CHAPITRE 11

La méthode du forcing

► On a décrit dans les chapitres 9 et 10 des méthodes permettant de construire, à partir d'un modèle de ZF, diverses sous-structures de ce modèle. La méthode du forcing, inventée par Paul Cohen en 1963, permet de construire des extensions de modèles, c'est-à-dire de passer à des modèles dont le modèle de départ est un modèle intérieur. Le point principal est que la construction peut être effectuée de façon à contrôler finement les propriétés de l'extension depuis le modèle de départ, à l'instar d'une extension algébrique de corps.

La méthode du forcing permet de montrer des résultats de consistance relative, par exemple que, si ZFC est consistant, alors ZFC $+ \neg$HC l'est aussi. ◄

11.1. Extensions génériques

► Le principe général de la méthode du forcing est d'ajouter un ensemble nouveau G ayant des propriétés prescrites à l'avance à un modèle de départ M et, pour cela, d'organiser en un ensemble ordonné de M des fragments d'information sur l'ensemble G en construction. ◄

11.1.1. Nécessité de passer aux extensions.

► La première remarque est qu'aucune méthode permettant de construire des sous-modèles d'un modèle de ZFC ne permet d'obtenir un modèle ne satisfaisant pas l'axiome $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$. ◄

⚒ *Ainsi qu'on l'a observé au chapitre 10, on peut montrer que les axiomes des corps n'entraînent pas la non-commutativité de la multiplication en construisant un corps commutatif K' à partir d'un corps quelconque K, et, pour cela, il suffit de prendre pour K' le sous-corps premier de K. De la même façon, on a obtenu à partir d'un modèle quelconque M de* ZF *un modèle M' de* ZF + AC + HC *en définissant M' comme une sorte de sous-modèle premier de M, à savoir le modèle $\boldsymbol{L}^M$ formé par les ensembles constructibles de M.*

Si on cherche à montrer que les axiomes des corps n'entraînent pas la commutativité de la multiplication, il ne peut suffire, partant d'un corps K quelconque, de considérer les sous-corps de K, puisque tout sous-corps d'un corps commutatif est commutatif : il faut donc dans ce cas sortir de K et, par exemple, chercher à construire un corps non commutatif K' comme extension de K.

Il est faux que tout modèle intérieur d'un modèle de ZF + AC + HC *satisfasse nécessairement* AC *ou* HC*, mais le problème est de même nature. En particulier, rien n'exclut a priori que le modèle M dont on part satisfasse l'axiome $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}$, auquel cas il n'a pas d'autre modèle intérieur que lui-même. On est donc inévitablement conduit à considérer des extensions de modèles de* ZF. ⚒

11.1.2. Extensions de modèle.

▶ Avant de décrire la méthode du forcing, on précise le cadre métamathématique, et en particulier on décrit le type d'implication à montrer pour pouvoir déduire un résultat général de consistance relative d'une formule par rapport au système ZFC. ◀

☒ *On se propose de démontrer des résultats négatifs du type « si* ZF *est consistant, alors* ZF *ne prouve pas* F *», où* F *est une certaine formule ensembliste. Comme esquissé ci-dessus, le principe consiste à partir d'un modèle de* ZF *et d'en déduire un modèle de* ZF + F*. De façon plus précise, on se propose de démontrer des implications du type*

(11.1.1) Si $(M, \in\restriction_M)$ est un modèle dénombrable de ZF,

alors il existe un modèle de $\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{F}$.

L'hypothèse de (11.1.1) *est plus forte que la simple consistance de* ZF *: en effet, on suppose qu'il existe un modèle de* ZF *dont le domaine est un ensemble, ce qui requiert la consistance de* $\mathsf{ZF} + \mathsf{Cons}_{\mathsf{ZF}}$ *et pas seulement celle de* ZF*, et, de surcroît, on prétend que l'appartenance du modèle soit la vraie appartenance* $\in$*, ce qui est une hypothèse encore plus forte et a priori non exprimable en logique du premier ordre. En fait, un argument ad hoc légitime cette approche.* ☒

Lemme 11.1.1. *Supposons que T est une théorie de $L_\in$ consistante incluant* ZFC*. Soient $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{E}$ deux nouveaux symboles de relation unaires. Alors les théories*

$T + T^{(\boldsymbol{M},\boldsymbol{E})} + \boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{M}^2 +$ « $\boldsymbol{M}$ *est un ensemble dénombrable* » *et*

$T + T^{(\boldsymbol{M},\in)} +$ « $\boldsymbol{M}$ *est un ensemble dénombrable transitif* »

sont consistantes.

Démonstration. Si on tire une contradiction de la seconde théorie, on en tire *a fortiori* une de la première en interprétant $\boldsymbol{E}$ par $\in$. Supposons $T + T^{(\boldsymbol{M},\in)} +$ « $\boldsymbol{M}$ est un ensemble dénombrable transitif » non consistante. Il existe alors un sous-ensemble fini $\{\mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F}_n\}$ de T tel que

$$T + \mathsf{F}_1^{(\boldsymbol{M},\in)} + \cdots + \mathsf{F}_n^{(\boldsymbol{M},\in)} + \text{« } \boldsymbol{M} \text{ est un ensemble dénombrable transitif »}$$

soit non consistante, donc qu'il existe une preuve à partir de T de la formule de $L_{(\in,\boldsymbol{M})}$

$$\text{(11.1.2)} \qquad \text{« } \boldsymbol{M} \text{ est un ensemble dénombrable transitif »} \Rightarrow (\neg\mathsf{F}_1^{(\boldsymbol{M},\in)} \vee \ldots \vee \neg\mathsf{F}_1^{(\boldsymbol{M},\in)}).$$

Or, par le schéma de réflexion, ZFC, donc aussi T, prouvent l'existence d'un ensemble transitif dénombrable M reflétant chacune des formules $\mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F}_n$, donc T prouve

$$(\exists M)(\text{« } M \text{ dénombrable transitif »} \wedge \mathsf{F}_1^{(M,\in)} + \cdots + \mathsf{F}_n^{(M,\in)},$$

laquelle contredit la formule (11.1.2) lorsque $\boldsymbol{M}(\mathsf{x})$ est interprété par $\mathsf{x} \in M$. Donc T n'est pas consistante. □

Proposition 11.1.2 (cadre métamathématique). *Si l'implication* (11.1.1) *est vérifiée, alors la consistance de* ZFC *implique celle de* $\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{F}$*, et, par conséquent, si le système* ZF *est consistant, il ne prouve pas* F*.*

Démonstration. La contre-partie syntaxique de l'implication (11.1.1) est que, si la théorie

$$\text{(11.1.3)} \qquad \mathsf{ZFC} + \mathsf{ZFC}^{(\boldsymbol{M},\in)} + \text{« } \boldsymbol{M} \text{ est un ensemble dénombrable transitif »}$$

est consistante, il en est de même de la théorie

(11.1.4)

$$\mathsf{ZFC} + \mathsf{ZFC}^{(\boldsymbol{M},\in)} + \text{« } \boldsymbol{M} \text{ est un ensemble dénombrable transitif »} + \mathsf{ZF}^{(\boldsymbol{N},\boldsymbol{E})} + \neg\mathsf{F}^{(\boldsymbol{N},\boldsymbol{E})}$$

l'est aussi. Par le lemme (11.1.1), la consistance de ZFC entraîne celle de (11.1.3), donc celle de (11.1.4), laquelle implique en particulier celle de $\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{F}$ puisque, si $\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{F}$ était non consistant, il en serait de même de la version relativisée abstraite $\mathsf{ZF}^{(\boldsymbol{N},\boldsymbol{E})} + \neg\mathsf{F}^{(\boldsymbol{N},\boldsymbol{E})}$ □

On peut donc dans la suite faire appel sans restriction à une méthode de démonstration sémantique et, en particulier, partir si besoin est d'un modèle transitif dénombrable de ZFC pour établir des implications du type (11.1.1).

11.1.3. Principe du forcing.

► On décrit schématiquement le principe de la méthode du forcing en la rapprochant de la construction des extensions algébriques en théorie des corps. ◄

⚹ *Supposons que $(M, \in\restriction_M)$ est un modèle dénombrable de* ZFC*. Comme ω et l'inclusion sont des opérations absolues, $\omega^{(M,\in)}$ coïncide avec ω, et $\mathfrak{P}(\omega)^{(M,\in)}$ est $\mathfrak{P}(\omega) \cap M$, c'est-à-dire est la trace de $\mathfrak{P}(\omega)$ sur M. Comme M est dénombrable (dans $\boldsymbol{V}$) alors que $\mathfrak{P}(\omega)$ ne l'est pas, l'inclusion de $\mathfrak{P}(\omega)^{(M,\in)}$ dans $\mathfrak{P}(\omega)$ est stricte, et il existe donc une partie A de ω dans $\boldsymbol{V}$ qui n'appartient pas à M. Il n'est pas très difficile de montrer qu'il existe un plus petit modèle $M[A]$ incluant M et contenant A. Par contre, il est difficile de contrôler les propriétés de $M[A]$ et, par exemple, de reconnaître si $M[A]$ satisfait ou non l'hypothèse du continu. La méthode du forcing permet de construire des extensions $M[G]$ du type précédent tout en contrôlant les propriétés de $M[G]$.*

Comme dans le cas d'une extension algébrique $K[\alpha]$ d'un corps K où tous les éléments de l'extension sont décrits à l'intérieur du corps de base par des polynômes, le principe est de construire une extension $M[G]$ d'un modèle M de ZFC *où tous les éléments de l'extension sont décrits à l'intérieur du modèle de base par des objets ad hoc, appelés noms.*

L'idée de base est alors d'organiser la description de l'ensemble G qu'on souhaite ajouter en un ensemble partiellement ordonné d'informations fragmentaires sur G, appelées conditions. ⚹

Exemple 11.1.3 (conditions). Supposons comme ci-dessus qu'on veut ajouter à M une nouvelle partie G de ω, c'est-à-dire une partie de ω n'appartenant pas à M. Des conditions typiques sont des combinaisons booléennes d'informations élémentaires du type $[\![2 \in \check{G}]\!]$ ou $[\![3 \notin \check{G}]\!]$, où $\check{G}$ est un symbole de constante représentant l'ensemble G qu'on souhaite construire[1]. De telles conditions s'organisent en un ensemble partiellement ordonné $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$, l'ordre correspondant à l'implication: la condition $[\![2 \in \check{G} \wedge 3 \notin \check{G}]\!]$ raffine la condition $[\![2 \in \check{G}]\!]$, mais, par contre, elle est incompatible avec la condition $[\![3 \in \check{G}]\!]$, au sens où ces deux conditions n'ont pas de raffinement commun. De façon équivalente, on peut décrire les conditions comme des fonctions d'un sous-ensemble fini de ω à valeurs dans $\{0, 1\}$, munies de l'ordre inverse de l'inclusion : une fonction g précède une

[1] la distinction entre G et $\check{G}$ est de même nature qu'entre le complexe i et le polynôme X — ou sa classe d'équivalence — qui le représente dans l'extension $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$

fonction f si elle donne davantage d'information, donc si, en tant qu'ensemble de couples, elle l'inclut.

Les notions importantes sont alors celles de partie *dense*, et, surtout, de partie *générique*. Comme dans l'exemple précédent, on appelle conditions les éléments de l'ensemble partiellement ordonné considéré, et on dit que q *raffine* p pour $q \preccurlyeq p$.

DÉFINITION 11.1.4 (dense). Supposons que $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ est un ensemble partiellement ordonné. Une partie D de $\mathbb{P}$ est dite *dense* si toute condition a un raffinement dans D, c'est-à-dire si, pour tout p dans P il existe q dans D vérifiant $q \preccurlyeq p$.

Dans le cas de l'exemple 11.1.3, pour chaque entier n, l'ensemble des conditions décidant si n est ou non dans $\breve{G}$ est dense : si n n'est pas dans le domaine de définition d'une fonction f, il existe un prolongement, donc ici un raffinement, de f dont le domaine contient n.

DÉFINITION 11.1.5 (générique). Supposons que $(M, \in)$ est un modèle de ZFC et que $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ est un ensemble partiellement ordonné de M. Une partie G de $\mathbb{P}$ est dite *générique au-dessus de M*, ou encore M-générique, si
(i) si un raffinement de p est dans G, alors p est dans G, et
(ii) deux conditions de G sont toujours compatibles[2], et
(iii) l'ensemble G rencontre toute partie dense de $\mathbb{P}$ appartenant à M.

LEMME 11.1.6. (i) *Si $(M, \in)$ est un modèle de ZFC et que $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ est un ensemble partiellement ordonné de M tel que toute condition a au moins deux raffinements incompatibles, alors il n'existe pas d'ensemble M-générique sur $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ dans M.*
(ii) *Si $(M, \in)$ est un modèle dénombrable de ZFC et que $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ est un ensemble partiellement ordonné de M, alors il existe un ensemble M-générique sur $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ dans $\boldsymbol{V}$.*

DÉMONSTRATION. (i) Supposons que G est un ensemble de M qui est M-générique sur $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$. Soit $D := \mathbb{P} \setminus G$. Soit p une condition quelconque dans $\mathbb{P}$. Par hypothèse, il existe deux raffinements q, q' de p qui sont incompatibles, donc au moins une des deux conditions q, q' n'est pas dans G, donc est dans D, ce qui montre que D est dense. Mais alors G ne rencontre pas D, ce qui contredit sa généricité.

(ii) Puisque M est dénombrable, il en est de même de l'ensemble des parties denses de $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ appartenant à M, qui est un sous-ensemble de M. On peut donc énumérer les parties denses en une suite $D_0, D_1, \ldots$ Soit p une condition quelconque. On définit p_0 comme un raffinement de p qui est dans D_0, puis p_1 comme un raffinement de p_0 qui est dans D_1, *etc.* Soit G l'ensemble des conditions p vérifiant $(\exists i)(p_i \preccurlyeq p)$. Par construction, G est M-générique sur $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$. □

On obtient ainsi la notion d'extension générique d'un modèle de ZFC, qui est parallèle à celle d'extension algébrique. Le résultat découle de la possibilité de décrire à l'intérieur du modèle de base M tous les éléments du modèle $M[G]$.

[2]c'est-à-dire ont un raffinement commun

Définition 11.1.7 (nom, évaluation). Soit $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ un ensemble partiellement ordonné.

(i) On dit que X est un $\mathbb{P}$-*nom* de rang α si X est un ensemble de couples de la forme (Y, p) où Y est un $\mathbb{P}$-nom de rang $< \alpha$ et p un élément de $\mathbb{P}$. On note $M^{\mathbb{P}}$ l'ensemble de tous les $\mathbb{P}$-noms. Pour tout x dans V_α, on définit $\check{x}$ comme le $\mathbb{P}$-nom (de rang α) défini récursivement par

$$\check{x} := \{(\check{y}, p)\ ;\ y \in x\ ,\ p \in \mathbb{P}\}. \tag{11.1.5}$$

Enfin, on note $\check{G}$ le $\mathbb{P}$-nom $\{(\check{p}, p)\ ;\ p \in \mathbb{P}\}$.

(ii) Pour G sous-ensemble (générique) de $\mathbb{P}$, on définit la G-*évaluation* $\mathrm{eval}_G(X)$ d'un $\mathbb{P}$-nom X récursivement par

$$\mathrm{eval}_G(X) := \{\mathrm{eval}_G(Y)\ ;\ (Y, p) \in X \text{ et } p \in G\}. \tag{11.1.6}$$

On note $M[G]$ l'image de $M^{\mathbb{P}}$ par l'application eval_G.

Lemme 11.1.8. (i) *Pour tout x dans M, on a* $\mathrm{eval}_G(\check{x}) = x$.
(ii) *On a* $\mathrm{eval}_G(\check{G}) = G$.

Démonstration. L'égalité (i) est démontrée par induction sur le rang de x. Par définition, on a $\check{\varnothing} = \varnothing$, et $\mathrm{eval}_G(\varnothing) = \varnothing$. De façon générale, on obtient inductivement

$$\mathrm{eval}_G(\check{x}) = \{\mathrm{eval}_G(\check{y}, p)\ ;\ y \in x \wedge p \in G\} = \{y\ ;\ y \in x\} = x.$$

On déduit pour (ii), on a $\mathrm{eval}_G(\check{G}) = \{\mathrm{eval}_G(\check{p})\ ;\ p \in \mathbb{P} \wedge p \in G\} = \{p\ ;\ p \in G\} = G$. $\square$

Le point essentiel est qu'il existe un procédé de contrôle des propriétés de l'extension $M[G]$ définissable dans le modèle de base M.

Définition 11.1.9 (forcing). Pour X, Y dans $M^{\mathbb{P}}$ et p dans $\mathbb{P}$, on dit que p *force* $Y \in X$, noté $p \Vdash Y{\in}X$ si (Y, p) appartient à X.

La définition de l'application eval_G implique directement l'équivalence suivante :

Lemme 11.1.10. *Supposons que* $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ *est un ensemble partiellement ordonné de M et que G est M-générique sur* $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$. *Alors, pour tous $\mathbb{P}$-noms X, Y, il y a équivalence entre:*
- *il existe p dans G vérifiant $p \Vdash Y{\in}X$, et*
- *la structure $M[G]$ satisfait* $\mathrm{eval}_G(Y) \in \mathrm{eval}_G(X)$.

Exemple 11.1.11 (forcing). Soit comme ci-dessus $\mathbb{P}$ l'ensemble des fonctions finies de ω dans $\{0, 1\}$ ordonné par inclusion inverse. Soit n un entier. Alors, par définition, une condition p force $(n,1)\check{} \in \check{G}$ si et seulement le couple $((n,1)\check{}, p)$ appartient à $\check{G}$, donc est de la forme $(\check{q}, q)$ pour un certain q dans G : ceci se produit si et seulement si $(n,1)\check{}$ est dans G.

Par définition, G est composé de fonctions partielles deux à deux compatibles, donc $\bigcup G$ est une fonction de ω dans $\{0, 1\}$. Comme, pour chaque n, l'ensemble des fonctions finies dont le domaine contient n est dense dans $\mathbb{P}$, il existe dans G une fonction dont le domaine contient n et, par conséquent, $\bigcup G$ est partout définie sur ω. Soit $r_G := \{n\ ;\ \bigcup G(n) = 1\}$. Alors r_G est une partie de ω, et on vient de voir qu'un entier n est dans r_G si et seulement si la fonction $\{(n,1)\}$ — qui est la formalisation de la condition $[\![n \in G]\!]$ envisagée plus haut — est dans G.

Le point technique important est que la relation de forcing $\Vdash$, seulement définie pour le moment pour les formules atomiques du type $\mathsf{y} \in \mathsf{x}$, peut être étendue en une relation définie pour toute formule ensembliste $\mathsf{F}(\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n)$ de sorte que l'équivalence du lemme 11.1.10 reste valable :

Proposition 11.1.12 (forcing). *Supposons que* $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ *est un ensemble partiellement ordonné de* M *et que* G *est* M*-générique sur* $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$*. Alors, pour toute formule ensembliste* $\mathsf{F}(\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n)$ *et pour tous* $\mathbb{P}$*-noms* $X_1, \dots, X_\mathsf{n}$*, il y a équivalence entre:*

- *il existe* p *dans* G *vérifiant* $p \Vdash \mathsf{F}(X_1, \dots, X_\mathsf{n})$*, et*
- *la structure* $(M[G], \in)$ *satisfait* $\mathsf{F}(\mathrm{eval}_G(X_1), \dots, \mathrm{eval}_G(X_\mathsf{n}))$.

La relation $p \Vdash \mathsf{F}(\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n)$ est définie récursivement à partir du cas atomique $p \Vdash \mathsf{y}{\in}\mathsf{x}$. Il est à noter que le passage à la négation n'est pas une simple complémentation : on définit $p \Vdash \neg\mathsf{F}$ comme $(\forall q \preccurlyeq p)(q \nVdash \mathsf{F})$, et non comme $p \nVdash \mathsf{F}$. En analysant les formules forcées, on démontre le résultat suivant :

Proposition 11.1.13 (extension). *Supposons que* $(M, \in)$ *est un modèle de* ZFC*, que* $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ *est un ensemble partiellement ordonné de* M*, et que* G *est un ensemble* M*-générique sur* $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$*. Alors* $(M[G], \in)$ *est un modèle de* ZFC *admettant* $(M, \in)$ *comme modèle intérieur et* G *comme élément. De plus, si* $(N, \in)$ *est un modèle de* ZF *vérifiant les conditions précédentes, il existe un isomorphisme de* $(M[G], \in)$ *sur un modèle intérieur de* $(N, \in)$ *qui est l'identité sur* M.

11.2. Résultats de consistance relative

▶ Par un choix judicieux de l'ensemble des conditions $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$, on peut construire des extensions génériques ayant des propriétés prescrites, et de là en déduire des résultats de consistance relative par rapport à ZFC. On mentionne ici quelques exemples élémentaires. ◀

11.2.1. Consistance de ZFC + $\boldsymbol{V}{\neq}\boldsymbol{L}$.

▶ Rien jusqu'à présent ne permettait d'affirmer que l'axiome $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$ n'est pas une conséquence de ZFC. Grâce au forcing, il est facile de construire un modèle ne satisfaisant pas $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$, et d'en déduire la consistance de ZFC + $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{L}$. ◀

Proposition 11.2.1 (négation de $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$). *Si* ZFC *est consistant, il en est de même de* ZFC + $\boldsymbol{V}{\neq}\boldsymbol{L}$.

Démonstration. Soit, comme dans l'exemple 11.1.3, $\mathrm{Fonc}_{<\omega}(\omega, \{0,1\})$ l'ensemble des fonctions finies de ω dans $\{0,1\}$ ordonné par $\supseteq$: une condition, c'est-à-dire une fonction finie de ω dans $\{0,1\}$ en raffine une autre si elle la prolonge. Supposons que G est M-générique pour cet ensemble de conditions. On a alors $M[G] = M[r_G]$, où $r_G := \bigcup G^{-1}(1)$. Par la proposition 11.1.12, la structure $(M[G], \in)$ est un modèle de ZF dont $(M, \in)$ est modèle intérieur, et dont G, donc r_G, est élément. Puisque $(M, \in)$ est modèle intérieur de $(M[G], \in)$, on a, par absoluité de la notion de constructibilité,

$$\boldsymbol{L}^{(M[G],\in)} = \boldsymbol{L}(M, \in),$$

et donc, dans tous les cas, $\boldsymbol{L}^{(M[G],\in)} \neq M[G]$. Donc $(M[G], \in)$ est un modèle de $\mathsf{ZF} + \boldsymbol{V}{\neq}\boldsymbol{L}$.

On conclut à l'aide de la proposition 11.1.2. □

11.2.2. Consistance de la négation de l'hypothèse du continu.

▶ Dans l'exemple ci-dessus, le modèle $(M[G], \in)$ contient (au moins) *une* partie de ω qui n'est pas dans M. En procédant de même, mais de sorte à ajouter non pas une, mais $\aleph_2$ nouvelles parties de ω, on construit un modèle $(M[G], \in)$ où le cardinal de $\mathfrak{P}(\omega)$ est $\aleph_2$, donc où l'hypothèse du continu est fausse. ◀

⚹ *Pour montrer de même la consistance relative de $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$ avec* ZFC, *le problème n'est plus d'ajouter une partie de ω, mais d'en ajouter (par exemple) $\aleph_2$. Pour cela, on considère comme ensemble de conditions l'ensemble* $\mathrm{Fonc}_{<\omega}(\omega \times \aleph_2, \{0, 1\})$ *de toutes les fonctions finies de $\omega \times \aleph_2$ dans $\{0, 1\}$, ordonné par $\supseteq$. Si G est M-générique sur cet ensemble partiellement ordonné, alors $\bigcup G^{-1}(1)$ est une partie de $\omega \times \aleph_2$, donc encore, en sectionnant, une suite $(r_{G,\alpha})_{\alpha<\aleph_2}$ de $\aleph_2$ parties (a priori distinctes ou non) de ω. Soient α, β deux ordinaux distincts dans $\aleph_2$. Comme l'ensemble des conditions p vérifiant « il existe n vérifiant $p(n, \alpha) \neq p(n, \beta)$ » est dense, les $\aleph_2$ réels $r_{G,\alpha}$ sont deux à deux distincts, ce qui montre que, dans l'extension $M[G]$, il existe $\aleph_2$ parties de M distinctes. Mais l'ordinal $\aleph_2$ ci-dessus est celui de M, c'est-à-dire le second cardinal dénombrable au sens du modèle $(M, \in)$. Même si le modèle $(M[G], \in)$ a les mêmes ordinaux que M, il n'est pas évident que les cardinaux de $(M[G], \in)$ soient les mêmes que les cardinaux de $(M, \in)$, puisque $M[G]$ pourrait contenir une bijection de l'ordinal $\aleph_1^{(M,\in)}$ sur ω, ou une bijection de l'ordinal $\aleph_2^{(M,\in)}$ sur $\aleph_1^{(M,\in)}$, ou sur ω qui, lui, est absolu, donc est le même dans les deux modèles.* ⚹

Lemme 11.2.2. *Supposons que $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$ est un ensemble partiellement ordonné d'un modèle $(M, \in)$ de* ZFC *ayant la propriété que toute antichaîne*[3] *est au plus dénombrable. Alors, si G est M-générique sur $(\mathbb{P}, \preccurlyeq)$, les modèles $(M, \in)$ et $(M[G], \in)$ ont les mêmes cardinaux.*

On montre que toute antichaîne de l'ensemble $(\mathrm{Fonc}_{<\omega}(\omega \times \aleph_2, \{0, 1\}), \supseteq)$ est au plus dénombrable, et on en déduit que, si G est M-générique sur cet ensemble, on a $\aleph_2^{(M[G],\in)} = \aleph_2^{(M,\in)}$. Dès lors, on peut conclure que $(M[G], \in)$ satisfait $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$, donc, par la proposition 11.1.2 à nouveau,

Proposition 11.2.3 (négation de l'hypothèse du continu). *Si* ZFC *est consistant, il en est de même de* $\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{HC}$.

[3]sous-ensemble formé d'éléments deux à deux incompatibles

☧ *On a donc ainsi établi que, si* ZF *est consistant, il en est de même de* $\mathsf{ZF} + \mathsf{HC}$ *et de* $\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{HC}$ *: on dit que* HC *est indépendant de* ZF*. Ce résultat ne clôt pas la question de la vérité de l'hypothèse du continu : tout ce qu'il démontre est que l'axiomatisation par le système* ZF *ne suffit pas à décider le statut de l'hypothèse du continu. Comme il n'y a aucune raison de penser que l'axiomatisation par* ZF *épuise notre intuition de la notion d'ensemble, il n'y a aucune raison de penser que l'indépendance de* HC *par rapport à* ZF *close l'étude de cette hypothèse. Au contraire, le résultat illustre sur cet exemple concret le phénomène de l'incomplétude de* ZF*, et il appelle un approfondissement de l'étude et la recherche d'axiomes supplémentaires susceptibles à la fois de recueillir un consensus et de décider la question.* ☧