais il avait sorti un volume « Groupes » dès 1961.

Préface générale

« La mathématique qui, au début du siècle, n'avait guère d'applications en dehors de la physique et de l'Art de l'Ingénieur, est devenue un élément fondamental de l'humanisme contemporain. »

« La portée des matières étudiées dans les premiers chapitres déborde largement le cadre de la mathématique et constitue, en fait, une initiation à des démarches rationnelles. »

Pour les élèves du secondaire (à partir de 12 ans), conformément au programme expérimental officiel du Ministère belge.

⁴⁸ <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/apmep-2.pdf>

⁴⁹ https://pandor.u-bourgogne.fr/ead-fragment.xsp?id=FRMSH021_00010&c=FRMSH021_00010_SF33_art07&ishtml=true

⁵⁰ https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Barbin-APMEP-R-forme_math-matiques_modernes.pdf

⁵¹ <http://hpm2012.onpes.com/Proceeding/OT6/T6-01.pdf>

« Il s'agit bien entendu d'un exposé naïf et descriptif »

« Il est possible aujourd'hui de faire participer le débutant à la construction active de l'édifice mathématique. »

« La mathématique est devenue essentiellement relationnelle. Elle s'intéresse davantage aux relations entre les objets qu'à leur nature. »

L'algèbre des ensembles = algèbre de Boole $\implies$ calcul algébrique usuel

Gustave Choquet : « *L'enseignement de la géométrie* » (1964)

Avertissement

Pour faire des mathématiques, on ne part pas des définitions mais « de notions tirées du monde sensible ».

Cependant, il faut une problématique axiomatique, fut-elle simplifiée ou adaptée au public.

Introduction

« Il y a maintenant un accord assez unanime, dans tous les pays, sur les deux principes suivants :

- 1) Pour les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie ne peut être déductif. Ce doit être un enseignement basé sur l'observation ; son but est l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience.

Faire des mathématiques commence par constituer l'espace propre d'une expérience spécifiquement mathématique.

- 2) Pour le mathématicien, la façon la plus élégante, la plus profonde, la plus rapide, de définir le plan (ou l'espace) est de le définir comme... Le problème est moins simple aux âges intermédiaires, disons entre 13 et 16 ans. L'enfant commence à comprendre ce qu'est une démonstration. On va faire établir par l'enfant des morceaux de raisonnement déductif.

Il est indispensable que le maître de ces enfants dispose d'une axiomatique sous-jacente complète.

Il nous faut trouver une axiomatique simple, aux axiomes forts, c'est-à-dire donnant très vite accès à des théorèmes non évidents, et intuitifs ? Peu importe qu'ils ne soient pas indépendants ; mais je ne pense pas qu'il soit désirable de prendre au départ de très nombreux axiomes : le jeu mathématique basé sur trop de règles devient complexe et prend une allure de fragilité et d'incertitude.

Exemple : triangle/parallélogramme

« L'axiomatique d'Euclide-Hilbert cache à merveille la structure vectorielle de l'espace. Le fait qu'un triangle soit la moitié d'un parallélogramme n'a pas empêché qu'on mette l'accent pendant plus de 20 siècles sur l'étude détaillée des hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices des triangles... On voyait le triangle, mais non le parallélogramme qui aurait pu conduire aux vecteurs. »
