

# Plaidoyer pour une *raisonance* musique / mathématiques

Ou comment penser la musique *avec* les mathématiques ?

François NICOLAS

*compositeur, professeur associé à l'Ens*

---

[www.entretiens.asso.fr/Nicolas](http://www.entretiens.asso.fr/Nicolas)

# Deux pensées, disjointes

- Musique :  
Pensée de l'écoute
- Mathématiques :  
Pensée de l'être  
(à partir du  $\emptyset$ , c'est-à-dire pure de tout *étant*)

## La mathématique comme « ontologie »

La mathématique pense abstraitement ce qui est.

Elle pense les propriétés de ce qui est au seul titre du fait qu'il est.

La mathématique pense l'être comme pur être.

« *La mathématique est l'ontologie* » (Alain Badiou).

Ainsi

$$7+5 = 5+7 = 3*4 = 14-2 = 42/6 = 12 = \dots$$

quelles que soient les unités (« étants ») considérées:

tomates, notes de musique, ou étudiants...

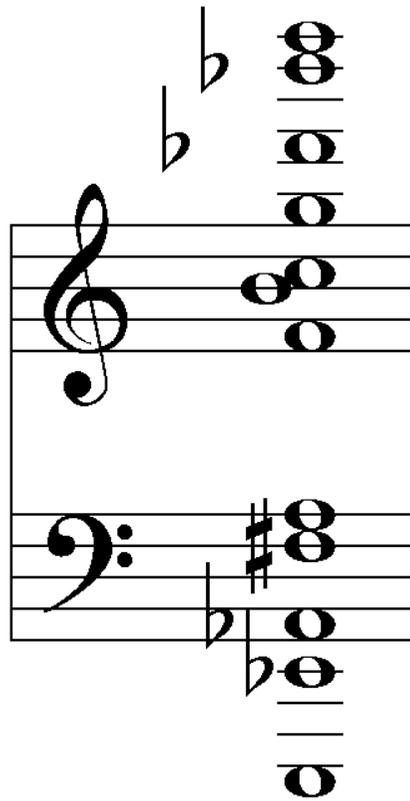
# Différents types de théorie musicale

- Théories **mathématiques** de la musique  
ex. : Guerino Mazzola (*Topos of music*)
- Théories **physiques** de la musique  
cf. acoustique, mécanique des instruments...
- Théories **philosophiques** de la musique  
cf. Platon, St Augustin, Leibniz, Schopenhauer...
- Théories **sociologiques** de la musique  
ex. : Max Weber, Pierre-Michel Menger...
- Théories **psychologiques** de la musique  
cf. « *La musique et les sentiments* »
- Théories **politologiques** de la musique  
cf. « *La musique et le pouvoir* »...
- ...
- Théories **musiciennes** de la musique  
Aristoxène, Zermelo, Rameau, ..., Messiaen...

## Différentes manières de rapporter les mathématiques à la musique...

				Symétrie ?	Inverse ?	
<b>0. Il n'y a pas de rapport</b>						
<b>MÉDIA T</b> (le rapport se joue à trois)	<b>I. Médiation scientifique ou artistique</b>	<b>1. Médiation ontique</b>	Essentiellement physico-acoustique	Non	Non : $Ma \rightarrow Mu$	
		<b>2. Médiation imaginée</b>	2a. avec une autre science	Non	Non	
			2b. avec un autre art			
	<b>II. Médiation philosophique</b>	<b>3. Contemporanéité</b>		<b>Oui</b>	Phi $Ma \leftrightarrow Mu$	
<b>IMMÉDIA T</b>	<b>III. Inspiration</b>	<b>4. Métaphore / Analogie (« comme »)</b>		Non	<b>Oui</b>	→ musique ----- → mathématiques
		<b>5. Fiction (« comme si »)</b>		Non	Non	
	<b>IV. Formalisation</b>	<b>6. Formalisation</b>		Non	Non	
	<b>V. Informatique</b>	<b>7. Application (calcul)</b>		Non	Non	
		<b>8. Conditionnement (logique)</b>		Non	<b>Oui</b>	→ musique ----- → mathématiques
	<b>VI. Intersection</b>	<b>9. Inclusion</b>		Non	Non	

# Accord « arc-en-ciel »



# Exemples d'accords « arc-en-ciel »

The image displays a musical score with six systems, each representing a different piece. Each system consists of a grand staff (treble and bass clefs) and a single bass line. The pieces and their corresponding chord structures are:

- “Ligne d'ombre” [I]: A triad in the bass clef (C4, E4, G4) and a triad in the treble clef (C5, E5, G5).
- “Ligne d'ombre” [IV]: A triad in the bass clef (F4, A4, C5) and a triad in the treble clef (F5, A5, C6).
- “Deutschland”: A triad in the bass clef (C4, E4, G4) and a triad in the treble clef (C5, E5, G5).
- “Erkennung”: A triad in the bass clef (C4, E4, G4) and a triad in the treble clef (C5, E5, G5).
- Orgue: A triad in the bass clef (C4, E4, G4) and a triad in the treble clef (C5, E5, G5).
- “Dans la distance”: A triad in the bass clef (C4, E4, G4) and a triad in the treble clef (C5, E5, G5).

# Exemple trivial



# *Suite lyrique* d'Alban Berg

*Suite lyrique* (Berg)



1 accord « arc-en-ciel » sur 20 000

- Il y a 479 001 600 accords possibles.
- Sans les transpositions, cela ne fait plus que 39 916 800 accords.
- Parmi ceux-là, il n'y a que 1928 accords de type « arc-en-ciel ».

Soit environ 1 / 20 000.

# Trois théorèmes logiques

- **Gödel**

Il y a de l'indécidable, donc le **calcul** ne saurait éponger la **raison**.

Noter : on démontre (donc on **calcule**) qu'il y a de l'**incalculable**. Cet **incalculable** se trouve ainsi intégré à la **rationalité** comme sa part non **calculable**.

Ce point **incalculable** prescrit une décision qui relève en droit des attributs de la **rationalité**.

- **Lowenheim-Skolem**

Toute théorie, constituée pour rendre compte de la singularité d'un champ donné, s'avère rendre également compte, dans les mêmes termes, d'un autre champ, entièrement étranger à celui qu'elle visait. En ce sens toute théorie rate la singularité du champ qu'elle théorise et le confond nécessairement avec un autre champ, entièrement hétérogène.

Ce théorème, à l'inverse du précédent, circonscrit un excès du **calcul** sur le **rationnel**.

- **Henkin**

Toute théorie cohérente dispose, du seul fait de sa cohérence, d'un modèle : la cohérence d'une théorie garantit donc l'existence d'un champ où cette cohérence fait sens.

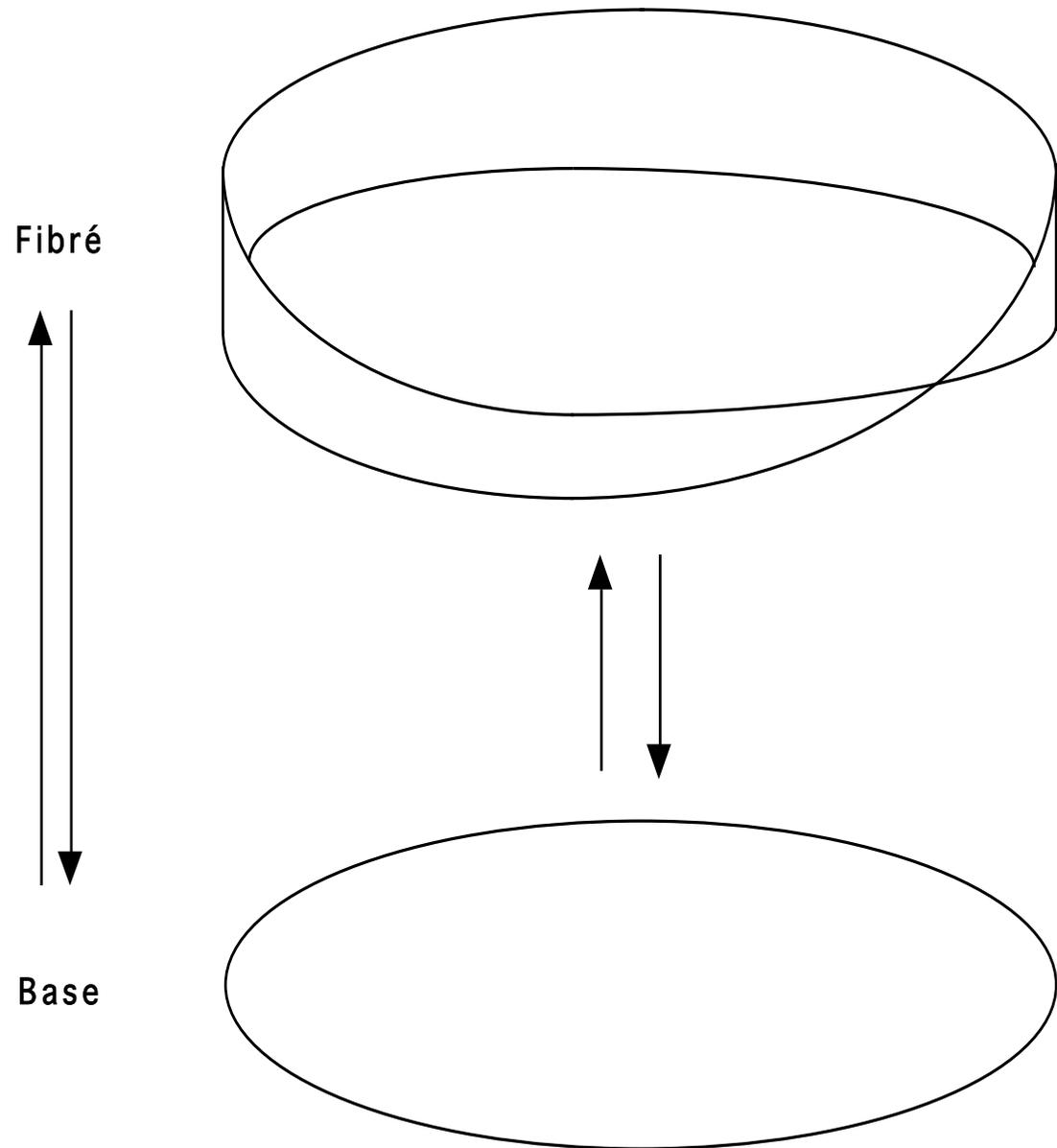
Le **calcul** génère ici une **rationalité** signifiante.

# Parménide : fragment VIII

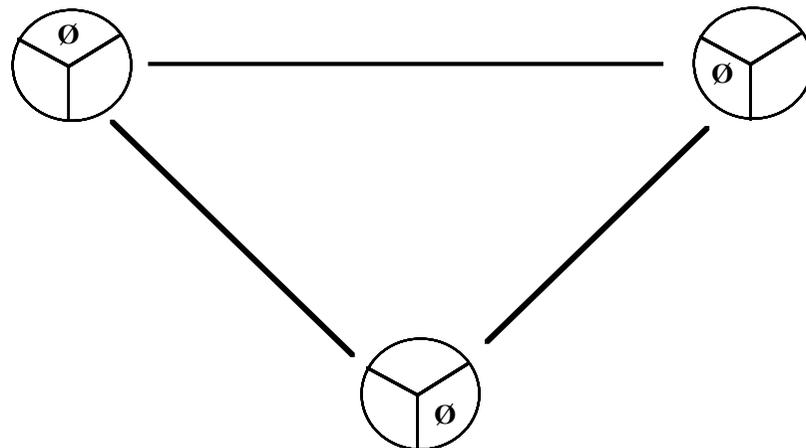
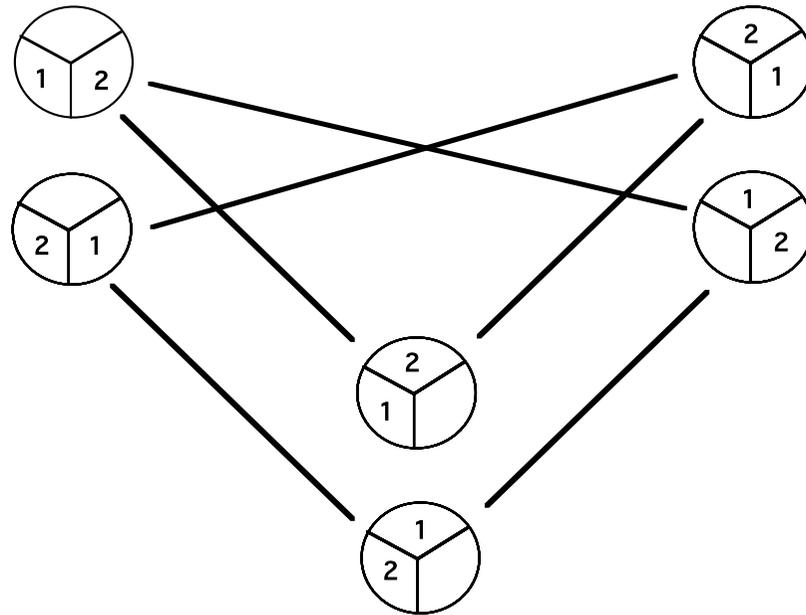
*Il ne reste donc plus qu'une seule voie dont on puisse parler, à savoir que l'être est ; et sur cette voie, il y a des signes en grand nombre indiquant qu'inengendré, il est aussi impérissable ; il est en effet de membrure intacte, inébranlable et sans fin ; jamais il n'était ni ne sera, puisqu'il est maintenant, tout entier à la fois, un, d'un seul tenant ; quelle génération peut-on rechercher pour lui ? Comment, d'où serait-il venu à croître ?... Je ne te permettrai ni de dire, ni de penser que c'est à partir de ce qui n'est pas ; car il n'est pas possible de dire ni de penser une façon pour lui de n'être pas. Quelle nécessité en effet l'aurait amené à l'être ou plus tard ou plus tôt, s'il venait du rien ? Ainsi donc il est nécessaire qu'il soit absolument ou pas du tout.*

*Jamais non plus la fermeté de la conviction ne concédera que de ce qui est en quelque façon vienne quelque chose à côté de lui ; c'est pourquoi la justice n'a permis, par aucun relâchement de ses liens, ni qu'il naisse ni qu'il périsse, mais maintient ; à cet égard ou bien il est, ou bien il n'est pas. Il est donc décidé, de toute nécessité, qu'il faut abandonner la première voie, impossible à penser et à nommer – car elle n'est pas la route de la vérité –, c'est l'autre au contraire qui est présence et vérité. Comment ce qui est pourrait-il bien devoir être ? Comment pourrait-il être né ? Car s'il est né, il n'est pas, et il n'est pas non plus s'il doit un jour venir à être. Ainsi la genèse est éteinte et hors d'enquête le périment.*

# Bande de Möbius



# Taquin



# Canon de Mozart

Allegro

Mozart

Allegro

This image shows the left page of a musical score for the Canon by Mozart. It features 12 staves of music in G major, 3/4 time. The tempo is marked 'Allegro'. The score includes various musical notations such as treble clefs, notes, rests, and dynamic markings. The name 'Mozart' is printed at the top right, and 'Allegro' is printed at the bottom right.

Allegro

Mozart

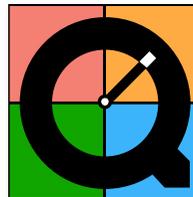
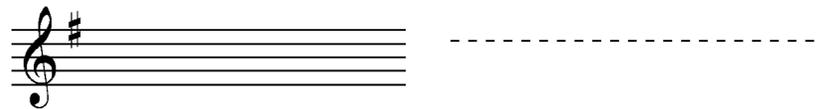
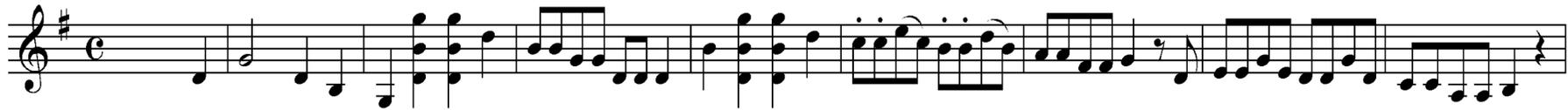
Allegro

This image shows the right page of a musical score for the Canon by Mozart. It continues the 12 staves of music from the left page. The tempo is marked 'Allegro'. The name 'Mozart' is printed at the bottom left, and 'Allegro' is printed at the bottom right.

# Mozart...

Allegro

Mozart



## *Passage II* (pour trois flûtes, 1985 – Éd. Jobert)

♩ = 48 Très souple  
un rien solennel

mp mf sf mf sf sf mf

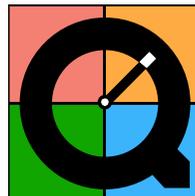
mp mf mp sf sf sf mf

mp mf mp (sempre) sf mf

mp (sans pré) sf sf sf mf

mp (sans pré) sf mf

Accéder peu à peu



## Passage II (simplifié)

2

The image displays a musical score for a piece titled "Passage II (simplifié)". The score is written for three staves, likely representing different instruments or voices. It consists of two systems of music. The first system contains 10 measures, and the second system contains 10 measures. The notation includes various rhythmic values, such as eighth and sixteenth notes, and rests. There are several trills and triplets indicated by the number '3' above the notes. Fingerings are indicated by the number '5' above or below notes. The score is presented in a standard musical notation style with a treble clef on the top staff of each system.

## Structure du canon (*Passage II*)

$$\left| \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{A}} \\ \xrightarrow{\mathbf{B}} \\ \xrightarrow{\mathbf{C}} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbf{A}} = \xrightarrow{\mathbf{C}} \\ \xleftarrow{\mathbf{B}} = \xrightarrow{\mathbf{B}} \\ \xleftarrow{\mathbf{C}} = \xrightarrow{\mathbf{A}} \end{array} \right|$$



# 3 modalités du « *comme* »

- ***Métaphore***

ou « ***comme*** » entre deux termes :

$$K \equiv C$$

- ***Analogie***

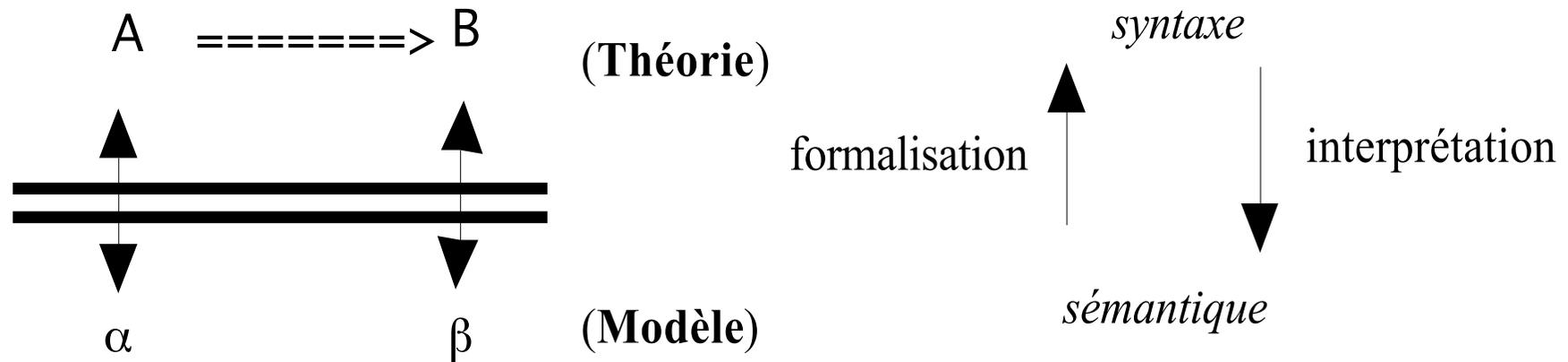
ou « ***comme*** » entre deux rapports :

$$a/X \equiv b/Y$$

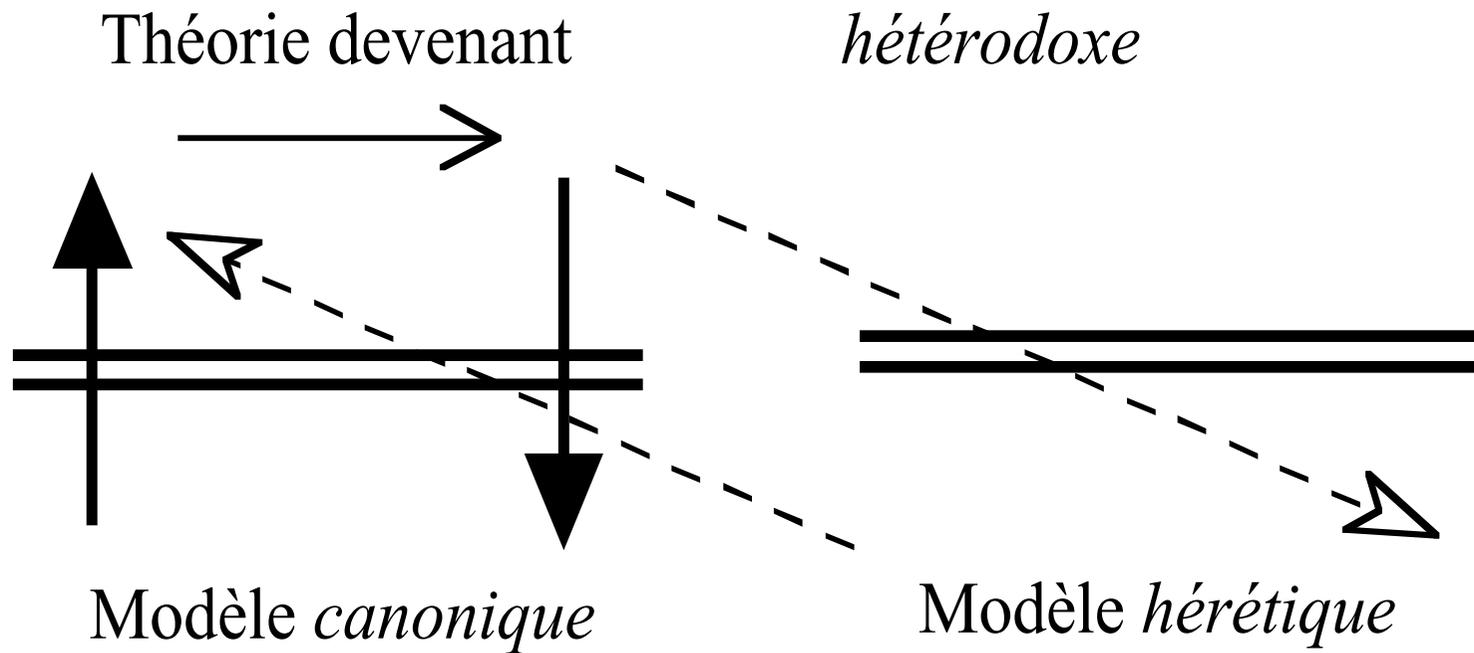
- ***Fiction***

ou « ***comme si*** »

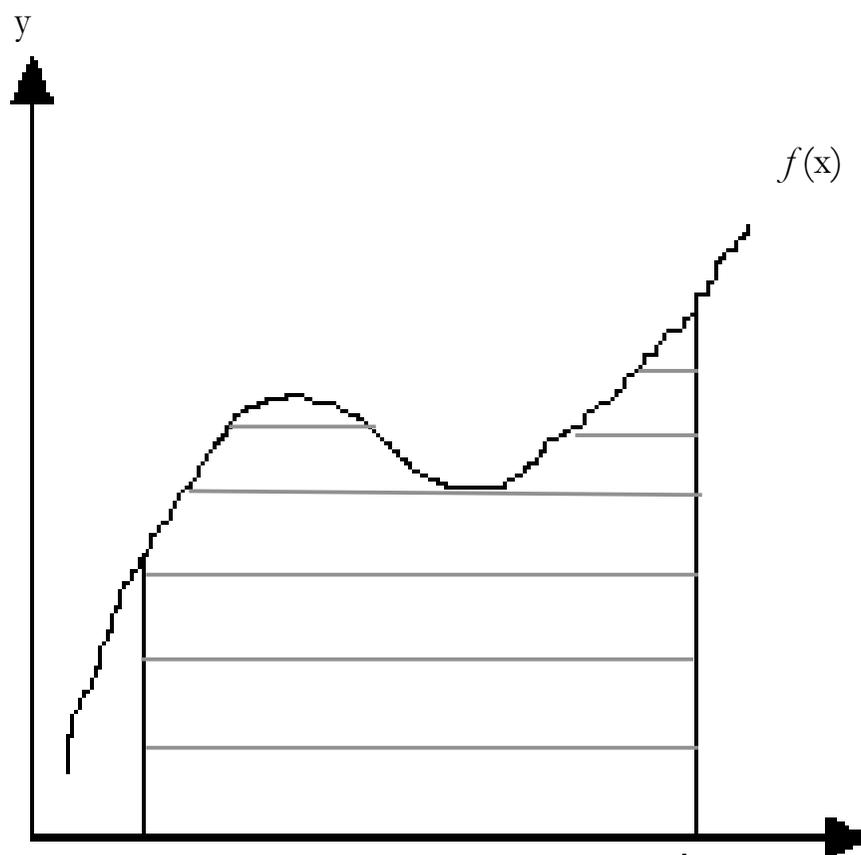
# Un modèle et sa théorie...



# Modèle *fictif* d'une théorie donnée

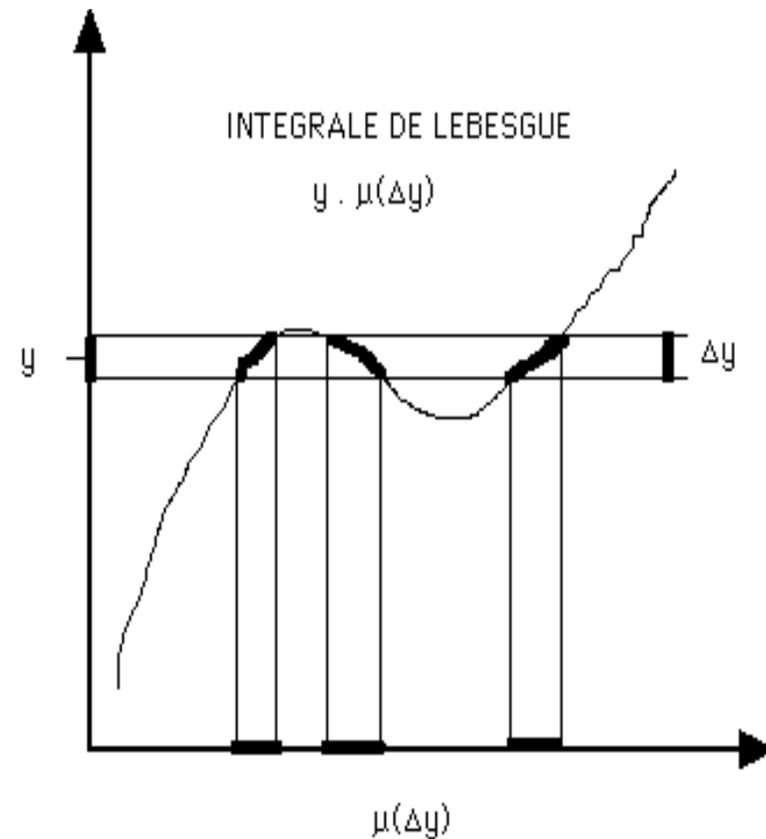
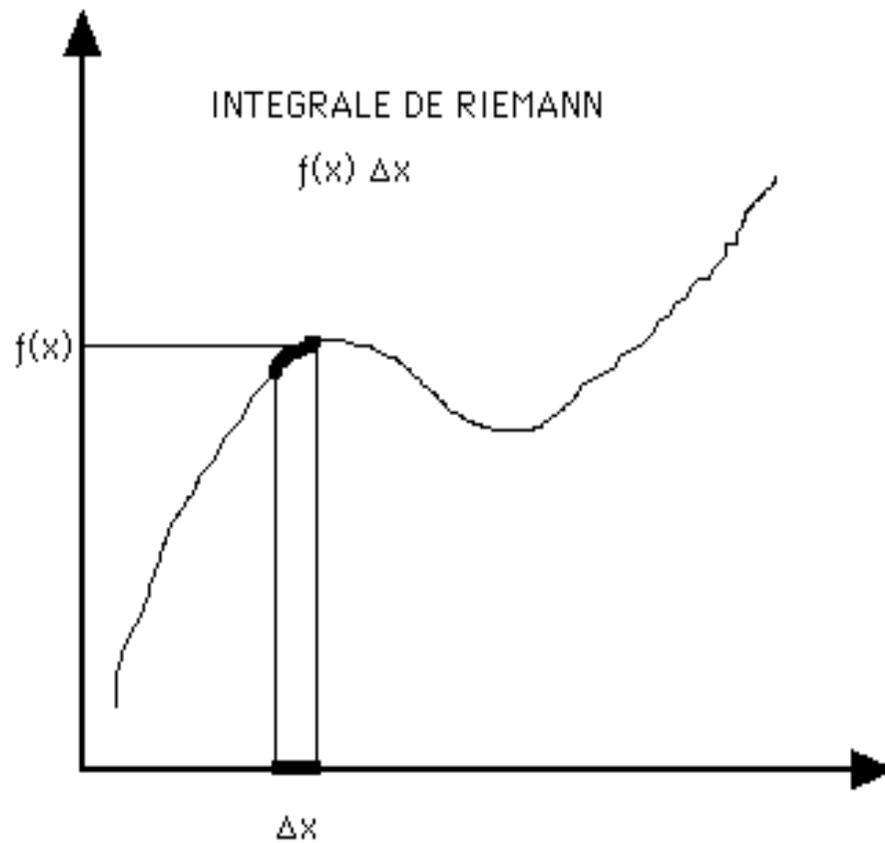


# Intégrale mathématique

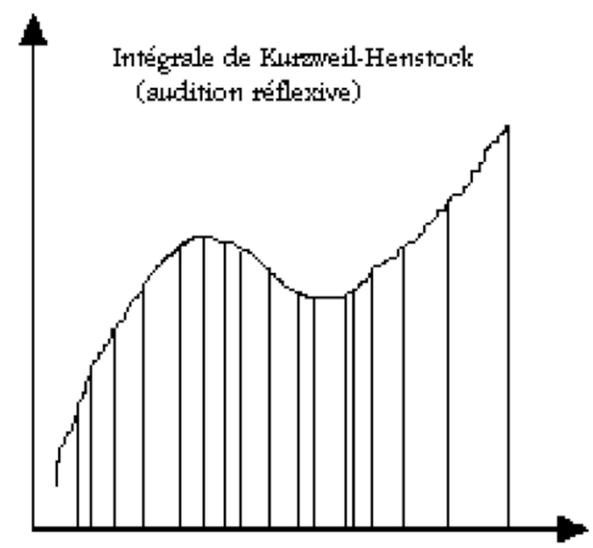
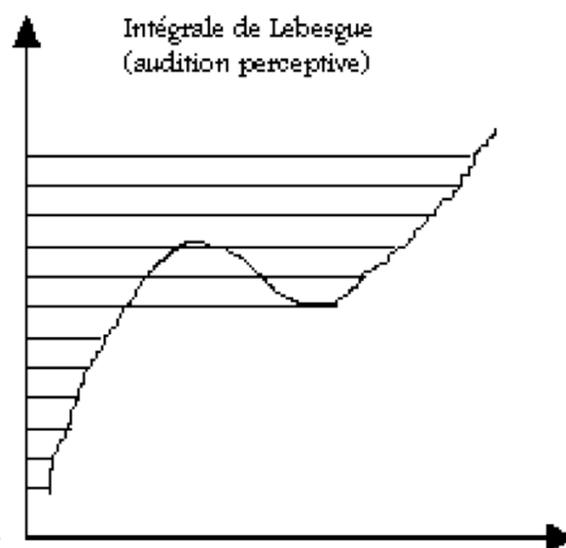
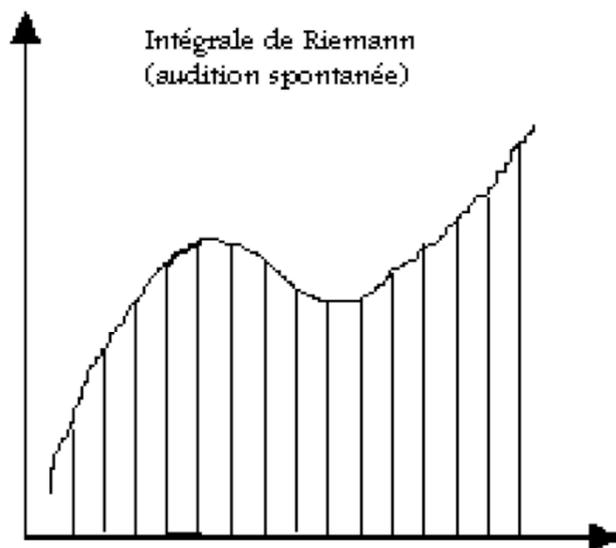


# Intégrales de Riemann

# Lebesgue



# Trois auditions...

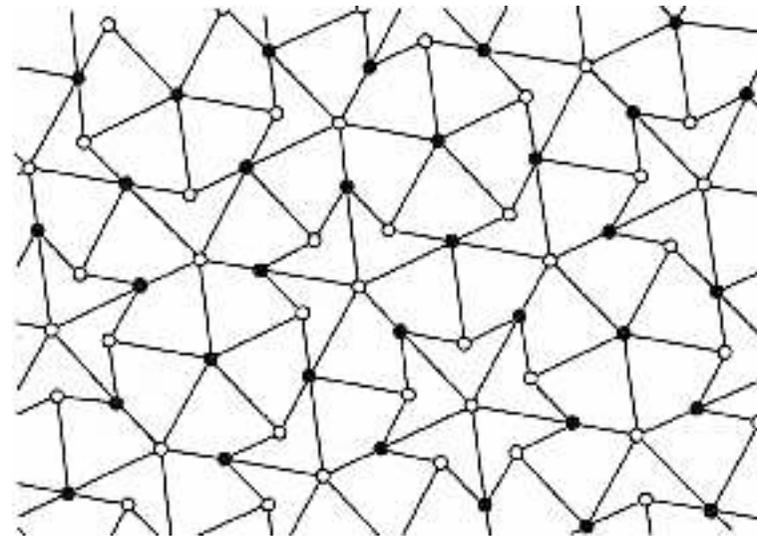
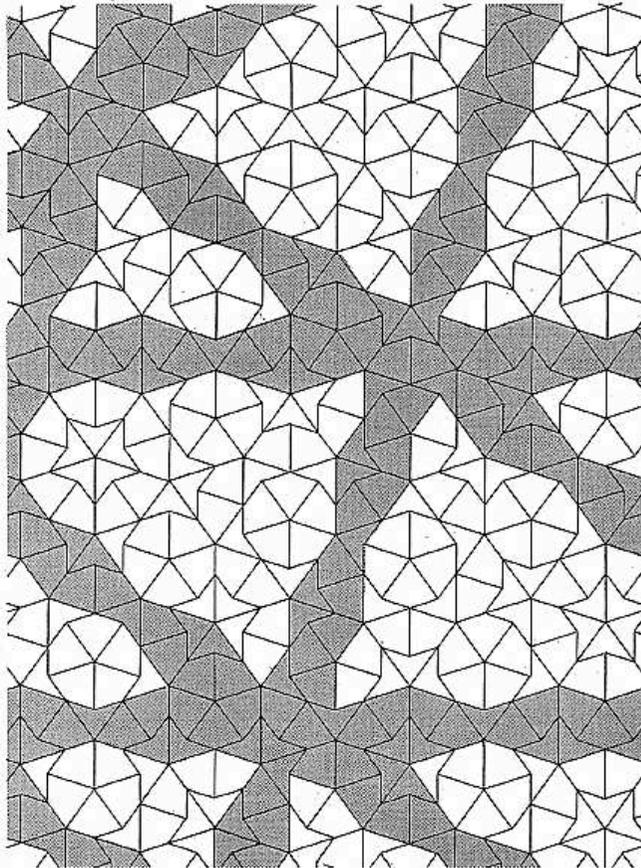


***La troisième est la bonne !***

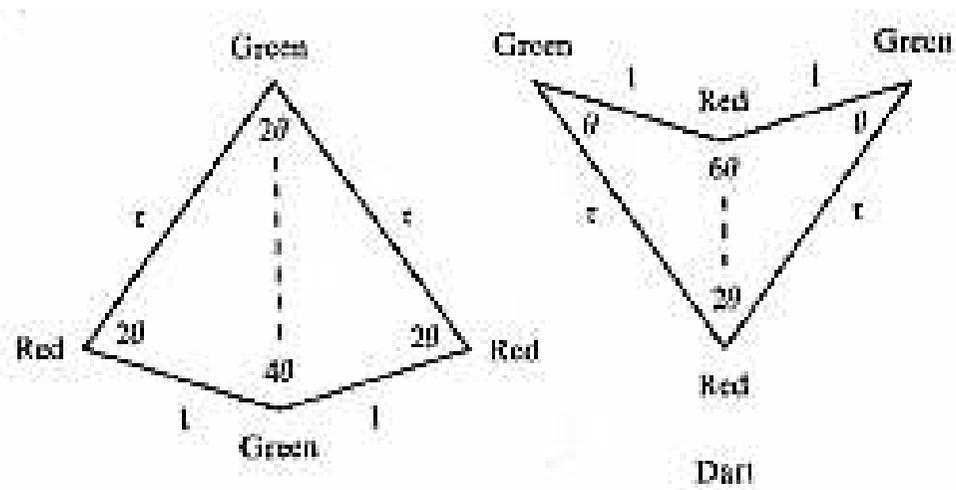
## Exemple : 17 manières de penser la musique *avec* les mathématiques

1. Penser **la logique** musicale (et donc l'articulation raison/calcul) *avec* la logique mathématique
2. Penser **le « avec »** *avec* la théorie des modèles
3. Penser **la perception** musicale *avec* la théorie des pavages
4. Penser **l'audition** *avec* la théorie de l'intégration
5. Penser **l'écoute** musicale *avec* la théorie de la différenciation
6. Penser **l'écoute à l'œuvre** *avec* les jeux mathématiques de taquins
7. Penser les modalités de **l'entendre** *avec* les théories mathématiques de l'intrinsèque et de l'extrinsèque
8. Penser **l'écriture et la lettre** musicales *avec* l'écriture et la lettre mathématiques
9. Penser l'articulation musicale entre **écriture et écoute** *avec* l'articulation mathématique (de la théorie) des ensembles et (de la théorie) des catégories
10. Penser **le monde** de la musique *avec* la théorie des topos
11. Penser **la composition** musicale *avec* les théories mathématiques du local et du global
12. Penser **l'entre-œuvres** des concerts *avec* la théorie des catégories
13. Penser **la combinatoire** musicale *avec* l'algèbre
14. Penser **le style diagonal de pensée** *avec* la procédure diagonale de Cantor
15. Penser **le temps** musical *avec* la théorie des équations différentielles (cf. A. Lautman)
16. Penser **la nature** musicale *avec* la théorie des ordinaux et cardinaux (cf. A. Badiou)
17. Penser **les rapports de l'œuvre à son matériau** *avec* la théorie des nombres surréels (cf. A. Badiou)

# Pavage de Penrose



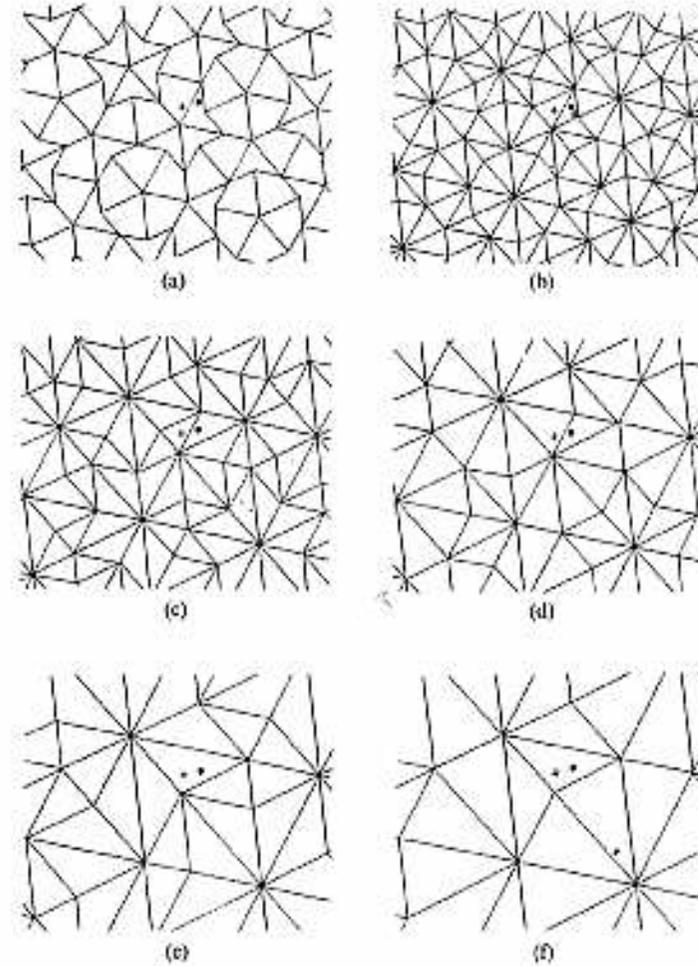
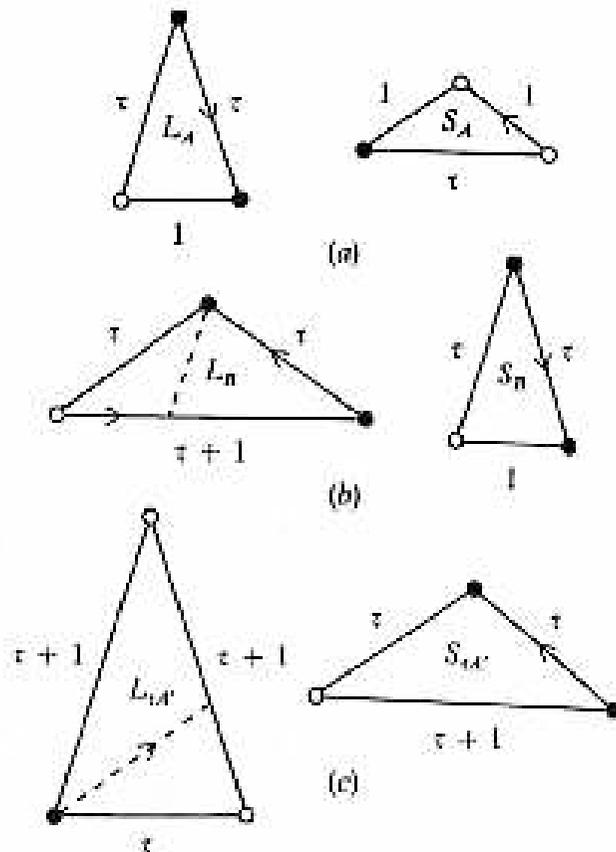
## Tuiles « cerfs-volants » et « flèches »



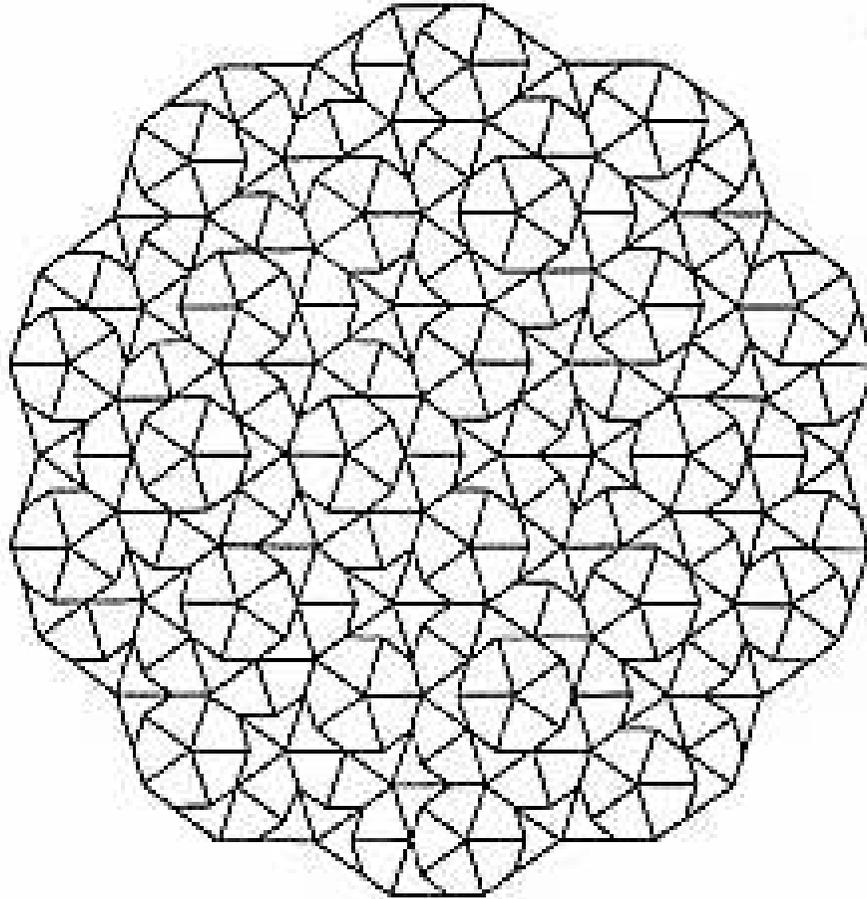
# Changement d'échelle

des tuiles

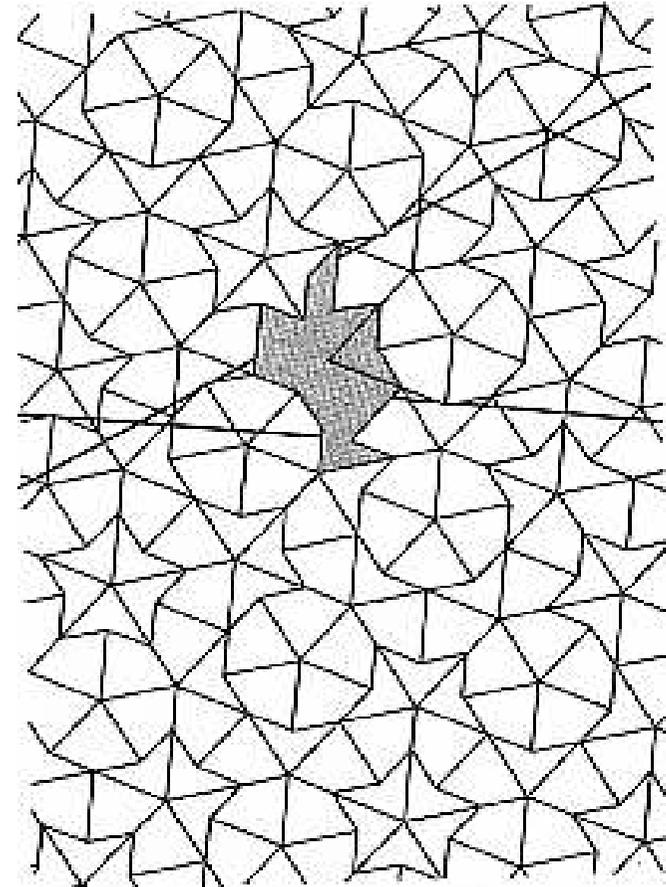
du pavage



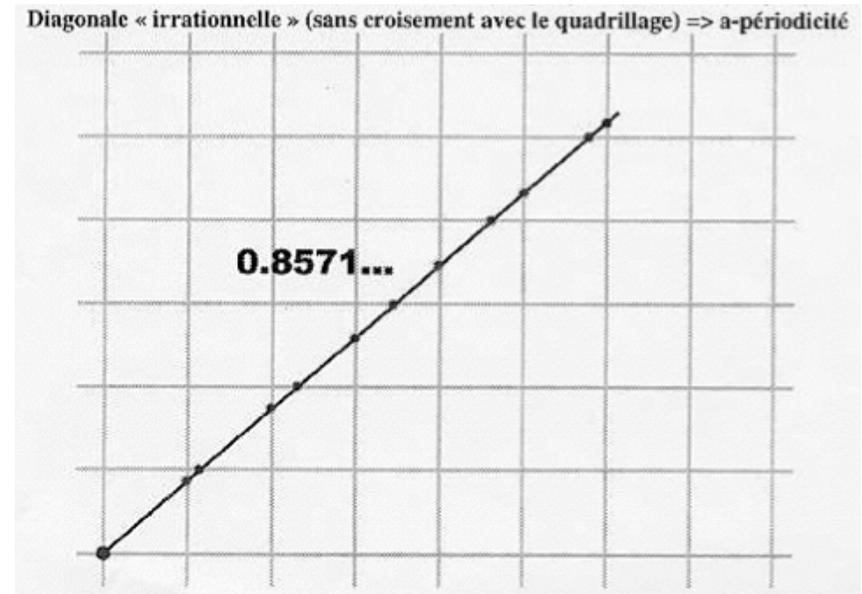
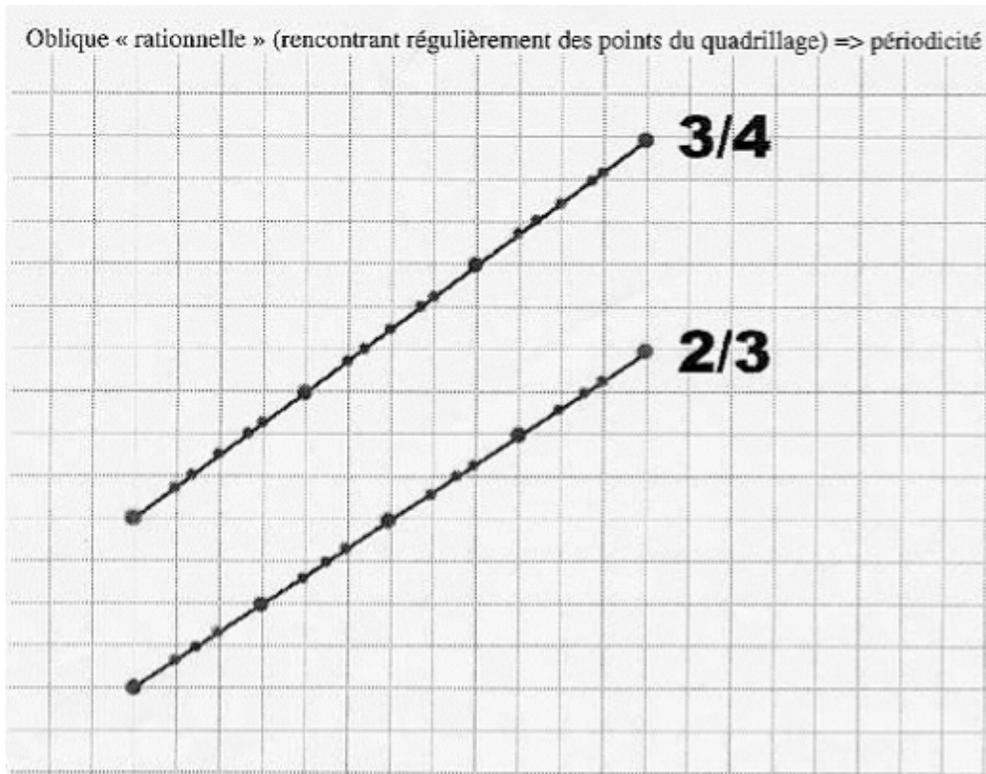
## Remplissage d'une « roue »



## Trou « essentiel »



# Apériodicité par projection d'une périodicité sur une diagonale



## Différentes manières de rapporter les mathématiques à la musique...

				Symétrie ?	Inverse ?	
<b>0. Il n'y a pas de rapport</b>						
<b>MÉDIA T</b> (le rapport se joue à trois)	<b>I. Médiation scientifique ou artistique</b>	<b>1. Médiation ontique</b>	Essentiellement physico-acoustique	Non	Non : $Ma \rightarrow Mu$	
		<b>2. Médiation imaginée</b>	2a. avec une autre science	Non	Non	
			2b. avec un autre art			
	<b>II. Médiation philosophique</b>	<b>3. Contemporanéité</b>		<b>Oui</b>	Phi $Ma \leftrightarrow Mu$	
<b>IMMÉDIA T</b>	<b>III. Inspiration</b>	<b>4. Métaphore / Analogie (« comme »)</b>		Non	<b>Oui</b>	→ musique ----- → mathématiques
		<b>5. Fiction (« comme si »)</b>		Non	Non	
	<b>IV. Formalisation</b>	<b>6. Formalisation</b>		Non	Non	
	<b>V. Informatique</b>	<b>7. Application (calcul)</b>		Non	Non	
		<b>8. Conditionnement (logique)</b>		Non	<b>Oui</b>	→ musique ----- → mathématiques
	<b>VI. Intersection</b>	<b>9. Inclusion</b>		Non	Non	

# Références

- Un **livre** (Éd. Delatour) :  
*Penser la musique avec les mathématiques?*
- Un **séminaire** (Ens-Ircam-Cnrs) :  
Musique et mathématiques : *Les mathématiciens  
et la musique*
- Un **site** : [www.entretemps.asso.fr/maths](http://www.entretemps.asso.fr/maths)
- Une **liste** : *mamuphi*  
voir <http://lists.ircam.fr>