

# THÉORIE DU FORCING PAR PAUL COHEN

(notes de travail pour un exposé *mamuphi*<sup>1</sup>)

François NICOLAS (mai 2017)

<b>EXPOSÉ IRCAM</b> .....	<b>2</b>
<b>Tableau récapitulatif des notations</b> .....	<b>3</b>
Différences avec Alain Badiou .....	3
<b>Rappels préalables</b> .....	<b>4</b>
Rappel sur l'adjonction-extension .....	4
Rappel sur les rapports théorie-modèle .....	4
<b>Parcours général</b> .....	<b>5</b>
Enjeux et méthode .....	5
Étapes .....	7
Extensions <i>génériques</i> de modèles .....	7
<b>1. Situation S</b> .....	<b>8</b>
• <i>Parcours de pensée</i> .....	8
1.a - ZFC .....	8
1.b - MTD... .....	9
1.c - Modèle de ZFC .....	10
• Au total... .....	11
<b>2. Canton C des conditions</b> .....	<b>11</b>
• <i>Parcours de pensée</i> .....	11
2.a - Condition c et relation d'ordre $\preceq$ .....	11
2.b - EPO C des conditions .....	12
2.c - Procédure de conditionnement .....	12
2.d - Les parties denses de l'EPO .....	13
2.e - Partie S-générique G de C .....	13
<b>3. Polynoms</b> .....	<b>14</b>
• <i>Parcours de pensée</i> .....	14
• <i>Incise : syntaxe/sémantique &amp; grammaire</i> .....	15
3.a - Constitution lexicale .....	16
3.b - G-évaluation des polynoms .....	17
3.c - Polynoms canoniques représentant les éléments de S .....	17
3.d - Définition de l'extension S[G] .....	18
<b>4. Forçage</b> .....	<b>18</b>
• <i>Parcours de pensée</i> .....	18
4.a - Relation de forçage .....	19
4.b - Son point de réel : la négation .....	21
4.c - Vérification de ses attributs .....	23
4.d - Propriétés de l'extension .....	23
<b>5. Ensuite...</b> .....	<b>23</b>
<b>Raisonnances mamuphiques</b> .....	<b>24</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>25</b>

---

<sup>1</sup> avec l'amical lecture critique de Mathias Béjean en vue de l'exposé en question (voir abstract ci-suit).

## EXPOSÉ IRCAM

*La théorie du forcing par Paul Cohen : ses enjeux, sa méthode et ses démonstrations*  
Mathias Béjean & François Nicolas (*mamuphi*, 27 mai 2017)

Pour paraphraser Cavaillès, comprendre le geste de pensée enchâssé dans la théorie de Cohen, c'est attraper ce geste - en comprenant les démonstrations qui le tracent - en sorte de pouvoir le continuer (pour nous, en imaginant de possibles *raisonances mamuphiques*).

Cette théorie invente une nouvelle modalité d'adjonction-extension : une adjonction *générique* de *modèle* là où Dedekind avait mis en œuvre une adjonction *algébrique* de *corps*.

**Adjonction-extension** - L'adjonction-extension révolutionne une situation de départ en y ajoutant, en intériorité, des éléments d'un nouveau type (engendrés par de nouvelles opérations immanentes) en sorte d'aboutir, par interaction généralisée, à une nouvelle situation considérablement étendue qui préserve la situation de départ comme domaine particulier et restreint du nouveau monde, comme une sorte de réserve d'ancien régime. Ici, rompre radicalement et globalement, ce n'est plus détruire pour reconstruire, ou délaisser pour se déplacer et édifier ailleurs, mais adjoindre pour étendre et projeter l'ancien monde en un monde élargi à très vaste échelle par prolifération endogène d'éléments inédits.

**Générique** - La nouvelle adjonction-extension de Cohen passe par la création d'une partie générique (c'est-à-dire quelconque, sans particularités, incognito et défiant toute délimitation identitaire) dont la composition interne comme les effets globaux vont rester finement contrôlés de l'intérieur même de la situation de départ : le travail du générique peut donc être minutieusement dirigé, au plus loin de sombrer dans l'indistinct d'un « n'importe quoi » et dans la confusion d'un « peu importe ». Au demeurant, cet ajout générique est destiné à demeurer tel dans la situation d'arrivée : sa qualité d'indiscernable ne tient donc pas à quelque variable cachée qui, par dévoilement, avouerait ensuite une identité dissimulée ; cette qualité de générique est résolument affirmative, nullement par défaut, et elle continue de féconder la nouvelle situation qu'elle a engendrée.

**Forcing** - L'invention d'une relation de « forçage » autorise une rationalité a priori des effets attendus : la révolution du domaine, loin d'opérer en aveugle, se déroule éclairée pas à pas selon une intelligence anticipante en sorte que le générique s'avère dispenser une lumière, forçant la dissipation d'un conformisme identitaire qui rétrécissait drastiquement les horizons de pensée. On soulignera au passage l'impossible propre de cette opération : le réel du forçage est de ne pouvoir forcer le travail du négatif (le forçage de la négation est remplacé par un non-forçage de l'affirmation). Ainsi, le forçage concerne les affirmations ou il n'est pas.

**Formalisation** - Point important de méthode : pour ce faire, la pensée doit miser sur la puissance propre de la formalisation, vérifiant ainsi que penser, c'est formaliser, et que formaliser, c'est penser. L'invention repose en effet ici sur la transformation d'une syntaxe formelle en grammaire (les choses que les mots de la syntaxe vont venir sémantiquement nommer seront d'autres mots, tout comme le font les mots spécifiques d'une grammaire - verbes, adjectifs, préfixes...) : le « formel » ne constitue donc nullement la part morte et le déchet inerte de la pensée mais bien une source rationnelle instituant un discours apte à préfigurer hic et nunc (à « forcer ») les effets à venir de la révolution en cours.

On conclura sur différentes *raisonances* de cette nouvelle manière de penser les ruptures radicales.

### Petite bibliographie mamuphique

- Mathématiques : Paul J. Cohen - *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (Mathematics Lecture Note Series, 1966)
- Philosophie : Alain Badiou - *L'être et l'événement* (Seuil, 1988)
- Musique : François Nicolas - *Raisonance musique & mathématiques : pour mieux comprendre l'aura poétique engendrée par l'œuvre musicale composite*, in *Le monde-Musique*, Tome IV, chapitre II (Aedam musicæ, 2016)
- Séminaire mamuphi
  - François Nicolas - [Un modèle inattendu d'adjonction-extension : la constitution d'une grammaire arabe au VIII<sup>e</sup> siècle](#) (*mamuphi* 5 décembre 2014, Ircam)
  - François Nicolas - [Composer des hétérophonies](#) (*mamuphi* 12 novembre 2016, Ircam)
  - Armand Hatchuel - [Forcing et théorie de la conception \(théorie C-K\) : un modèle du raisonnement créatif](#) (*mamuphi* 10 décembre 2016, Ircam)

### Tableau récapitulatif des notations

	<i>termes mathématiques</i>	COHEN <sup>3</sup>	DEHORNOY	<i>mes termes</i>	<b>mes notations</b>	BADIOU
	<i>MTD de ZFC</i>	M	M	<i>situation</i>	S	Situation quasi-complète S
	<i>condition</i>	c	p, q...	<i>condition</i>	$c \in S$	c
	<i>relation d'ordre</i>		$\preceq$	<i>ordre</i>	$\preceq$	$[\geq]$
	<i>EPO des conditions</i>		P	<i>canton C des conditions c</i>	$c \in CCS$	©
	<i>chaîne</i>			<i>procédure d'enquête</i>		
	<i>partie dense dans P</i>		D	<i>densité</i>	DCC	domination
	<i>partie M-générique</i>	a	G	<i>partie générique</i>	G	♀
	<i>P-noms de rang n</i>			<i>polynoms</i>	p	μ
	<i>P-nom d'un élément z</i>	$\bar{y} \dots$	$\bar{z} \dots$	<i>polynom canonique d'un élément x de S</i>	$\boxtimes \dots$	$\mu(x)$
3	(nom de la partie générique)	$\bar{a}$	$\check{G}$	<i>polynom canonique de G dans S</i>	$\boxplus$	$\mu(\check{G})$
	ensemble des P-noms		$M^P$	<i>ensemble des polynoms</i>	$P (\equiv M^C)$	
	évaluation d'un P-nom dans la partie générique		$eval_G(X)$	<i>G-référent d'un polynom p</i>	$R_G(p)$	♀-référent
	<i>forcing</i>	F	$\Vdash$	<i>forçage</i>	$\Vdash$	$\Leftrightarrow$
	« forcing conditions » & « statements »	P & A		<i>propositions &amp; formules</i>	$\prod$ & $\lambda$	
	<i>relation</i>	F(P,A)			$\prod \Vdash \lambda$	
	<i>extension</i>	N	M[G]	<i>extension</i>	S[G]	S(♀)

### Différences avec Alain Badiou

[Cf. EE = Être et événement - 1988]

#### Différences de notation

##### Raisons de sens

- $\Vdash$  plutôt que  $\Leftrightarrow$  pour symboliser que le forçage est une relation dissymétrique : de gauche à droite.
- $\preceq$  plutôt que  $\geq$  : sorte de « contravariance » du raffinement par rapport à la quantité d'information - « less (in  $\preceq$ ) is more (informative) » (Kanamori, 117) : « moins (dans l'ordre) est plus (d'information) »<sup>6</sup>. En effet, si  $c'$  raffine  $c$ , si  $c'$  contient donc plus d'informations que  $c$ , si  $c' \supseteq c$ , on écrira  $c' \prec c$  ! Didactiquement, AB évite ce paradoxe du contravariant en classant les conditions par contenu croissant d'informations.
- Mieux distinguer  $\boxtimes$  et surtout  $\boxplus$  de  $x$  et  $G$  : la notation  $\mu(x)$  et  $\mu(\check{G})$  laisse en effet entendre que  $\mu$  pourrait être une sorte de fonction.

##### Raisons de commodité

- C plutôt que ©

<sup>3</sup> Voir ses conférences de 1965 (voir en bibliographie son livre de 1966). Cohen précise (p. 113) qu'il y a « quelques variations inessentiels » par rapport à la version originale de 1963.

<sup>6</sup> Présentation de ce paradoxe (du contravariant) : « Une condition est plus petite qu'une autre si elle donne plus d'information. » Jacques Stern (*Dictionnaire des mathématiques*, Universalis, p. 189)

- p plutôt que  $\mu$
- G plutôt que  $\varphi$  !

### Différences de lexique

- *polynoms* plutôt que *noms*
- *densité* plutôt que *domination*

## Rappels préalables

### Rappel sur l'adjonction-extension

L'adjonction-extension (AE) opère en immanence, c'est-à-dire de l'intérieur d'une situation de départ.

Ce n'est donc pas un simple ajout exogène : un apport venu de l'extérieur qu'on viendrait juxtaposer et coller au bord de la situation – une sorte de verrue faisant extension, tel l'ajout d'une annexe ou d'une véranda à une maison existante.

Ce n'est pas non plus comme l'ajout d'un axiome à une théorie axiomatisée (par ex. l'ajout de l'axiome de choix à la théorie de Zermelo-Fraenkel).

Comment cela est-il possible ? Tout simplement, dans le cadre de la théorie des ensembles, en transformant une partie de la situation de départ S en élément de S c'est-à-dire en la faisant exister dans S.

On sait que dans un ensemble E, il y a beaucoup plus de parties de E que d'éléments c'est-à-dire que la plupart des parties de E n'y existent pas puisqu'exister dans E, c'est en être un élément.

L'adjonction consistera donc à transformer une partie P de E en élément de E :  $P \subseteq E \rightarrow P \in E$ .

L'adjonction opère donc avec des éléments de E (les éléments d'une partie de E sont bien éléments de E : ils existent donc bien dans la situation de départ) et l'adjonction consiste à compter comme nouvel élément de E (donc à l'y faire exister) ce qui n'était jusque-là qu'une partie in comptée.

Par exemple, Dedekind adjoint les coupures aux rationnels pour étendre  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ . Et une coupure est une partition de  $\mathbb{Q}$  en deux parties.

On peut imaginer d'autres exemples, plus prosaïques, d'adjonction immanente : le néologisme, par exemple, adjoint à un lexique existant un nouveau mot fait, comme les autres, des lettres disponibles dans la langue en question ; l'extension procèdera alors de la combinaison de ce nouveau mot avec les préexistants en sorte de construire de nouvelles phrases mais aussi de générer de nouveaux mots par application de la grammaire au néologisme (voir par exemple la conjugaison d'un néologisme verbal : génériciser  $\implies$  « j'aurais généricisé », « vous génériciserez »...).

De même un mariage est l'adjonction (institutionnelle) à une situation d'un nouveau couple (c'est-à-dire d'une partie faite de deux éléments de la situation), lequel va étendre la situation de départ en interférant, comme nouvel acteur institutionnel, avec les précédents.

On a alors deux types d'AE :

- celles qui ajoutent une seule partie (de type nouveau) : par exemple la simple adjonction de l'élément  $i = \sqrt{-1} \equiv (x^2 + 1)$  pour étendre  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$ .
- celles qui ajoutent une classe de parties (de type nouveau) : par exemple l'adjonction des coupures (et non pas d'une seule) pour étendre  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ .

L'AE de Cohen va d'abord être du premier type (adjonction d'une seule partie G). Ce qui va la singulariser est alors que cette partie sera d'un type vraiment nouveau car cette partie ne sera pas constructible dans la situation de départ – elle sera dite, pour cela, « générique ». Cohen crée ce nouveau type (qui diagonalise tous les constructibles sur un ensemble donné) pour assurer que  $V \neq L$  <sup>7</sup>.

Dans un second temps, elle deviendra du second type : « on pourra quelque fois introduire une classe d'ensembles génériques plutôt que simplement un ensemble. » <sup>8</sup>

### Rappel sur les rapports théorie-modèle

Ce rappel pourra utilement être relu plus tard si sa lecture ici en tête d'exposé semble trop abstraite.

Il sera particulièrement utile de s'y référer lorsqu'on abordera en partie 4 le forçage des formules.

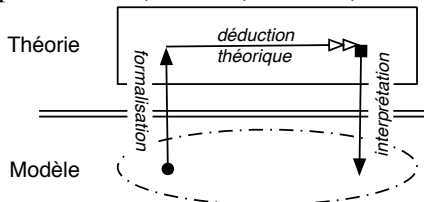
Un modèle est une situation empiriquement donnée, peuplée d'objets spécifiques (mathématiquement dit : un ensemble d'éléments) dans laquelle on peut expérimenter – vérifier, constater – des propriétés phénoménales mais dans laquelle les rapports entre phénomènes séparés ne sont pas présentés comme tels : le modèle est

<sup>7</sup> V désigne l'univers (non totalisable) des ensembles et L celui des seuls ensembles constructibles (voir l'invention de Gödel).

<sup>8</sup> Cohen p. 127-128

sans « lois » explicites (on y vérifie par exemple qu'une même « cause » a des « effets » différents selon la différence des « objets » sur lesquels elle s'exerce mais rien, dans la situation, ne dit pourquoi).

Une théorie de ce modèle est la construction d'une symbolisation ad hoc (cette construction s'appelle *formalisation*) avec des lettres de différents types ( $x, y, z, \dots$  ;  $a, b, c, \dots$  ;  $\forall, \exists, \in, \subset, \cap, \cup, =, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \dots$ ) et des règles logiques d'inférence : le propre de la théorie est de pouvoir y déduire et par là y discourir, à charge ensuite de vérifier les propositions ainsi théoriquement déduites dans le modèle de départ. La théorie constitue donc un espace relativement autonome de pensée dans lequel, à l'inverse de l'espace empirique du modèle, on peut déduire, induire, calculer, démontrer, réfuter, une sorte donc d'espace « dual » où les objets sont de purs



symboles formels mais où les relations entre ces objets opèrent selon des lois explicites.

Par exemple, prenons l'ensemble  $\mathbb{N}$  des nombres entiers positifs comme modèle de départ :  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .

Construisons une théorie sur  $\mathbb{N}$ , par exemple une théorie des nombres premiers. On va pouvoir y raisonner à partir de symboles tels «  $n$  » et de lois de composition entre eux (addition, multiplication, élévation à la puissance, ...) en sorte de pouvoir raisonner ainsi : « soit  $n$  un nombre entier quelconque ;  $n$  sera premier si... ».

On pourra ensuite aller vérifier dans notre modèle que, par exemple,  $n=23$  est bien un nombre premier (on ne peut le partager en différents paquets égaux) et que  $n'=21$  (partageable en trois paquets de 7) ne l'est pas.

Dans le forcing, le mouvement de pensée va opérer à rebours de cet ordre naturel (où la formalisation part d'un modèle pour en construire une théorie) : on va partir d'une théorie (la théorie des ensembles formalisée par Zermelo-Fraenkel) pour en chercher un modèle. Dans notre théorie, on travaillera donc sur des formules du type  $e \in E$ , dont on ira vérifier la véridicité dans le modèle en vérifiant expérimentalement, empiriquement, si l'élément noté  $e$  appartient bien à l'ensemble noté  $E$ . Mais, bien sûr, dans notre modèle, le signe  $\in$  n'existera pas comme tel car notre modèle reste résolument empirique : il n'est pas doté en interne d'un langage sur lui-même (c'est précisément la théorie qui est en charge de construire un langage sur le modèle, mais un langage exogène et relativement autonome).

On rappellera plus loin un usage classique de ce même mouvement de pensée (quel modèle pour quelle théorie purement formelle préexistante ?) avec le théorème de Lowenheim-Skolem (voir *Incise : syntaxe/sémantique & grammaire*)

## Parcours général

### Enjeux et méthode

#### Deux grands apports

Deux grands apports de ce nouveau type d'adjonction-extension (par-delà ses théorèmes spécifiques) :

- concept affirmatif du *générique* ;
- méthode du *forcing*

#### Générique

Un premier grand apport de Cohen est de construire un concept affirmatif du générique (c'est une partie qui intersecte toute partie dense) et non plus un concept négatif de l'indiscernable (non-constructible). C'est le même type d'apport que celui opéré par Dedekind quand il définit affirmativement l'infini comme l'ensemble tel qu'une partie stricte y équivaut au tout (et non plus comme non-fini).

#### Adjonction générique de modèle

L'adjonction-extension (AE) est ici de modèle et non plus de corps (comme dans l'AE sur les rationnels par Dedekind, ou celle sur les réels par les complexes ou par les surréels).

Remarquons d'abord ceci<sup>9</sup> : on sait qu'il y a des parties de  $S$  qui ne lui appartiennent pas. Soit  $A$  l'une d'entre elles :  $A \subset S$  mais  $A \notin S$ .

Soit  $S[A]$  le plus petit modèle<sup>10</sup> de ZFC incluant  $S$  et contenant  $A$  :  $S \subset S[A]$  et  $A \in S[A]$ .

Le point est alors qu'il est très difficile de contrôler les propriétés de cette extension  $S[A]$ .

L'adjonction-extension n'est pas difficile. Le difficile est le contrôle immanent précis du résultat de l'opération. D'où la construction de Cohen (avec une partie « générique »).

Le principe d'un tel contrôle précis immanent va être décalqué du contrôle des extensions algébriques de corps.

L'idée directrice est que tous les éléments algébriques de l'extension de corps restent contrôlés de l'intérieur de la situation de départ par des polynômes qui y opèrent comme noms dans  $S$  des racines existant dans l'extension.

Par exemple le polynôme  $(x^2+1)$  nomme la racine  $i=\sqrt{-1}$ .

C'est à ce titre qu'on distinguera soigneusement la chose de son nom, l'élément  $x$  de son nom  $\boxtimes$  et le nouvel élément  $G$  de son nom  $\boxplus$  dans  $S$ . Le nom est toujours dans  $S$ , quand la chose peut ne pas y être.

L'idée directrice est donc qu'on va organiser non pas directement le  $G$  qu'on souhaite mais sa description dans  $S$  par un EPO (ensemble partiellement ordonné) d'informations fragmentaires (qu'on appellera « conditions »).

On part ici d'un modèle  $S$ <sup>11</sup> de ZFC qu'on peut étendre en lui adjoignant *comme élément* une partie  $G$  en  $S[G]$ . On s'assure alors qu'il reste modèle de ZFC :  $S[G]$  doit rester modèle de ZFC pour que l'extension conserve les propriétés de  $S$ .<sup>12</sup>

On travaille ici directement sur l'abyme entre éléments-appartenance et parties-inclusion.

On part d'une situation où cet abyme est maximalelement réduit par le fait que tout élément est partie ( $\in \implies \subset$ ) – cf. transitivité.

On construit une partie très spécifique ( $G$ ) qu'on ajoute comme élément :  $G \subset S \implies G \in S[G]$ .

On ajoute donc un élément qui, adjoind à la situation  $S$ , l'étend en  $S[G]$ .

Si on sait configurer (« conditionner ») ce  $G$  en sorte d'assurer (« forcer ») que  $S[G]$  ait alors de nouvelles propriétés supplémentaires (tout en restant modèle de ZFC), on aura démontré que ces propriétés excédentaires sont compatibles avec ZFC (donc non réfutables par ZFC).

Cf. le second grand apport de Cohen : la procédure du *forcing*. Il ne s'agit plus seulement de théorèmes d'existence (produits par exemple par raisonnement par l'absurde) mais bien d'une procédure constructive explicite.

Ainsi on pourra démontrer, par exemple, que :

- ZFC + ( $V \neq L$ ) est consistant.

### Rappels

On travaille ici avec 4 ensembles d'axiomes :

- Appelons HC l'hypothèse du continu et HCG sa généralisation (hypothèse du continu généralisée).

$$HC : |\mathbb{N}| = \aleph_0 \implies |\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \aleph_1$$

$$HCG : |\wp(E)| = |E|_{+1}$$

- Appelons AC l'axiome de choix.
- Appelons ZF les axiomes de Zermelo-Fraenkel pour la théorie des ensembles.
- Notons  $V=L$  l'axiome qui réduit les ensembles aux seuls ensembles constructibles.

<sup>9</sup> Cf. Dehornoy p. 287 : 11.1.3

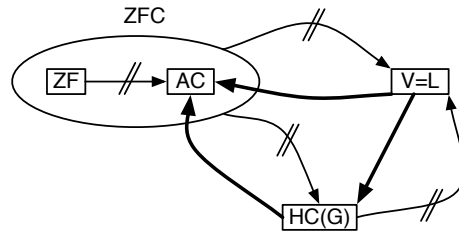
<sup>10</sup> Dehornoy : « Il n'est pas très difficile de montrer qu'il existe ».

<sup>11</sup> On le note «  $S$  » pour signifier qu'il s'agit de notre situation de départ.

<sup>12</sup> Par exemple, l'extension des réels en surréels conserve bien la propriété décisive d'ordre total sur les nombres.

Par contre, l'élargissement des réels en complexes perd cette propriété en sorte qu'on peut tenir qu'il ne s'agit plus vraiment d'une extension du monde des nombres.

## Résultats



On a ici <sup>13</sup> :

- $V=L \rightarrow HCG$
- $V=L \rightarrow AC$
- $V=L \rightarrow HCG \rightarrow AC$

mais

- $AC \not\rightarrow HCG$
- $ZF \not\rightarrow AC$
- $ZFC \not\rightarrow HCG$
- $ZFC \not\rightarrow V=L$  et  $HCG \not\rightarrow V=L$  (cf. partie 5 : ces résultats sont démontrés par *forcing*).
- $ZFC + (\mathbb{P}(\omega) \models \aleph_2)$  est consistant (et donc l'HC n'est pas démontrable dans ZFC). <sup>14</sup>

## Étapes

Cinq étapes essentiellement.

1. Partir de la bonne situation de départ S – sa structure sera celle d'un **MTD** (modèle transitif dénombrable) de **ZFC** (axiomes de Zermelo-Fraenkel + axiome de Choix).
2. Construire, dans cette situation de départ S, un canton C - partie de S - de travail et de « conditionnement » - sa structure sera celle d'un **EPO** (ensemble partiellement ordonné) – dont G sera une partie générique. C'est l'étape qu'on dira celle de la possibilisation : à ce niveau, on saura qu'un G peut exister dans V (mais inexister dans S) mais on n'en saura guère plus. L'enjeu propre de cette étape est de produire une notion affirmative de **généricité** (à partir de la notion de partie *dense* <sup>15</sup>) et non plus négative d'*indiscernabilité* (à partir de la notion de partie *constructible* : indiscernable = inconstructible). Le point-clef de cette étape est la délimitation de l'EPO c'est-à-dire de l'ensemble C des conditions c ; cela se fait à partir d'une relation d'ordre  $\preceq$  (qu'on dira de « raffinement ») et des **enchaînements** qu'elle configure (l'ordre en question est celui d'une implication). On démontre alors qu'il existe bien de telles généricités.
3. (Étape de la constitution d'un lexique nominal dans S) On crée un système adéquat de noms composés (**polynoms**) doté de leurs **référénts** sur G [ici polynom/référent  $\equiv$  polynôme/racines] c'est-à-dire informant sur la composition de G et par là sur l'extension à venir S[G].
4. (Étape proprement dite du forçage de S[G]). On va désormais contrôler (« forcer ») de l'intérieur de S ce qui se passe *dans* S[G] [comme, dans une extension algébrique, on contrôle le corps étendu de l'intérieur du corps de départ par des classes d'équivalence entre polynômes sur ce corps]. On s'assurera alors que S[G] reste bien un MTD de ZFC.
5. On pourra alors envisager de conditionner un type de G apte à doter l'extension de propriétés spécifiques (contrôlées dans S) qui attesteront qu'elles sont compatibles avec ZFC donc non réfutables dans ce cadre axiomatique.

## Extensions génériques de modèles

Noter les proximités/différences de ces extensions *génériques* de *modèles* avec les extensions *algébriques* de *corps* (voir les proximités/différences des polynoms/référénts et des polynômes/racines).

Dans l'extension algébrique de corps (par exemple de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{C}$  par  $i$ ), les polynômes nomment des éléments du corps étendu (des complexes) de deux façons différentes :

<sup>13</sup> Cohen p. 106

<sup>14</sup> Sachant par ailleurs que ZFC+HC est consistant, on montre que ZFC ne peut décider HC ou que HC est indécidable dans ZFC.

<sup>15</sup> Attention : la notion intervient ici avec un sens différent de son sens usuel en topologie où la partie D est dite dense dans C si tout point de C lui est adhérent (Cf. Laurent Schwartz, cours de topologie de l'X, p. 25)- ainsi  $\mathbb{Q}$  est partout dense dans  $\mathbb{R}$ .

- comme noms dans  $\mathbb{R}$  des ensembles de racines complexes dans  $\mathbb{C}$  - un polynôme de rang  $n$  réfère un ensemble de  $n$  complexes ; Galois va travailler sur les propriétés de *groupe* de ces ensembles : un polynôme constitue un groupe de racines.
- comme classes d'équivalence pour nommer dans  $\mathbb{R}$  tous les complexes de  $\mathbb{C}^{16}$  - ici un polynôme réfère, par division (voir sa classe d'équivalence), un complexe et un seul. Ici, on ne travaille pas sur les racines des polynômes en question mais sur leur reste par division.

C'est ce second type de nomination (une classe d'équivalence dans  $\mathbb{R} \longleftrightarrow$  un élément dans  $\mathbb{C}$ ) qu'utilise l'extension algébrique de corps<sup>17</sup> (et non la première qui impliquerait de travailler sur des ensembles de racines – ce qui renverrait plutôt aux groupes de Galois) : elle opère par adjonction de classes d'équivalence sur les polynômes plutôt que par adjonction de racines.

### Remarque

Noter qu'il y a aussi des AE par d'autres logiques (Dedekind, Conway) : elles consistent à ajouter de nouveaux éléments qui sont des parties de la situation de départ (une coupure sur  $\mathbb{Q}$  équivaut à une section commençante ou finissante qui est un ensemble de nombres rationnels, donc bien une partie de  $\mathbb{Q}$ ).

## 1. Situation S

### • Parcours de pensée

Voir AB pour le choix, comme situation de départ, d'un MTD de ZFC : il faut que la situation de travail soit à la fois riche, stable et minimale.

- S maximale*ment riche* (cf. « M » : *modèle*) pour être quasi-métonymique de toute l'ontologie c'est-à-dire de tout ce que l'on peut penser-dire de l'être ;
- S intérieurement *stable* (cf. « T » : *transitif*) pour qu'on n'en sorte pas par le bas – cf. logique du « naturel » (on ne sort pas de la Nature par le bas comme on sort par contre facilement par le bas d'une situation historique, culturelle ou politique).
- S de taille infinie *minimale* (cf. « D » : *dénombrable*) - d'où le premier infini : celui du dénombrable - pour pouvoir la parcourir intégralement et selon un bon ordre.

### 1.a - ZFC

#### 9 axiomes

(dont 2 schémas d'axiomes)

AXIOME			absolu ?
1	<i>vide</i>	un seul	oui
2	<i>extensionnalité</i>	un seul	oui
3	<i>union</i>	un seul	oui
4	<i>fondation</i>	un seul	oui
5	<i>parties</i>	un seul	<b>non</b>
6	<i>infini</i>	un seul	oui <sup>18</sup>
7	<i>séparation</i>	<b>schéma</b>	oui
8	<i>remplacement</i>	<b>schéma</b>	oui
(9)	<i>choix</i>	un seul	<b>non</b>

<sup>16</sup> On a :  $p_n(x) = (x^2+1).p'_{n-2}(x) + (ax+b)$ . On en déduit  $p_n(i) = ai+b$ .

On pose alors la relation d'équivalence suivante :  $p(x) \equiv q(x)$  si  $p(i) = q(i)$  [autrement dit : si  $p(x)-q(x) = (x^2+1).r(x)$ ]. Ainsi, un nombre complexe  $(ai+b)$  correspond à une classe d'équivalence sur les polynômes.

<sup>17</sup> « La situation est analogue à la construction de l'extension d'un corps  $k$  formée en adjoignant la racine  $a$  d'une équation irréductible  $f(x)=0$ . Les éléments du corps étendu sont tous de la forme  $p(a)$  où  $p$  est un polynôme et  $a$  est pris comme un symbole formel, mais nous identifions  $p(a)$  et  $q(a)$  si  $p(x)-q(x)$  est divisible par  $f(x)$ . » Cohen (p. 113)

<sup>18</sup> La distinction fini/infini est absolue. Mais, dans l'infini, seul  $\aleph_0$  est absolu : en général, la quantité (infinie) n'est pas absolue.



### Absoluité/relativité...

Qu'est-ce qui, dans S, est absolu/relatif par rapport à V ?

Absolus :

- $\in$  et  $\subset$
- $\cup$  et  $\cap$
- $\implies$  paires ( $\Sigma$ ) et produit cartésien ( $\Pi$ )
- ordinalité

#### Absoluité

- L'appartenance  $\in$  et l'inclusion  $\subset$  sont absolues sans problèmes.
- L'union  $\cup$  est absolue -  $a \in S \implies (\cup a) \in S$  [les éléments des éléments sont éléments] – comme l'intersection  $\cap$ .
- La paire, la paire ordonnée, le produit cartésien sont absolus.
- La qualité ordinale, « être le plus petit ordinal non successeur :  $\omega_0$  », « être une fonction » sont des propriétés absolues. Cf. extraordinaire stabilité du concept d'ordinal<sup>19</sup>

#### Relativité

Par contre, l'ensemble des parties (infinies) n'est pas absolu -  $\wp(a)$  n'est pas absolu – alors que l'ensemble des parties finies l'est bien :  $[\wp(a)]^S \neq \wp(a)$  où  $[\wp(a)]^S$  est l'ensemble des parties  $\wp(a)$  (avec  $a \in S$ ) qui appartiennent à (sont éléments de) S.

Cf. point décisif : la qualité ordinale (l'ordre hiérarchique, emboîtement, « naturel ») est absolue (la qualité « naturelle » ne change pas de nature selon les situations) mais la quantité infinie n'est pas absolue : elle est relative à la situation !

**L'ordre est absolu. La quantité est relative !**

La composition de G va précisément travailler au lieu de cette **faille entre ordre et quantité**. Dans le fini où cette faille est régionalement comblée, il n'y a plus de composition possible de G !<sup>20</sup>

Les deux grandes zones d'instabilité sont la question des parties et la question de la quantité.<sup>22</sup>

### Axiome de choix

Cet axiome va permettre de numéroter les éléments dénombrables de la situation de départ.

Il va intervenir dans la démonstration de l'existence de G (voir 2.e) par une sorte de « diagonalisation » des densités.

### 1.b - MTD...

Trois propriétés de la situation de départ : la première est de réflexivité, la seconde d'immanence, la troisième de quantité.

1. la situation de départ vérifie les axiomes de la TE. Elle est donc modèle de la TE.
2. Elle est transitive :  $a \in S \implies a \subset S$
3. Elle est infinie dénombrable (dans V).

Des théorèmes de réflexion garantissent l'existence de tels MTD.

La réflexivité est en fait quasi-complète (et non pas complète) car elle est historique : elle dépend de l'état de l'ontologie et du nombre fini d'axiomes retenu dans les deux schémas d'axiomes de séparation et remplacement.

### Modèle

« Modèle » ? Cf. théorie des modèles...

Ici, dans notre MTD, on a  $V=L$ <sup>24</sup>

On verra, à différentes reprises, l'importance que S soit modèle de ZFC :  $\emptyset$  lui appartient (cf. polynômes canoniques), les parties construites (conditions, polynômes...) lui appartiennent, etc.

Rappelons que tout l'enjeu de la construction de Cohen sera que  $V \neq L$  dans  $S[G]$  puisqu'on aura  $G \in S[G]$  avec  $G \notin L$ .

<sup>19</sup> EE p. 87

<sup>20</sup> D'où la difficulté d'imaginer des *raisonances* de cette théorie pour des mondes finis...

<sup>22</sup> EE p. 88

<sup>24</sup> Cohen p. 110

## Transitif

La situation s'immanentise autant que faire se peut  $\implies$  une situation épaisse et dense.

### Axiome de fondation !

Pourquoi la transitivité ? Pour mieux réfléchir les axiomes de la TE (c'est-à-dire les Idées du multiple), et tout particulièrement pour mieux réfléchir l'axiome de fondation AF.

$$\text{AF} : a \in S \implies \exists b \in a \text{ avec } b \cap a = \emptyset$$

Le point est alors  $b \in S$  ? Ceci n'est pas assuré.

Mais si  $S$  est transitif,  $a \in S \implies a \subset S \implies (b \in a \implies b \in S)$ .

La transitivité fait qu'on ne sort pas facilement de la situation par le bas : « ce qui est présenté par ce que présente  $S$  est aussi présenté par  $S$  ». <sup>25</sup>

### Naturalité

La transitivité est moins forte que l'ordinalité (l'ordinal est un ensemble transitif dont tout élément est également transitif) mais elle assure une certaine stabilité naturelle de la situation : « un équilibre maximal entre appartenance et inclusion » <sup>26</sup>

### Transitivité non ordinale ?

- $a$  *transitif*  $\implies (b \in a \implies b \subset a)$ . Donc  $c \in b \implies c \in a$ . Donc à son tour  $c \subset a$
- $a$  *ordinal* entraîne de plus que  $b$  soit aussi transitif et donc que  $c \in b \implies c \subset b$  (ce qui n'est pas assuré par la transitivité, qui n'assure que  $c \subset a$ ).

Exemple d'ensemble transitif non ordinal :  $a = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ .

Posons  $b = \{\{\emptyset\}\}$  et  $c = \{\emptyset\}$  soit  $a = \{\emptyset, c, b\}$ .

On a bien la transitivité pour les trois éléments de  $a$  :  $\emptyset \subset a$ ,  $c \subset a$  (car  $\emptyset \in a$ ) et  $b \subset a$  (car  $\{\emptyset\} \in a$ ). Les éléments  $\emptyset$  et  $c$  sont eux-mêmes transitifs mais l'élément  $b$ , lui, ne l'est pas car le seul élément  $c$  de  $b$  n'est pas une partie de  $b$  puisque  $\emptyset \in c$  mais  $\emptyset \notin b$  : on a donc bien  $c \subset a$  sans avoir pour autant  $c \subset b$ .

### Existence ?

Le théorème de Mostowski assure que si une théorie comprenant l'axiome d'extensionnalité admet un modèle, elle admet alors un modèle transitif.

### Importance de la transitivité du modèle (de la situation)

Ce point va devenir fondamental pour les polynômes des éléments  $x$  de  $S$  : en effet, on va alors mobiliser un lexique en posant qu'un élément est le polynôme des éléments qui le composent (ce qui suppose que les éléments d'un élément  $x$  de  $S$  soient bien aussi éléments de  $S$ ).

## Dénombrable

Qu'un ensemble dénombrable puisse être modèle de la TE ne va pas de soi, en particulier car cet ensemble doit valider l'axiome des parties !

Mais un des théorèmes de Lowenheim-Skolem assure que si une théorie admet un modèle infini, elle admet aussi un modèle dénombrable. <sup>27</sup>

### Importance

On peut donc dénombrer les éléments de la situation de départ et, avec l'axiome de choix, on peut les numéroter.

Ceci va intervenir dans la constitution des chaînes (liste des conditions) et dans la démonstration que  $G$  existe par diagonalisation de la liste dénombrable des densités.

## 1.c - Modèle de ZFC

Ceci veut dire que les axiomes de ZFC sont valides dans  $S$  et donc que

- 1)  $\emptyset \in S$
- 2) si  $x$  et  $y \in S$ , alors  $x \cap y$  et  $x \cup y \in S$

<sup>25</sup> EE p. 396

<sup>26</sup> EE p. 560

<sup>27</sup> Ceci tient au fait que toute théorie, par construction, est elle-même dénombrable.

3) si  $x \in S$ , les parties finies de  $x$  – éléments de  $\mathcal{P}_f(x)$  – sont aussi éléments de  $S$

4) dans  $S$ , on peut dénombrer grâce à l'AC

Tout ceci va nous servir dans la suite quand on va construire des parties finies (les conditions, les polynoms...) qui seront donc bien des éléments de  $S$ .

*Remarque*

Attention : que voudra dire, dans d'éventuelles *raisonances*, que la situation de départ sera modèle de ZFC ? Cela voudra dire qu'on n'en sort pas par les opérations canoniques sur les ensembles.

Prenons l'exemple du monde-*Musique* dont les éléments sont les morceaux de musique.

Cela voudra dire par exemple

- que l'intersection ou l'union de deux morceaux de musique quelconques est toujours un morceau de musique ;
- que les 4'33 de silence de Cage est bien un morceau de musique... vide ;
- que les pots pourris faits de parties de morceaux sont bien des morceaux ...

#### • Au total...

Au total, on va disposer dans  $S$  de « la hiérarchie naturelle des ensembles induite par leur rang »<sup>28</sup> ce qui va permettre d'y travailler par induction transfinie – point essentiel pour construire le forçage.

## 2. Canton C des conditions

#### • *Parcours de pensée*

L'idée est de délimiter, de manière immanente au monde qu'on habite (et dont on ne peut bien sûr, de l'intérieur, connaître les limites) un espace de travail : un canton où va s'archiver l'enquête.

#### Enjeu

Il faut ici délimiter le canton partiellement ordonné (EPO) par des chaînements ou trajectoires-procédures-enquêtes qui vont progressivement conditionner  $G$ .

Une condition  $c$  est un élément qui va entrer en rapport d'ordonnement avec d'autres éléments dans le cadre d'enchaînements. Une condition est donc un élément de  $S$  qui a pour particularité d'être mis en ordre avec d'autres dans un enchaînement, laquelle chaîne est elle-même élément de  $C$  (elle est donc une condition).  $C = \{c\}$  ne sera pas identique à  $S$  mais en composera une sorte de métonymie interne. La création repose donc sur celle de la relation d'ordre ;  $C$  découle ensuite des éléments de  $S$  que cette relation sélectionne, concerne.

Une condition  $c$  sera vue à la fois comme élément de  $C$  et comme partie (faite de conditions  $\implies$  un enchaînement de conditions).

Le canton  $C$  ainsi composé sera alors truffé de parties denses  $D$ , métonymies internes de  $C$ .

La partie générique  $G$  sera elle-même une métonymie de ce canton  $C$  mais en un autre sens que ne le sont les  $D$  ou que l'est  $C$ .

On caractérisera  $G$  par les conditions  $c$  qui le composent ( $G$  est un ensemble de  $c$ , donc une partie de  $C$ ).

On va montrer qu'un tel  $G$  existe (dans  $V$ ), qu'il n'est pas constructible (on l'appellera donc générique), et qu'il n'existe pas dans  $C$  et a fortiori dans  $S$ .

#### Méthode

2.a – Condition  $c$  et relation d'ordre  $\preceq$

2.b – Composer l'EPO proprement dit.

2.c – Procédure de conditionnement (ou enquête), pas à pas

2.d – Partie dense

2.e – Partie générique

#### 2.a - Condition $c$ et relation d'ordre $\preceq$

#### Condition

Une condition est un élément de  $S$ . Il y en a une infinité dénombrable.

---

<sup>28</sup> Cohen p. 112

Une condition va être destinée à informer si tel élément appartient ou n'appartient pas à G. Elle n'est pas seulement composée des éléments destinés à appartenir à G mais aussi de « marques » susceptibles d'expliciter ceux qui sont destinés à ne pas lui appartenir.

Rappelons-nous : la situation est dénombrable. Ses éléments sont donc ordonnables par l'axiome de choix<sup>29</sup> et indexables par les nombres entiers – autrement dit, on peut numéroter les éléments de S.

Une condition est composée de tels numéros indexés de 0 ou de 1 (ou de Négatif et Positif) selon que l'élément numéroté (qui est donc ici traité par cette condition particulière) est rejeté ou retenu.

Il faut imaginer donc qu'une condition travaille sur une série infinie dénombrable de cases numérotées et coche par 0 ou 1 les cases des éléments rencontrés.

Ainsi la condition  $[2^\circ, 3^\circ, (n-1)^\circ, (n+1)^\circ]$  pourra s'inscrire ainsi, en cochant les cases d'un tableur infini :

1°	2°	3°	4°	...	(n-1)°	n°	(n+1)°	...
	0	1			1		0	

À ce niveau, la condition est une forme abstraite dont on ne sait rien d'autre qu'elle coche des cases avec des 0 ou des 1.

### Relation d'ordre $\Leftarrow$

Les conditions sont alors ordonnables par inclusion (compatibilité) en se rappelant qu'ici « *less (in  $\Leftarrow$ ) is more (informative)* ». (Kanamori, 117) : « moins (dans l'ordre) est plus (d'information) ». En effet, si  $c'$  raffine  $c$ , si  $c'$  contient plus d'information que  $c$ , si  $c' \supset c$ , on écrira  $c' \Leftarrow c$  !

C'est donc une sorte d'ordre **contravariant** (comme pour les foncteurs...).

### Double fonction

Point qui va devenir décisif même si on n'en mesure pas encore ici toute la portée

Une condition a une double fonction :

- elle est un élément de S, de C (l'EPO) et bientôt de G ;
- sa composition interne informe sur G.

Il faut ici différencier deux aspects de la même chose ( $c'$  est-à-dire du même élément) :

- $c \in G$  (ceci, banalement, informe que  $c$  appartient à G) ;
- $c$ , par sa composition interne (voir plus haut) - par les « cases » qui y sont cochées 0 ou 1 - informe cette fois sur les éléments de S qui vont ou non être incorporés dans G.

L'idée, en effet, est de construire un G à partir d'éléments de S mais cette construction implique de « noter » progressivement chaque élément rencontré et sa sélection ou non-sélection. On ne peut donc contrôler la construction de G simplement en notant les éléments retenus ; il faut aussi noter ceux qui sont récusés et ne pas oublier tous ceux qui n'ont pas encore été traités. C'est à cela que servent les conditions !

G va bien être construit comme ensemble de conditions particulières (donc comme partie de C) mais ce qui nous intéressera ultimement, du point de l'extension à engendrer, ce sera l'ensemble des éléments de S qui, au terme du parcours infini, auront été sélectionnés.

## 2.b - EPO C des conditions

On a ainsi l'EPO C des conditions.

C est une sorte de métonymie de S (la première d'une série emboîtée de métonymies qui vont opérer comme « modèles intérieurs »).

## 2.c - Procédure de conditionnement

Une procédure de conditionnement (ou *enquête*) décrit une construction progressive, étape par étape, de ce qui va informer sur G.

Ceci va avoir à voir avec la notion de chaîne.

### Chaîne et anti-chaîne

- Une chaîne est une partie *linéairement* ordonnée (destinée à devenir une séquence infinie de conditions).
- Une anti-chaîne est une partie dont les éléments sont 2 à 2 incompatibles.<sup>31</sup>

<sup>29</sup> Il faut bien sûr l'axiome de choix pour ordonner l'ensemble dénombrable S.

<sup>31</sup> Cf. Dehornoy p. 291

## Filtre

Une chaîne est comme un filtre.

Filtre  $F$  de (grandes) parties sur  $E$  :

1.  $E$  est dans  $F$
2.  $x$  et  $y \in F \implies x \cap y \in F$
3.  $x \in F$  et  $x \subset y \implies y \in F$

Rappel – Un ultrafiltre  $UF$  sur  $E$  est un filtre tel que toute partie de  $E$  ou son complémentaire  $y$  appartient.

## 2.d - Les parties denses de l'EPO

Appelons-la *densité*<sup>32</sup>.  $C$ 'est l'idée que toute condition  $c$  a un raffinement dans  $D$ .

Une densité  $D$  est une métonymie de  $C$  (donc une métonymie d'une métonymie de  $S$  : une métonymie<sup>2</sup> de  $S$ ) :

- $D \subset C$  (une densité est faite de conditions  $c$ ) ;
- $\forall c \in (C-D) \exists c' \in D$  avec  $c \subset c'$  : toute condition extérieure à  $D$  est incluse dans une condition intérieure à  $D$ .

Intuitivement, on voit bien que  $D$  est composée de « toutes » les très grandes conditions (les petites, raffinées par de plus grandes, n'ont pas besoin d'y être et on a donc bien une inclusion stricte  $D \subset C$ ).

Comme on travaille ici dans le dénombrable, on voit bien qu'il n'est pas sorcier de construire récursivement de telles densités.

Ce ne sont pas tout à fait des filtres car on n'assure pas la propriété  $c \in D$  et  $c \subset c' \implies c' \in D$ .

## 2.e - Partie $S$ -générique $G$ de $C$

«  $S$ -générique » car générique relatif à la situation  $S$ .

### Définition

Pour tout  $D$ ,  $G \cap D \neq \emptyset$

Cf. caractérisation affirmative du générique :  $c$ 'est une partie qui intersecte toute densité.

Ceci sera intuitionnable dans la problématique de l'EE ainsi :  $c$ 'est une partie quelconque car on y trouve des éléments possédant toute propriété susceptible de partitionner  $S$ . L'EE appelle « vérité d'une situation » une telle partie générique.

Bien sûr, une fois établie l'existence d'un tel  $G$  – d'une telle « vérité » -, il est facile de voir qu'il existe en fait une infinité de tels  $G$  différents. Mieux encore : ces parties quelconques (génériques) sont énormément plus abondantes que les parties constructibles (c'est-à-dire identifiables par l'existence d'une propriété commune).

### Lemme

$\sim \exists G$  dans  $S$  ( $G \notin S$ ) mais  $\exists G$  de  $V$

#### Démonstration 1

Démontrons que si  $G$  existe, alors  $G \notin S$ . (94-95)

Si  $G \in S$ , comme  $C \in S$  et que  $G \subset C$  alors  $(C-G) \in S$ .

Dans ce cas, soit une  $c \in G$ . Elle est raffinée par deux conditions incompatibles  $c_1$  et  $c_2$  avec  $c \subset c_1$  et  $c \subset c_2$ . Posons  $c_1 \in G \implies c_2 \in (C-G)$ . Et ceci vaudrait  $\forall c \in G = \{C-(C-G)\}$ . Donc  $(C-G)$  serait une densité.

Mais on devrait alors avoir, par construction diagonale de  $G$  :  $G \cap (C-G) \neq \emptyset$  ce qui est absurde.

Donc  $(C-G) \notin S$  et donc  $G \notin S$ .

#### Démonstration 2 de l'existence de $G$

Démonstration que  $G$  existe bien dans  $V$  : cf. Kunen p. 186-7<sup>34</sup>

2.3. LEMMA. If  $S$  is countable and  $p \in P$ , then there is a  $G$  which is  $P$ -generic over  $S$  such that  $p \in G$ .

<sup>32</sup> AB l'appelle *domination*.

<sup>34</sup> Voir également Dehornoy p. 288 : Lemme 11.1.6 (ii)

PROOF. Let  $D_n (n \in \omega)$  enumerate<sup>35</sup> all dense subsets of  $P$  **which are in  $S$** .

Inductively choose a sequence  $q_n (n \in \omega)$  so that

$$p = q_0 \geq q_1 \geq \dots$$

$$\text{and } q_{n+1} \in D_n.$$

Let  $G$  be the filter generated by  $\{q_n : n \in \omega\}$ .

□

Logique : On construit, par une procédure diagonale équivalente à la diagonale de Cantor sur les réels supposés dénombrables, un  $G$  qui intersecte bien toute densité existant dans la situation de départ.

La démonstration repose sur le fait que le nombre de densités  $D$  est dénombrable dans  $S$  (par définition de  $S$ ). Bien sûr, le nombre général de  $D$  dans  $V$  n'est pas lui dénombrable mais le nombre de  $D$  qui appartiennent à  $S$ , lui, l'est bien.

Cf. également EE p. 410...

Ce qui est frappant est que la démonstration de l'existence d'un tel  $G$  est une démonstration constructive (comme l'est la démonstration de Cantor par diagonalisation) : on construit un  $G$  dont on démontre qu'il est bien  $S$ -générique (donc générique dans  $S$ ), qu'il n'appartient pas à  $S$ , qu'il appartient à  $S[G]$ , qu'il reste générique dans  $S[G]$  et – c'est là où se joue le forcing proprement dit – que l'on peut, de l'intérieur de  $S$ , prédire rationnellement sur ses propriétés dans  $S[G]$ .

### 3. Polynoms<sup>36</sup>

#### • Parcours de pensée

Il s'agit dans cette étape de contrôler, de l'intérieur de  $S$ , la partie  $G$  qu'on va adjoindre pour étendre  $S$  en  $S[G]$ .

Comme  $G$  sera un ensemble de conditions (GCC), il s'agit donc de contrôler les conditions qui vont lui appartenir et celles qui n'entreront pas dans sa composition.

Il faut pour cela se doter *dans  $S$*  d'un système lexical adéquat qui pourra indiquer si telle condition précise appartient ou n'appartient pas au  $G$  visé.

On constitue pour cela un système de  $C$ -noms<sup>37</sup> qu'on va appeler ici des *polynoms* car ce sont des noms composés qu'on composera comme on compose les polynômes à partir de monômes.

Ici *nom* veut dire : *mot nommant une chose* – en l'occurrence mot renvoyant à un *réfèrent*.

On peut dire qu'il s'agit d'une procédure qui « nomme » le travail d'enquête sur tous les éléments de  $S$  (vont-ils être incorporés à  $G$  ou vont-ils être rejetés ?), c'est-à-dire qui, de l'intérieur de  $S$ , note la progression, étape par étape, de la construction diagonale de  $G$  ( $G$  diagonalise toutes les densités). Les polynoms vont servir à consigner les résultats de cette enquête progressive.

On distingue deux étapes dans le processus en question :

1. la première, purement lexicale de construction de ces mots qu'on appelle *polynoms*,
2. et une seconde, signifiante ou sémantique, qui met en avant la référence de chaque mot (la « chose » que le mot nomme) et qu'on appellera l'évaluation dans  $G$  des polynoms – ou  $G$ -évaluation du polynome.

Comme on le verra, ceci va également permettre de produire formellement des polynoms canoniques pour tous les éléments de  $x$  de  $S$  grâce au fait que le vide  $\emptyset$  appartient à  $S$  (étant modèle de ZFC) et qu'on peut donc aussi utiliser un polynome nommant un vide de conditions ou la condition vide.<sup>38</sup>

Dans ce dernier cas,  $G$  fera une apparition en éclipse puisqu'on mobilisera un vide de conditions / la condition vide.

Comme indiqué, l'analogie générale est ici avec les polynômes.

- Tout de même qu'un polynôme de rang  $n$  est fait de polynômes de rang inférieur :  $\sum a_i x^i$ , nos polynoms seront faits à partir de polynoms de rang inférieur.

<sup>35</sup> Cf.  $S$  est dénombrable.

<sup>36</sup> Cohen parle de « labeling » (p. 113).

<sup>37</sup> «  $C$ -nom » veut dire un nom fait avec des conditions, éléments de  $C$ .

<sup>38</sup> Point à remarquer : tout polynome canonique étant lui-même élément de  $S$ , il doit pouvoir avoir son propre nom canonique, lequel à son tour doit également avoir le sien, etc.

- Tout de même qu'un polynôme peut être vu comme le produit de monômes de la forme  $(x - \text{racine}_i)$  :  $\prod (x - r_i)$ , tout de même un polynôme peut être vu comme l'indexation successive des conditions  $c_i$  qui appartiennent à  $G$ .

Rappel : on peut décomposer un polynôme de rang  $n$  en produit de  $n$  monômes  $(x - r_i)$  :  $\prod (x - r_i)$ . Son évaluation est alors l'ensemble de ses racines  $\{r_i\}$ .

On a donc bien deux représentations possibles d'un polynôme :  $\sum a_i x^i$  ou  $\prod (x - r_i)$ .

On peut donc dire qu'un polynôme nomme l'ensemble de ses racines (Galois précisera : le groupe de ses racines).

Autre analogie : dans  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}$ ,  $(x^2 + 1)$  nomme  $i = \sqrt{-1}$

On caractérisera ainsi le  $G$  visé par induction transfinie.

### • *Incise : syntaxe/sémantique & grammaire*

Introduisons ici un commentaire non mathématique de l'étape en cours - celle des polynômes - avant d'en reprendre l'examen technique détaillé.

« *C'est proprement le nom qui crée la chose.* » Alain Badiou<sup>40</sup>

L'idée est ici de faire fonctionner sémantiquement le syntaxique, en quelque sorte de replier le syntaxique sur le sémantique en sorte de créer une sémantique à partir du syntaxique.

On construit, en effet, à partir d'éléments de  $S$ , un lexique de mots (qui sont bien sûr éléments de  $S$  comme les autres : ce sont nos polynômes saisis dans leur pure structure de mots, indépendamment de toute capacité de référence) : on travaille donc ici dans le syntaxique. Mais ces polynômes vont être porteurs d'une référence (d'une sémantique donc) interne à  $S$ , référence donc prélevée dans les éléments de  $S$  si bien que de nouveaux éléments (nos polynômes) viennent nommer d'anciens éléments (les conditions ou, comme on le verra, tout élément de  $S$  qui va être doté d'un polynôme canonique).

Cette opération se fait très naturellement dans la langue ordinaire : quand on veut ainsi nommer un mot dans un discours, on l'inscrit en italiques ou en l'enserme dans des guillemets et on écrira par exemple :

le mot '*arbre*' est un substantif dans la phrase : « *l'arbre au fond de mon jardin pousse lentement.* »

On dote ainsi le syntaxique de propriétés sémantiques endogènes au moyen d'une double fonction des polynômes : comme nouveaux mots, ils sont éléments parmi d'autres ; comme polynômes référençants, ils ont une puissance référentielle propre (celle qu'on nomme ici sémantique).

Cette torsion sémantique du syntaxique sur lui-même par double fonction va permettre que le démontrable-calculable (propriété syntaxique) opère comme critère de validité d'une interprétation (propriété sémantique) : on va ainsi « forcer » le sémantique à partir du syntaxique. Le forçage à venir (étape 4) va consister en effet en ceci :

Une formule  $F$  sera *sémantiquement* valide dans  $S[G]$  si  $F$  est *syntactiquement* valide dans  $F$ .

Ainsi *syntactique* dans  $S \Leftrightarrow$  *sémantique* dans  $S[G]$ .

### Exemple du théorème Lowenheim-Skolem

*Toute syntaxe consistante est la grammaire d'une langue !*

Le théorème Lowenheim-Skolem – toute théorie cohérente a un modèle – se démontre en construisant un modèle (dénombrable) à partir d'une théorie cohérente (elle-même dénombrable par construction).

La construction repose sur l'idée suivante, apparentée à la nôtre sur les polynômes : usuellement, la théorie d'un modèle donné construit une syntaxe, sémantiquement interprétable dans le domaine. Le principe est alors que les mots de la théorie viennent nommer les choses du modèle en assurant une consistance syntaxique du discours théorique construit à partir de ces mots (voir premier diagramme à gauche ci-dessous) : rappelons que l'enjeu de cette formalisation est de pouvoir produire, dans la théorie, un discours (c'est-à-dire des enchaînements logiques entre « mots » - d'où des phrases ou des énoncés, une rhétorique faite de différentes phrases, etc.).

Maintenant, si l'on part d'un discours auto-consistant dont on ne sait trop s'il a un référent quelque part, s'il a un modèle – disons un discours « tapis volant » dont on ne saisit pas sur quelle réalité expérimentable il « capitone », sur quoi il a prise, autrement dit « ce dont il parle » -, on peut alors lui construire un modèle ad hoc à partir de la théorie même – c'est le théorème de LS.

<sup>40</sup> EE p. 415

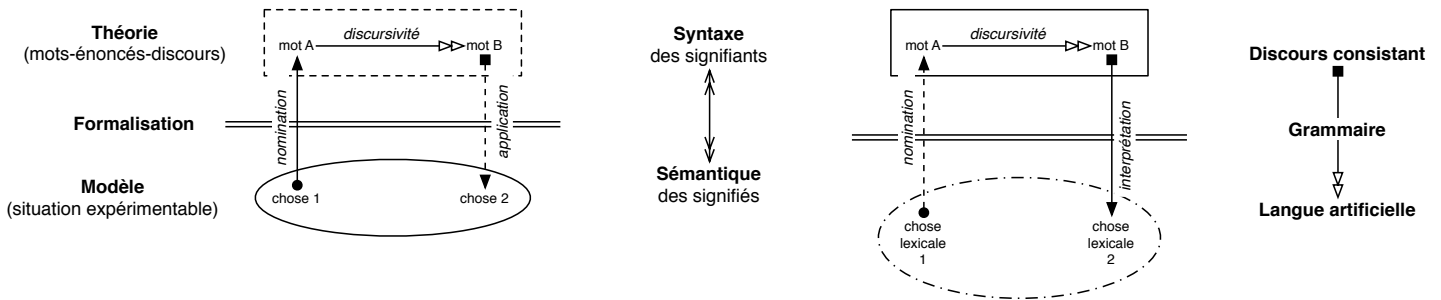
On peut comprendre cette dynamique démonstrative ainsi : on va interpréter sa syntaxe comme une grammaire (la grammaire d'une langue artificielle ad hoc construite à partir du « langage » théorique).

Plus techniquement dit, la construction va reposer sur l'idée de traiter les symboles de la théorie (disons ses « lettres » élémentaires) - x, y, z... ; a, b, c... -  $\forall, \exists, \in, \subset, \cap, \cup, =, \neq, \Leftrightarrow, \dots$  - en éléments d'un nouvel ensemble destiné à devenir le modèle recherché en sorte que les formules de la théorie (faites de ces lettres-symboles) se transforment alors en parties (ensemblistes) du modèle.

Autrement présenté : ordinairement, les mots (de la théorie) nomment les choses (du modèle). Mais que faire quand on dispose d'un discours rigoureux fait de mots dont on ne sait ce dont ils parlent, ce qu'ils nomment ? Comment interpréter de tels mots sans choses-référents, de tels signifiants sans signifiés distincts ? On va faire que ces mots nomment... d'autres mots, et ce type de mots, ce sont exemplairement les mots d'une grammaire ! Toute grammaire d'une langue donnée utilise ainsi des mots de cette même langue pour nommer... des classes de mots : les mots « verbe, substantif, article, adjectif, épithète, adverbe, préposition, ... » comme les mots « phrase, mode, temps, conjugaison, déclinaison, sujet, complément d'objet, actif/passif, conditionnel, subjonctif, ... » nomment d'autres mots !

Au total, l'idée directrice est d'interpréter la langue syntaxique « tapis volant » en grammaire d'une langue artificielle tirée de cette même langue syntaxique de départ, et ainsi de donner à la théorie consistante d'origine un modèle qu'on aura construit sur elle-même.

Autrement dit, un tapis volant peut construire son propre terrain d'atterrissage : il faut pour cela que le vol du tapis volant génère une grammaire !



### Hegel

Autre *raisonance* de notre problématique des polynômes : la seconde partie du fameux énoncé de Hegel dans sa Préface aux *Principes de la philosophie du droit* (1820) :

« ce qui est réel est rationnel, et ce qui est rationnel est réel » <sup>41</sup>

On y reconnaît ces doubles enchaînements :

sémantique → syntaxique ; syntaxique → sémantique

modèle → théorie ; théorie → modèle

Reprenons maintenant le fil du travail logico-mathématique proprement dit.

### 3.a - Constitution lexicale

On va procéder à une définition récursive du polynôme.

Formellement, le polynôme apparie des polynômes (de rangs inférieurs) à des conditions qui n'appartiennent pas nécessairement à G.

Rappelons qu'il faut, à cette étape, pouvoir compter qu'une condition particulière  $c_a$  a bien été rencontrée et testée – elle peut parfaitement ne pas appartenir à G

Les polynômes se constituent par récurrence (ou induction transfinie). Posons :

$$p_n = \{ \langle p_{n'}, c_{n'} \rangle ; n' < n \text{ et } c_{n'} \in C \}$$

Comment opère la récurrence ? <sup>42</sup>

- polynôme de rang vide  $p_\emptyset =$  toute paire ordonnée  $\langle \emptyset, c \rangle$  avec  $c \in C$

<sup>41</sup> „Was vernünftig ist, das ist wirklich; und was wirklich ist, das ist vernünftig.“

<sup>42</sup> Cf. EE p. 414



- polynôme de rang  $a$  (où  $a$  est un ordinal, fini bien sûr)  $p_a =$  tout ensemble numéroté de paires ordonnées  $\langle p_b, c \rangle$  avec  $b \in a$ .

$p$  sera dit un polynôme s'il existe un ordinal  $a$  tel que  $p$  est un polynôme de rang  $a$ .

Noter que le concept de polynôme est absolu même si le nombre de polynômes existants ne l'est pas.<sup>43</sup>

#### Exemple

1.  $p_0 = \langle \emptyset, c_a \rangle$
  2.  $p_1 = \{ \langle p_0, c_b \rangle \} = \{ \langle \langle \emptyset, c_a \rangle, c_b \rangle \}$
  3.  $p_2 = \{ \langle p_1, c_c \rangle, \langle p_0, c_b \rangle \} = \{ \langle \{ \langle p_0, c_b \rangle \}, c_c \rangle, \langle p_0, c_b \rangle \} = \{ \langle \{ \langle \langle \emptyset, c_a \rangle, c_b \rangle \}, c_c \rangle, \langle \langle \emptyset, c_a \rangle, c_b \rangle \}$
- Ainsi  $p_2$  est un mot analogue à un ensemble de triplets ordonnés  $\{c_a, c_b, c_c\}$  c'est-à-dire de conditions qui, à ce stade purement lexical, peuvent être tout à fait quelconques sans avoir besoin d'être compatibles entre elles.

Appelons  $\mathbf{P}$  l'ensemble des polynômes  $p$ .

Puisque les conditions  $c \in C$  sont faites d'éléments de  $S$ , on a  $\mathbf{P} = S^C$ <sup>44</sup>.

Noter que les polynômes existent bien dans  $S$  (puisque  $S$  est MTD de ZFC).

Le travail sur les polynômes est donc bien immanent à  $S$  : le lexique est bien constitué avec les éléments de  $S$  et par des opérations dans  $S$ .

Et l'on a bien  $\mathbf{P} \subset S$ .

### 3.b - G-évaluation des polynômes

Voyons maintenant ce que nos *polynômes* peuvent nous dire concernant  $G$ . Cette étape est celle de la G-évaluation des polynômes.

La référence dans  $G$  d'un polynôme va être l'ensemble des conditions appartenant à  $G$  parmi toutes les conditions qu'il incorpore.

Le référent d'un polynôme est donc fonction d'un  $G$  donné.

Le référent de  $p$ , c'est finalement l'ensemble des conditions appartenant à  $G$  connectées positivement par le polynôme  $p$  (c'est-à-dire par le compte rendu d'une enquête donnée – donc d'une chaîne).

La référence dans  $G$  va être récursivement définie ainsi : pour un  $G$  donné, on appelle G-référent d'un S-polynôme  $p$  et on le note  $R_G(p)$  l'ensemble ainsi défini :

$$R_G(p) = \{ R_G(p') ; \langle p', c \rangle \in p \text{ et } c \in G \}$$

La chose nouvelle est de spécifier  $c \in G$  (et non plus simplement à  $C$ )

Voyons ce que cela donne concrètement.

- $R_G(p_\emptyset) = ?$  Rappelons-nous :  $p_0 = \langle \emptyset, c_a \rangle$ . On aura donc :

- $R_G(p_\emptyset) = \emptyset$  si  $c_a \notin G$
- $R_G(p_\emptyset) = \{ \emptyset \}$  si  $c_a \in G$

La condition  $c_a$  est donc « cochée » absente ou présente par une sorte de code binaire 0 et 1 (ici  $\emptyset$  et  $\{ \emptyset \}$ ).

- $R_G(p_a) = \{ R_G(p_b) \}$  sera l'ensemble des référents des polynômes qui entrent dans sa composition et qui sont apparés à une condition appartenant à  $G$ .

En gros, le référent d'un polynôme donné est la somme indexée des éléments de  $C$  qui ont été retenus dans la procédure d'enquête dont le polynôme est le compte rendu.

### 3.c - Polynômes canoniques représentant les éléments de S

Notre lexique va nous donner, en sus, la capacité de nommer tout élément de  $S$ .

On construit pour cela des polynômes canoniques qui sont des polynômes d'un type particulier.

Pour les polynômes généraux, on a :

$$p_n = \{ \langle p_n, c_n \rangle ; n' < n \text{ et } c_n \in C \}$$

Pour les polynômes canoniques, on va avoir :

<sup>43</sup> Cf. EE p. 415

<sup>44</sup> Cf. Dehornoy – p. 289 : Définition 11.1.7 (i)

$$p_n = \{ \langle p_n, \emptyset \rangle ; n' < n \}$$
 <sup>46</sup>

En transposant cela à tous les éléments de S, on obtient les polynômes canoniques d'éléments qui font intervenir un vide de conditions appartenant spécifiquement à G :

$$\boxed{x} = \{ \langle \boxed{y}, \emptyset \rangle ; y \in x \}$$

Remarquer qu'on a bien  $\emptyset \in S$  car S est modèle de ZFC (et donc de l'axiome du vide  $\implies \exists \emptyset$  dans S).

On impose donc ici que  $\emptyset \in C$  en sorte que les polynômes canoniques soient bien des polynômes.

Le résultat va être que le référent dans G du polynôme canonique  $\boxed{x}$  sera indépendant de G et sera équivalent... à x lui-même !

$$R_G[\boxed{x}] \equiv x \text{ quel que soit } G$$

Revoyons cela un peu plus en détail.

### Enjeu

Ce nom  $\boxed{x}$  de x va alors assurer que sa référence  $R_G[\boxed{x}]$  équivaut à cet élément x *aussi bien dans la situation de départ que dans l'extension* <sup>47</sup>. Ceci va assurer que  $S \subset S(G)$ .

### Détails

On a :

- $\boxed{\emptyset} = \langle \emptyset, \emptyset \rangle \implies R_G[\boxed{\emptyset}] = \emptyset$
- pour le singleton  $s = \{e\}$ , on a :  $\boxed{s} = \{ \langle \boxed{e}, \emptyset \rangle \} \implies R_G[\boxed{s}] = \{ R_G[\boxed{e}] \}$
- si par exemple  $x = \{a, b, c\}$ , alors  $\boxed{x} = \{ \langle \boxed{a}, \emptyset \rangle, \langle \boxed{b}, \emptyset \rangle, \langle \boxed{c}, \emptyset \rangle \}$  avec  $\boxed{a} = \{ \langle \boxed{a_1}, \emptyset \rangle ; a_1 \in a \}$ , etc.

On vérifie qu'on a bien  $R_G[\boxed{x}] \equiv x$  quel que soit G puisque :

$$\begin{aligned} \text{par définition de } R_G : R_G(p) &= \{ R_G(p') ; \langle p', c \rangle \in p \text{ et } c \in G \} \\ \implies R_G(\boxed{x}) &= \{ R_G(\boxed{y}) ; \langle \boxed{y}, \emptyset \rangle \in \boxed{x} \}. \end{aligned}$$

Mais la condition  $\langle \boxed{y}, \emptyset \rangle \in \boxed{x}$  ne fait que spécifier que  $y \in x$ .

$$\text{Donc } R_G(\boxed{x}) = \{ R_G(\boxed{y}) \} \Leftrightarrow x = \{ y \}.$$

$$\text{Donc } R_G[\boxed{x}] \equiv x$$

### Cas particulier : polynôme canonique représentant G

$\boxed{G}$  est le polynôme canonique de G (dans C et donc dans S).

On a de même :

$$R_G(\boxed{G}) \equiv G$$

Rappel : G n'est pas élément de S :  $G \subset S$  mais  $G \notin S$ . Ce qui existe dans S, c'est le polynôme  $\boxed{G}$  de G.

### 3.d - Définition de l'extension S[G]

Si P est l'ensemble des polynômes, l'extension S[G] sera définie comme l'image de P par l'application  $R_G$  :

$$S[G] = R_G(P)$$

## 4. Forçage

### • Parcours de pensée

Il s'agit maintenant de voir comment, muni de notre système de polynômes, il est possible, de l'intérieur de S, de contrôler - « forcer » - ce qui se passe dans S[G] c'est-à-dire dans l'extension proprement dite.

On va ainsi composer dans S un discours rationnel et calculable sur S[G].

L'idée stratégique est ici (comme on l'a déjà indiqué précédemment, en ouverture de cette partie sur les polynômes) de faire fonctionner sémantiquement le syntaxique - le démontrable ou le calculable (propriété syntaxique) va opérer comme critère de validité d'une interprétation (propriété sémantique) : on va forcer le sémantique à partir du syntaxique.

Une formule  $\lambda$  sera *sémantiquement* valide dans S[G] si  $\lambda$  est *syntactiquement* valide dans S.

<sup>46</sup> On a bien  $\emptyset \in C$  car S est MTD de ZFC.

<sup>47</sup> EE p. 419

Ainsi *syntaxique* dans  $S \Vdash$  *sémantique* dans  $S[G]$ .

### Plus précisément...

La relation de forçage est **interne** à  $S$ .

Elle opère entre un ensemble de conditions  $c$  (élément de  $G$ ) – on appellera cet ensemble une « **proposition** »  $\prod(c_i)$  – et un énoncé ou une « **formule** »  $\lambda(p_j)$  sur les polynômes (une formule est faite de polynômes et de signes logico-mathématiques – voir ci-dessous).

À partir de là, la véridicité dans  $S$  d'une formule syntaxique  $\lambda(p_j)$  entraîne la véridicité dans l'extension de la formule sémantique  $\lambda[R_G(p_j)]$  sur les référents  $R_G(p_j)$ . Ainsi l'appartenance à  $G$  de conditions  $c_i$  (assurant la validité de  $\lambda(p_j)$  dans  $S$ ) va forcer la validité de  $\lambda(p_j)$  dans  $S$  et par là celle de  $\lambda[R_G(p_j)]$  dans  $S[G]$ .

$$c \in G \ \& \ [c \Vdash \lambda(p_j)] \longleftrightarrow \lambda[R_G(p_j)]$$

Attention : le forçage n'est pas absolu car il dépend de l'appartenance ou non de la condition  $c$  en question à l'extension  $G$  considérée.

On appelle donc « **forçage** » une relation dans  $S$  entre une **proposition** (faite de conditions) et la véridicité dans  $S$  d'une **formule** sur les polynômes. Le forçage ne concerne donc qu'indirectement le rapport entre  $S$  et  $S[G]$  : c'est parce que la véridicité syntaxique dans  $S$  aura été assurée par forçage que la véridicité sémantique dans  $S[G]$  sera assurée.

Attention : comme on va y revenir, le forçage ressemble à une implication sans en être tout à fait une. C'est une sorte d'implication « sous condition » : l'implication n'opère que si les conditions intervenant dans la propriété  $\prod$  appartiennent à  $G$  :  $\prod(c_i)$  « n'implique »  $\lambda(p_j)$  que si  $c_i \in G$ .

Autrement dit, si  $c_i \in G$ ,  $\prod(c_i)$  « force »  $\lambda(p_j)$  à être (syntaxiquement) valide, et alors tout ceci implique la validité (sémantique) de  $\lambda[R_G(p_j)]$ .

Au total, la relation de forçage opère à deux niveaux ( $S$  et  $S[G]$ ) sur trois termes :  $\prod(c_i)$ ,  $\lambda(p_j)$  et  $\lambda[R_G(p_j)]$  :

1. le niveau de la proposition  $\prod(c_i)$  porte sur les conditions – on est ici dans  $S$  ;
2. le niveau de la formule syntaxique  $\lambda(p_j)$  porte sur les polynômes – on est ici toujours dans  $S$  ;  
La relation de forçage relie ces deux premiers niveaux :  $\prod(c_i) \Vdash \lambda(p_j)$ . Elle est interne à  $S$ .
3. le niveau de la formule sémantique  $\lambda[R_G(p_j)]$  porte sur les référents des polynômes – on se situe désormais dans  $S[G]$ .

Le lien de ce troisième niveau avec les deux précédents - lien entre deux véridicités - est une conséquence de la relation précédente de forçage. Ce lien se fait désormais entre  $S$  et  $S[G]$ .

La relation de forçage proprement dite ( $\Vdash$ ) intervient entre les deux premiers niveaux :  $\prod(c_i) \Vdash \lambda(p_j)$ .

On a ensuite équivalence de deux véridicités, la première, syntaxique, dans  $S$  et la seconde, sémantique, dans l'extension  $S[G]$  :

$$[\prod(c_i) \Vdash \lambda(p_j)] \longleftrightarrow \lambda[R_G(p_j)]$$

On n'a donc pas de forçage direct entre  $\prod(c_i)$  et  $\lambda[R_G(p_j)]$ .

#### 4.a - Relation de forçage

On va définir une relation de forçage pour toutes les formules ensemblistes sur  $S$ .

On va d'abord la définir pour les formules atomiques (du type *simple appartenance* :  $c \in c'$  ou  $c \in G$ ) puis on va l'étendre aux formules ensemblistes (faisant également intervenir des signes logico-mathématiques).

La relation de forçage en question va permettre de corréliser une proposition vérifiable syntaxiquement dans  $S$  à une formule véridique sémantiquement dans  $S[G]$ .

### Propositions

La relation de forçage devra satisfaire à trois attributs qui correspondent aux attributs usuels de l'implication<sup>49</sup>.

#### Propositions & formules

Appelons « **proposition** »  $\prod$  un ensemble autoconsistant de conditions spécifiant si chacune appartient ou n'appartient pas à  $G$  (Cohen appelle cela une « *forcing condition* »<sup>50</sup>).

<sup>49</sup> Cohen p. 112

<sup>50</sup> Cohen p. 111 (définition p. 115)

Appelons « **formule** »  $\lambda$  sur les polynômes une expression faisant intervenir les signes logiques « = », «  $\exists$  », «  $\forall$  », «  $\sim$  », «  $\rightarrow$  ».

Soit  $\Pi$  une proposition et  $\lambda$  une formule : notons  $\Pi \Vdash \lambda$  le fait que  $\Pi$  force  $\lambda$ . On aura alors les trois attributs suivants :

1. Cette relation de forçage est consistante : on ne peut avoir simultanément  $\Pi \Vdash \lambda$  et  $\Pi \Vdash \sim \lambda$
2. Si  $\Pi \Vdash \lambda$  et si  $\Pi' \supseteq \Pi$ , alors  $\Pi' \Vdash \lambda$
3.  $\forall \Pi$  et  $\lambda$ ,  $\exists \Pi'$  tel que  $\Pi' \supseteq \Pi$  avec  $\Pi' \Vdash \lambda$  ou  $\Pi' \Vdash \sim \lambda$ <sup>51</sup>

#### Forçage $\neq$ implication

Attention !: si la relation de forçage ressemble à une implication<sup>52</sup>, elle n'est pas pour autant une implication stricte<sup>53</sup> :

$$(\Pi \text{ force } \lambda) \neq (\Pi \text{ implique } \lambda)$$

$$(\Pi \Vdash \lambda) \neq (\Pi \implies \lambda)$$

En effet, la proposition  $\Pi(c)$  n'entraîne la formule  $\lambda(c)$  que pour les conditions  $c$  appartenant à  $G$  :

$$\Pi(c) \implies \lambda(c) \text{ ssi } c \in G$$
<sup>54</sup>

## Formules

### Formules atomiques

#### *Définition*

Pour  $p$  et  $p' \in P$  et pour  $c \in C$ , on dit que  $c$  force  $p \in p'$  (on note  $c \Vdash p \in p'$ ) si  $\langle p', c \rangle \in p$

#### *Lemme*

Pour tout  $p$  et  $p' \in P$ ,  $[\exists c \in G \text{ avec } c \Vdash p \in p'] \iff R_G(p') \in R_G(p)$

L'appartenance d'une condition à  $G$  – propriété syntaxique – force une appartenance des référents dans l'extension – propriété sémantique.

### Formules ensemblistes générales

Pour tout polynôme  $p_i$  et toute formule  $\lambda(x_i)$ ,  $[\exists c \in G \text{ avec } c \Vdash \lambda(x_i)] \iff \lambda[R_G(p_i)]$

Noter l'équivalence entre forçage (dans la situation de départ) et véridicité (dans la situation étendue) pour une formule (constructible) dans la situation de départ.

## Casuistique

Il faut alors travailler sur les différents signes (logiques / + 1 mathématique :  $\in$ ) de toute formule :

$$\langle = \rangle, \langle \exists \rangle, \langle \sim \rangle, \langle \rightarrow \rangle \dots / \langle \in \rangle$$

Cohen examine 11 cas pour les formules élémentaires<sup>55</sup> :

1.  $\exists$
2.  $\forall$
3.  $\sim$  (négation)
4.  $\&$  (et)
5.  $\vee$  (ou)
6.  $\rightarrow$
7.  $\longleftrightarrow$
8.  $=$

9-11 : cas particuliers de l'appartenance  $\in$

N'examinons pas tout cela en détail, d'autant que la chose devient ici plus fastidieuse.

<sup>51</sup> Pas évident !

<sup>52</sup> « Le nom *forcing* a été choisi pour suggérer l'analogie avec le concept usuel d'implication, mais en un nouveau sens. » (Cohen, *The discovery of forcing*, p. 1093)

<sup>53</sup> Cohen p. 111

<sup>54</sup> Suggérons une analogie qui vaut ce qu'elle vaut :  $(a+bx)^2 \Vdash b^2x^2$  seulement pour  $\langle a, b \rangle \in \{ \langle 0, n \rangle \}$

<sup>55</sup> et seulement 8 pour les formules ensemblistes composées à partir de ces 11 formules élémentaires (Cohen p. 117-118)

### (8) Égalité

On peut laborieusement forcer l'égalité par un raisonnement constructif <sup>56</sup>.

### (3) Négation

Le forçage de la négation pose plus de problèmes.

Examinons cela plus en détail car il en va d'un certain impossible du forçage.

## 4.b - Son point de réel : la négation

### Cohen <sup>58</sup>

Définition :

$$\begin{aligned} & \prod \Vdash \sim \lambda \text{ si } \forall \prod' \supseteq \prod \text{ alors } \prod' \nVdash \lambda \\ \text{soit : } & \prod \text{ force non-}\lambda \text{ si tout } \prod' \text{ ne force pas } \lambda \end{aligned} \quad ^{59}$$

Cohen pose donc, en fait :  $(\prod \Vdash \sim \lambda) \equiv \prod \nVdash \lambda$

Dit en langage ordinaire : «  $\prod$  force non- $\lambda$  »  $\equiv$  « tout  $\prod'$  plus puissant ne force pas  $\lambda$  ».

En fait, on remplace le forçage de la négation par le non-forçage de l'affirmation !

On a ici clairement une torsion car on passe de l'affirmation d'une négation à la négation d'une affirmation, ce qui n'est bien sûr nullement la même chose.

On pressent donc que le forçage bute sur la négation. Mais Cohen, dans ses conférences de 1965, ne détaille guère ce point.

Voyons ce qu'en disent d'autres auteurs.

### Dehornoy

Il commente ainsi cette torsion : le passage à la négation « n'est pas une simple complémentation » <sup>60</sup>.

Ce point est capital et demanderait des développements.

Cela touche au fait qu'il y a différents types logico-mathématiques de négation - par exemple, la négation ensembliste (classique :  $\sim \sim E = E$ ) n'est pas la négation topologique (intuitionniste :  $\sim \sim O \supseteq O$  <sup>61</sup>). Voir aussi la différence entre nier par soustraction et nier en quotientant...

L'hexagone logique dont il va être question plus loin « logotopise » <sup>62</sup> ces différents types d'opposition-négation.

L'idée à retenir serait donc que la négation, pour le forçage, serait non-classique.

### Badiou

EE indique d'abord <sup>63</sup> qu'on vise le forçage de la formule  $\sim \lambda$  pour finalement <sup>64</sup> forcer la formule  $\sim(\lambda)$ .

La première formule désigne l'énoncé « non- $\lambda$  » et peut se formaliser  $(\sim \lambda)$  ; la seconde désigne non-l'énoncé «  $\lambda$  » et se formalise  $\sim(\lambda)$  ou  $[\sim(\lambda)]$ .

Badiou précise ainsi le déplacement : *comme aucune condition plus forte ne force l'affirmation, on a affaire à l'inforçabilité de l'affirmation plutôt qu'au forçage de la négation. Ainsi la nécessité de la négation est transformée en la non-nécessité de l'affirmation. La négation prend ce faisant un tour modal : il est possible de nier dès que l'on n'est pas contraint d'affirmer. Cette modalité du négatif est caractéristique de la négation subjective.*

S'agit-il ici de logique modale ou plutôt de logiques non classiques (intuitionnistes, paraconsistantes...) dont l'EE ne traitait guère ?

On va privilégier cette dernière interprétation.

### Au total...

En fait, on a potentiellement à faire ici à trois propositions différentes possibles :

1.  $\prod$  force non- $\lambda$  :  $\prod \Vdash \sim \lambda$

<sup>56</sup> Cf. EE p. 452-3 et p. 501...

<sup>58</sup> Cohen p. 117-118

<sup>59</sup> Rappelons la seconde propriété de la relation de forçage (voir plus haut) :

si  $\prod \Vdash \lambda$  et si  $\prod' \supseteq \prod$ , alors  $\prod' \Vdash \lambda$ . Donc si  $\forall \prod' \supseteq \prod \prod' \nVdash \lambda$ , on ne saurait avoir  $\prod \Vdash \lambda$  soit  $\sim(\prod \Vdash \lambda)$ .

<sup>60</sup> Dehornoy p. 290

<sup>61</sup> La langue est intuitionniste : « c'est pas bête ! »

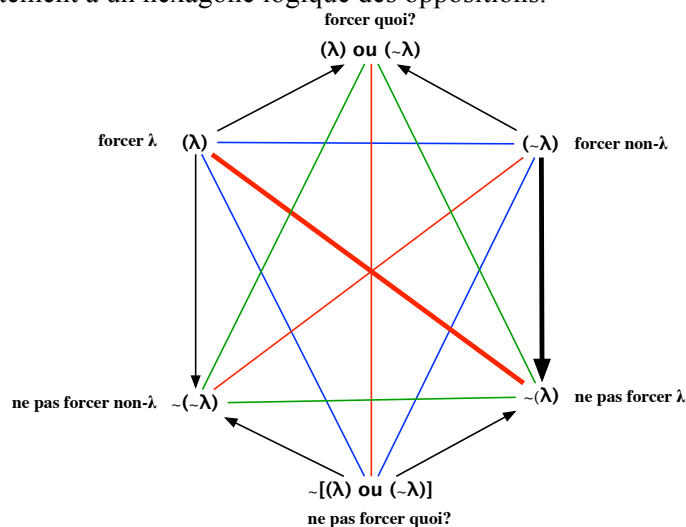
<sup>62</sup> Cf. René Guitart : la « logotopie » est un « lieu pour un discours » (là où topologie est « un discours pour un lieu »).

<sup>63</sup> EE p. 452

<sup>64</sup> EE p. 454

2.  $\Box$  ne force pas  $\lambda$  :  $\Box \nVdash \lambda$
3. Il n'est pas vrai que  $\Box$  force  $\lambda$  :  $\sim(\Box \Vdash \lambda)$

On a donc à faire implicitement à un hexagone logique des oppositions.



Cohen remplace « forcer non- $\lambda$  » par « ne pas forcer  $\lambda$  ». À l'affirmation d'une négation, il substitue la négation d'une affirmation : il substitue à « on peut forcer non- $\lambda$  » l'énoncé « on ne peut forcer  $\lambda$  ». Au lieu de forcer la négation, il ne force pas l'affirmation.<sup>65</sup>

Le point peut être vu ainsi : la différence des deux énoncés tient à la différence qu'il y a entre la négation d'un verbe (« forcer ») et la négation d'un objet ici d'une formule). Ce n'est pas le même « non » car nier l'existence d'une opération n'équivaut pas à nier l'existence d'un objet : la première négation est une impossibilité, la seconde une inexistence.

Ceci se voit bien dans le cas où l'on remplace le verbe « forcer » par le verbe « vouloir ».

On retrouve alors la différence entre la figure passive du nihilisme - négation de l'affirmation (« ne rien vouloir ») – et sa figure active - affirmation de la négation (« vouloir le rien »). Dans la négation de l'affirmation, la négation est celle d'un verbe. Dans l'affirmation de la négation, la négation est celle d'un substantif !

Et, comme l'on sait, les deux ne s'équivalent nullement ! Par exemple « vouloir la non-musique » n'équivaut pas à « ne pas vouloir la musique ».

Donc ici, au lieu d'affirmer la possibilité d'une opération sur une formule niée (« on peut forcer non- $\lambda$  »), on nie la possibilité de cette opération sur une formule affirmative (« on ne peut forcer  $\lambda$  »).

Une autre manière de souligner la différence<sup>66</sup> est de distinguer le fait de « prouver non-P » et de « ne pas pouvoir prouver P » ; comme l'on sait, la notion cruciale d'indécidabilité (P pas plus que non-P ne sont prouvables) tient toute en ce non-recouvrement.

On mesure donc que le forçage apparaît ici comme bridé, autolimité : il ne travaille la négation que sous une forme entravée, une forme « passive » qui se contente de nier l'affirmation sans accéder à la puissance affirmative sur une négation.

Le contrôle qu'on a donc a priori du travail de la négation dans l'extension a posteriori semble donc limité : on peut nier des propriétés de l'extension mais on ne peut y affirmer des propriétés négatives.

Le point serait donc : on ne peut forcer – et donc contrôler a priori – le travail du négatif. Le travail du négatif n'est pas directement contrôlable par le forçage. Il ne l'est qu'indirectement.

### Le réel du forçage

On conclura provisoirement ainsi : puisque on remplace le forçage du négatif par le non-forçage de l'affirmation, le réel de l'opération forçage est l'impossibilité de forcer le travail du négatif.

<sup>65</sup> La raison de cette négation faible semble tenir à cette remarque que Scott fera à Cohen : le forçng est « analogue à une algèbre de Boole » (logique classique) puisque, «  $\Box$  force  $\lambda$  si aucune extension de  $\Box$  ne force la négation de  $\lambda$  » (Cohen, *The discovery...*, p. 1096)

<sup>66</sup> Voir l'amical remarque de Jérôme Guitton

#### 4.c - Vérification de ses attributs

Tout ceci fait, on peut alors vérifier que la relation de forçage répond aux trois attributs attendus (voir plus haut) et à d'autres<sup>67</sup>.

1.  $\forall \Pi \Vdash \lambda$ , on ne peut avoir à la fois  $\Pi \Vdash \lambda$  et  $\Pi \Vdash \sim \lambda$
2. Si  $\Pi \Vdash \lambda$  et si  $\Pi' \supseteq \Pi$ , alors  $\Pi' \Vdash \lambda$
3.  $\forall \Pi \Vdash \lambda$ ,  $\exists \Pi'$  tel que  $\Pi' \supseteq \Pi$  avec  $\Pi' \Vdash \lambda$  ou  $\Pi' \Vdash \sim \lambda$ <sup>68</sup>
4. Il existe une séquence complète (une chaîne).<sup>69</sup>
5.  $\lambda$  est vraie dans S ssi  $\exists n$  tel que  $\Pi_n \Vdash \lambda$
6. La relation de forçage est absolue.<sup>70</sup>

#### 4.d - Propriétés de l'extension

- S[G] reste alors modèle de ZF.  
Ceci découle du forçage des axiomes de ZF dans S[G].  
La démonstration<sup>71</sup> est parallèle à celle qui prouve la validité des axiomes de ZF dans L (ensembles constructibles)<sup>72</sup>. La principale difficulté réside à nouveau dans l'axiome de l'ensemble des parties<sup>73</sup> et dans l'axiome de remplacement<sup>74</sup>.
- S[G] reste modèle de l'axiome de choix.<sup>75</sup>
- G reste générique dans S[G]  
La démonstration<sup>76</sup> se fait par l'absurde et utilise « pour la première fois » le fait que chaque condition est un ensemble fini.  
Ce point – G reste générique dans l'extension – est capital : il veut dire que la propriété de généricité de G, relative à G<sup>77</sup>, reste valide de l'extension : l'extension ne révèle donc pas une propriété cachée dans S qui permettrait désormais de construire G. Dans l'espace de travail considéré, G n'est pas générique « faute de mieux » - par défaut de connaissance de propriétés « cachées » - mais bien en raison de propriétés intrinsèques affirmatives (G intersecte toute partie dense). La généricité est bien une caractéristique affirmative que G conserve au cours du travail d'extension.

### 5. Ensuite...

Cohen montre alors

- que ZFC est compatible avec la négation de l'hypothèse du continu<sup>78</sup> :

$$\text{ZFC} \not\Rightarrow \text{HC}$$

- et que l'hypothèse du continu peut être valide dans un S[G] composé ad hoc<sup>79</sup> lors même que G y est non constructible (et donc que  $V \neq L$ ). Il démontre donc ce faisant que l'hypothèse du continu est compatible avec  $V \neq L$  :

$$\text{HC} \Leftrightarrow V=L.$$

On peut donc avoir HC sans avoir l'hypothèse de constructibilité mais, à l'inverse, l'hypothèse de constructibilité implique HC.

<sup>67</sup> Cohen p. 118...

<sup>68</sup> Résultat que Cohen trouve en effet « surprenant » car il implique que toute formule est « en quelque sens décidable ». Cohen précise (p. 119) que la démonstration de ce point est évidente.

<sup>69</sup> La démonstration utilise la dénombrabilité de la situation (Cohen p. 119).

<sup>70</sup> Cohen p. 121 : « la preuve (fastidieuse et évidente) est essentiellement la même que la preuve que la constructibilité est absolue ».

<sup>71</sup> Voir Cohen IV.6 p. 121...

<sup>72</sup> Cohen p. 122

<sup>73</sup> Cohen p. 122-123

<sup>74</sup> Cohen p. 123-124

<sup>75</sup> Voir Cohen p. 125-126

<sup>76</sup> Voir Cohen p. 125

<sup>77</sup> La généricité n'est pas une propriété absolue.

<sup>78</sup> Il construit pour cela un G de taille  $\aleph_2$  de (*The discovery...*, p. 1097)

<sup>79</sup> Cohen p. 126

Ensuite, « la méthode du forcing est applicable à beaucoup de problèmes en théorie des ensembles. [...] Nous démarrerons toujours avec le modèle  $S$ <sup>80</sup> et adjoindrons certains ensembles génériques et nous prendrons alors  $S[G]$ <sup>81</sup> comme la classe de tous les ensembles générés à partir de ceux qui usent des ordinaux de  $S$ . [...] On pourra même quelque fois introduire une classe (relative à  $S$ ) d'ensembles génériques plutôt que simplement un ensemble. »<sup>82</sup>

\*

Rappelons qu'il s'agissait pour Cohen de montrer que ZFC est compatible avec non-HC après que Gödel a montré que ZFC est compatible avec HC.

D'où la démonstration parachevée de l'indécidabilité de HC dans ZFC : ZFC ne suffit pas à décider HC (cf. incomplétude de ZFC).

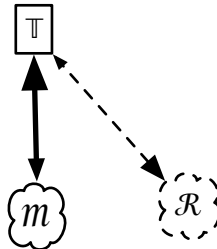
Par ailleurs, comme on l'a vu, ZFC ne décide pas si  $V=L$  ou si  $V \neq L$ .

### Raisonnances mamuphiques

Contentons-nous ici d'indiquer diverses raisonnances envisageables pour cette théorie.

#### Rappel : « raisonance » ?

Une raisonance  $\mathcal{R}$  est un modèle hérétique - ou pathologique - de la théorie  $\mathbb{T}$ .



Le théorème de Lowenheim-Skolem (voir plus haut début de la partie 3) nous garantit l'existence de tels modèles hérétiques.

Un tel modèle  $\mathcal{R}$  n'a plus besoin d'avoir les mêmes attributs que le modèle de départ  $\mathcal{M}$  : il aura les attributs de  $\mathcal{M}$  que la théorie  $\mathbb{T}$  a formalisés. En particulier, notre modèle par raisonance  $\mathcal{R}$  n'a pas besoin d'avoir la même cardinalité que  $\mathcal{M}$  ! Il suffit qu'il ait la cardinalité de la théorie  $\mathbb{T}$ .

Or ici  $\|\mathcal{M}\| = \|\mathbb{R}\|$  [la puissance du continu] mais  $\|\mathbb{T}\| = \aleph_0$  (le théorème de LS est basé sur ce point : la théorie de tout modèle est dénombrable !). On peut donc avoir  $\|\mathcal{R}\| = \aleph_0$ .

Notre modèle de raisonance  $\mathcal{R}$  n'a donc pas besoin d'avoir, comme  $\mathcal{M}$  et comme  $\mathbb{R}$ , la puissance du continu.

On peut donc parfaitement envisager des raisonnances rationnelles avec une situation restreinte, dénombrable (il suffit donc que les objets de la nouvelle situation soient en infinité potentielle dénombrable).

#### Musicalement...

- Formalisation de l'aura poétique engendrée par l'œuvre musicale composite (voir bibliographie) – ou comment l'œuvre musicale composite compose musicalement l'aura poétique (non musicale donc) du texte qu'elle « met en musique ».
- Étendre le monde-Musique par adjonction de l'idée d'hétérophonie (voir précédents exposés *mamuphi*). Noter en effet que l'hétérophonie est une idée (ou une orientation) générique plutôt que constructiviste<sup>83</sup> : on ne saurait la définir-cerner intégralement ; on peut cependant l'approcher minutieusement de l'intérieur du monde-Musique comme on le fait pour  $G$  de l'intérieur de  $S$  : comme ce qui intersecte toute « densité » (polyphonique, cacophonique, juxtaphonique et bien sûr monophonique, homophonique, antiphonique).

<sup>80</sup>  $S$  renote ce que Cohen note  $M$ .

<sup>81</sup>  $S[G]$  renote ce que Cohen note  $N$ .

<sup>82</sup> Cohen p. 127-128

<sup>83</sup> En un sens, elle vient donner un contenu plus précis à ce que j'appelais, dans *La singularité Schoenberg*, « style diagonal de pensée ».



### Politiquement...

- Dans le marxisme-léninisme, adjonction du prolétariat générique (qui n'est pas la classe ouvrière constructiviste<sup>84</sup>) pour étendre la politique communiste
- Dans le maoïsme, adjonction de la ligne de masse (entendue comme adresse générique « aux larges masses » quelconques) pour étendre la révolution prolétarienne à une révolution culturelle

### Autre...<sup>85</sup>

- Adjonction, après Pâques, du corps glorieux générique<sup>86</sup> du Christ, pour étendre l'humanité à la puissance éternelle de l'Esprit, pour étendre la vie (la vie n'est plus ce qui se mesure à la mort<sup>87</sup> mais ce qui se mesure à l'Esprit) - ce qui, corrélativement, étend le judaïsme en christianisme.

## BIBLIOGRAPHIE

### Mathématiques

Paul J. Cohen: *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (Mathematics Lecture Note Series, 1966)

Paul J. Cohen : *The Discovery of Forcing* (Rocky Mountain – Journal of Mathematics, vol. 32, n°4, Hiver 2002)

Thomas Jech : *Set Theory – 14. Forcing*

Thomas Jech : *What is... Forcing ?*

Kenneth Kunen : *Set Theory – VII. Forcing*

Timothy Y. Chow : *A beginner's guide to forcing*

Timothy Y. Chow : *Forcing for Dummies*

Dehornoy : *La méthode du forcing* (chapitre 11 du Cours de Logique et de Théorie des ensembles)

### Philosophie

Alain Badiou : *L'être et l'événement* (Seuil, 1988)

Alain Badiou : *La procédure générique* (séminaire de mathématiques, année 1988-1999)

### Musique

François Nicolas : *Raisonnance musique & mathématiques : pour mieux comprendre l'aura poétique engendrée par l'œuvre musicale composite*, in *Le monde-Musique*, Tome IV, chapitre II, Aedam musicæ, 2016

François Nicolas : [Composer des hétérophonies](#) (*mamuphi* 12 novembre 2016, Ircam)

### *mamuphi* (autres)

François Nicolas : [Un modèle inattendu d'adjonction et d'extension : la constitution d'une grammaire arabe au VIII<sup>e</sup> siècle](#) (*mamuphi* 5 décembre 2014, Ircam)

Armand Hatchuel : [Forcing et théorie de la conception \(théorie C-K\) : un modèle du raisonnement créatif](#) (*mamuphi* 10 décembre 2016, Ircam)

- Armand Hatchuel : *Du raisonnement de conception. Essai sur le « Forcing » en théorie des ensembles.*
- Armand Hatchuel, Benoît Weil, Pascal Le Masson : *Towards an ontology of design : lessons from C-K design theory and Forcing.*
- Armand Hatchuel, Benoît Weil, Pascal Le Masson : *Théorie, méthodes et organisations de la conception* (Presses des Mines, 2014)

\*\*\*

<sup>84</sup> Voir la différence entre « classe politique » et « classe sociale »...

<sup>85</sup> On n'inscrit pas ici le cas de l'adjonction d'une grammaire pour étendre les pouvoirs d'une langue car une grammaire est bien sûr une partie éminemment constructible de la langue : il ne s'agit donc pas ici d'AE *générique*.

<sup>86</sup> En effet, dans la fable pascale, le corps du ressuscité n'est plus immédiatement reconnu par les proches de Jésus. Il se présente comme corps humain quelconque : « un homme dans un jardin », « un homme en train de pécher », « un homme en train de marcher ». Ce n'est pas le corps de Lazare, ressuscité en un autre sens car rétabli comme corps mortel.

<sup>87</sup> Voir sa définition par Claude Bernard : la vie est l'ensemble de ce qui résiste à la mort.