École mamuphi

Atelier : *La théorie des distributions* (I)

François Nicolas (Ircam, 6 décembre 2025)

- Notes d'exposé –

•••

I. Pourquoi ?

Pourquoi les distributions à mamuphi?

Raisons personnelles

Troisième rencontre personnelle des mathématiques :

1) Le x de l'algèbre (par mon père) en entrée en Sixième (1957)
2) Les coupures de Dedekind (par Jacques Siros) en entrée en hypotaupe (1964, LLG)
3) Les distributions (par Laurent Schwartz) à l'entrée à l'X (1967)

Raisons mathématiques

Portée immense : médaille Fields pour Schwartz.

- Voir leçon *mamuphi* d'Yves André
- Rôle aussi dans la dualité : voir le chapitre du récent livre (cf. biliographie en annexe)
- Rôle pour formaliser mathématiquement la physique moderne ($\mathcal{H}'=\partial$!)

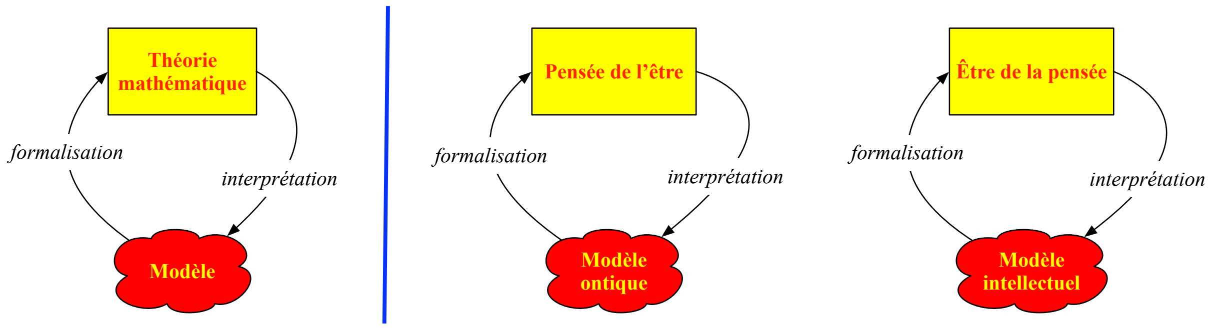
Raisons intellectuelles !

Ce type de raisons est le plus important pour mamuphi qui n'**applique** pas les mathématiques mais les **interprète** intellectuellement.

Logique générale

Méthode

Parménide : « *Penser et être, le même.* »

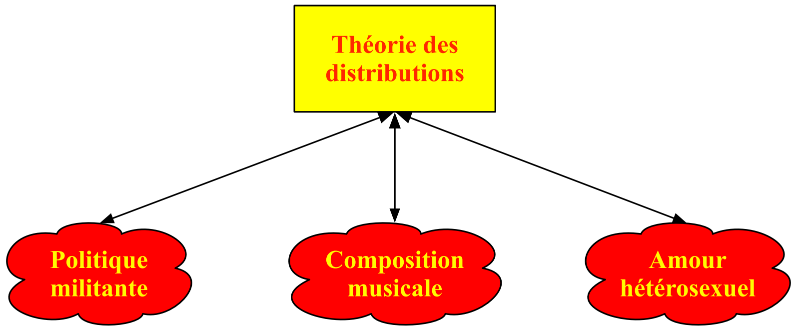


D'où les distributions pour penser la musique d'aujourd'hui à la lumière des mathématiques modernes et à l'ombre des philosophies contemporaines.

La **musique**
à la lumière des **mathématiques** à l'ombre de la **philosophie**

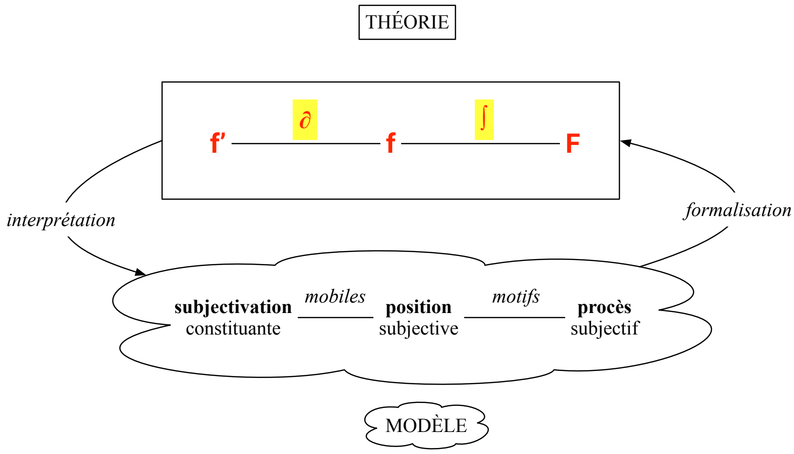
Trois modèles « intellectuels »

Plus généralement, trois modèles pathologiques (non ontiques) :



- **Composition musicale** : dualité contravariante de l'espace musical des œuvres et de l'espace sonore !
- **Politique militante** : dualité contravariante de l'espace politique et de l'espace social !
- **Amour hétérosexuel** : dualité contravariante de l'espace amoureux et de l'espace sexuel !

Logique générale de l'interprétation



Interprétation plus spécifique

Penser les décisions sans délibération consciente préalable : les **∂écisions** (avec le ∂ de l'impulsion de Dirac !).

Non pas des décisions non délibérées (des coups de tête, des caprices alors incapables d'endosser leurs lendemains) mais **sans** délibération consciente préalable (cf. négation non classique !).

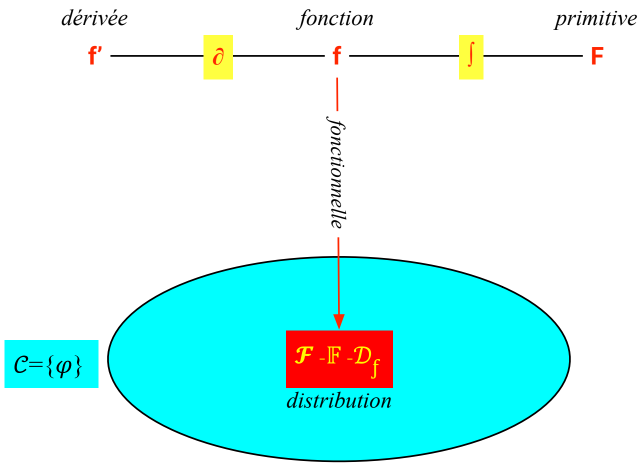
Cf. prolongement de mon examen de la GDS de Lawvere : la ∂*écision* catalyse un *voisinuage* subconscient quand la décision découle d'une délibération consciemment calculatrice.

Exemples

Décision délibérée : acheter une voiture, choisir un lieu d'habitation, décider un cursus d'enseignement ou un métier…

∂écisions personnelles : aimer telle femme rencontrée contingentement, devenir un beau jour militant, s'engager dans la composition alors même qu'on est musicien depuis toujours, …

La théorie des distributions va nous mettre sur la piste d'une orthogonalité :



Enjeu : comprendre la constitution subjective d'une telle ∂écision.

Deux résultats

On va explorer deux résultats importants :

I. La ∂écision se comprend (c'est-à-dire comprend son clinamen propre par rapport au « code de bonne conduite » ou « manuel du savoir-vivre » 𝒞) en mesurant sa singularité aux φ réguliers selon un scannage oblique, en lumière rasante (engendrée par la déclinaison propre de f)…

II. **Dynamiquement**, le rapport subjectif à une extériorité fixe est contragrédient ou contravariant du rapport subjectif à une mobilité en intériorité.

   Ou encore : dynamiquement, le rapport extérieur à l'autre est contravariant du rapport intérieur à soi.

« Contravariance »

Deux expériences ordinaires :

- **Translation** – cf. le train et le quai : le train avance vers la gauche et le quai semble reculer vers la droite !
- **Rotation** : quand on se tourne vers la gauche, le regard se tourne vers la droite pour rester orienté vers un point fixe extérieur.

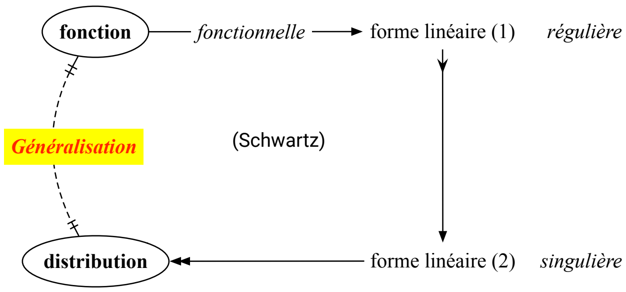
On reviendra sur l'importance politique de cette contravariance : faire une avancée à gauche (« les Communes populaires ») renvoie le centre (pourtant immobile) vers la droite !

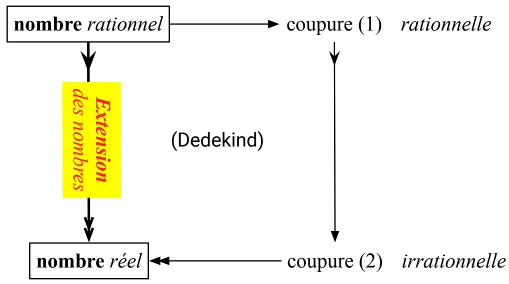
II. Comment ?

Simplification

On travaille aujourd'hui sur ℝ, le corps des réels (et non pas sur un corps commutatif quelconque K).

Généralisation / extension





Ce faisant, nous rapprocherons cette **généralisation** de l'**extension** des nombres rationnels opérée par Dedekind au moyen de ses coupures : quand l'extension produit une nouvelle **espèce** d'objets d'un même **genre** (les irrationnels dans les nombres), la généralisation par contre produit un nouveau **genre** d'objet (la distribution n'est pas une fonction – voir Dirac).

Opposition

L'opposition entre deux types de fonctions $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$: les conformes φ et les non-conformistes f.

- f(x) : fonction quelconque - pas forcément dérivable mais seulement localement intégrable ;
- φ(x) : « bonne » fonction, indéfiniment différentiable et à support compact.

f étant (parfois, souvent) discontinue, on ne peut la dériver en tout point c'est-à-dire l'approcher continûment en tout point.

Mesure φ de f

On va donc **moyenner** f(x) c'est-à-dire la mesurer non plus point par point mais par parties c'est-à-dire par **voisinages** (cf. mesure de la température « en un point » ; cf. lissage d'une courbe autour d'un point aberrant, telle la grève générale de Mai 68 dans les statistiques économiques, par des moyennes mobiles).

D'où l'usage des fonctions φ(x) conformes (au bon comportement, facilement gérables car lisses et bornées) comme panoplie cohérente d'**instruments de mesure** : $\Longrightarrow$

$$\int f(x).\varphi(\mathrm{x}).\mathrm{dx} \in \mathbb{R}$$

La distribution $\mathcal{D}$ va désigner la manière dont f se distribue sur les φ(x) :

$$\mathcal{D} = \left\{\int f(x).\varphi(x).dx\right\}$$

Renversement !

Cf. dualité : le mesurant devient mesuré, l'instrument de mesure devient évalué et noté !

- action $\longrightarrow$ rétroaction
- transfert $\longrightarrow$ contre-transfert
  - l'analysant devient analysé
  - l'éducateur devient éduqué
  - l'enquêteur devient enquêté

En effet $\int f(x).\varphi(\mathrm{x}).\mathrm{dx}$ engendre une **fonctionnelle** $\mathcal{F}$ sur {φ(x)}= C_c^∞ : $\mathcal{F}$(x) vient tester la **panoplie des appareils de mesure** φ(x), vient les évaluer en donnant à chacune une « note » : $\mathcal{F}[\varphi]\in\mathbb{R}$.

Distribution

Cette fonctionnelle $\mathcal{F}$ est en fait une **forme linéaire** $\mathbb{F}$ en raison du caractère d'EV de $\{\varphi(x)\}= C_c^\infty$.

On l'appelle une distribution **fonctionnelle** (ou ***régulière***).

On appellera distribution **non fonctionnelle** (ou ***singulière***) $\mathcal{D}$ une forme linéaire $C_c^\infty \to \mathbb{R}$.

On la notera $\mathcal{D}[\varphi]$ ou $<\mathcal{D},\varphi>$.

Exemples

- $\mathcal{D}[\varphi(x)]=\varphi(x_0)$ [distribution de Dirac !]
- $\mathcal{D}[\varphi(x)]=\sum a_i.\varphi(x_i)$
- $\mathcal{D}[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi(x).dx$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien, dans chacun de ces exemples, d'une forme linéaire c'est-à-dire qu'on a bien :

$$\mathcal{D}[\lambda\varphi_1+\mu\,\varphi_2] = \lambda\mathcal{D}[\varphi_1]+\mu\mathcal{D}[\varphi_2]$$

Différenciation des distributions

On définit une distribution dérivée en cohérence avec ce qu'est une distribution fonctionnelle dérivée dans le cas où f' existe en posant $<\mathcal{D}',\varphi>=-<\mathcal{D},\varphi'>$

Toute distribution devient ainsi indéfiniment différentiable c'est-à-dire « conformes » comme nos φ de départ.

Intérêts ?

Mathématiques

On va aujourd'hui se contenter d'en montrer l'intérêt pour rendre mathématiquement raison de la formule physicienne sauvage : $\mathscr{H}'=\partial$.

On examinera plus tard la portée mathématique considérable de cette notion de distribution.

Intellectuels

On va se concentrer sur l'intérêt intellectuel extra-mathématique de cette notion qui justifie son examen dans mamuphi.

On en montrera en particulier l'intérêt pour une intellectualité musicale qui assume que l'espace musical (subjectif) est dual de l'espace sonore (sensible) ou acoustique (science physique).

III. Exemple

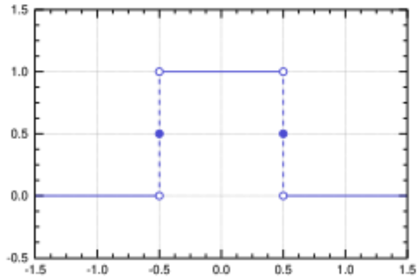
4 fonctions particulières

$$\Pi \Rightarrow \partial \text{ (limite) et } \partial \to \mathcal{H} \to \mathcal{R} \text{ (intégration)}$$

Porte

$$\Pi(x)=1 \text{ si } |x|\leq 1/2. \text{ Sinon } \Pi(x)=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x).dx = 1$$

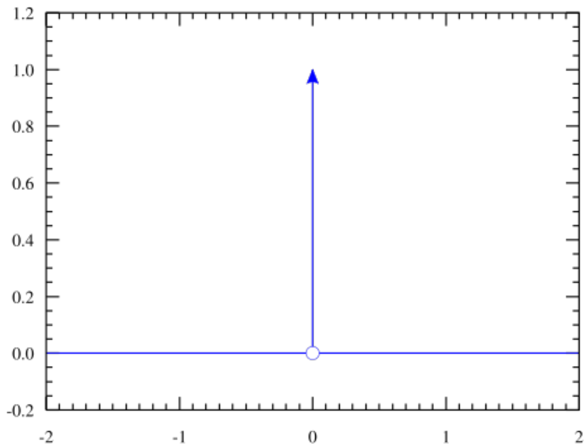


Dirac est la « limite » de la fonction $\prod_a(a)$ quand a→∞ avec a>0 et $\prod_a(x)$=a pour |x|≤1/2a et sinon $\prod_a(x)$=0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_a(x).dx = 1$$

Impulsion de Dirac ∂

L'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution : $\partial * \varphi = \varphi$



∀x≠0 ∂(x)=0

∂(0) n'est pas défini

Pourtant les physiciens posent (cf. « limite »)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial(x).dx = 1$$

Les mêmes posent ∂= $\mathcal{H}'$ alors que ∂ n'est pas une fonction et $\mathcal{H}$ n'est pas dérivable !

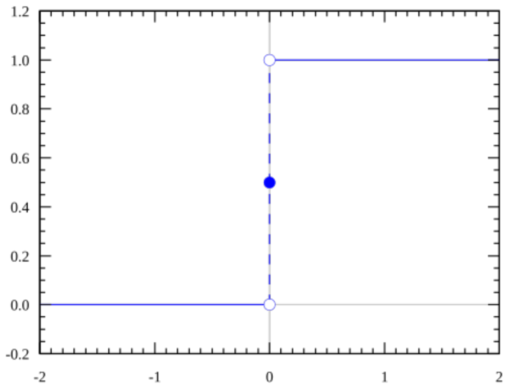
Équation mathématiquement aussi absurde que 0/0=0 !

∂ n'est pas une fonction mais une fonctionnelle (« mesure de Dirac »), apte à mesurer toute fonction f en posant

$$\partial(\varphi)=\varphi(0)$$

Heaviside

Fonction en « marche d'escalier »



$\mathcal{H}$(x)=0 ∀x<O et $\mathcal{H}$(x)=1 ∀x≥0

$\mathcal{H}$ est discontinue, donc non différentiable en 0 mais cependant intégrable :

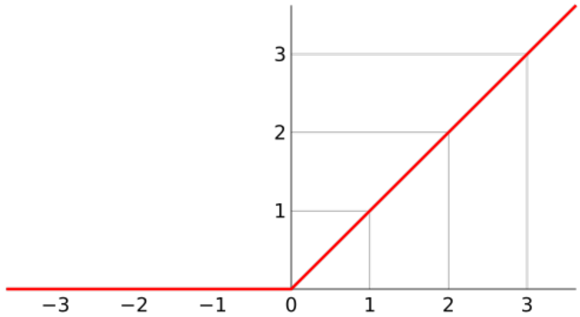
$$lim\frac{\mathcal{H}(h)-\mathcal{H}(0)}{h}=?$$

- Partie gauche : 0/x→0
- Partie droite : -1/x→-∞ !

Mais au sens des distributions, $\mathcal{H}$(x) est la primitive de ∂(x) et donc $\mathcal{H}$'(x)=∂(x), on va voir comment.

Rampe

$\mathcal{R}$(x)= 0 ∀x<O et $\mathcal{R}$(x)=x ∀x≥0



$\mathcal{R}$(x) est la primitive de $\mathcal{H}$(x) et donc $\mathcal{R}$'(x)= $\mathcal{H}$(x)

$\mathcal{H}$ est cependant intégrable :

$\mathscr{H}'=\partial$?

$\mathcal{H}$' n'existe que comme distribution :

$$\mathcal{H}(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x).dx=\int_{-\infty}^{0}\varphi(x).dx+\int_{0}^{+\infty}\varphi(x).dx=\int_{0}^{+\infty}\varphi(x).dx$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}'(\varphi)}=-\mathcal{H}(\varphi')=-\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x).dx=-\left[\varphi(\infty)-\varphi(0)\right]=\varphi(0)=\boldsymbol{\partial(\varphi)}$$

IV. Premières étapes de la théorie

0. Deux approches

Des deux manières de construire la distribution (comme forme linéaire ou comme limite d'une suite de fonctions), nous retiendrons la première [1] car elle installe d'emblée cette notion de plein pied dans la structure d'un nouvel espace (plutôt qu'elle ne la renvoie, comme la seconde manière, à l'au-delà d'un horizon).

Cf. coupures de Dedekind / suites de Cauchy pour rationnels → réels !

1. Les fonctions

Nombres (ℝ)

ou scalaires (pour EV) : x, y… ∊ℝ

f(x) quelconque

f(x) dans ℝ (ℝ→ℝ) : x → y=f(x)

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} y = f(x) \in \mathbb{R}$$

f(x) ∊ EV des fonctions réelles ($\lambda f_1 + \mu f_2 = f_3$)

Dérivée

$$f'(x) = lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Déplacements élémentaires : d'un point x.

Moyennes…

D'où l'idée de moyennes pondérant $\mathcal{H}$(x) autour de 0.

$\mathcal{H}$ est localement intégrable :

$$\int_{-a}^{+a} \mathcal{H}(x).dx = \int_{-a}^{<0} \mathcal{H}(x).dx + \int_{0}^{+a} \mathcal{H}(x).dx = a$$

Une valeur totale de a pour un intervalle de 2a, cela donne une moyenne de 1/2 comme approximation de $\mathcal{H}$(0) !

L'idée va être d'explorer toutes les manières de moyenner f(x) selon des fonctions-test φ(x) qui vont « jauger » les évolutions de f.

D'où notre interprétation : comment une décision subite va être jaugée par les conventions sociales établies.

φ(x) lisses à support compact

Cela va constituer notre ensemble de fonctions « **sages** » : lisses et bien délimitées…

Indéfiniment dérivables

φ(x)∊$\mathcal{C}$: ℝ→ℝ avec … — φ'' — φ' — $\boldsymbol{\varphi}$ — Φ —…

$C = C_c^{\infty}$

$\mathcal{C}$ = EV ($\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = \varphi_3$)

Support compact

[1] Une distribution est *une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel topologique des fonctions indéfiniment différentiables à support compact*. Voir Laurent Schwartz : *Théorie des* distributions (Hermann ; édition de 1973).

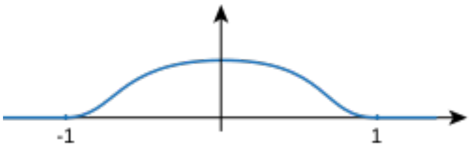
Le support est la partie du domaine de définition ℝ où la fonction φ n'est pas nulle : $\{x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)\neq 0\}$

Ce support est compact s'il en existe un recouvrement **fini**.

Donc φ sera nulle en-dehors d'un ensemble borné.

Exemple

$\psi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ si $|x|<1$ et sinon $\psi(x)=0$



Si Ω est un ouvert non vide de ℝ, l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact Ω est noté

$$\mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$$

$\mathcal{C}$ espace vectoriel topologique

Compatibilité des deux structures

La topologie (structure topologique) doit être compatible avec la structure d'EV c'est-à-dire être telle que

1) la somme de deux vecteurs est une application continue ExE→E
2) le produit d'un scalaire par un vecteur est une application continue KxE→E

Continuité

Importance en analyse fonctionnelle : la topologie structure la continuité.

ExE→E est continue si

∀ voisinage V de (v+w) dans E, ∃ un voisinage U de {v,w} dans ExE tel que {v,w}∈U ⟹ (v+w)∈V

C'est l'équivalent topologique de la définition par Cauchy d'une limite avec ∀ε ∃δ tel que…

Continuité d'une forme linéaire

Soit $\mathcal{C}^\infty$ l'EV des φ sur ℝ. Une forme linéaire ou une distribution T : $\varphi \to \mathbb{R}$ que l'on note $\langle T,\varphi\rangle$ sera continue en φ_0 si

∀ voisinage V de $\langle T,\varphi_0\rangle$ dans ℝ,

∃ un voisinage U de φ_0 dans $\mathcal{C}^\infty$

tel que $\varphi\in U \Longrightarrow \langle T,\varphi\rangle\in V$

2. Fonctionnelle $\mathcal{F} : \mathcal{C}\to\mathcal{C}$

Une fonctionnelle produit une fonction, ici une fonction moyennée ou lissée (par application de fonctions lisses φ sur une fonction f quelconque).

Sur $\mathcal{C}=\{\varphi\}$

$\mathcal{F}[\varphi(x)]$ dans $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}\to\mathcal{C}$) : $\varphi_1(x)\to\varphi_2(x)$

$$\varphi_1(x)\in\mathcal{C} \overset{\mathcal{F}}{\to} \varphi_1(x)\in\mathcal{C}$$

Espace vectoriel

$\mathcal{C}$ est un EV : si φ_1 et $\varphi_2 \in\mathcal{C}$, et si λ et μ ∈ℝ, alors $(\lambda\varphi_1+\mu\varphi_2)\in\mathcal{C}$

$\mathcal{F}$ ∈ EV des fonctionnelles dans $\mathcal{C}$ ($\lambda\mathcal{F}_1+\mu\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3$)

L'EV des fonctionnelles est dual de l'EV $\mathcal{C}$.

Retournement !

On va passer de la fonction f(x) jaugée par toutes les φ(x) à la fonctionnelle $\mathcal{F}[\varphi]$ qui évalue la diversité des φ(x), qui scanne l'espace vectoriel des jauges ou des moyennes.

Contre-transfert

Interprétation : l'analysé devient analysant, l'évalué devient évaluateur, l'éduqué devient éducateur…

3. Forme linéaire $\mathbb{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$

Une forme linéaire produit un scalaire pour chaque fonction (ici lisse et à support compact).

$\mathbb{F}[\varphi(x)]$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$) : $\varphi(x) \rightarrow \lambda$

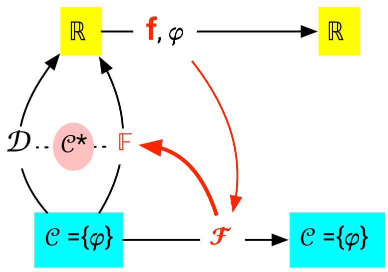
$$\mathbb{F}[\varphi(x)] = \int_{\mathbb{R}} f(x).\varphi(x).dx$$

$$\varphi(x) \in \mathcal{C} \xrightarrow{\mathbb{F}} \lambda \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{F} \in$ EV $\mathcal{C}^*$ des formes linéaires $\mathbb{D}$ (ou *distributions*) $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\lambda\mathbb{F}_1+\mu\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_3$)

$$\mathbb{F}(\lambda\varphi_1+\mu\varphi_2) = \lambda\mathbb{F}(\varphi_1)+\mu\mathbb{F}(\varphi_2)$$

$\mathcal{C}^*$ est **dual** de $\mathcal{C}$.



FL fonctionnelle

FL définie par une fonction

FL non fonctionnelle

4. Distribution fonctionnelle (ou régulière)

$$T_{f(x)}[\varphi(x)] = T_f(\varphi) = < T_f, \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

$$\text{avec } \varphi(x) \in C_c^{\infty}$$

On appelle f la densité de la distribution et φ une fonction-test.

5. Distributions singulières

Distribution $\mathbb{D} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{D}$=$\mathbb{D}$[φ(x)] de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathcal{C}\to\mathbb{R}$) : φ(x) → λ (forme linéaire qui n'est plus fonctionnelle c'est-à-dire qui n'est plus définie par multiplication avec une fonction f)

Exemples :

- $\varphi(x) \to \varphi(0)$ [distribution ∂irac]
- $\varphi(x) \to \varphi^2(2) + e^{\varphi(1)}$
- $\varphi(x) \to \int_{-1}^{+1} \varphi(x).dx$

Notations

On note la note <f, φ> ou <T_f, φ> ou $\mathbb{F}[\varphi(x)]$

EV $\mathcal{D}$

Les distributions forment un EV $\mathcal{D}$

EV dual $\mathcal{D}^*$

Si $\mathcal{D}$ est l'EV des φ(x), l'EV dual des distributions est $\mathcal{D}'$.

V. La distribution « dérivée »

« *Définition directe, un peu artificielle, de la dérivée* » Schwartz (p. 34) :

$$< \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi >= -< T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} >$$

$$<T',\varphi> = -<T,\varphi'>$$

« Contragrédient » ?

La contragrédience [2] est la contravariance entre espaces vectoriels duaux.

Je préfèrerai donc parler ici plus simplement de **contravariance**.

Logique

Pour les distributions régulières (fonctionnelles), si f' existe, on a l'intégration par parties suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x).\varphi(x)]'.dx = [f.\varphi]_{-\infty}^{+\infty} = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x).\varphi(x).dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi'(x).dx$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x).\varphi(x).dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi'(x).dx$$

Soit $<T_{f'},\varphi> = -<T_f,\varphi'>$

Or, si f' existe bien, on vise alors à ce que la dérivée au sens des distributions $<T_f',\varphi>$ soit bien la dérivée au sens usuel : $<T_{f'},\varphi>$ c'est-à-dire que la distribution dérivée soit la distribution engendrée par la fonction dérivée f'. Donc

$$<T_f',\varphi> := <T_{f'},\varphi> = -<T_f,\varphi'>$$

La première égalité est une définition, la seconde une conséquence.

---

[2] Du latin *gradus* : un pas ⟹ *ingredior* : faire un pas dans, entrer dans. *Contragrédient* désigne le fait de faire un pas *contraire*.

On définit donc en général, puisque φ' existe toujours :

$$< \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi >= -< \mathrm{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} >$$

$$<T',\varphi> = -<T,\varphi'>$$

Et chaque distribution devient ainsi indéfiniment dérivable !

Dualité contravariante

Le caractère contravariant vient de la dualité entre l'EVT $\mathcal{D}$ des φ et l'EVT $\mathcal{D}'$ des formes linéaires sur ces φ : il y a contravariance entre

- un point de vue fixe (FL fixe) sur le déplacement de φ – donc $\mathcal{D}$[φ']

$$\varphi'(x) = lim \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

- le déplacement de point de vue $\mathcal{D}$ sur un φ fixe – donc $\mathcal{D}'$[φ].

$$\mathcal{D}'[\varphi]=- \mathcal{D}[\varphi']$$

On retrouve ici nos images du train et du quai…

Interprétation

Dynamiquement, le rapport extérieur à l'autre est contravariant du rapport intérieur à soi.

VI. Interprétations intellectuelles

Une fois interprété notre espace de départ, quatre dimensions :

1) ∂écider ?
2) Distribuer ?
3) Dualiser et contravarier ?
4) Généraliser ?

H'=∂ : ∂écision *versus* décisions

La ∂écision se comprend (c'est-à-dire comprend son clinamen propre par rapport au « code de bonne conduite » ou « manuel du savoir-vivre » $\mathcal{C}$) en mesurant sa singularité aux φ réguliers selon un scannage oblique, en lumière rasante…

Art musical

Comment une ∂écision compositionnelle n'est-elle pas subordonnée aux lois sonores et s'en émancipe (ce qui n'est pas dire les ignore, les bafoue ou s'en indépendantise : l'autonomie reste relative et n'est pas une indépendance) ? Comment la ∂écision musicale inscrit-elle un clinamen sonore et acoustique ?

Exemples

- Les vocalises de Jean-Sébastien Bach !
- La non-transparence de l'écriture musicale pour la perception
- La non-adéquation en musique de l'écoute et de l'audition
- La clarté de l'hétérophonie musicale supporte des zones d'opacité sonore

Attention : la ∂écision n'est pas prise pour faire clinamen sonore, pour faire « avant-garde sonore », pour faire son petit effet acoustique. Toute ∂écision est aussi une surprise pour qui la prend. Et les clinamens qu'elle affirme et qu'on découvre au fur et à mesure l'instruisent.

Amour hétérosexuel

La ∂écision amoureuse est un pari au bord du vide, un saut dans l'inconnu sans arrière. Elle ne procède pas d'une délibération calculatrice (comme le choix d'un appartement, d'une voiture, d'un métier ou d'une fonction sociale). Elle ne se conforme pas aux règles d'un mariage arrangé.

Les clinamens par rapport aux choix établis, socialement réglés (du « bon mariage » ou « bon accouplement » des applications de rencontre) instruisent la ∂écision.

Point central : dans l'amour hétérosexuel un être humain masculin se découvre être un homme en se découvrant l'homme de sa femme, et il apprend ici à être « un » homme, en clinamen de l'idée convenue de ce qu'est « L'homme ». Et bien sûr réciproquement pour la femme concernée qui découvre qu'elle est une femme en étant la femme de son homme, une femme qui s'émancipe du modèle convenu de « La femme ».

Remarque : qu'en est-il dans l'amour homosexuel ? Comment l'amour homosexuel ressaisitil ou non les deux des sexes ? Je n'en sais rien ! Cela m'apparaît donc comme une autre question.

Politique militante

Une vraie ∂écision politique (qui n'est pas une décision planifiée) est événementielle ; elle surprend.

Le modèle en est pour moi l'invention événementielle en Chine des Communes populaires (par les paysans fin avril 1958) puis par les femmes urbaines du peuple (en août 1958).

f→$\mathcal{D}$: « distribuer » une ∂écision ?

- Art musical
- Amour hétérosexuel
- Politique militante

Dérivation et contravariance aux

Art musical

On peut avoir Δ Écoute et ∇ audition et vice versa…

Amour hétérosexuel

L'incommensurabilité des deux jouissances sexuelles est ressaisie en amour non comme obstruction mais comme ressource amoureuse pour le bonheur d'être vraiment Deux.

Contravariance du rapport amoureux et du non-rapport sexuel

Politique militante

Révolutionner politiquement les rapports sociaux entraîne une dévalorisation des rapports sociaux existants désormais qualifiés d'améliorables et donc abordés comme en défaut d'une possibilité.

L'affirmation politique crée une négativité immanente. Il est donc normal qu'elle rencontre aussi une nouvelle adversité, voire des ennemis de type nouveau.

Voir la conférence de Lushan en Chine à l'été 1959 prenant mesure (étonnée) que Peng Dehuai ne suit pas.

« Généralisation » ?

- Art musical
- Amour hétérosexuel

- Politique militante

VII. Suites de la théorie

- Définition analytique de la dérivée par translation
- Topologiser l'espace vectoriel dual $\mathcal{D}^*$
- Produit de convolution
- Transformée de Laplace
- Autre approche des distributions
- Histoire
- Extension de l'interprétation intellectuelle

RAPPELS

Dérivation d'un produit de fonctions

(u.v)'=u.v'+u'.v

Soient f et g deux fonctions dérivables en x. Définissant $u = f(x)$ et $v = g(x)$, l'aire uv du rectangle (cf. Figure 1) représente $f(x)g(x)$.

Si x varie d'une quantité Δx, les variations correspondantes en u et v sont désignées par Δu et Δv.

La variation de l'aire du rectangle est alors :

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv \\ &= (\Delta u)v + u(\Delta v) + (\Delta u)(\Delta v),\end{aligned}$$

c'est-à-dire la somme des trois zones ombrées sur la Figure 1 ci-contre.

En divisant par Δx :

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) v + u\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

En prenant la limite quand $\Delta x \to 0$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) v + u\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right).$$

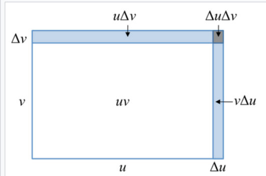


Figure 1. Illustration géométrique de la règle du produit.

Dérivation d'une fonction composée

$(g\circ f)'=(g'\circ f)\mathrm{x}f'$

[sin(ax^2+bc+c)]' ? f(x)= ax^2+bc=c et g(x)=sin(x) $\Longrightarrow$ f'(x)=2ax+f et g'(x)=cos(x) $\Longrightarrow$ [sin(ax^2+bc+c)]'=cos(ax^2+bc+c).(2ax+b)

Théorème général du CDI

f et sa primitive F

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a) = [F]_a^b$$

Intégration par parties

Comme [u(x).v(x)]'=u(x).v'(x)+u'(x).v(x) et comme

$$\int f'.dx = f(x)$$

$$\int_a^b u(x).v'(x).dx = \int_a^b u(x).v(x).dx - \int_a^b u'(x).v(x).dx$$

$$\int_a^b u(x).v'(x).dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x).dx$$

$$\int_a^b u.dv = [u.v]_a^b - \int_a^b v.du$$

Et, comme pour nos φ (à support compact), on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x).dx = [\varphi]_{-\infty}^{+\infty} = \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = 0$$

on aura :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x).\varphi(x).dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\varphi'(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x).\varphi(x)]'.dx = [f.\varphi]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Espace vectoriel

Structure centrale en algèbre linéaire

V = des objets (« vecteurs ») et un corps K (commutatif) de nombres (« scalaires »).

Structure d'objets en **combinaisons linéaires** (addition de vecteurs, multiplication par un scalaire).

Ici les vecteurs sont les $\varphi(x)$: EV de fonctions $\Longrightarrow$ combinaisons linéaires : $\lambda\varphi_1+\mu_2$.

On peut alors avoir un produit scalaire VxV→K qui mesure la colinéarité (la non-orthogonalité) de deux vecteurs, en particulier si l'EV est normé (doté d'une norme).

Forme linéaire

Sur un EV ! : application de l'EV_K sur son corps de base K

Espace vectoriel topologique

Compatibilité des deux structures

La topologie (structure topologique) doit être compatible avec la structure d'EV c'est-à-dire être telle que

3) la somme de deux vecteurs est une application continue ExE→E
4) le produit d'un scalaire par un vecteur est une application continue KxE→E

Continuité

Importance en analyse fonctionnelle : la topologie structure la continuité.

ExE→E est continue si

∀ voisinage V de (v+w) dans E, ∃ un voisinage U de {v,w} dans ExE tel que {v,w}∈U ⟹ (v+w)∈V

Continuité d'une forme linéaire

Soit $\mathcal{C}^\infty$ l'EV des φ sur ℝ. Une forme linéaire ou une distribution T : $\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on note <T,φ> sera continue en φ_0 si

∀ voisinage V de <T,φ_0)> dans ℝ,

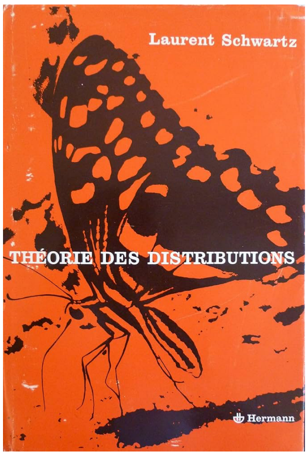
∃ un voisinage U de φ_0 dans $\mathcal{C}^\infty$

tel que φ∈U ⟹ <T,φ>∈V

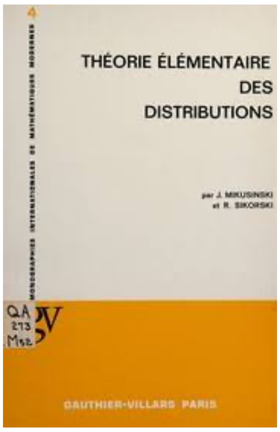
Bibliographie

Distributions

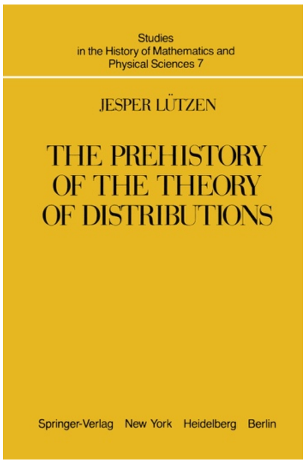
Laurent Schwartz : *Théorie des distributions* ; Hermann (édition de 1973)



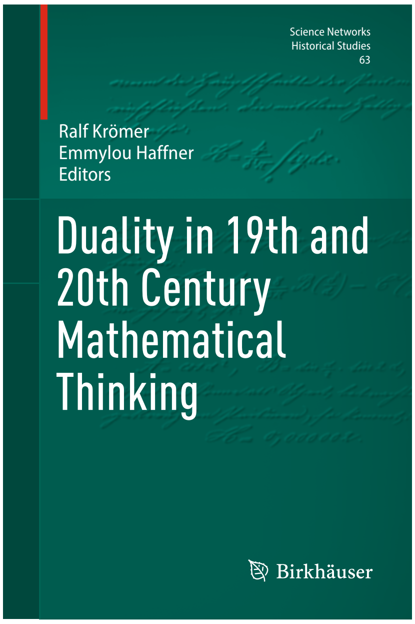
J. Mikusinski et R. Sikorski : *Théorie élémentaire des distributions* ; Gauthier-Villars Paris, 1964



Histoire



Distributions et dualité



Chapter 15

Duality and Distributions: An Application of Topological Vector Spaces

Jesper Lützen

Introduction

The theory of generalized functions called distributions has a two-fold origin: The problems that created a desire for a generalization of the concept of functions came from classical hard analysis; the methods that provided the solution came from modern structuralist functional analysis. According to the main proponent of the latter, Bourbaki (1960 and 1955), the development of the theory of normed spaces came to a temporary halt after the appearance of Stefan Banach's book *Théorie des opérations linéaires* (1932). Instead, functional analysis went in the direction of more general spaces such as locally convex spaces in particular Fréchet spaces. In this connection, Bourbaki emphasized the fundamental role of the theory of duality and continued:

> it is certain that the principal impulse which has motivated these investigations has come from new possibilities for application to Analysis in domains where Banach's theory did not work. In this connection, one should mention the theory of spaces of sequences . . . . and in particular the theory of distributions of L. Schwartz, where the modern theory of locally convex spaces has found a field of applications which is without doubt far from being exhausted. (Bourbaki, 1955, p. 174; 1960, p. 245)[1]

[1]"il est certain que l'impulsion principale qui a motivé ces recherches est venue de nouvelles

 717
R. Krömer, E. Haffner (eds.), *Duality in 19th and 20th Century Mathematical Thinking*,
Science Networks. Historical Studies 63, https://doi.org/10.1007/978-3-031-59797-8_15

•••