AL-KHAYYAMI, 1074 : QUAND LA GEOMETRIE THEORISE LE MODELE ALGEBRIQUE…

François Nicolas

(Ens-Paris ; Cirphles)

Résumé

Il va s'agir ici de suivre, sur un exemple précis, comment la démarche algébrique d'Al-Khayyâmi se constitue et progresse, mobilisant ce faisant (mais bien sûr sans l'expliciter) les ressources duales de la formalisation théorique puis de son interprétation dans un modèle donné. Un des points remarquables du propos d'Al-Khayyâmî est ainsi que cette dualité modèle/théorie ou formalisation/interprétation opère à l'intérieur même de la mathématique entre ses différentes disciplines : ici, la mathématique ne vient pas de l'extérieur théoriser les modèles physiques (comme elle le fera à partir de Galilée) mais elle constitue un espace de pensée endogène où l'antique géométrie vient théoriser le nouveau modèle algébrique.

ملخّص

سيتعلّق الأمر هنا و على أساس مثال دقيق ببيان كيف انّ مسيرة الجبر لدى عمر الخيّام تتألّف و تتقدّم (دون أن يكون ذلك ظاهرا للعيان بالطبع) بالاعتماد على المصادر الثنائية الخاصة بالصياغة الصورية النظرية و في تأويلها داخل نموذج محدّد من بعد. و تتمثّل احدى خصوصيات انجاز عمر الخيّام المتميّزة، إذن، في أنّ هذه الثنائية، أي ثنائية النوذج/النظرية أو الصياغة الصورية/التأويل تعمل داخل الرياضيات بين مختلف أقسامها: هنا لا تأتي الرياضيات من الخارج لتنظير النماذج الفيزيائية (كماسيكون الحال ابتداءا من غاليلي)، و لكنها تمثّل فضاءا للتفكير ينظّر من خلاله الهندسي القديم نموذج الجبر الجديد.

Abstract

In this paper, the author will show, on the basis of a precise example, how the algebraic method of Al-Kayyâmi is building itself and progressing (without making this explicit of course) using the dual sources of the theorical formalization and then its interpretation into a determinate model. One of the important features of the Al-Kayyâmi work is to show that this duality model/theory or formalization/interpretation works inside Mathematics between its different domains: mathematics do not come here from outside for theorizing the physical models (like it was since Galileo), but constitute a space of thought where the old geometry comes to theorize the new algebraic model.

AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012 المخاطبات العدد 03 السنة الأولى

ISSN: 1737-6432

À la fin du XI° siècle, le mathématicien Al-Khayyâmî [78] va s'attacher, dans son *Traité de la réduction et de la comparaison* [79], à articuler d'une manière toute nouvelle la très jeune algèbre arabe (inventée deux siècles [80] plus tôt à Bagdad par Al-Khwârizmî [81]) et l'antique géométrie grecque (inventée quatorze siècles plus tôt à Alexandrie par Euclide).

Ce faisant, Al-Khayyâmî s'engage dans une voie sensiblement différente des disciples immédiats d'Al-Khwârizmî (Al-Karajî [82] puis Al-Samaw'al [83]) lesquels privilégient une émancipation progressive de l'algèbre à l'égard de la tutelle géométrique native, en particulier en entreprenant de la doter d'une puissance démonstrative propre (qui ne doive plus rien à l'axiomatique géométrique et à l'évidence des figures) ce qui implique de clarifier la manière dont l'enchaînement déductif propre à l'algèbre (son mode spécifique de calcul) peut désormais valoir preuve.

Al-Khayyâmî, pour sa part, va plutôt s'attacher à faire marcher la mathématique simultanément sur ses deux jambes algébrique et géométrique en sorte qu'algèbre et géométrie puissent s'appuyer sur les forces de l'autre là où l'une hésite ou vacille, évitant ainsi le risque d'une marche bancale, « à cloque-pieds ». En l'invention d'une telle marche synchronisée, la mathématique va consolider son statut de vaste corps, apte à expérimenter sa pensée propre par articulation de ses différents membres au fil d'une progression coordonnée.

Il s'agit donc en cette entreprise d'éprouver comment la mathématique reste bien *une* par-delà la diversité de ses organes et ce au moment même où la pluralité intrinsèque de ses disciplines prolifère.

[78] 1048-1131.
Il ne faut, semble-t-il, pas confondre ce mathématicien persan avec le poète persan homonyme (celui des *Quatrains – rubâεiyât*).
Sur ce point, comme sur tous les autres, voir le remarquable ouvrage de référence de R. Rashed et B. Vahabzadeh *Al-Khayyâm mathématicien* (Albert Blanchard, Paris, 1999)

[79] *maqâlatun fî/l-jabri wa/l-muqûbalati*

[80] autour de 820

[81] 781-847

[82] 953-1029

[83] 1130-1180

المخاطبات العدد 03 السنة الأولى AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012
ISSN: 1737-6432

Il va s’agir ici de suivre, sur un exemple précis (où l’algèbre fonctionne comme « jambe d’appel »), comment une telle marche se constitue et progresse, mobilisant ce faisant (mais bien sûr sans l’expliciter) les ressources duales de la formalisation théorique puis de son interprétation dans un modèle donné.

Un des points remarquables du propos d’Al-Khayyâmî est ainsi que cette dualité modèle/théorie ou formalisation/interprétation opère à l’intérieur même de la mathématique entre ses différentes disciplines : ici, la mathématique ne vient pas de l’extérieur théoriser les modèles physiques (comme elle le fera à partir de Galilée) mais elle constitue un espace de pensée endogène où l’antique géométrie vient théoriser le nouveau modèle algébrique.

Voyons comment.

<u>Précision liminaire.</u>

J’utiliserai le couple modèle/théorie en son acception originaire, prélevée dans la théorie logico-mathématique des modèles [84]. Ici le modèle est ce qui est initialement donné et qu’il s’agit de copier. Le modèle constitue donc la référence canonique, empirique, opaque dans son fonctionnement endogène mais doté d’une solidité expérimentale qui autorise qu’on puisse y tester si quelque phénomène y est véridique ou erroné.

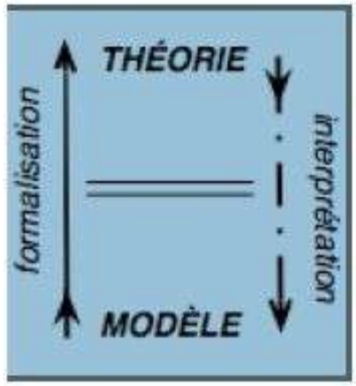
La théorie désigne par contre le système formel que l’on construit au-dessus du modèle donné, système dans lequel il deviendra alors possible de raisonner, de déduire, d’enchaîner, bref de mener toute une série d’opérations interdites dans le modèle empirique de départ.

Le passage du modèle donné à la théorie construite s’appelle *formalisation*. Le retour de la seconde au premier s’appelle *interprétation* : on interprète ainsi dans le modèle tel ou tel objet théorique (déduit dans la théorie selon son mode propre de fonctionnement rationnel) c’est-à-dire qu’on distingue dans ce modèle l’objet empirique dont l’objet théorique examiné est la formalisation.

Diagrammatisons ainsi ce fonctionnement :

[84] Voir par exemple Bourbaki : *Théorie des ensembles I, 2, 4* (Hermann, Paris, 1966 ; p. 24)

ISSN: 1737-6432



Malencontreusement, cette catégorisation a été inversée depuis le regrettable « tournant langagier » [85] que le néopositivisme logique a cru devoir faire subir à la pensée (commençant comme il se doit par la pensée mathématique) : dans cette nouvelle acception, passée depuis dans l'opinion commune (en particulier celle des techniciens de l'économie et plus largement des supposées « sciences humaines »), *modèle* vient nommer une maquette, un modèle réduit, bref vient nommer ce que les mathématiciens nomment… théorie !

Cette inversion des nominations relève d'une entreprise nominale fréquente qui désoriente l'esprit. On trouvera une critique philosophique détaillée de ce renversement et de la confusion qu'il promeut dans le premier texte philosophique d'Alain Badiou, toujours actuel : *Théorie des modèles* [86].

Revenons à Al-Khayyâmî et montrons d'abord sur un exemple précis comment le mathématicien va circuler de l'algèbre à la géométrie et de la géométrie à l'algèbre.

[85] Tournant philosophiquement regrettable en ce qu'il tend à faire accroire que toute pensée serait mesurable au langage, c'est-à-dire que le langage serait le transcendantal de toute pensée. Contre cette orientation, et à l'ombre de toute une tradition de la philosophie française (de Cavaillès-Lautman jusqu'à Badiou en passant par Bachelard et bien d'autres), on soutiendra que la plupart des pensées (mathématique, musicale et picturale, amoureuse…) ne sont aucunement langagières, ce qui précisément autorise le travail difficile consistant à tenter de projeter ces pensées dans la langue…

[86] Voir sa réédition récente chez Fayard (coll. *Ouvertures*,Paris, 2007)

AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012 المخاطبات العدد 03 السنة الأولى
ISSN: 1737-6432

Un exemple

Soit le problème suivant, tel qu'exposé par Al-Khayyâmî [87] : « un cube plus des côtés sont égaux à un nombre ».

Cet énoncé correspond à une des équations trinômes du troisième degré que le mathématicien a préalablement classifiées (il y a douze équations trinômes, sur un total de vingt-cinq équations ; six d'entre elles ne peuvent être résolues par la règle et le compas : elles correspondent à l'intersection de deux coniques ; notre problème est le premier de ces six).

On peut le transcrire, dans un vocabulaire moderne [88], ainsi :

$$x^3+bx=c$$

Comment calculer x connaissant b et c ? Tel est le problème posé.

C'est pour résoudre ce type de problème que Al-Khayyâmî va inventer la marche alternée, progressant de concert du côté de l'algèbre et du côté de la géométrie.

Pour le présenter didactiquement [89], supposons par exemple que b vaille 4 et c vaille 8 en sorte que notre équation à résoudre devienne la suivante :

$$x^3+4x=8$$

Comment calculer un tel x ?

Plusieurs méthodes sont a priori envisageables.

---

[87] op. cit. p.162-163

[88] Il faudra attendre le XVI° siècle (Viète…) pour que le symbolisme des lettres vienne contribuer à la formalisation des problèmes algébriques.

[89] Notons que Al-Khayyâmî, lui, raisonne, calcule, démontre tout ceci dans le cas général, lors même qu'il ne dispose pas pour ce faire du symbolisme de l'écriture. Il déploie tout ceci dans la langue ordinaire, son discours ne s'appuyant que de quelques figures illustratives. La difficulté de ce mode d'exposition (où précisément la pensée mathématique doit se couler dans la langue vernaculaire – ici l'arabe classique) rehausse encore – s'il en était besoin – la grandeur de son entreprise.

AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012 المخاطبات العدد 03 السنة الأولى

ISSN: 1737-6432

i. Méthode algorithmique

La première serait de procéder algorithmiquement en calculant x par valeurs approchées.

On calculera ainsi la valeur de la fonction $f(x)= x^3+4x$ et on verra comment cette valeur peut s'approcher de 8. On calculera ainsi successivement :

$f(1)=5$ <8

$f(2)=16$ >8

$f(1{,}5)=9{,}375$ >8

$f(1{,}25)=6{,}95$ <8

$f(1{,}375)=9{,}375$ >8

…

en sorte de réduire progressivement l'intervalle des valeurs dans lequel notre x cherché se situe :

	x	$f(x)=x^3+4x$
1°	1	5
4°	1,25	6,95
5°	1,375	8,10
3°	1,5	9,375
2°	2	16

المخاطبات العدد 03 السنة الأولى AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012
ISSN: 1737-6432

On peut espérer ainsi s’approcher progressivement d’une valeur 1,36465560765……≈1,365

ii. Méthode algébrique

La méthode algébrique consisterait à résoudre l’équation par radicaux c’est-à-dire à trouver l’expression algébrique donnant x en fonction de b et c (ici de 4 et 8).

Cette méthode était alors connue pour les équations du second degré. Elle ne l’était toujours pas à l’époque de Al-Khayyâmî pour les équations du troisième degré. Il faudra attendre le XVI° siècle et les travaux de Cardan pour que les solutions des équations du troisième degré deviennent exprimables par radicaux.

Pour information, la « formule de Cardan » de l’équation $x^3+4x=8$ donnera, quatre siècles plus tard, cette solution :

$$\sqrt[3]{4+4*\sqrt{\frac{31}{27}}}+\sqrt[3]{4-4*\sqrt{\frac{31}{27}}}$$

À la charnière du XI° et du XII° siècle, cette voie algébrique est donc barrée.

Dans ces conditions, Al-Khayyâmî va se tourner vers une méthode géométrique.

iii. Méthode géométrique

Cette méthode invente une formalisation géométrique de notre problème algébrique.

Cette invention est remarquable en ce que – comme on va le voir - elle ne découle nullement du vocabulaire géométrique (celui du « cube », des « côtés ») utilisé par Al-Khayyâmî pour exposer son problème de départ.

Il faut à ce titre bien voir que si Al-Khayyâmî présente au lecteur son équation en des termes géométriques plutôt que purement algébriques (c’est nous qui

المخاطبات العدد 03 السنة الأولى
AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012
ISSN: 1737-6432

l'avons symbolisée avec des lettres), cependant la nature mathématique de l'équation est bien chez Al-Khayyâmî d'ordre proprement algébrique. Ce faisant Al-Khayyâmî inscrit ses pas dans l'invention de l'algèbre par Al-Khwârizmî puisque ce dernier commençait son propre Traité d'algèbre [90] par une classification a priori des équations algébriques en sorte de configurer ainsi l'algèbre en une discipline autonome plutôt qu'en simple appendice d'une problématique géométrique.

Le problème posé par Al-Khayyâmî est donc bien un problème algébrique, certes exposé en un vocabulaire teinté de géométrie mais qui ne sert ici qu'à « figurer » didactiquement les termes d'une équation algébrique qu'il s'agit d'apprendre à résoudre.

Pour formaliser géométriquement notre problème algébrique, Al-Khayyâmî procède à une transformation de l'équation qui va permettre de faire apparaître des objets géométriques implicitement convoqués par cette équation.

Pour cela, il commence audacieusement par compliquer l'équation en multipliant ses deux termes par x en sorte d'engendrer la nouvelle équation :

$$x^4+bx^2=cx$$

Cette équation devient alors factorisable en deux expressions selon l'enchaînement suivant :

$$x^4=cx-bx^2$$

$$x^4/b=x(c/b-x)$$

$$(x^2/\sqrt{b})^2 = x(c/b-x)$$

Notre équation de départ se transforme ainsi dans le problème géométrique suivant : trouver le point commun à la parabole définie par le membre de gauche de l'équation — parabole dont l'équation est $y=x^2/\sqrt{b}$ — et au

[90] On se reportera ici au non moins remarquable ouvrage de R. Rashed : *Al-Khwârizmî. Le commencement de l'algèbre* (Albert Blanchard, 2007)

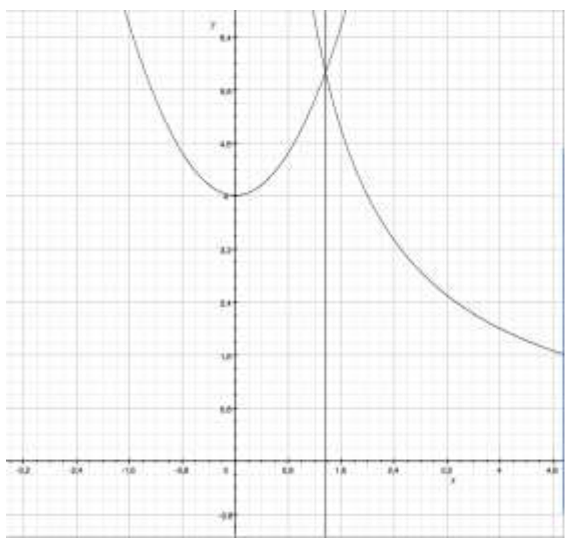
cercledéfini par le membre de droite de l'équation — cercle [91] dont l'équation est $y^2=x(c/b-x)$.

Remarquons qu'on aurait pu opérer plus directement sur l'équation en la factorisant ainsi :

$$x^3+bx=c \Rightarrow x(x^2+b)=c \Rightarrow x^2+b=c/x$$

soit cette fois l'intersection entre une parabole d'équation $y= x^2+b$ et une hyperbole d'équation $y=c/x$.

Dans notre exemple numérique, on aurait alors à trouver l'intersection de la parabole $y= x^2+4$ et de l'hyperbole $xy=8$:



Dans notre exemple ($b=4$ et $c=8$), il va s'agir de trouver le point commun à la parabole d'équation $y=x^2/2$ et au cercle d'équation $y^2=x(2-x)$.

Le problème, ainsi clairement reformulé, dégage par lui-même la voie de sa résolution : il suffit de tracer ces deux figures et d'examiner les coordonnées de

[91] de centre {c/2b, 0}

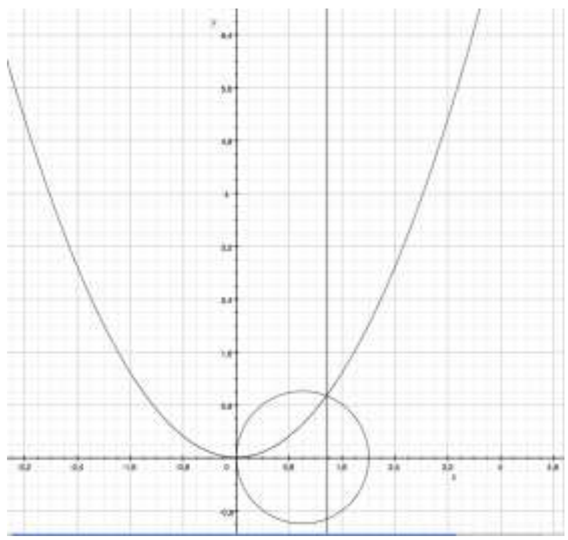
المخاطبات العدد 03 السنة الأولى
AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012
ISSN: 1737-6432

leur point d'intersection, l'abscisse de ce point nous donnant alors la valeur cherchée de x.

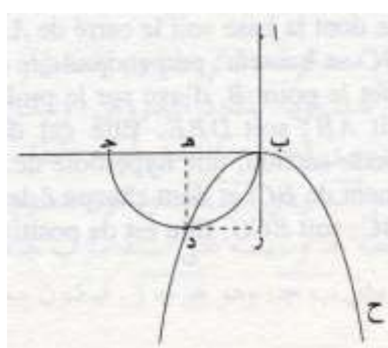
Tracer le cercle relève de l'exercice ordinaire du compas.

Tracer une parabole est un exercice à l'époque autrement délicat mais l'invention au X° siècle du « compas parfait » par le mathématicien perse al-Qûhî autorisait désormais un tracé continu des coniques.

Voici le tracé contemporain de ces deux courbes :



et voici comment Al-Khayyâmî les dessinait, en toute généralité sur b et c) dans son Traité :



المخاطبات العدد 03 السنة الأولى AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012
ISSN: 1737-6432

Dans notre exemple, la solution graphique dégage la valeur attendue : autour de 1,365.

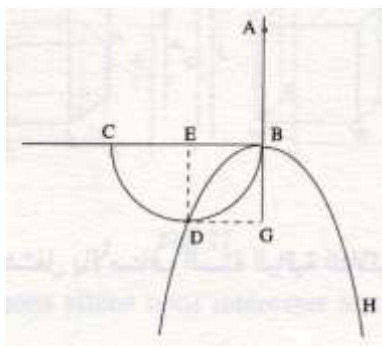
On vérifie facilement la validité de notre équation de départ pour cette valeur de x :

$$x^3+4x \simeq 2,54+5,46 = 8$$

iv. Démonstration

Remarquons que Al-Khayyâmî prend soin de *démontrer* géométriquement que le point D de son schéma « solutionne » bien l'équation de départ.

Il le fait succinctement ainsi (je reformule en termes plus modernes, le raisonnement de Al-Khayyâmî [92]) :



avec $AB=\sqrt{b}$; $BC=b/c$

Attention : E n'est pas ici le centre du cercle ($EC \neq EB$) !

Il s'agit de démontrer que $BE^3+bBE=c$

avec $b=AB^2$ [$\sqrt{b}=AB$] et $c=AB^2.BC$ [$c/b=BC$]

Il faut donc démontrer que $BE^3+AB^2.BE=AB^2.BC$

et donc que $BE^3=AB^2(BC-BE)=AB^2.EC$

Cela revient alors à démontrer que $BE^3=AB^2.EC$

[92] *op. cit.*, pp.162-165

المخاطبات العدد 03 السنة الأولى
AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012
ISSN: 1737-6432

Or D est l'intersection de la parabole et du cercle.

- D étant sur la parabole $x^2=\sqrt{b}.y$ il vient $BE^2=AB.ED$;
- D étant sur le cercle $y^2=x(c/b-x)$ il vient $ED^2=BE.EC$;

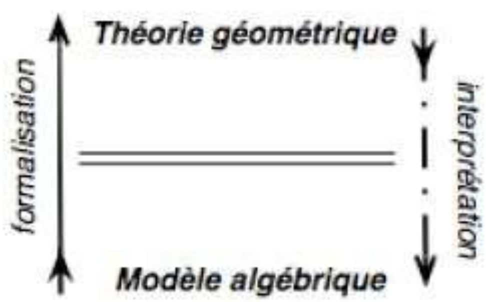
Donc $BE^4=(AB.ED)^2=AB^2.ED^2=AB^2.\mathit{BE}.EC$

D'où $BE^3=AB^2.EC$ (cqfd)

II. Théorie des modèles

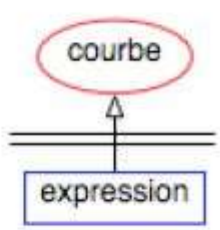
De quelle manière ce parcours met-il en œuvre implicitement une théorisation géométrique d'un modèle algébrique ?

Reprenons notre diagramme général :



L'objet de départ est algébrique : c'est une équation, donc un objet fait de deux expressions réparties de part et d'autre d'un signe « = ».

L'idée de Al-Khayyâmî est de transformer ces deux expressions en sorte de pouvoir associer à chacune une courbe connue (ici une conique) : on dira qu'il formalise chaque expression algébrique par une courbe géométrique :

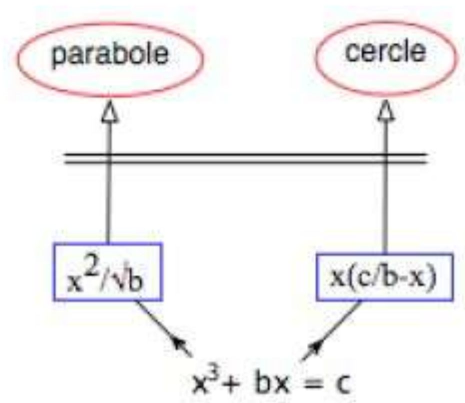


ISSN: 1737-6432

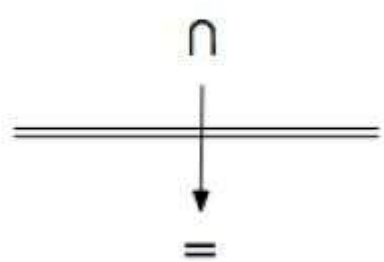
Son objet de départ $x^3+bx=c$ devient, comme on l'a vu :

$$(x^2/\sqrt{b})^2 = x(c/b-x)$$

La première expression est formalisable comme une parabole ; la seconde comme un cercle :

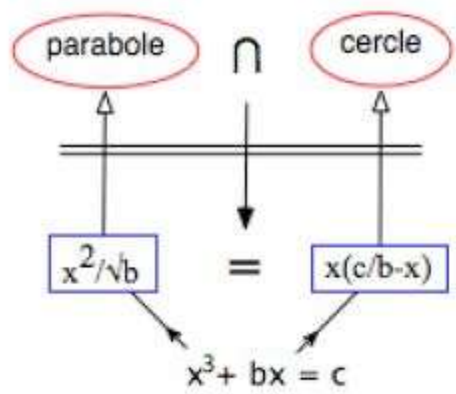


La clef de la théorisation porte alors sur le signe « = » reliant nos deux expressions algébriques : l'idée est que l'égalité des deux expressions peut être vue comme l'interprétation algébrique de l'intersection géométrique de nos deux courbes :

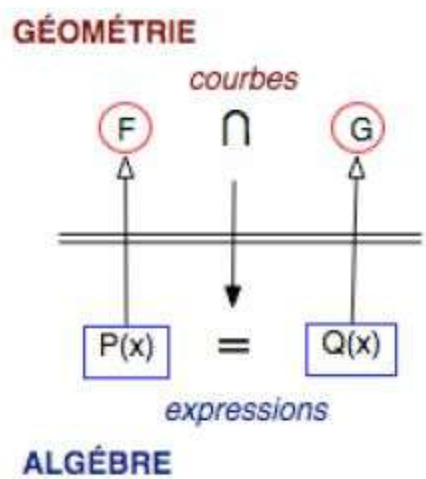


ISSN: 1737-6432

On a donc au total :



Plus généralement, on a donc le diagramme suivant :



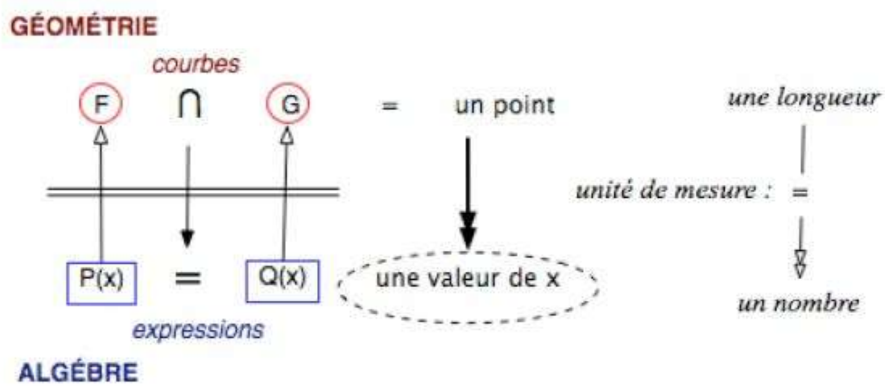
Le parcours se boucle ici en interprétant un point géométrique (point d’intersection des deux courbes) comme une valeur (arithmétique pour le terme algébrique x).

Ceci passe clairement par une opération implicite supplémentaire qui est celle de l’unité de mesure : il faut doter la figuration géométrique ainsi élaborée d’une

المخاطبات العدد 03 السنة الأولى AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012
ISSN: 1737-6432

« échelle » qui autorise d'interpréter une longueur géométrique (ici l'abscisse du point d'intersection) comme un nombre. L'unité de mesure est ce qui autorise une équivalence (formalisation/interprétation) entre grandeurs géométriques et nombres arithmétiques.

Si l'on diagrammatise tout ceci, on a donc au total ceci :



Ainsi Al-Khayyâmî met en œuvre une marche mathématique sur les deux jambes algébrique et géométrique : l'algèbre pose un problème (c'est son côté « jambe d'appel ») que l'on formalise géométriquement (c'est l'appui pris sur l'autre jambe) en sorte d'interpréter en retour l'intersection géométrique comme égalisation algébrique (c'est le retour du poids sur la jambe de départ).

Plutôt que de travailler à l'autonomisation relative de l'algèbre (de quelle manière ses calculs peuvent-ils valoir preuve mathématique à l'égal des preuves géométriques axiomatiquement produites par Euclide ?), Al-Khayyâmî tire parti de la diversité accrue des mathématiques tout en consolidant l'unité endogène de son unique corps.

AL-MUKHATABAT Numéro 03 Année 01/2012 المخاطبات العدد 03 السنة الأولى
ISSN: 1737-6432