

*Comment, à Bagdad (IX^e-XII^e siècles),
la pensée algébrique s'est progressivement émancipée
de son berceau langagier (arabe)*

(séminaire MamuX, Ircam, 5 décembre 2014)

François Nicolas

Enjeu général

1. Intérêt pour la langue arabe = l'intégrer à une hétérophonie à la fois musicale et linguale.
2. Intérêt pour la mathématique = une pensée « pour tous », qui aide à s'orienter, hors du relativisme de l'époque.
3. Intérêt pour ce rapport langue arabe / algèbre car il y va des rapports entre pensée et langage, rapports qui intéressent spécifiquement le musicien (pensif):

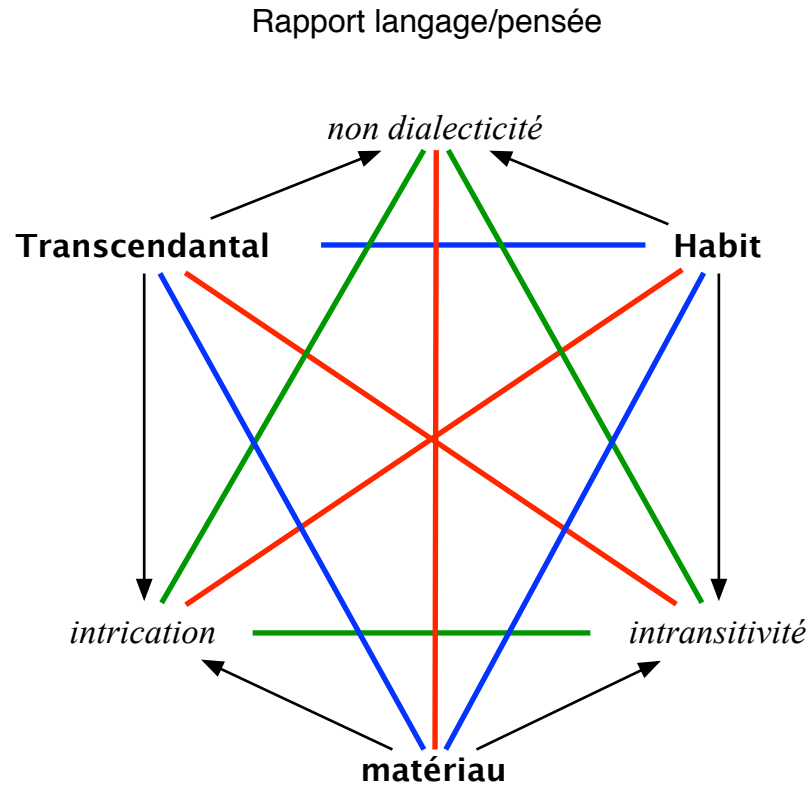
La musique, comme la mathématique, est une pensée non langagière (ce qui n'est pas dire sans aucun rapport au langage : son autonomie de pensée n'est pas une autarcie à l'égard du langage).

Comment concevoir les rapports pensée/langage en luttant sur deux fronts:

- contre l'idée que le langage serait la vraie mesure de toute pensée,
- contre l'idée que le langage ne serait qu'un vêtement accessoire pour la pensée?

Comment tenir que le langage est bien le matériau de beaucoup de pensées sans être pour autant leur transcendantal?

Lutte sur deux fronts...



Enjeu spécifique: anti-positiviste

Contradiction:

- La pensée algébrique naît dans un berceau langagier: celui de la langue arabe.
- Pourtant (thèse anti-positivisme logique, c'est-à-dire contre le supposé « tournant langagier » de la pensée), cette pensée, comme toute pensée mathématique, n'a nullement le langage pour constituant transcendantal.

⇒ Comment cette pensée s'est-elle émancipée de son site langagier natif?

Plan

- I. Berceau?
- II. Émancipation?
- III. Portée de tout cela?

I. Berceau?

« Les langues sémitiques tendent à la formation abrégée et abstraite, “algébrisante”, des idées. »

Louis Massignon

« La conception de la science qu’a engagée le linguiste al-Khalîl comme la méthode qui l’accompagne sont deux conditions de possibilité de l’algèbre d’al-Khawârizmî. »

Roshdi Rashed

La langue arabe est « algébrisée »

Thèse : la structure de la grande langue arabe littéraire entretient de profondes proximités avec un mode « algébrique » de pensée.

D'où

- les « raisonances algébriques » de la langue arabe.
- les affinités entre modes de pensée linguistique (dans la TGA) et algébrique.

« algébrique »?

Structure d'ordre algébrique = structure immédiatement formalisable comme loi de composition littérale ¹, selon des règles précises d'enchaînement entre lettres.

Algèbre = ce qui de la pensée mathématique s'écrit à la lettre (mathématique): la lettre joue dans l'algèbre le rôle que la figure joue dans la géométrie ².

Voir le rôle central que la lettre x joue en algèbre : elle nomme l'inconnue, lui fixe une place dans l'équation algébrique c'est-à-dire dans le réseau de relations connues quienserme l'inconnue. Le calcul sur l'équation – sa transformation – s'engage alors par déplacement de lettres. Une construction langagière qui s'explicite par règles formelles dans le déplacement ou la transformation des lettres sera à ce titre dite de type *algébrique*.

Rappel : l'algèbre arabe ne connaissait pas encore le calcul algébrique littéral. Il se faisait dans la langue vernaculaire ordinaire, dans l'arabe littéraire de l'époque. Mais l'esprit algébrique était déjà là : le calcul algébrique qu'on effectuera plus tard « à la lettre » était alors *phrasé* c'est-à-dire projeté dans la langue vernaculaire. Ceci se faisait avec des mots venant nommer l'inconnue par des mots (racine *jizrun* ou chose *chay'un*), non par des lettres.

¹ *Bourbaki* distingue trois types de structures : les structures d'ordre, les structures topologiques et les structures algébriques. Ce qui pour lui caractérise alors les structures algébriques, ce sont « les lois de composition ».

² D'où qu'on puisse aussi parfois définir l'algèbre comme « calcul symbolique » mais cette définition, centrant l'algèbre sur le calcul, tend alors à la logiciser (comme dans la bien connue « algèbre de Boole »).

Chronologie

	LANGUE ARABE	ALGÈBRE	
VIII°	718-786 : al-Khalîl (al-Farâhîdî) الخليل - الفراهيدي □ <i>Le livre source</i> كِتَابُ الْعَيْنِ □ 760-796 : Al-Sîbawayhi السَّبَوَيْهِ <i>Le Livre</i> الْكِتَابُ		
IX°	835-898 : al-Mubarradُ الْمُبَرِّدُ <i>Kitâb al-muqtaDab</i> [= simplification-clarification]	781-847 : Al-Khawârizmî الخوارزمي <i>Livre de la réduction et de la comparaison</i> كِتَابُ الْجَبْرِ وَالْمُقَابَلَةِ 830-900 : Abû Kâmil (al Misri) أَبُو كَامِلٍ 826-901 : Thâbit ibn Qurra ثَابِتُ بْنُ قُرَّةَ	
X°	-928 : al-sarrâjُ السَّرَاجُ - <i>Kitâb al-'uSûl fi'l-naHw</i> [tournant (1) : mise en ordre logique et sémantique]	<i>arithmétisée</i>	<i>géométrisée</i>
XI°	1009-1078 : Jurjânî الجُرْجَانِي [rhétorique] الْبَلَاغَةُ	953-1029 : Al-Karajî الْكَرْجِي	1048-1131 : Al-Khayyâmî الْخَيَّامِي
XII°	1075-1144 : Zamakšarî زَمَخْشَرِي	1130-1175 : Al-Samaw'al (al-Maghribî) السَّمَوَاءُ الْمَغْرِبِي <i>L'éblouissant dans l'algèbre</i> الْبَاهِرُ فِي الْجَبْرِ	
XIII°...	1204-1274 : Ibn-Mâlik إِبْنُ مَالِكٍ « Milliade » Al-fiyahُ الْفِيَّةُ 1267-1324 - Ibn Âjurrûm إِبْنُ أَجْرُومِ <i>Al-ajurrûmiyah</i> الْأَجْرُومِيَّةُ		

(1) Aristote

I.a - Cinq raisons algébriques de la langue arabe

1. l'algèbre de son écriture ;
2. l'algèbre de ses racines ;
3. l'algèbre de ses formes verbales et schèmes nominaux ;
4. l'algèbre de ses déclinaisons (nominales ou verbales) اِعْرَابٌ ;
5. l'algèbre de son discours et de sa rhétorique.

Exemple 1 : 10 formes de verbes sur une même racine

فعل = ف ع ل = X Y Z

N°	algébrisation	Pattern	Sens
I	$X_a Y_a Z_a$	فَعَلَ	<i>faire</i>
II	$X_a Y_a^2 Z_a$	فَعَّلَ	Intensif (<i>faire répété</i>)
III	$X\hat{a} Y_a Z_a$	فَاعَلَ	Effort (<i>s'efforcer de faire</i>)
IV	$'aX_o Y_a Z_a$	أَفْعَلَ	Factitif (<i>faire faire</i>)
V	$t_a X_a Y_a^2 Z_a$	تَفَعَّلَ	Réfléchi de l'intensif II (<i>se faire de manière répétée</i>)
VI	$t_a X\hat{a} Y_a Z_a$	تَفَاعَلَ	Réfléchi de III Réciprocité (<i>faire conjointement</i>)
VII	$in_o X_a Y_a Z_a$	إِنْفَعَلَ	Action subie (ce à quoi on a eu à <i>faire</i>)
VIII	$iX_o t_a Y_a Z_a$	إِفْتَعَلَ	Réfléchi de I (<i>se faire</i>)
IX	$iX_o Y_a Z_a^2$	إِفْعَلَّ	[couleurs]
X	$is_o t_a X_o Y_a Z_a$	اسْتَفْعَلَ	Réfléchi du factitif IV (<i>se faire faire</i>)

Exemple 2 : construction « algébrique » d'un mot

Exemple 1		Modèle « algébrique »		Exemple 2	
vous vous écrivez (<i>tous deux</i>)		تَتَكَاتَبَانِ		تَتَفَارِقَانِ	
vous vous séparez (<i>tous les deux</i>)		تَتَفَاعِلَانِ			
écrire	ك ت ب كَتَبَ	ف ع ل فَعَلَ	ف ر ق فَرَّقَ	distinguer	
correspondre	VI تَكَاتَبَ	تَفَاعَلَ	تَفَارَقَ	VI	se séparer
préfixe : inaccompli « t » : interlocuteur	préfixe	ت			
« a » : voie active		ا			
duel à l'indicatif	suffixe	ا			
		ن			
ta-ta-Kâ-Ta-Bâ-ni t _a t _a Kâ T _a Bâ n _i	تَشَكَاتَبَانِ	تَشَفَاعَلَانِ	تَشَفَارِقَانِ	ta-ta-Fâ-Ra-Qâ-ni t _a t _a Fâ R _a Qâ n _i	
		ta-ta-Fâ-εa-Lâ-ni =			
		t _a t _a Xâ Y _a Zâ n _i			

Exemples 3 : la lecture comme déchiffrement

فعل فاعل = فعل مفعول
فَعَلَ فَاعِلٌ = فِعِلَ مَفْعُولٌ
←

un agissant a agi = un agi a été agi
⇒

كتب كاتب = كتب مكتوب
un écrivant a écrit = un écrit a été écrit

XYB XaYB = XYB mXYuB

Al-Khalîl :

هو شيء شيء ولا شيء لا شيء وشيء لا شيء ولا شيء شيء
chose chose et non chose non chose et chose non chose et non chose chose

A A B C A C A B A C A B C A A

Il est une chose d'une chose, non chose de non chose, une chose de non chose, non chose d'une chose.

هُوَ شَيْءٌ شَيْءٌ، وَلَا شَيْءٌ لَّا شَيْءٍ، وَشَيْءٌ لَّا شَيْءٍ، وَلَا شَيْءٌ لَّا شَيْءٍ، وَلَا شَيْءٌ لَّا شَيْءٍ

Un seul mot de trois lettres, parmi les plus courants de la langue...

نَعَم ? = *naεam* = « Oui » : نَعَم

7 autres modalités :

vivre confortablement	<i>naεama</i>	نَعَم
	<i>naεima</i>	نَعِم
être moelleux, confortable	<i>naεuma</i>	نَعْم
un confort	<i>naεamun</i>	نَعْم
oui	<i>naεam</i>	نَعَم
[être] excellent	<i>niεma</i>	نِعَم
des délices	<i>niεamun</i>	نِعْم

7 supplémentaires :

plaisir	<i>naεmun</i>	نَعْم
des plaisirs	<i>nuεmun</i>	نَعْم
quelquefois	<i>naεamu</i>	نَعْم
certes	<i>niεamu</i>	نِعْم
bravo	<i>naεma</i>	نَعَم
	<i>niεima</i>	نِعِم
	<i>niεama</i>	نِعَم

Et encore

- les formes syntaxiques se concluant en « a », « i », « an » et « in » pour les substantifs ici suffixés en « un » (cf. cas direct et indirect, formes déterminées/indéterminées),
- d'autres formes propres à la conjugaison (active/passive) des verbes concernés,
- et même la forme II du verbe de base (s'il est vrai que certaines notations abrégées n'inscrivent même pas le *chadda*) :

lisser, ramollir *naεεama* نَعَم

Bref, parmi les 84 formes a priori concevables (3*4*7) pour la racine à 3 consonnes

n	<i>u, a, i</i>
ε	<i>u, a, i, °</i>
m	<i>u, a, i, un, an, in, °</i>

on peut d'ores et déjà en décompter 28 (sans compter les conjugaisons et la forme II avec *chadda*) qui ont un sens répertorié et qui peuvent donc se trouver employées, dans un contexte ou dans un autre.

Les voici classées selon l'ordre alphabétique latin :

naεama, naεami, naεamu, naεaman, naεamin, naεamun

naεam

naεima

naεuma

naεma, naεmi, naεmu, naεman, naεmin, naεmun

niεama, niεami, niεamu, niεaman, niεamin, niεamun

niεima

niεma

nuεma, nuεmi, nuεmu, nuεman, nuεmin, nuεmun

I.b - Trois affinités algébriques de la linguistique arabe

1. celle de la nouvelle lexicographie engagée par Al-Khalîl
2. celle de la nouvelle grammaire réalisée par Sîbawayhi [voir demain à *mamuphi*]
3. celle de la phonologie arabe (voir le *tajwîd*)

Exemple I.b.1 : tripartition des mots dans la tradition grammaticale arabe

<p>[Le collectif des mots est] nom, verbe et particule – (laquelle particule) est établie pour un sens et (n'est) ni nom ni verbe.</p> <p>Le nom est (par exemple) « <i>homme</i> », « <i>jument</i> » et « <i>mur(aille)</i> ».</p>	<p>فَالْكَلِمُ إِسْمٌ وَفِعْلٌ وَحَرْفٌ جَاءَ لِمَعْنَى لَيْسَ بِإِسْمٍ وَلَا فِعْلٍ فَالْإِسْمُ رَجُلٌ وَفَرَسٌ وَحَائِطٌ</p>
<p>Quant au verbe, (ce sont) des paradigmes [exemples] dans l'expression suscitant des noms d'action et (qui sont) construits/formés par rapport au passé, (construits) pour ce qui aura lieu et ne s'est pas (encore) produit et (construits) pour l'étant (qui) n'est pas interrompu.</p>	<p>أَمَّا الْفِعْلُ فَأَمْثَلَةٌ أَخَذَتْ مِنْ لَفْظِ أَحْدَاثِ الْأَسْمَاءِ وَبُنِيَتْ لِمَا مَضَى وَلِمَا يَكُونُ وَلَمْ يَقَعْ وَمَا هُوَ كَائِنٌ لَمْ يَنْقَطِعْ</p>
<p>Quant à ce qui est établi pour le sens (et) n'est ni un nom ni un verbe, (c'est) comme « ensuite », la particule du futur lointain, le <i>wâw</i> du serment, le <i>lam</i> de l'annexion et leur semblable.</p>	<p>وَأَمَّا مَا جَاءَ لِمَعْنَى وَلَيْسَ بِإِسْمٍ وَلَا فِعْلٍ فَنَحْوُ ثُمَّ وَسَوْفَ وَوَاوُ الْقَسَمِ وَالْإِضَافَةِ وَنَحْوَهَا</p>

Exemple I.b.2 : formalisation phonologique du *tajwîd*

La théorie phonologique arabe distingue :

1. 17 points d'articulation des lettres en 5 lieux مَخْرَجٌ
2. Les attributs des lettres (9 couples de contraires, 7 attributs sans contraires), les caractéristiques des sons (la palette de timbres produits) : صِفَةٌ
3. Les règles de mise en œuvre des points précédents dans la langue du Coran, soit un ensemble de questions : allongement, non-vocalisation, assimilation, substitution, vibration résonante, ponctuation (phrasé), règles spéciales pour certaines lettres (*nûn, mîm, râ, lâm, hamza, tanwin*)
4. La pratique

Les deux premiers points concernent plutôt la phonétique de l'arabe coranique (littéraire).
Le troisième concerne la phonologie.

Le quatrième concerne la mise en œuvre effective de tout ceci dans une récitation soutenue du texte coranique.

I.b.3 Un exemple de *tajwîd*

« Certes cette communauté est passée.

À elle ce qu'elle a réalisé et à vous ce que vous avez réalisé.

Vous ne serez pas interrogés sur ce qu'ils ont fait. »

(II.134/141)

تلك أمة قد خلت لها ما كسبت ولكم ما كسبتم ولا تسألون عما كانوا يعملون

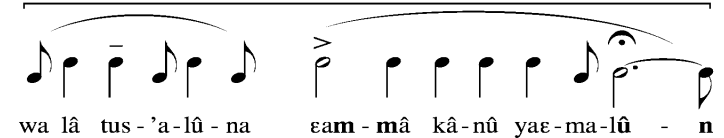
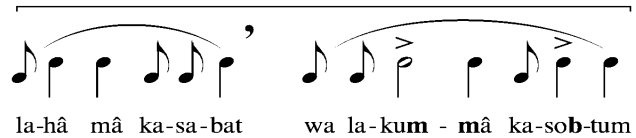
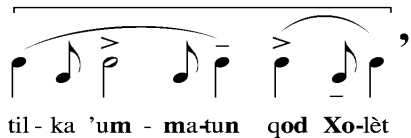
En warch وَرَش

coloration des timbres (consonnes **nasalisées** et **emphatiques**, voyelles **prolongées** et **non prononcées**) & pauses [ص]

تِلْكَ أُمَّةٌ قَدْ خَلَتْ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَلكُمْ مَا كَسَبْتُمْ وَلَا تُسْأَلُونَ عَمَّا كَانُوا يَعْمَلُونَ -



til-ka 'um-ma-tun qod Xo-lèt / la-hâ mâ ka-sa-bat / a la-kum mâ ka-sob-tum / wa lâ tus-'a-lû-na eam-mâ kê-nû yaε-ma-lûn



I.c – Adjonction-extension

Le rapport entre « linguistique » et « langue » arabes peut être compris comme un rapport d'*adjonction* et d'*extension* (au sens mathématique du terme – cf. Dedekind et Paul Cohen)

⇒ voir exposé *mamuphi* demain matin (Ens, 10h30)

Trois étapes cumulatives :

1. constitution immanente d'un *réseau de mots* nouveaux, ajoutés au lexique existant d'une situation donnée ;
2. transformation endogène de ce réseau de mots en un *système de noms* qui viennent désigner ce qui n'existe pas encore [ici la grammaire] dans la situation considérée et qu'il s'agit d'y ajouter-adjoindre ;
3. mise en œuvre de ce système de nomination dans un *corps d'énoncés* de type nouveau venant caractériser la situation étendue (celle qui résultera de l'interaction globale – c'est à ce titre qu'il s'agira d'adjonction et pas d'un simple ajout - entre les « choses » de l'ancienne situation et les nouvelles « choses » désignées par les nouveaux noms [ici les « choses » grammaticales ou linguistiques]).

Synthétiquement : *ajout* lexical, *adjonction* nominale, *extension* énonciative.

I.d – Trois traces de la linguistique arabe sur le mode naissant de pensée algébrique

1. Tripartition des composantes de l'équation
2. La forme comme formation-déformation
3. Une orientation classificatoire

I.d.1 Exemple d'empreinte et trace : la tripartition

Sibawayhi : « Le collectif-des-mots est nom, verbe et particule, avec une intention (de dire) sans être nom et verbe. »

الْكَلِمُ اسْمٌ وَفِعْلٌ وَحَرْفٌ جَاءَ لِمَعْنَى لَيْسَ بِاسْمٍ وَلَا فِعْلٍ

Al-Khawârizmî : « J'ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d'*al-jabr* et d'*al-muqâbala*, selon trois modes qui sont : les racines [inconnues], les *carrés*, et le nombre simple qui n'est rapporté ni à une racine, ni à un *carré*. »

وَجَدْتُ الْأَعْدَادَ الَّتِي يَحْتَاجُ إِلَيْهَا فِي حِسَابِ الْجَبْرِ وَالْمُقَابَلَةِ عَلَى ثَلَاثَةِ ضُرُوبٍ وَهِيَ : جُذُورٌ وَأَمْوَالٌ وَمُفْرَدٌ لَا يُنْسَبُ إِلَى جِذْرٍ وَلَا إِلَى مَالٍ

Soit deux tripartitions parallèles :

<i>Grammaire</i>	<i>Mathématique</i>
Proposition discursive	Équation algébrique
<i>nom</i>	<i>racine</i>
<i>verbe</i>	<i>carré</i>
<i>particule</i>	<i>nombre</i>

chacune s'entendant comme 2+1 par opposition

- de deux premiers termes apparentés (en grammaire nom et verbe c'est-à-dire les mots déclinables, en algèbre racine et carré c'est-à-dire les termes inconnus)
- et un troisième terme thématique négativement (il n'est ni le premier ni le second).

<i>Grammaire</i>	<i>Algèbre</i>
<i>nom & verbe</i>	<i>racine & carré</i>
<i>particule</i>	<i>nombre</i>

I.d.2. Actions entre les mots

Cf. distinction des trois types de mots (noms, verbes et particules), non par leurs fonctions sémantiques mais par leur interrelations syntaxiques formelles.

Cf. théorie de la « rection » ^{عَمَلٌ}

⇒ régisseur/régi : ^{عَامِلٌ} / ^{مَعْمُولٌ}

- Les particules régissent sans être régies.
- Les noms sont régis par des particules : cf. cas (nominatif/accusatif/génitif-datif)
- Les verbes sont régis par des particules: cf. modes du présent (indicatif/subjonctif/apocopé)

Trace de cela dans le calcul algébrique par *réduction* et *comparaison*

كِتَابُ الْجَبْرِ وَالْمُقَابَلَةِ

II. Émancipation ?

Se doter d'un mode propre de discursivité

- non langagier
- univoque

Trois manières:

1. Écriture propre \Rightarrow calcul à la lettre
2. Rationalité propre \Rightarrow démonstrations algébriques
3. Adjonction-extension de l'algèbre aux mathématiques

Émancipation par rapport à l'équivocité de la langue, singulièrement de la langue arabe : cf. trois traits

- a. Mots à double sens nommant l'unité de contraires plutôt que leur division (les '*aDdâd*)
- b. Énoncés: affirmation de la singularité par contraposition exceptionnelle sur fond de néant (« *lâ... 'illâ...* » : « nul... sauf... »)
- c. Rhétorique « sémitique » cultivant la symétrie circulaire plutôt que la linéarité sans retour de la rhétorique grecque

Équivocité 1: Les 'aDdâd ضِدٌّ (ج) أَضْدَادٌ

Nomme la relation de contrariété \Rightarrow unité des contraires
Cf. indécidabilité – mots Janus – logique de l'inconscient...

Cf. en français :

- « clair-obscur »
- le génitif objectif/subjectif : « l'amour de Proust »
- « hôte » : celui qui accueille / est accueilli
- « louer » (un appartement) : « mon appartement est loué »
- « apprendre » : « j'apprends le dessin »

En arabe, ils se multiplient (plus de 400).

Le mot *Didd* est lui-même un *Didd* car il veut dire semblable/dissemblable, pareil/contraire!

Cf. les mystiques : « *Il est le Premier et le Dernier, le Manifeste et le Caché* »

Cf. « entrer/sortir la lame du fourreau » soit : *la lame bouge dans le fourreau!*

- *tahajjada* : dormir/veiller = passer la nuit en alternant...
- *rabîba* : marâtre/belle-fille = même situation de protégée par un homme hors de la relation filiale
- *nasîb* : beau-père/beau-fils
- *nidd* : contraire/semblable (unité des contraires: les deux sont interdits concernant Dieu)
- *charâ=bâea* : acheter/vendre = troquer
- *warâ* : derrière/devant = relation réciproque entre deux choses
- *baeda* : après/avant = en plus !
- *rajâ* : craindre / désirer = même relation car la peur accompagne le désir ! = espérer
- *Hâfa* ou *Zanna* : craindre/être sûr de = redouter, penser
- *qâni'* : content/triste
- *fuzzi'a* : être épouvanté/courageux
- *tafakkaha* : plaisanter/regretter
- *Safra'* : noir/non-noir
- *Tawwâb* : repentant/pardonnant : se tournant vers !
- *Sallâ* : prier/bénir = se pencher, s'incliner vers...
- *'as'asa* : tomber/finir (pour la nuit) = même phénomène lumineux
- *ma'âb* : paradis/enfer : lieu de retour

Deux *Kitâb al-'aDdâd* : al-sijjâtânî (III^e siècle de l'Hégire) et al-qâsim ou al-'anbârî (IV^e siècle de l'Hégire)

Équivocité 2 : « Nul... sauf... »

- « Nul dieu sauf Dieu ! »

لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ

- « Nul vainqueur sauf Allah! » (devise Nasride : Alhambra de Grenade)

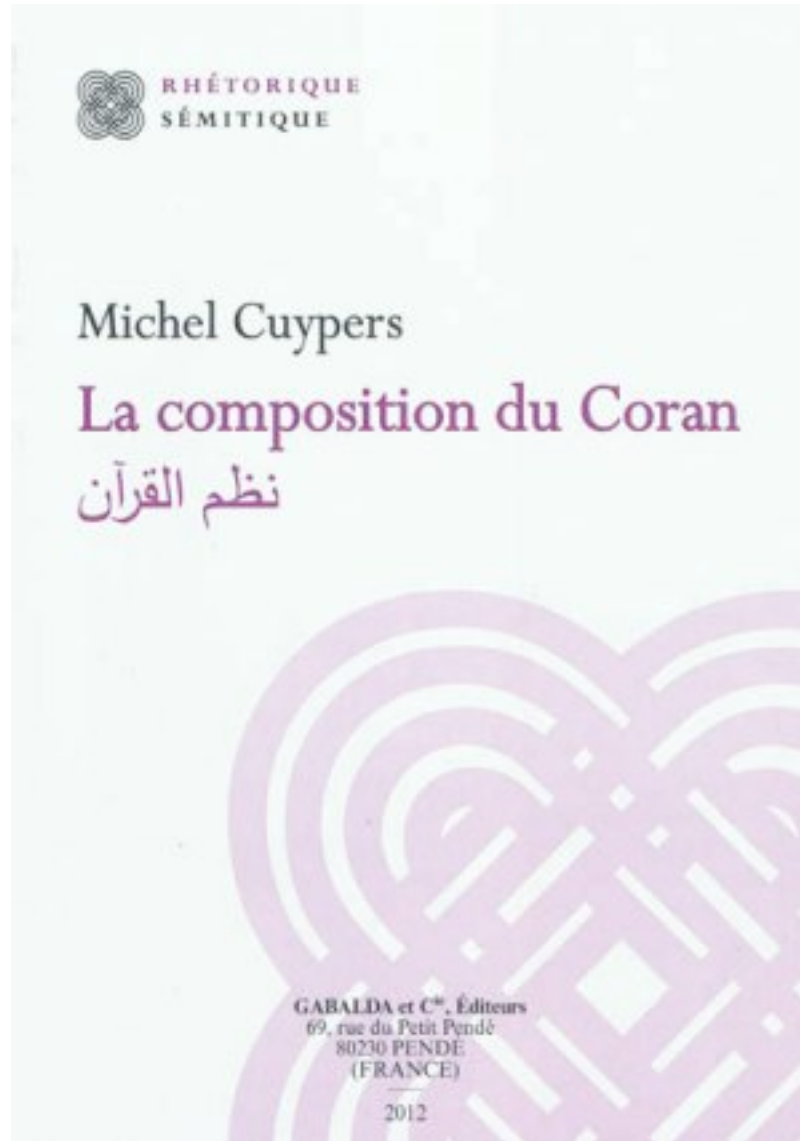
لَا غَالِبَ إِلَّا اللَّهُ

- « Nul brave sauf Ali ! », « Nulle épée sauf Zulfikar ! »

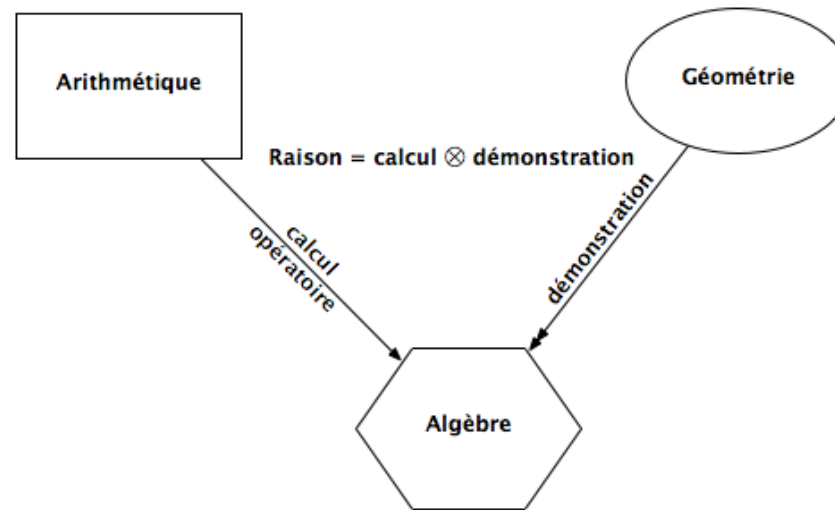
Affirmation par double négation

« nul concret sauf singulier! »

Équivocité 3: « Rhétorique sémitique »



Deux continents séparés...



L'algèbre va à la fois enfoncer un coin entre ces deux continents et créer des passerelles entre eux, et ce de trois manières: par

- extension du calcul (paradigme arithmétique, le seul à être alors à la lettre)
- extension de la démonstration (paradigme géométrique, la seule à être alors axiomatisée)
- l'introduction de quantités algébriques interprétables comme indifféremment nombres arithmétiques ou grandeurs géométriques

Quantités algébriques	Nombres arithmétiques
	Grandeurs géométriques

II.a - Écriture algébrique \Rightarrow calcul

Bricolage de sa propre écriture (au gré de lettres s'émancipant des chiffres) apte à mettre en œuvre son nouveau mode de calcul (calcul « aveugle » sur l'inconnu)

Un « calcul de la poussière »...

حِسَابُ الْغُبَارِ

Le modèle mathématique va être ici l'arithmétique \Rightarrow algèbre arithmétisée.

Exemplairement as-Samaw'al السَّمَوِّعَلْ

Pour lui, l'algèbre est une arithmétique de l'inconnu : il s'agit d'« opérer *sur des inconnus comme les arithméticiens opèrent sur les connus* ».

- Faire progresser l'algèbre par l'arithmétique (appliquer l'arithmétique à l'algèbre),
- refuser progressivement l'interprétation géométrique des opérations algébriques,
- spécificité et autonomie de l'algèbre qui passe par un développement de son calcul spécifique (le calcul algébrique) et l'établissement de démonstrations spécifiquement algébriques.

D'où, par exemple, un calcul du binôme et de ses coefficients, une approximation des fractions entières...

II.b - Démonstration algébrique

Bricolage de démonstrations algébriques circulant entre arithmétique et géométrie et violant ainsi allègrement le vieux dogme aristotélien : « *On ne peut, dans la démonstration, passer d'un genre à un autre : on ne peut pas, par exemple, prouver une proposition géométrique par l'arithmétique.* ») en sorte de mettre au jour une figure proprement algébrique de la rationalité mathématique.

- Al-Khawârizmî: démonstration d'un type cette fois nouveau, proprement algébrique, travaillant directement sur « l'expression » [لَفْظٌ] algébrique et non plus sur la « figure » géométrique, qui délivre cette fois la « nécessité » [اضْطِرَارٌ] du calcul algébrique proprement dit et non plus le simple « motif » de l'algorithme
- Al-Khayyâmi (cf. algèbre géométrisée) : faire marcher la démonstration mathématique simultanément sur ses deux jambes algébrique et géométrique; algèbre et géométrie pourront s'appuyer sur les forces de l'une là où l'autre hésite ou vacille, évitant ainsi le risque d'une marche bancal, « à cloche-pieds ».

Pour cela, recourir systématiquement au calcul géométrique (« *nous posons, construisons, traçons, prolongeons...* ») pour résoudre les problèmes que l'algèbre sait poser mais ne sait encore résoudre par elle-même. Ce faisant, la mathématique va se constituer en un vaste corps, apte à expérimenter sa pensée propre par articulation de ses différents membres selon une marche coordonnée : en l'occurrence, le calcul *géométrique* se trouve dirigé par l'enjeu algébrique et la clarté propre aux figures (qui explicitent et exhibent comment

Il s'agit pour cela de traduire les termes algébriques de l'équation en figures géométriques en sorte que le signe « = » qui relie les deux membres de l'équation algébrique équivaille à l'intersection de deux figures (ici deux courbes « coniques ») traduisant géométriquement ces deux membres. Tout ceci passe par la construction préalable d'une unité de mesure faisant équivaloir nombres et grandeurs (essentiellement un segment de droite, faisant office d'*échelle* pour la lecture de la figure). Il suffira alors *in fine* de traduire la grandeur géométrique obtenue (via l'intersection des courbes) en un nombre pour disposer de la solution algébrique recherchée.

Henri Poincaré (*Science et Méthode*, 1908) : « *la mathématique est l'art de donner le même nom à deux choses différentes* »...

II.c - Adjonction de l'algèbre ⇒ Extension des mathématiques

voir l'invention par al-Khawârizmî de

1. de nouveaux *mots*,
2. de nouvelles *nominations*
3. d'un nouveau type discursif d'*énoncés*
(relevant de la linéarité déductive)

II.c.1 : Nouveaux mots-noms

inconnue x^2	carré	مَلُّ
x	racine	جَذْرُ
inconnue	<i>chose</i>	شَيْءٌ
	nombre	عَدَدٌ

II.c.3 : Nouveaux énoncés

Voir les exemples précédents de calculs et démonstrations...

III. Portée de ces considérations?

Attention à l'érudition, sympathique et séduisante, mais dangereuse car vaine!

Michel Foucauld (7 janvier 1976) :

« ... cette "paresse fiévreuse" qui affecte caractériellement les amoureux des bibliothèques, des documents, des références, des écritures poussiéreuses, des textes qui ne sont jamais lus, des livres qui, à peine imprimés, sont refermés et dorment ensuite sur des rayons dont ils ne sont tirés que quelques siècles plus tard.

Tout cela conviendrait bien à l'inertie affairée de ceux qui professent un savoir pour rien, une sorte de savoir somptuaire, une richesse de parvenu dont les signes extérieurs, vous le savez bien, on les trouve disposés en bas des pages.

Cela conviendrait à tous ceux qui se sentent solidaires d'une des sociétés secrètes sans doute les plus anciennes, les plus caractéristiques aussi, de l'Occident, une de ces sociétés secrètes étrangement indestructibles, inconnues, me semble-t-il, dans l'Antiquité et qui se sont formées tôt dans le christianisme, à l'époque des premiers couvents sans doute, aux confins des invasions, des incendies et des forêts.

Je veux parler de la grande, tendre et chaleureuse franc-maçonnerie de l'érudition inutile. »

Il faut défendre la société, 1976

Deux enseignements,
pour nous musiciens pensifs,
en ce début de XXI^o siècle :

1. La voie affirmative de l'adjonction-extension
2. Ses raisonances...

III.a – La voie de l'adjonction-extension

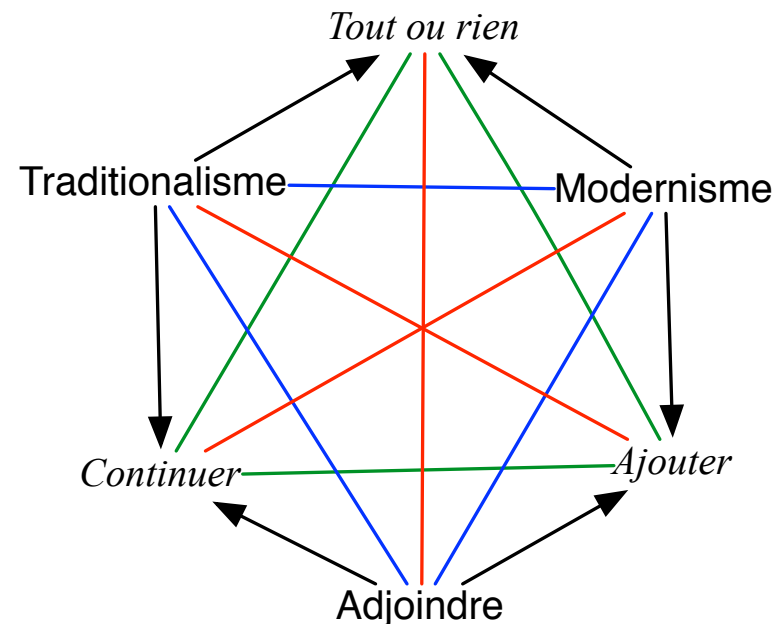
Pour continuer un mode de pensée aujourd'hui, il nous faut sortir d'un dilemme (toujours « lutter sur deux fronts ») :

1. Traditionalisme
2. Modernisme

⇒ l'importance capitale de la voie affirmative de l'adjonction-extension.

Ici, deux exemples:

- En matière de langue arabe
- En matière de mathématique



III.b – Raisonances entre pensées affirmatives

L'adjonction d'une « linguistique » (grammaire et lexicale) a suscité l'émergence de l'algèbre et sa propre adjonction à la vieille mathématique.

Leçon: l'émancipation des pensées est contagieuse!

On a besoin aujourd'hui, plus que jamais, de ce type de contagion.

Vivent les raisonances hétérophoniques !