L'émergence arabe de l'algèbre (Bagdad, IX°-XII° siècles)

François NICOLAS
(ENS, PARIS)

Abstract :
Algebra has emerged as a specific mathematical discipline in the early ninth Century, in the context of the Arab-Muslim Abbasid Baghdad. Three components of this context (at least) have contributed to this rise: a new intelligence of the Arabic language, a new face of the State and a new rationalist ideology. This emergence is carried out in a non-unified mathematical world since the Greeks, divided into two disparate continents (geometry and arithmetic), disjoint by their objects (shapes and numbers) as by their calculations (rather arithmetic) and demonstrations (exemplary geometric), with limited trade (there is no correspondence between the geometric variables and arithmetic numbers, and according to Aristotle, demonstrations should not flow between geometry and algebra). The invention of algebra will come boldly shake the world. It is based on a direct calculation of the unknown, which is now moving from darkness to light thanks to a new figure of proper algebraic equation that will formalize the network known enclosing the unknown relationships determined. In doing so, the algebra will release a new figure of proper algebraic quantity intervene upstream sharing amounts between number arithmetic and geometric size. Finally, the algebra will be the source of a new dynamic demonstration, firing on all cylinders and braving the ancient forbidden Aristotle flowing between the three mathematical continents. Thus the emergence of a new continent between geometry and arithmetic will change the mathematical world as a whole and initiate a series of global restructuring, which will wait for the twentieth century to reach an unified and stabilized form. In total, this algebra, produced in Arabic language and compatible with Islamic rationality is an incredible saga of individual and collective thought, extending over several centuries faithfully (for its essential creative aspect: the IX to XII) and before all the intellectual awakening in the thirteenth century Christian Europe.

ملخّص :

برز الجبر كتخصّص رياضي محدّد في بداية القرن التاسع ميلادي في السياق العربي الاسلامي لبغداد العبّاسية. و قد ساهمت ثلاثة عناصر من هذا السياق (على الاقلّ) في هذا البروز : ذكاء جديد للغة العربية و وجه جديد للدولة و ايديولوجيا عقلانية جديدة. و تمّ هذا البروز في عالم رياضي غير موحد منذ الاغريق حيث ينقسم الى قارتين متباينتين (الهندسة و الحساب) منفصلتين بواسطة الكيانات الخاصة بهما (الأعداد و الأشكال) و كذلك بواسطة حساباتهما (عددية على الارجح) وبرهاناتهما (هندسية بصورة مثالية) ذات التبادلات المحدودة (لا وجود لتطابق بين الاحجام الهندسية و الأعداد الحسابية و حسب ارسطو لا تجب للبرهنات ان تتدفق بين الهندسة و علم الحساب). اختراع الجبر سياتي ليهزّ بجرأة هذا العالم. ويستند ذلك على حساب مباشر للمجهول الذي يتقدم من الظلمة الى النور بفضل شكل جبري جديد للمعادلة التي ستأتي لصورنة شبكة العلاقات المعروفة بادراج المجهول المحدّد. و بالقيام بذلك سوف يفرج الجبر عن شكل جبري محدّد جديد للكمّ الذي سيتدخل في المنبع لتقاسم الكميات بين العدد الحسابي و الحجم الهندسي. و اخيرا سيكون الجبر مصدرا لدينامية برهانية جديدة تتدفّق بين القارات الرياضية الثلاث متحدية محرّم ارسطو القديم. و هكذا فان بروز قارة جديدة بين الهندسة و علم الحساب سيغير العالم الرياضي برمّته و سيشرع في سلسلة من اعادة الهيكلة الشمولية التي ستنتظر القرن العشرين للتوصل الى نموذج موحد و مستقرّ. في المجموع هذا الجبر الذي سينتج في اللغة العربية و سيتوافق مع العقلانية الاسلامية يمثّل ملحمة فذّة لفكر فردي و جماعي ممتدّ بأمانة على عدة قرون (و ان كانت مساهمته الابداعية الجوهرية تمتدّ بين القرن التاسع ميلادي و القرن الثاني عشر ميلادي) قبل الصحوة الفكرية التي ستعرفها اوربا المسيحية في القرن الثالث عشر ميلادي.

Résumé :
L'algèbre a émergé, comme discipline mathématique spécifique, au début du IX° siècle, dans le contexte arabo-musulman du Bagdad abbasside. Trois composantes de ce contexte (au moins) ont favorisé cette émergence : une nouvelle intelligence de la langue arabe, une nouvelle figure d'État et une nouvelle idéologie rationaliste. Cette émergence s'est effectuée dans un monde mathématique non unifié depuis les Grecs, partagé en deux continents disparates (géométrie et arithmétique), disjoints par leurs objets (figures et nombres) comme par leurs calculs (plutôt arithmétiques) et leurs démonstrations (exemplairement géométriques), aux échanges limités (il n'y pas de correspondance biunivoque entre grandeurs géométriques et nombres arithmétiques, et selon Aristote, les démonstrations ne doivent pas circuler entre géométrie et algèbre). L'invention de l'algèbre va audacieusement venir bouleverser ce monde. Elle repose sur un calcul direct de l'inconnu, qui progresse désormais de l'ombre vers la lumière grâce à une nouvelle figure proprement algébrique de l'*équation* qui viendra formaliser le réseau des relations connues enserrant l'inconnu déterminé. Ce faisant, l'algèbre va dégager une nouvelle figure proprement algébrique de la *quantité* qui interviendra en amont du partage des quantités entre nombre arithmétique et grandeur géométrique. Enfin l'algèbre va être à l'origine d'une nouvelle dynamique démonstrative, faisant feu de tout bois et bravant l'antique interdit d'Aristote en circulant entre les trois continents mathématiques désormais en jeu. Ainsi l'émergence d'un nouveau continent entre géométrie et arithmétique va bouleverser le monde mathématique dans son ensemble et initier une série de remaniements globaux qui devra attendre le XX° siècle pour accéder à une forme unifiée et stabilisée. Au total, cette algèbre, produite en langue arabe et compatible avec une rationalité musulmane, constitue une épopée inouïe de pensée individuelle et collective, s'étendant fidèlement sur plusieurs siècles (pour sa part créative essentielle : du IX° au XII°), et précédant d'autant le réveil intellectuel au XIII° siècle d'une Europe chrétienne.

L'algèbre a émergé, comme discipline mathématique spécifique, au début du IX° siècle, dans un contexte très singulier : celui, arabo-musulman, du Bagdad abbasside.
De quoi a-t-il été question en cette émergence, dont le nom propre retenu – *Algèbre* – est directement prélevé dans le titre du livre d'Al-Khawârizmî[1] (*Livre de la réduction et de la comparaison : Kitâbu/l-jabri wa/l-muqâbalati*)[2] qui, en 830 environ, a inauguré cette nouvelle et prestigieuse discipline de pensée ?

Émergence arabe de l'algèbre

« Émergence »

Je parlerai ici d'*émergence* en un sens précis : dans une situation donnée, quelque chose apparaît qui jusque-là n'apparaissait pas, au sens où cette apparition donne forme inattendue à un matériau informe préexistant dans la situation (et non pas venu d'ailleurs).

Un théorème mathématique récent d'Andrée Ehresmann (nous y reviendrons) détaille une condition nécessaire pour une telle émergence : disons, métaphoriquement, qu'il faut

[1] الخوارزمي
[2] كتاب الجبر و المقابلة

« froisser » la situation de départ en sorte d'en instaurer un nouveau niveau d'apparence fait d'un réseau de plis et de fronces.

Cette idée générale de l'émergence (comme donnant forme à un matériau informe par froissement de ce matériau) va nous guider dans notre examen de l'algèbre : en quel sens peut-on la réfléchir comme un pli interne aux mathématiques ? De quel ancien matériau est-elle la reprise « froissée » ? Quel nouveau réseau de plis constitue-t-elle ?

Indiquons d'ores et déjà nos réponses ; l'algèbre va apparaître comme double pli : pli de l'inconnu sur le connu (« équation », au nouveau sens algébrique du terme, sera le nom de ce pli) et repli entre arithmétique et géométrie (« quantité », au nouveau sens algébrique du terme, sera le nom de ce qui vient froisser *nombre* arithmétique et *grandeur* géométrique). Le réseau des équations (enserrant la chose inconnue dans un pli connu) constituera le nouvel espace algébrique de travail.

« Arabe »

J'emploie ici le mot « arabe » au sens stricto sensu de la langue arabe – la grande langue arabe dite aujourd'hui « littéraire ». Nul besoin donc de faire ici l'hypothèse d'une éventuelle « arabité » ou d'un quelconque « arabisme » : sera ici dite « arabe » toute mathématique écrite en arabe (tout comme Muhammad posait « qui parle arabe est arabe »).[1]

« Algèbre »

En première approche, qu'est-ce que l'algèbre ? Les Arabes de l'époque en avancent trois caractérisations (qui s'avèrent des variations autour de la même idée fondatrice). Indiquons-les avant de les reprendre plus tard en détail.

L'algèbre comme « arithmétique de l'inconnu »

L'idée fondatrice - explicitée rétroactivement - est que l'algèbre « opére sur les inconnus au moyen de tous les instruments arithmétiques, comme l'arithmétique opère sur les connus » (As-Samaw'al)[2] :

اَلطَّرِيقُ إِلَى ٱلتَّصَرُّفِ فِي ٱلْمَجْهُولَاتِ بِجَمِيعِ ٱلْأَدَوَاتِ[3] ٱلْحِسَابِيَّةِ كَمَا يَتَصَرَّفُ ٱلْحَاسِبُ فِي ٱلْمَعْلُومَاتِ

Tout le point est bien sûr de savoir comment calculer sur ce que l'on ne connaît pas et c'est ici que le geste d'Al-Khawârizmî s'avère fondateur.

L'algèbre comme « science des équations »

C'est le fondateur de l'algèbre, Al-Khawârizmî, qui dès l'origine la désigne ainsi, mobilisant - pour désigner l'équation - le terme de *muεâdalatun* qui signifie l'action d'égaliser.[4]

L'idée directrice est que l'algèbre va se caractériser par un nouveau type d'objet mathématique - l'*équation* (proprement algébrique) - qui vient s'ajouter à l'ancien type proprement arithmétique d'objet (le *nombre*) et à l'ancien type proprement géométrique d'objet (la *figure*). Comme on y reviendra, cet ajout va venir « froisser » l'ancienne distinction entre différents types mathématiques d'objet.

[1] من تكلم العربية فهو عربي

[2] Al-Samaw'al (al-Maghribî) 1130-1175 : اَلسَّمَوْءَلُ ٱلْمَغْرِبِيُّ

[3] « *Le chemin pour procéder dans les inconnus avec tous les instruments arithmétiques comme le calculateur procède dans les connus* »

[4] مُعَادَلَةٌ: *maSdar* (nom d'action) de la forme III pour la racine ع د ل

L'algèbre comme « calcul de la poussière »

Cette caractérisation, plus poétique que strictement mathématique, est avancée trois siècles plus tard par As-Samaw'al[1] pour se retrouver ensuite assez largement reprise (par exemple dans le titre du traité d'Al QalaSâdî[2] – XV° siècle : « *Déchiffrement des secrets sur la science des chiffres de poussière* »[3]).

L'idée est ici que l'algèbre, étant essentiellement calcul sur l'inconnu (et non plus, comme l'arithmétique, sur le connu), ose travailler directement sur/dans l'ombre et l'informe, dont le multiple intrinsèque est métaphoriquement dénommable « poussière ».

Rapide historique

Pour fixer les idées, l'algèbre apparaît à Bagdad au début du IX° siècle (ou III° siècle de l'Hégire). À proprement parler, il n'y avait donc pas d'algèbre grecque, moins encore babylonienne, égyptienne ou indienne ; le calcul à lui tout seul ne fait pas la mathématique et son régime propre de rationalité : il y faut en plus un nouveau régime discursif de rationalité dont le cœur spécifique est la démonstration et non plus la vérification empirique.[4]

Tout de même, un calcul sur l'inconnu ne fait l'algèbre que lorsqu'il est rationnellement systématisé comme calcul autonome d'équations algébriques, et non plus comme amas de recettes empiriques et d'algorithmes pragmatiques. Al-Khawârizmî est ainsi e premier à engager un traité d'algèbre en ce qu'il est le premier à commencer en classant *a priori* six formes d'équation du second degré. L'algèbre naît ce faisant avec la constitution, mathématiquement ordonnée, d'un nouvel objet – l'équation algébrique - qui se trouve saisi selon une rationalité autonome et non plus indéfiniment bricolé à partir d'applications aussi diverses que l'arpentage, la fiscalité, ou la législation des héritages.

Aussitôt cette émergence va être largement ressaisie et continuellement approfondie par plusieurs générations de génies algébristes « arabes »[5] . En gros, l'élan algébriste va entraîner une création continue et diversifiée jusqu'à la fin du XII° siècle (soit pendant quatre siècles) avant de progressivement s'ensabler et de ne plus déposer dans les bibliothèques que des traités récapitulatifs et pédagogiques.

L'émergence de l'algèbre ouvre aussitôt la question : à quel titre est-ce ou non une nouvelle « discipline » mathématique et pas seulement une nouvelle technique de calcul, destinée à rester mathématiquement latérale (tel un certain type de « calcul numérique ») ou à s'excentrer (telle l'informatique du XX° siècle) ? D'où l'examen, dès son fondateur, des rapports entre d'un côté l'algèbre et de l'autre l'arithmétique et la géométrie, c'est-à-dire les deux disciplines *classiques* des mathématiques.

À partir du X° siècle deux tendances vont ainsi pouvoir être distinguées selon que l'algèbre va tenter d'assurer son statut proprement mathématique en se greffant plutôt sur l'arithmétique ou plutôt sur la géométrie.

---

1 حساب الغبار

2 القلصادي

3 كَشْفُ ٱلْأَسْرَارِ عَنْ عِلْمِ حُرُوفِ ٱلْغُبَارِ (Éditions de la Beït al-Hikma de Carthage, 1988)

4 Arpad Szabo dégage clairement la naissance grecque de cet impératif démonstratif, excédant le simple calcul babylonien ou égyptien. Il est intéressant de remarquer que la philosophie (Parménide) et la théorie musicale jouent un rôle décisif en cette fondation rationnelle.

5 Si tous écrivent leurs traités en langue arabe, beaucoup sont natifs d'une autre langue (persane, hébreue…) et peuvent relever des différentes religions alors en activité dans cette région du monde.

Dans le premier cas (« arithmétisation de l'algèbre »), il s'agira avant tout d'étendre les antiques *opérations* arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division, puissance, extraction de racines…) aux nouveaux objets algébriques (monômes et polynômes). Dans le second cas (« géométrisation de l'algèbre »), il s'agira surtout d'assurer la *démonstration* des résultats de l'algèbre en prenant appui sur la force démonstrative singulière (établie par Euclide) de la géométrie.

Avant d'y revenir, fixons sommairement la chronologie selon quelques noms propres décisifs :

<table>
<tr><th colspan="2">IX°</th><th>X°</th><th>XI°</th><th>XII°</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="2">Al-Khawârizmî 781-847</td><td rowspan="2">Abû Kâmil 830-900

Thâbit ibn Qurra 826-901</td><td>Al-Karajî 953-1029</td><td></td><td>As-Samaw'al 1130-1175</td><td>Algèbre arithmétisée</td></tr>
<tr><td></td><td>Al-Khayyâmî 1048-1131</td><td></td><td>Algèbre géométrisée</td></tr>
</table>

Conditions de possibilité

Quelles conditions – non mathématiques – ont rendu cette émergence possible ? Je propose, succinctement[1] , d'en distinguer trois.

Conditions de langue

Il y a d'abord, au principe de cette émergence, quelque chose qui concerne spécifiquement la langue arabe mobilisée pour ce faire. Rappelons à ce titre le nom propre Al-Khalîl [2] (718-786), lexicographie arabe qui entreprit de classer a priori et systématiquement toutes les racines (essentiellement trilitères) de la langue là où les précédents lexiques se contentaient de listes partielles, ordonnées à tel ou tel champ sémantique.

Cette entreprise, liée aux premiers efforts pour dégager la grammaire propre à la langue arabe, révèle une profonde affinité entre langue arabe et algèbre. Ce point, depuis longtemps remarqué, mériterait à lui seul, d'importants développements et d'utiles recherches. On s'autorisera ici de Louis Massignon (« *les langues sémitiques tendent à la formation abrégée et abstraite, "algébrisante"* »[3] des idées) pour suggérer une parenté entre « *structure linguistique* » et « *constructions algébriques* » et indiquer ainsi que le VIII° siècle linguistique a pu préparer le IX° siècle algébriste.

Conditions d'État

Une condition de possibilité, bien connue et documentée, s'attache à la fondation du nouvel État abbasside, et spécifiquement au tour que lui donne, à partir de 813, la figure

---

1 Il ne s'agit pas essentiellement, dans ce propos, d'érudition ou d'encyclopédisme : il s'y agit de nous approprier, *pour aujourd'hui*, quelques enjeux de cette épopée « arabe » de pensée, en nous disposant à l'égal des intelligences alors mobilisées qui entrecroisaient librement mathématiques, philosophie, théologie, théorie musicale et savoir des langues.

2 الخليل

3 Voir l'article « La science arabe » de R. Arnaldez et L. Massignon dans *Histoire générale des sciences* (sous la dir. de R. Taton ; PUF)

du nouveau Calife al-Ma'mûn[1] . Celui-ci fondra ainsi la « *maison de la sagesse* »[2] (qui, par bien des traits, ressemble en France à notre Académie mâtinée de CNRS) et sollicitera explicitement [3] de nouvelles procédures de calcul en matières d'impôts, de testaments[4], d'arpentage, etc.

L'État se trouve ainsi encourager à la fois une offre et une demande de nouvelles mathématiques.

Conditions idéologiques (ou philosophico-théologiques)

Enfin, les conditions idéologiques de l'époque suscitent et encouragent la conquête collective de nouveaux savoirs scientifiques.

Rappelons d'abord que la (relativement) nouvelle foi musulmane encourage la quête des savoirs, en allant les chercher « s'il le faut jusqu'en Chine… »[5] .

Mais cette orientation générale se trouve particulièrement stimulée par la toute nouvelle théologie « rationaliste » *muεtaziliste*[6] promulguée en 827 comme croyance officielle par le Calife al-Ma'mûn. Il semble bien que cette nouvelle confiance mise en la raison ait directement contribué à cet élan subjectif pour la recherche scientifique.

Ainsi, nouvelle intelligence de la langue arabe, nouvelle figure d'État et nouvelle idéologie rationaliste convergent (entre autres?) pour encourager et rendre possible l'émergence arabe de l'algèbre.

Situation mathématique

Dans quelle situation proprement mathématique cette émergence va-t-elle se produire ?

Au début du IX° siècle, la mathématique est un univers partagé en deux continents fortement séparés depuis l'époque grecque de sa fondation : la géométrie et l'arithmétique.

Fondation grecque des mathématiques

Soutenons, en effet, à la suite d'Arpad Szabo, que la mathématique s'est véritablement fondée en Grèce autour des VI°-V° siècles avant J.-C. avec l'apparition d'une exigence proprement démonstrative de ses calculs et résultats. Les Babyloniens, Égyptiens, Indiens, Chinois avaient certes développé leurs propres méthodes de calcul, parfois très sophistiquées mais ils se contentaient d'une validation empirique de leurs résultats. Ce sont les Grecs qui ont introduit le souci proprement mathématique de la démonstration, s'appuyant précisément sur les ressources du raisonnement *par l'absurde* qui leur permettait, au prix d'une confiance investie en la double négation, de s'assurer rationnellement de la validité universelle de leurs résultats.
C'est ainsi que l'irrationalité de √2 fut démontrée (√2 ne pouvait être un nombre rationnel car s'il l'avait été, cela aurait conduit à une contradiction rationnellement

---

[1] 813-833 / H.198-218 : اَلْــخَــلَيفَـةُ اَلْــمَـأْمُـونُ

[2] *baytu/l–Hikma* : بَـيْــتُ ٱلْــحِكْـمَــةِ

[3] Comme Al-Khawârizmî le rappelle dans le prologue de son livre, son ouvrage est le résultat d'une « exhortation » d'al-Ma'mûn.

[4] Al-Khwârizmî était instruit du calcul juridique que l'école hanafite avait inventé ; il cite ainsi à six reprises son fondateur Abû Hanîfa, 699-767 / H.80-150 : أَبُـو حَــنِـيــفَـــة

[5] Voir le fameux hadith de Muhammad : « *Recherchez* ***le savoir jusqu'en Chine !*** » أُطْــلُــبُـوا ٱلْــعِـلْــمَ وَلَـوْ فِـي ٱلـصِّيــنِ

[6] المعتزلة

intenable), ce qui a entraîné une crise considérable de la raison mathématique grecque, crise qui nous intéresse ici tout spécialement puisque c'est elle qui rend compte du partage du nouvel univers mathématique en deux continents non seulement disjoints mais sans échanges mathématiquement réglés entre eux.

Deux continents séparés

Pour les Grecs (comme pour tous leurs successeurs jusqu'aux Arabes), arithmétique et géométrie se sont en effet avérées nettement séparées.

Pas de correspondance systématique entre leurs objets

D'une part il n'y avait plus de correspondance biunivoque entre nombres (arithmétiques) et grandeurs (géométriques) puisque la *grandeur* (géométrique) de la diagonale du carré de côté 1 ne correspondait à aucun *nombre* (arithmétique) – voir l'irrationalité démontrée de √2.

Rappelons que pour les Grecs, un nombre était ce qui procédait d'une pluralisation finie d'unités.
À ce titre, « 1 » n'était d'ailleurs pas un nombre mais le nom même de l'unité permettant de « nombrer » (le *nombrant* ne pouvait être *nombré* : il ne pouvait en quelque sorte s'autonombrer).
A fortiori « 0 » n'était pas encore un nombre[1] , pas plus qu'il n'existait mathématiquement de nombres négatifs.
Il n'y avait donc alors de nombres que de nombres rationnels positifs, c'est-à-dire de nombres pouvant s'écrire comme division de deux nombres entiers strictement positifs.
L'irrationalité de √2 – donc son inexistence alors comme nombre – creusait ainsi un fossé insondable entre *grandeurs géométriques* et *nombres arithmétiques* : si à tout nombre (arithmétique), on pouvait facilement faire correspondre une grandeur (géométrique), on ne pouvait plus, à l'inverse, faire correspondre à toute grandeur (géométrique) un nombre (arithmétique) ! Les objets respectifs des continents arithmétique et géométrie ne correspondaient donc plus que partiellement et de manière mathématiquement « irrationnelle »…

Séparation radicale de leur logique démonstrative

À ce gouffre creusé entre d'un côté la géométrie et ses grandeurs, de l'autre l'arithmétique et ses nombres, s'en ajoutait un autre : la démonstration, devenue (comme on l'a rappelé) paradigme de la rationalité mathématique, n'avait plus du tout depuis Euclide le même statut dans les deux continents.
Les Éléments d'Euclide avaient, autour de 300 av. J.-C., fondé la géométrie sur une rationalité axiomatique : des décisions de pensée premières (axiomes, définitions, modes d'inférence) s'enchaînement déductivement à des conséquences (théorèmes, lemmes…) regroupées en différents massifs théoriques.
Pour sa part, la rationalité arithmétique ne répondait pas à cette même exigence : elle procédait plus pragmatiquement, par des démonstrations non arrimées à des axiomes liminaires (voir la démonstration de l'infinité potentielle des nombres premiers) mais cependant localement déductives (par *modus ponens*…) ou par des démonstrations plus inductives que déductives (démonstrations « par récurrence »…).

[1] Le chiffre était d'ailleurs encore inconnu tant notre *zéro* était alors un non-nombré plutôt que le nombre du rien.

Rappelons qu'il faudra attendre la fin du XIX° siècle pour que l'arithmétique enfin s'axiomatise (ce sera l'affaire de Peano en 1889) : c'est dire l'ampleur du partage rationnel entre les deux continents.
Ce fossé démonstratif avait de plus été verrouillé par Aristote lui-même qui, dans ses *Seconds Analytiques*[1] , avait dressé l'interdit suivant : « *On ne peut pas, dans la démonstration, passer d'un genre à un autre : on ne peut pas, par exemple, prouver une proposition géométrique par l'arithmétique.* » La circulation démonstrative, ainsi barrée entre géométrie et arithmétique, contribuait à isoler chaque continent.

Polarité

Le monde mathématique se trouvait donc partagé en deux continents assez largement séparés selon la dichotomie du calcul et de la démonstration : certes la géométrie savait également calculer à sa manière (« la somme des angles d'un triangle égale un angle plat »…) et, comme on l'a vu, l'arithmétique savait également démontrer à sa manière (non axiomatique et parfois inductive), mais les esprits de ces deux lieux étaient clairement contrastés.

C'est assez exactement entre ces deux continents que l'algèbre va surgir, bien des siècles plus tard et en un tout autre site de pensée que le monde greco-romain.

Retour sur l'algèbre

L'algèbre va émerger comme nouvelle logique de calcul (comme extension, donc, de l'arithmétique : l'arithmétique de l'inconnu) immédiatement soucieuse de gager ses algorithmes[2] sur une logique démonstrative (comme discipline, se disposant sous paradigme géométrique).

Équations

Comment calculer sur l'inconnu ? Tel était le défi. Une chose est d'aller du connu à l'inconnu, par progressive extension de la lumière ; une tout autre est d'aller de l'inconnu au connu, autant dire cette fois de l'ombre vers la lumière.

Al-Khawârizmî va relever brillamment le défi au fil de l'idée suivante : même si une chose est inconnue, on peut cependant connaître des *relations* que cette chose (inconnue mais déterminée) entretient soit avec d'autres choses inconnues (et également déterminées), soit avec d'autres choses elles déjà connues.

Pour en donner un exemple élémentaire (qu'on présentera ici selon l'écriture algébrique devenue canonique et qui ne l'était alors pas[3]), si un carré empiriquement caractérisé (par exemple un carré tel que le doublement de son côté permet de recouvrir 16 m^2) est de surface inconnue, on peut cependant savoir que son côté – inconnu – est la racine carré de cette surface – inconnue – en sorte qu'on pourra écrire :

côté inconnu de ce carré inconnu = $\sqrt{x}$ (où x désigne la surface inconnue du carré en question).

Ainsi, entre x et $\sqrt{x}$, tous deux inconnus, la relation est connue et peut s'écrire $(\sqrt{x})^2=x$.

1 75a-39
2 Rappelons que le nom même d'*algorithme* vient du nom propre latinisé d'Al-Khawârizmî. Ainsi, au Moyen Âge, *algorithme* désignait essentiellement le calcul arithmétique avec les chiffres dits arabes…
3 Dans les traités arabes de l'époque, tous les développements, calculs et démonstrations se présentaient dans la langue vernaculaire, sans recourir aux lettres proprement algébriques qui ne seront inventées qu'à partir du XVI° siècle.

Comme de plus on dispose ici d'une relation connue entre l'inconnu x et le connu 16, on va pouvoir formaliser cette relation selon l'équation suivante :

$$(2\sqrt{x})^2=16.$$

Qu'a-t-on ainsi fait ? On a écrit des équations *algébriques* qui mobilisent des quantités inconnues, soit en les égalisant entre elles [$(\sqrt{x})^2=x$], soit en égalisant une quantité inconnue à une quantité connue [$(2\sqrt{x})^2=16$].

Ce faisant, Al-Khawârizmî a inventé un nouveau type d'équation. L'arithmétique pratiquait de longue date ses propres équations : par exemple $2+2=4$, mais aussi $1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2$. Dans ces deux exemples, l'équation égalise deux quantités connues (même si la seconde recourt à une quantité *variable* indexée par n[1]).

L'idée algébrique revient donc à scinder la détermination dénommée « une [quantité] inconnue » en tirant parti du point suivant : si l'on parle d' « un » inconnu (et non pas de « l' »inconnu en général), c'est parce que cet inconnu se trouve déterminé… par des relations connues qui l'enserrent.

Al-Khawârizmî va systématiser cette idée pour fonder l'algèbre. Il va classer les équations algébriques selon le type d'inconnu mobilisé dans ces relations connues.

L'inconnu intervient-il en solo dans chaque membre de l'équation ? Ce seront alors les trois équations « simples » suivantes :

- $ax^2=bx$
- $ax^2=c$
- $bx=c$

Intervient-il en duo, combiné avec une autre quantité (connue ou inconnue) ? Ce seront dans ce cas les trois équations « combinées » suivantes :

- $ax^2+bx=c$
- $ax^2+c=bx$
- $bx+c=ax^2$

On prend ici mesure de l'audace de pensée chez Al-Khawârizmî : l'algèbre s'inaugure comme nouvelle discipline mathématique en classant ses nouveaux objets (les équations algébriques) de manière purement endogène, en totale autonomie de pensée à l'égard des domaines empiriques auxquelles ces équations pourront ensuite s'appliquer.

Calculs

Un nouveau type de calcul s'engage ici, selon un double volet : le premier type va concerner les composantes de l'équation, le second l'équation globale comme telle.

- Il y a d'abord un calcul direct sur les quantités inconnues : l'inconnu x va ainsi engendrer des monômes (du type ax^n) et des polynômes (du type $a+bx+cx^2+\ldots$), soit toute une série de nouveaux objets à propos desquels va se poser la question suivante : peut-on étendre à ces nouveaux objets algébriques les opérations arithmétiques traditionnelles sur les nombres (addition-soustraction, multiplication-division, puissances-racines…) ?

[1] Il ne faut pas confondre ici quantité déterminée mais inconnue et quantité connue mais variable (ou indéterminée). La première se note *x*, la seconde *n*.

•Ces opérations sont en effet indispensables pour transformer les équations algébriques en sorte de les résoudre (c'est-à-dire d'aboutir à connaître l'inconnu de départ en déduisant l'équation terminale simplifiée : x=telle quantité déterminée et maintenant connue[1]) et c'est là le second type de calcul qu'engage l'algèbre : le calcul entre équations qui a va autoriser leur simplification progressive et, ultimement, leur résolution.

Al-Khawârizmî va d'abord détailler le second volet : c'est le sens de ses deux fameuses dénominations *réduction*[2] et *comparaison*[3] .

> La *réduction* transforme l'équation en faisant disparaître les quantités *négatives* par addition conjointe des deux versants de l'équation :
>
> $$5x-6=2x+1 \Rightarrow 5x-6+6=2x+1+6 \Rightarrow 5x=2x+7$$
>
> La *comparaison* transforme l'équation en regroupant les composantes de même type d'un seul côté du signe « = » :
>
> $$5x=2x+7 \Rightarrow 5x-2x=2x+7-2x \Rightarrow 3x=7$$

L'autre calcul – sur les composantes de l'équation (monômes, polynômes) – va engager une recherche de plus long terme, singulièrement compliquée par l'extension progressive des nombres mobilisés (au fur et à mesure que le caractère arithmétique des quantités concernées sera assuré).

Ainsi, les grandes étapes de cette extension numérique vont consister à progressivement accepter comme nombres à part entière « nos » nombres 1, 0, négatifs, rationnels, irrationnels[4] en même temps que va être progressivement clarifié ce que *addition-soustraction*, *multiplication-division*, *puissances-racines* de monômes et polynômes veut dire. Inutile d'insister sur le fait que tout ceci ne va aucunement de soi.

Prenons ainsi mesure de l'audace qu'a As-Samaw'al au XII° siècle pour calculer la division suivante :

$$(6x^8 + 28x^7 + 6x^6 - 80x^5 + 38x^4 + 92x^3 – 200x^2 + 20x) / (2x^5 + 8x^4 – 20x^2)$$

Mieux : il produit un algorithme de résolution qui débouche sur le résultat suivant :

$$3x^3 + 2x^2 – 5x + 10 + 1/x$$

Pour prendre mesure de la difficulté considérable de cette progressive extension du concept arithmétique de nombre, remarquons que faire accéder une grandeur négative au statut de nombre implique de savoir réaliser sur ce nombre les principales opérations arithmétiques communément réaliser sur les nombres positifs. Sans même parler du problème de la racine carrée (il faudra les « nombres complexes » pour donner sens, au XIX° siècle, à l'écriture $\sqrt{-1}$), la simple soustraction d'un nombre négatif ouvre déjà un chemin semé d'embuches. Qu'est-ce, par exemple que l'écriture suivante veut exactement dire : -(-1) ? Il faudra des siècles d'effort et d'audace aux plus grands penseurs de l'humanité pour arriver à ce résultat, désormais communément partagé par les écoliers du monde entier : -(-1)=+1.

Pendant longtemps en effet, les nombres négatifs auront été acceptés comme nombres lors même que les mathématiciens concernés ne savaient pas encore comment leur appliquer l'opération arithmétique élémentaire de soustraction. Le premier à lever définitivement la difficulté sera à nouveau As-Samaw'al, au XII° siècle.

---

[1] Dans notre exemple précédent : x=4

[2] qui donnera son nom à la nouvelle discipline : algèbre = *al-jabru* : اَلْـــجَبْـــرُ

[3] *al-muqâbalatu* : اَلْـــمُـــقَـــابَـــلَـــةُ

[4] Rappelons que ce dernier point devra attendre le XIX° siècle…

Donnons une idée de la difficulté en remarquant que, dans l'expression -(-1), le signe « - » intervient deux fois mais selon deux sens différents : lorsqu'il est associé à 1 (dans -1), il intervient comme le signe d'un *nombre* – il désigne ici une quantité négative (pour en traduire communément le sens, on prendra ici l'exemple d'une dette) – alors que devant la parenthèse, il intervient comme le signe d'une *opération* (celle de soustraction). Au total, -(-1) littéralise ainsi la soustraction d'un nombre négatif au moyen d'un même signe « - » répété selon la logique implicite une double fonction !

La formulation de tout ceci en langage ordinaire se fait d'ailleurs communément en usant de deux mots différents pour les deux occurrences de ce même signe « - » : on dira, par exemple, qu'il s'agit de *supprimer* (premier « - ») une *dette* (second « - ») et qu'une telle opération revient bien à donner (signe « + » résultant) un montant équivalent à celui de la dette de départ.

On pressent le vertige qui a pu saisir les premiers mathématiciens au seuil de cette découverte :

moins fois *moins* égal *plus* : - x - = +

Démonstration ?

On l'a dit : une chose est de savoir calculer (en produisant des algorithmes de résolution), autre chose est de démontrer la validité de ces procédures. Comme l'on sait, la rationalité ne s'épuise pas dans le calcul ; elle l'excède, en particulier par son régime spécifique de décision (rationnelle) : il n'y a ainsi de vraie décision qu'aux points mêmes où le calcul ne peut trancher, aux carrefours indécidables (qu'ils soient alors liminaires – voir les axiomes – ou en cours de déduction – voir les fameux énoncés indécidables de toute théorie).

La raison mathématique de l'équation algébrique ne saurait donc se limiter à constater sa puissance algorithmique (sa capacité à résoudre et converger vers une solution empiriquement vérifiable) ; il lui faut rendre compte mathématiquement de cette puissance, c'est-à-dire démonstrativement.

Toute la difficulté est alors : comment démontrer mathématiquement ces résultats algébriques ?

Comme l'univers mathématique n'est pas alors unifié et se trouve partagé en deux continents (augmenté de cette nouvelle extension algébrique dont le statut précis est en cours de clarification), une triple réponse va formellement se présenter : on peut entreprendre de démontrer les résultats algébriques soit géométriquement, soit arithmétiquement, soit algébriquement.

Les deux premières voies sont depuis longtemps pratiquées : la première axiomatiquement depuis Euclide (c'est là le paradigme), la seconde plus expérimentalement (en un dispositif logiquement non unifié : démonstration par l'absurde, démonstration par modus ponens, démonstration par récurrence…) ; la troisième reste à inventer.

Dessinons à grands traits les différentes voies qui vont être suivies.

•Le recours à la démonstration géométrique des résultats algébriques va être un point de départ : on le trouve engagé dés Al-Khawârizmî et il se trouvera singulièrement systématisé dans la voie qu'on a pu appeler la « géométrisation de l'algèbre », en particulier chez Al-Khayyâmî[1] .

[1] Voir mon précédent article dans cette même revue…

•Le recours aux procédures démonstratives de l'arithmétique va se déployer parallèlement, et ce dès l'origine. Cette orientation va prendre une importance singulière dans l'autre voie – celle de l'« arithmétisation de l'algèbre » - et va se ramifier au rythme où les vieilles opérations arithmétiques de calcul sur les nombres (addition, multiplication, puissances…) vont désormais s'étendre aux nouveaux objets algébriques. Les algorithmes et démonstrations d'As-Samaw'al systématiseront ainsi ce dispositif au XII° siècle.

•Qu'en est-il d'éventuelles démonstrations spécifiquement algébriques ? La question restera longtemps indécise et ne sera clarifiée que lorsque l'algèbre saura être à son tour axiomatisée, ce qui ne se réalisera… qu'au XX° siècle[1] !

Ce bricolage démonstratif où le mathématicien fait feu de tout bois pour fonder rationnellement ses nouveaux calculs ne fait que mieux ressortir l'importance subjective décisive de la démonstration *pour le mathématicien* (là où l'ingénieur, simple utilisateur des résultats mathématiques - formules et algorithmes – n'a guère ce souci). Mais la situation de l'univers mathématique (situation d'un même geste héritée et transformée par l'algèbre) n'est pas sans créer d'importantes tensions : comment la mathématique peut-elle être et rester *une* (par-delà la diversité de ses disciplines) si l'exigence démonstrative qui la fonde depuis les Grecs ne l'unifie pas ?

Les nouveaux algébristes arabes vont courageusement avancer, pas à pas, dans ce dédale, sans céder d'un côté à la tentation « technique » et pragmatique - celle des seuls algorithmes que la simple « expérience » serait censée pouvoir valider – et d'un autre à un dogmatisme stérilisateur de la « preuve » : l'audace de raisonner et de calculer sur l'inconnu soutient l'audace de travailler mathématiquement au-dessus du vide, et, tout de même que le connu se trouve au terme des opérations sur l'inconnu, non à son principe, tout de même l'exigence démonstrative – qui ne sera pas abandonnée ou bradée – va venir, seulement dans un second temps, consolider les résultats provisoirement dégagés. Disons, pour fixer les idées, que pendant longtemps, la démonstration viendra confirmer le résultat plutôt que l'engendrer.

Il faut prendre mesure de l'obstacle aritostélicien (l'interdit, rappelé précédemment, des *Seconds* Analytiques) qui se dresse alors contre cette exigence démonstrative installée, dès l'origine, par Al-Khawârizmî aux fondements même de l'algèbre.

Point remarquable : les algébristes arabes vont oser braver l'interdit d'Aristote et devancer ainsi de plusieurs siècles ce que Descartes réalisera cette fois dans l'autre sens (passant du genre algébrique, désormais bien installé et dynamique, au genre géométrique, désormais ensablé et menacé de stérilité en sa forme traditionnelle).

Ainsi la constitution d'un possible nouveau continent entre géométrie et arithmétique relance la circulation entre vieux continents mathématiques disjoints et par là transforme le monde mathématique dans son ensemble.

Effets de l'algèbre nouvelle sur l'univers des mathématiques

Brossons rapidement le tableau global de ces effets.

Une métaphore géologique

Usons d'abord d'une métaphore : celle, géologique, de la tectonique des plaques et de la dérive des continents.

[1] Voir Hilbert et Steinitz (1910)

La naissance de l'algèbre serait ici le surgissement d'un nouveau continent à partir d'une faille entre continents formés de longue date. Géologiquement, une telle faille est une zone dite d'accrétion[1] où de la matière souterraine (magma informe) émerge pour progressivement se solidifier sous l'effet de courants de convection.

Nous avons présenté la faille entre continents arithmétique et géométrique : faille en matières de calculs et de démonstrations, donc faille globale de la raison mathématique.

Les courants sous-jacents qui vont faire apparaître l'algèbre tiennent, on l'a dit, à l'extension du calcul directement aux inconnus : le nom donné à l'inconnu informe va être une manière de le solidifier dans un algorithme (on pourra ainsi opérer sur lui : le déplacer, l'additionner, le multiplier…). Cette dynamique de pensée participe donc de l'orientation générale consistant à *donner forme à l'informe*.

Le nom donné à l'inconnu sera, pendant longtemps, celui de *chose*[2] . Il faudra attendre le XVI° siècle et François Viète pour que ce nom prenne la forme de la lettre x.

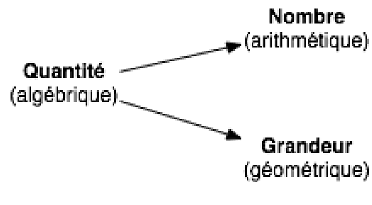
Ce nom, donnant forme mathématique à l'inconnu informe, le fait accéder à l'existence mathématique comme telle, c'est-à-dire au statut d'objet susceptible d'opérations spécifiquement mathématiques (calculs et démonstrations).

Tout le point devient alors : quel est le destin mathématique de cette nouvelle matière, forme solidifiée ? S'agit-il d'un troisième continent mathématique, dotée de la même autonomie relative que la géométrie et l'arithmétique ?, d'une simple extension de l'un des deux anciens continents ?, d'une zone intermédiaire non continentale ?, d'un nouveau continent mais prenant forme aux frontières *externes* du monde mathématique (pensons par exemple à l'informatique non théorique) ?

Une émergence

C'est en ce point qu'il est convient de thématiser cet événement comme *émergence* en un sens plus rigoureux du terme.

L'algèbre vient en effet « froisser » les anciennes conceptions arithmétique et géométrique de ce que *quantité* veut dire et, par là, fait émerger un nouveau régime de consistance mathématique. Le point capital est ici la *quantité* algébrique (inconnue mais déterminée) dont « chose » est désormais le nom (et ultérieurement dont x sera la lettre). En effet, cette *chose* pourra indifféremment renvoyer à un *nombre* (ou quantité proprement arithmétique) ou à une *grandeur* (ou quantité proprement géométrique : celle d'un segment de droite, d'une surface, d'un volume…). Ainsi quantité algébrique vient occuper la position de produit-limite projetable simultanément comme nombre arithmétique et comme grandeur géométrique :



Concrètement, la même équation algébrique pourra indifféremment s'entendre comme égalant des nombres ou des grandeurs - les développements démonstratifs des algébristes

[1] Par opposition aux zones dites de *subduction* où, à l'inverse, la matière solide continentale s'enfonce dans le magma central informe.

[2] *chay'un* : شَيْءٌ

arabes ne cessent ainsi de circuler entre l'une et l'autre de ses interprétations de leur nouveau formalisme.

Très exactement, deux notions disjointes (on a rappelé qu'à toute grandeur géométrique ne correspond plus de nombre arithmétique, √2 venant ici creuser le gouffre) se trouvent traitées *en commun* au fil d'une nouvelle notion : celle de quantité algébrique.

Or un tel type d'opération est très exactement ce qu'un récent théorème d'Andrée Ehresmann démontre comme condition nécessaire[1] pour qu'il y ait émergence d'un nouvel ordre (ici ordre des raisons) sur la base d'un ancien ordre, *émergence* désignant ici le fait que le nouvel ordre (disons l'ordre de la nouvelle superstructure) est *intransitif* à l'ordre de base (disons celui de l'infrastructure du phénomène considéré) : dans notre cas, les opérations de l'algèbre (nouvelle superstructure mathématique) ne sont plus strictement transitives à des opérations équivalentes dans l'infrastructure arithmétique et géométrique. Pour en donner un exemple, il suffit de remarquer que l'équation suivante, algébriquement consistante et susceptible d'une résolution algorithmique précise[2] :

$$(2x^4-2x^3-12x^2)/(x+2)=x^3-3x^2+3x-9$$

est ininterprétable à l'époque dans l'arithmétique comme dans la géométrie mais pour des raisons différentes :

- En arithmétique parce que cette équation, projetée dans l'espace des nombres, va mobiliser une grandeur numérique irrationnelle (qui n'a donc pas de statut de nombre dans l'arithmétique de l'époque);

- En géométrie, parce que l'interprétation de ce formalisme dans l'espace géométrique des figures, ne va aucunement de soi dans la géométrie de l'époque[3] .

Au total…

Ainsi la nouvelle discipline algébrique se constitue simultanément :

- Comme extension calculatoire de l'arithmétique,

- Comme algorithme déployé à l'ombre de la géométrie et de son impératif démonstratif,

- Comme continent venant émerger parallèlement à l'une et à l'autre par unification de leurs notions disjointes.

Le monde mathématique en sort durablement et massivement transformé : la disparité des « objets » mathématiques propres à chaque discipline s'est étendue (nombres, figures, équations[4]) ; le contraste de la logique démonstrative entre disciplines n'est pas résorbé, mais le nouveau continent-algèbre va permettre de nouveaux échanges féconds (comme le XVII°siècle le montrera abondamment).

Le foisonnement disparate des disciplines mathématiques continuera de s'étendre (avec l'analyse, la théorie des graphes, la combinatoire, la topologie…) et il faudra attendre le XX° siècle pour que se dégage une unification générale des mathématiques, d'une part

[1] Une condition nécessaire est l'existence de limites (ou colimites) dites multiples. Très exactement, le théorème en question (A. Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch, 1996) se formule techniquement ainsi : *« Dans une catégorie hiérarchique, le Principe de Multiplicité est une condition nécessaire pour qu'il existe des objets d'ordre de complexité strictement supérieur à* 1. »

[2] Sa solution est x=√2.

[3] L'équation mobilise un espace à 4 dimensions…

[4] À quoi l'analyse va bientôt ajouter – à partir du XVII° - ses propres nouveaux objets : les *fonctions*.

autour d'une axiomatisation généralisée[1] , d'autre part autour d'une notion commune – celle de *structure* – qui va permettre d'unifier l'ancien disparate des objets[2] .

Ainsi le séisme Al-Khawârizmî s'avèrera engager une relance globale du monde mathématique qui demandera plus d'un millénaire pour retrouver une forme à peu près stable et unifiée.

Conclusion

Difficile, au total, de trouver plus vaste aventure de la pensée que celle de l'algèbre !

Il y est question, de part en part, de courage dans la pensée : oser calculer en partant de l'ombre et non plus de la lumière, oser installer la pensée sur le vide de l'inconnu, oser braver l'interdit aristotélicien pour maintenir l'exigence démonstrative au lieu même de son incertitude, oser ajouter la nouvelle concrétion de l'équation sur une ligne de faille entre continents disjoints, oser avancer sur un terrain incertain nouvellement conquis dont on ne saura pendant longtemps s'il est une simple extension, un nouveau continent découvert inopinément ou un simple recueil de trouvailles techniques, etc.

Il y est aussi question d'entreprise collective et de longue haleine : les conquêtes de la pensée s'y font pas à pas, siècle après siècle[3] , elles mobilisent leur cortège d'intelligences aiguës et de personnalités diverses, elles prennent appui sur de fortes convictions individuelles et de larges mobilisations collectives.

En cette époque d'islamophobie débridée (dans laquelle l'État français et ses plus haut dirigeants ne sont pas en reste), c'est une joie pour la pensée de rappeler que cette vaste épopée intellectuelle qui a fait cadeau à l'humanité toute entière de l'algèbre a pris élan et corps au cœur de la langue arabe, dans un contexte musulman de rationalité, précédant ainsi de plusieurs siècles le propre réveil intellectuel d'une Europe chrétienne[4] .

[1] à la fin du XIX° siècle pour l'arithmétique, au début du XX° siècle pour l'algèbre…

[2] Les structures d'ordre deviendront l'affaire de l'arithmétique, les structures topologiques celle de la géométrie et l'algèbre héritera en propre des structures dites algébriques (celles qui mobilisent des lois de composition).

[3] Combien de siècles il fallut pour que les plus grands génies mathématiques arrivent à doter l'humanité de cette loi désormais banale : -(-1)=+1 !

[4] Voir le développement de la scolastique, en particulier thomiste et sous tutelle d'Aristote, à partir du XIII° siècle.