

Pavages du plan : des tuiles de Wang au « chapeau » de David Smith

Samedi 15 novembre 2025

Édouard Thomas
Mathématicien et
journaliste scientifique
Secrétaire de Kafemath

Institut de recherche
et coordination acoustique /
musique (Ircam)
1 place Igor Stravinsky
75004 Paris

Séminaire Mamuphi
(mathématiques, musique,
philosophie)
animé par François Nicolas



À la lumière des mathématiques et à l'ombre de la philosophie
l'intellectualité musicale



« Plan »

Le problème du domino (*)

Les pavages périodiques, non périodiques et apériodiques (**)
(les pavages de Penrose, d'Amann et de Goodman-Strauss ;
la tuile de Voderberg, la tuile de Socolar–Taylor...)

Le problème « ein Stein » (***)

Le nombre de Heesch

Structure hiérarchique unique et pavages apériodiques

Les découvertes de David Smith (2022 et 2023) ; engouement
scientifique, artistique et populaire planétaire (****)

Des pavages réguliers du plan au problème « ein Stein »

Quatre obstructions très distinctes en action :

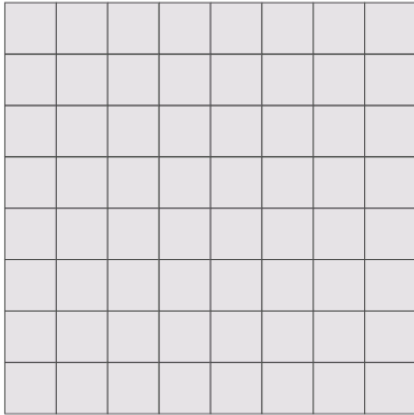
(*) Un phénomène mathématique inattendu (*l'indécidabilité du problème de l'arrêt d'une machine de Turing*) ;

(**) Des contraintes imposées par les mathématiciens (les *règles d'assemblage*) pour prévenir l'apparition d'un phénomène (la *périodicité d'un pavage par des tuiles*) ;

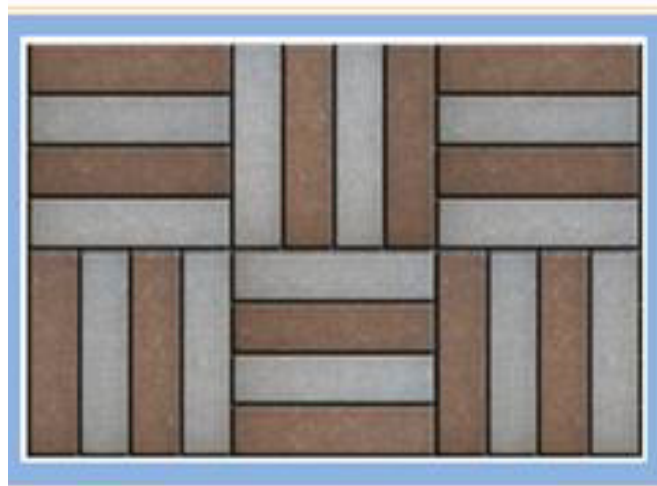
(***) L'impossibilité, pendant cinquante ans, de décider de l'existence d'un objet (une *monotuille aperiodique connexe*) ;

(****) Une obstruction rhétorique (le rôle des *symétries*).

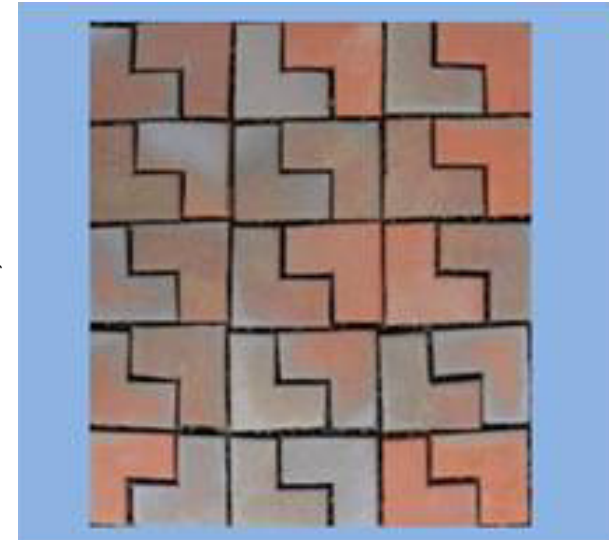
Les pavages périodiques



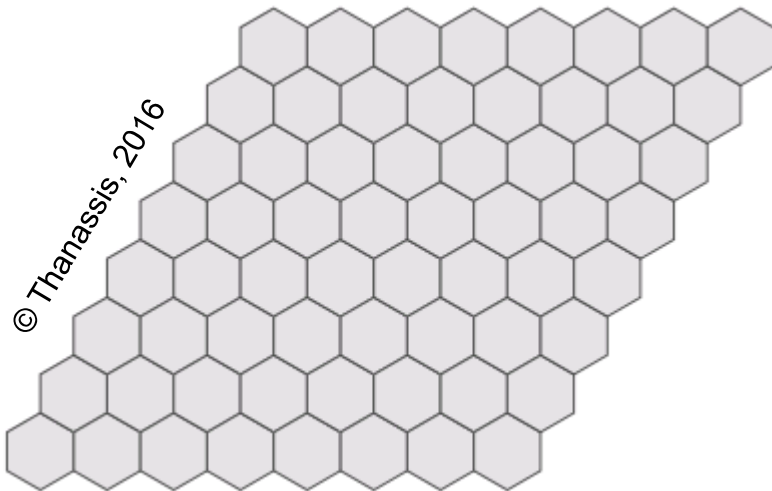
© Thanassis, 2016



© Gérard Villemin, 2016



© Gérard Villemin, 2016



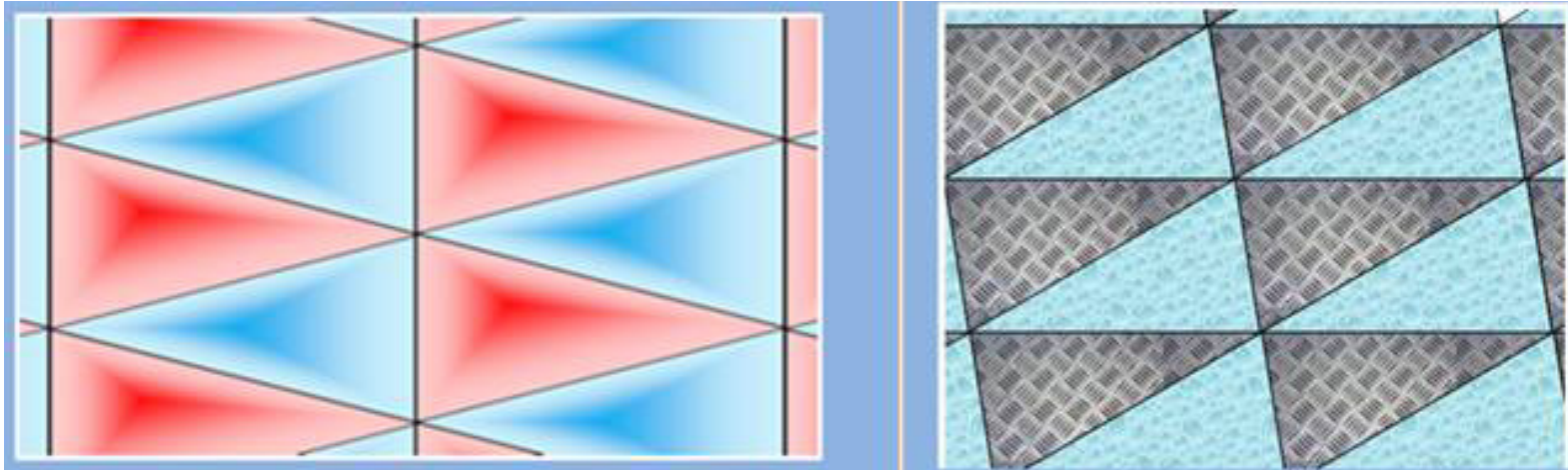
© Thanassis, 2016

© Gérard Villemin, 2016

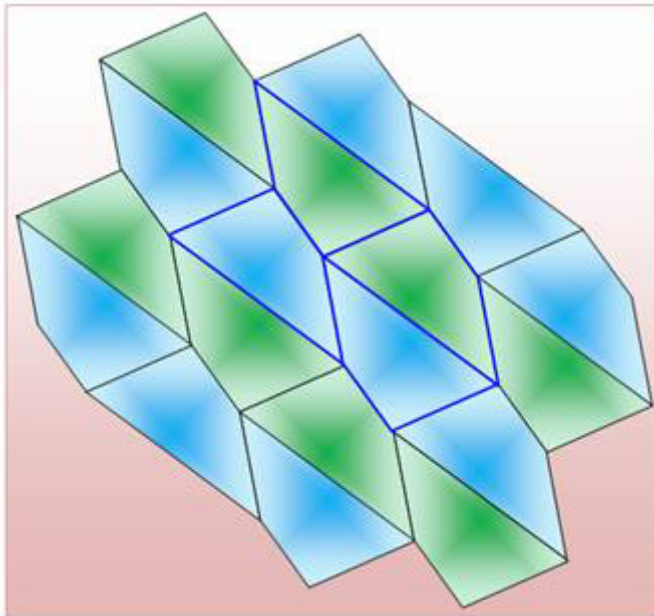


Des invariances par translation

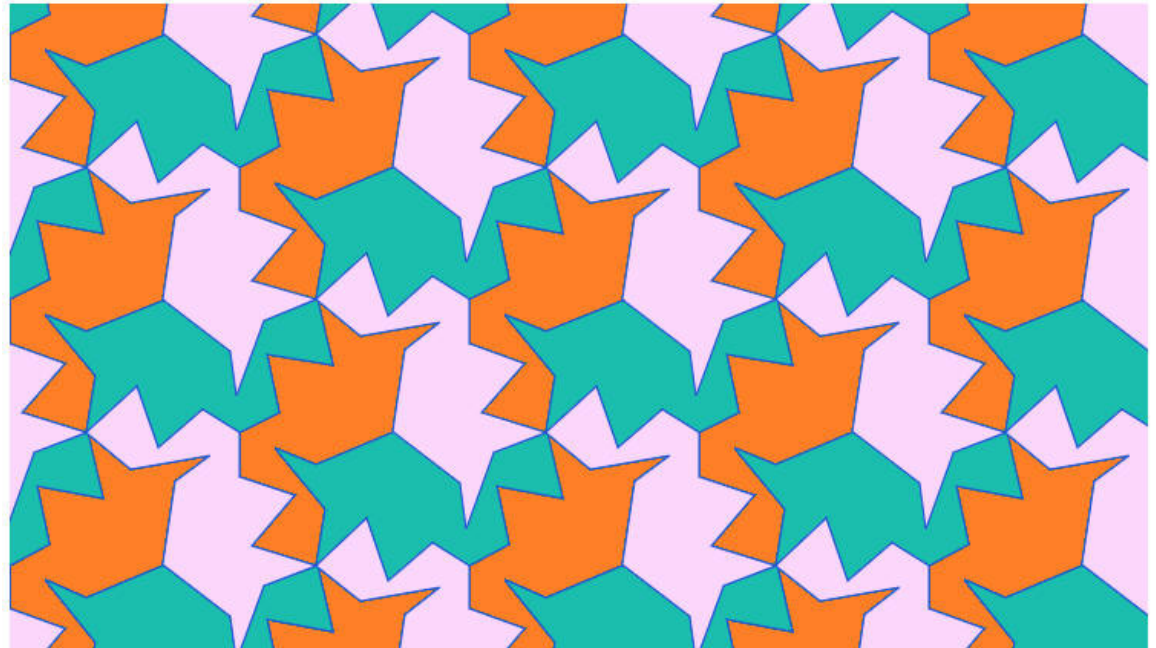
© Gérard Villemin, 2016



© Gérard Villemin, 2016



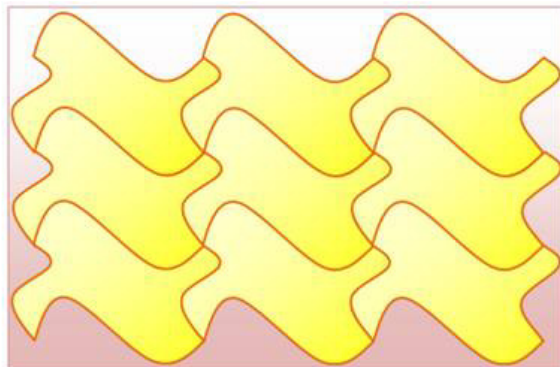
© Serge Mehl, 2012



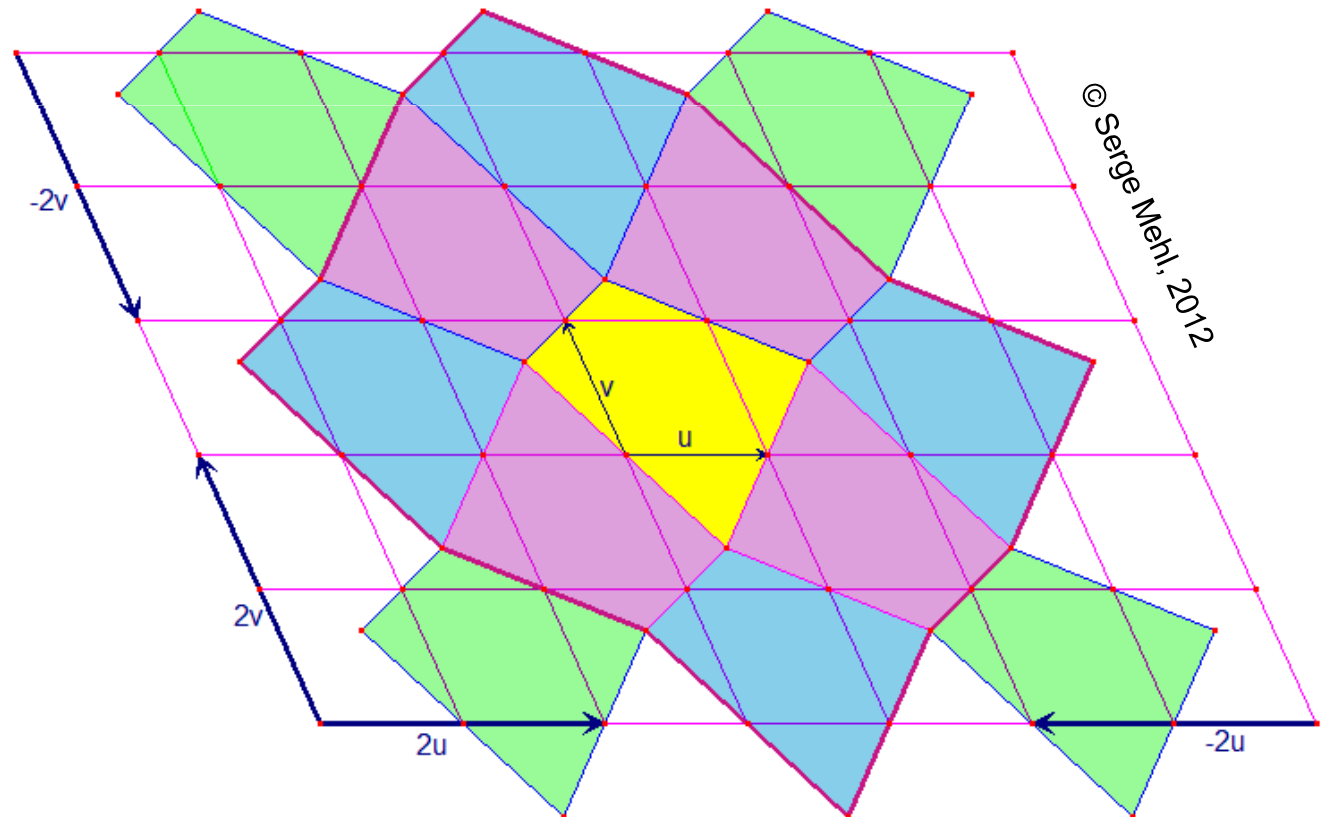
Le théorème de Varignon

Le quadrilatère joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est un parallélogramme.

Corollaire : le pavage périodique du plan est possible par tout quadrilatère.

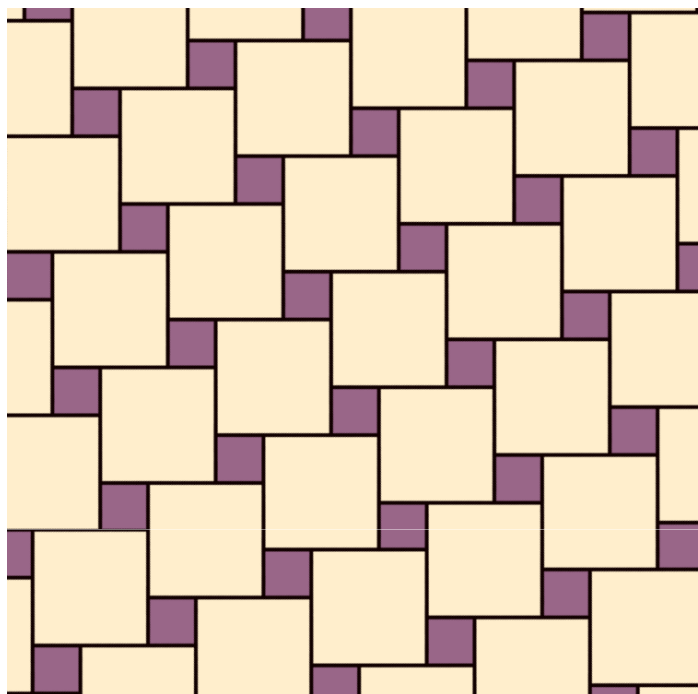


© Gérard Villemin, 2016

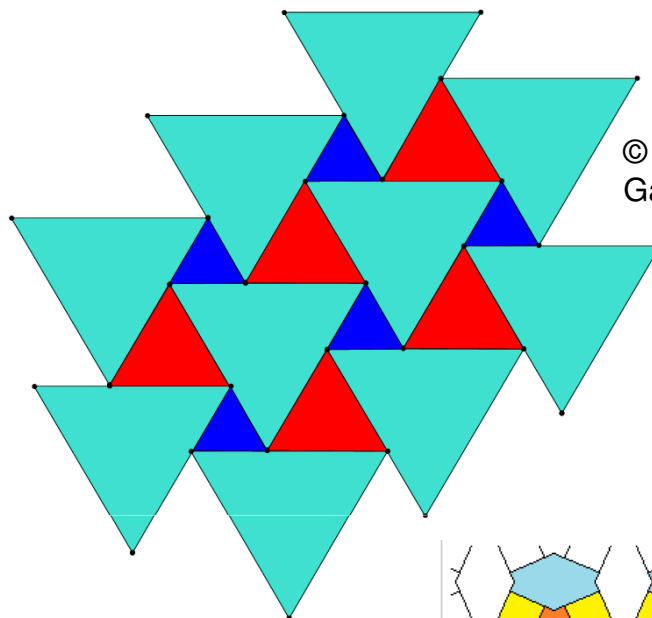


© Serge Mehl, 2012

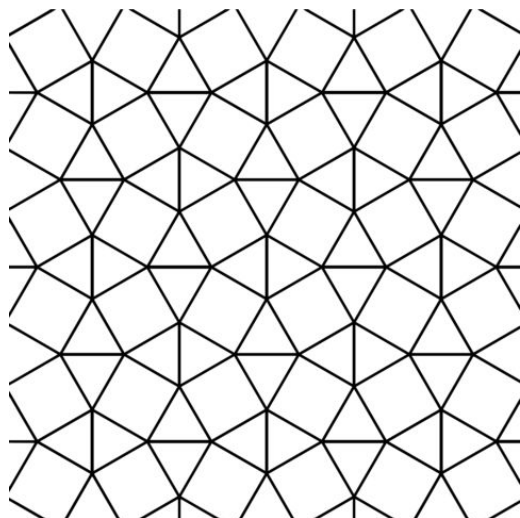
Avec plusieurs tuiles



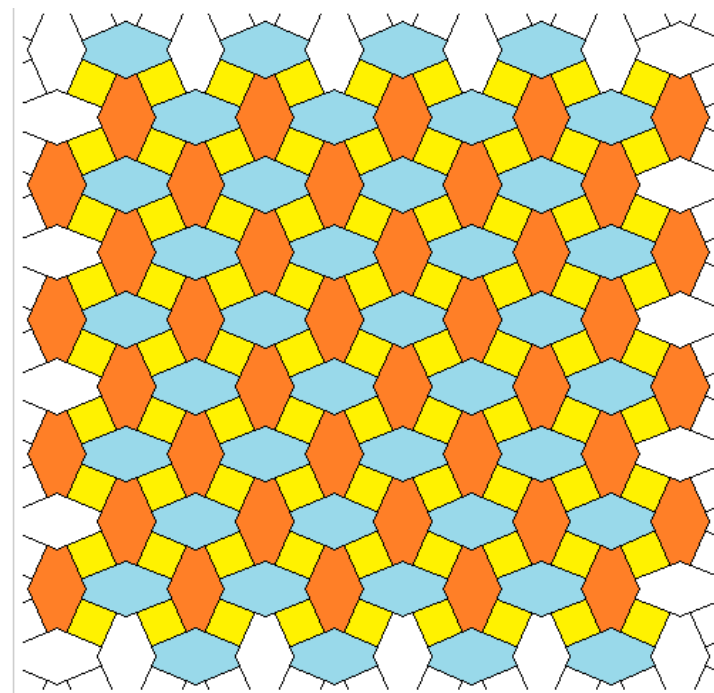
© Baelde, 2012



© Janos Pach et
Gabor Tardos, 2018



© supercoloring.com



© Serge Mehl, 2012

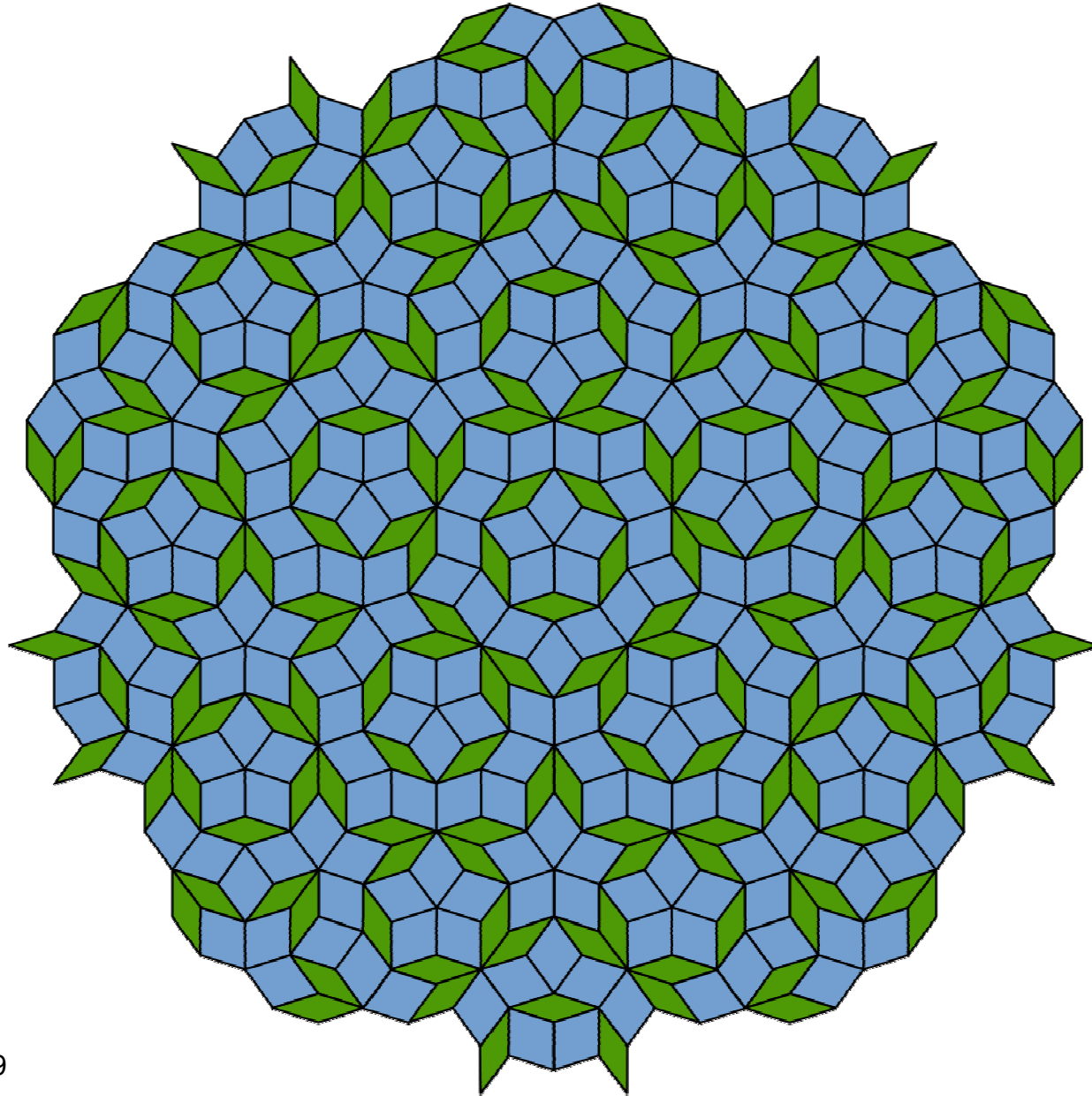
Le pavage de Voderberg (1936)



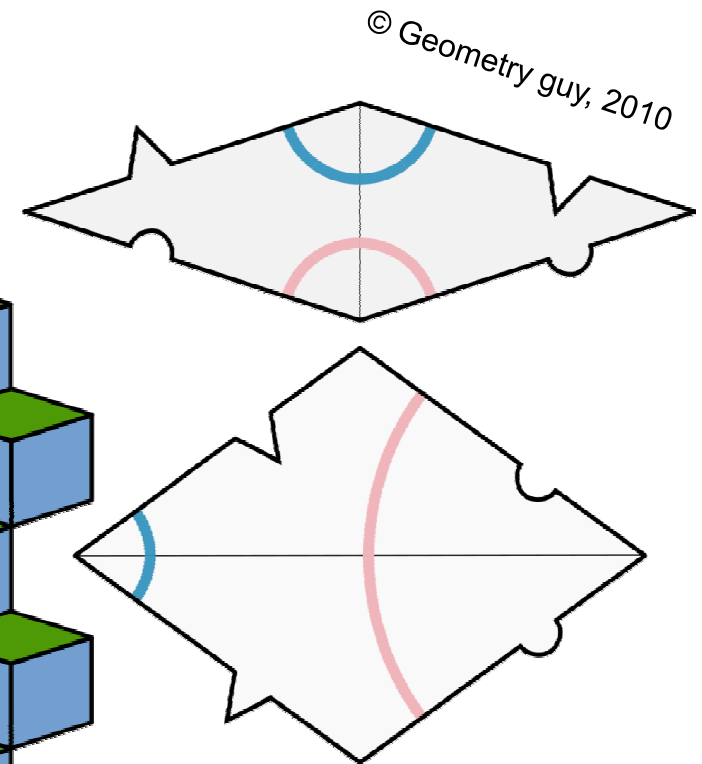
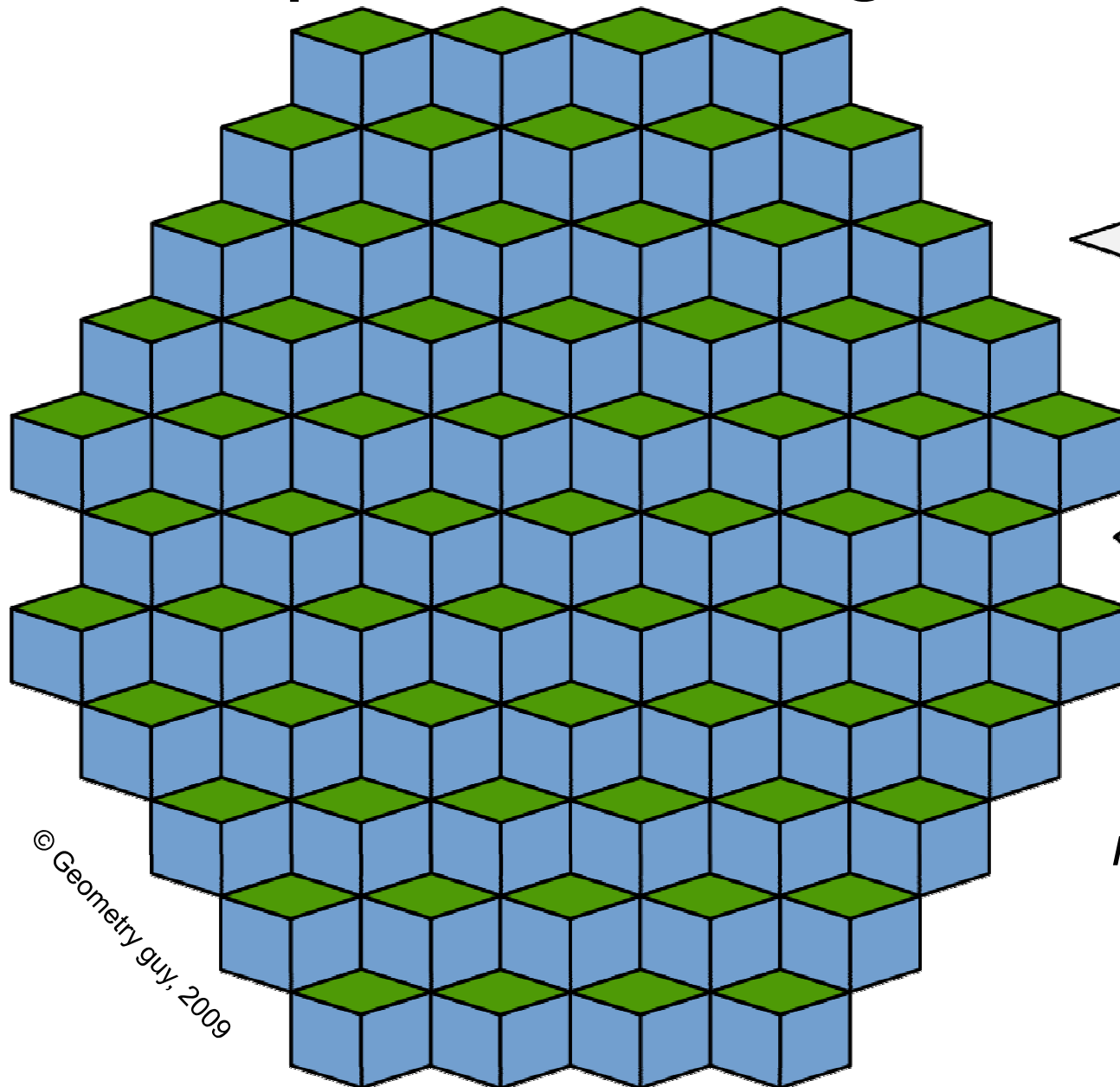
© Curiosa mathematica, 2018

© TED-43, 2008

Des pavages apériodiques

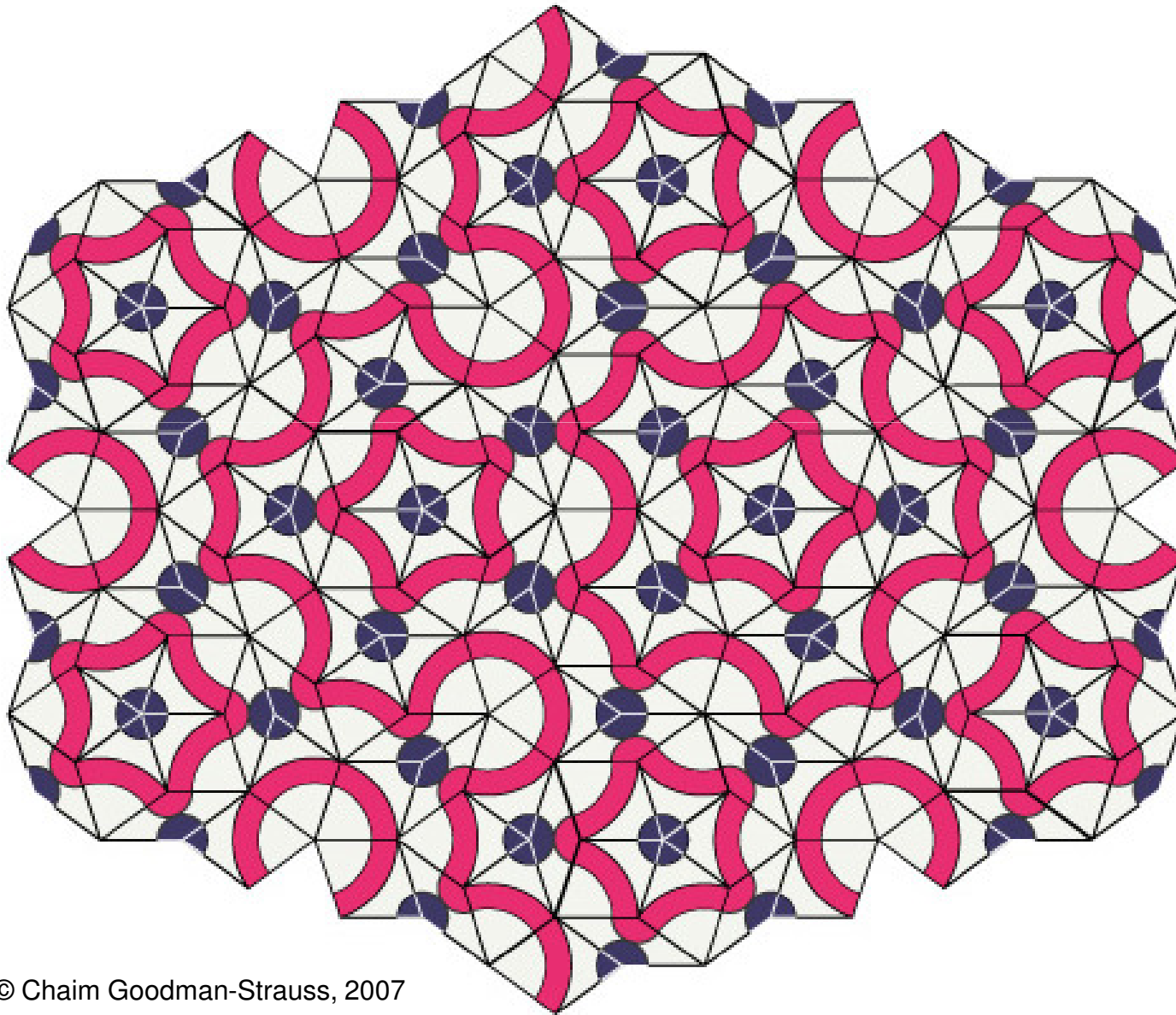


On peut réarranger les pièces !



Les
règles d'assemblage
imposées
(obstruction (**))

Des questions ouvertes (Penrose)

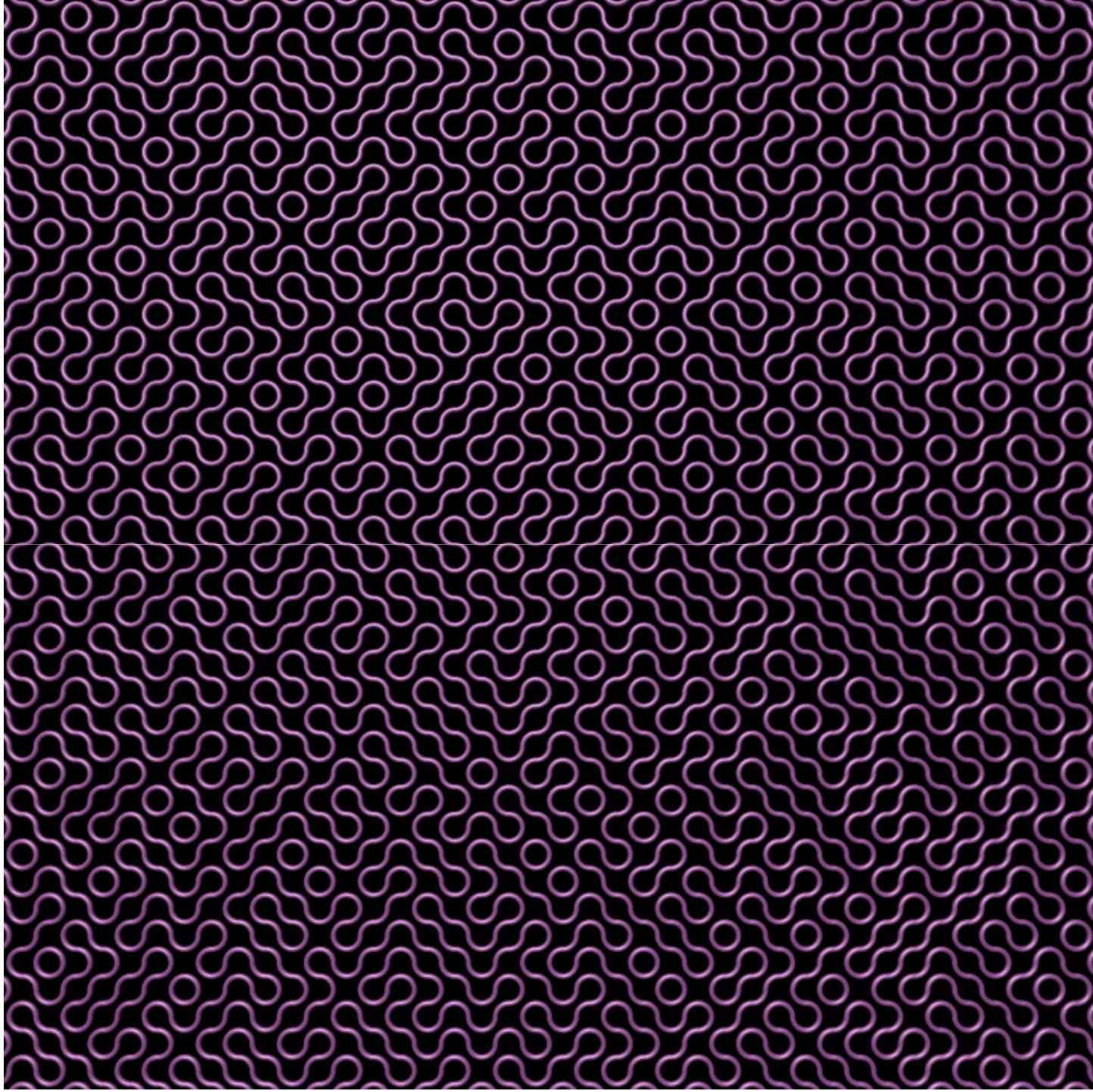


Les
décorations
produisent
des motifs
géométriques
dans le
pavage.

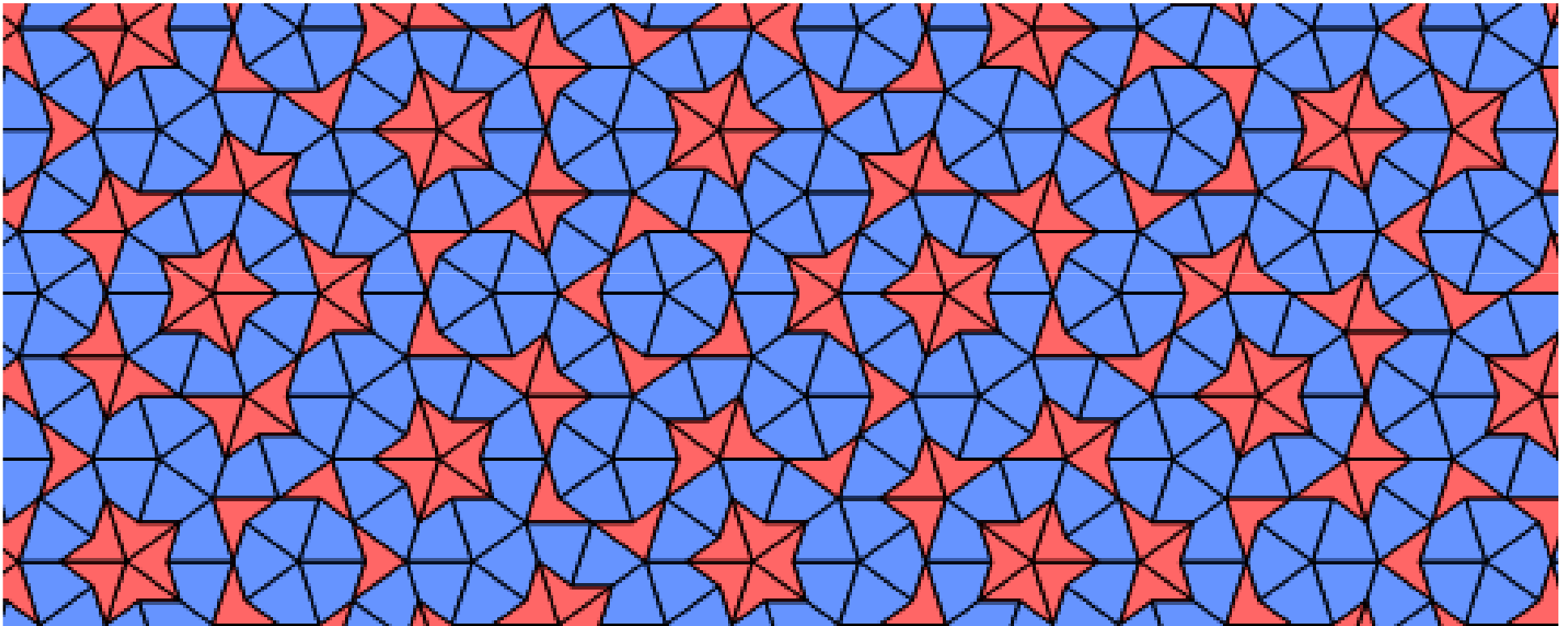
Lesquels ?

Sont-ils
(« presque »
toujours)
des courbes
fermées ?

© Paul Bourke, 2006



Un autre pavage de Penrose

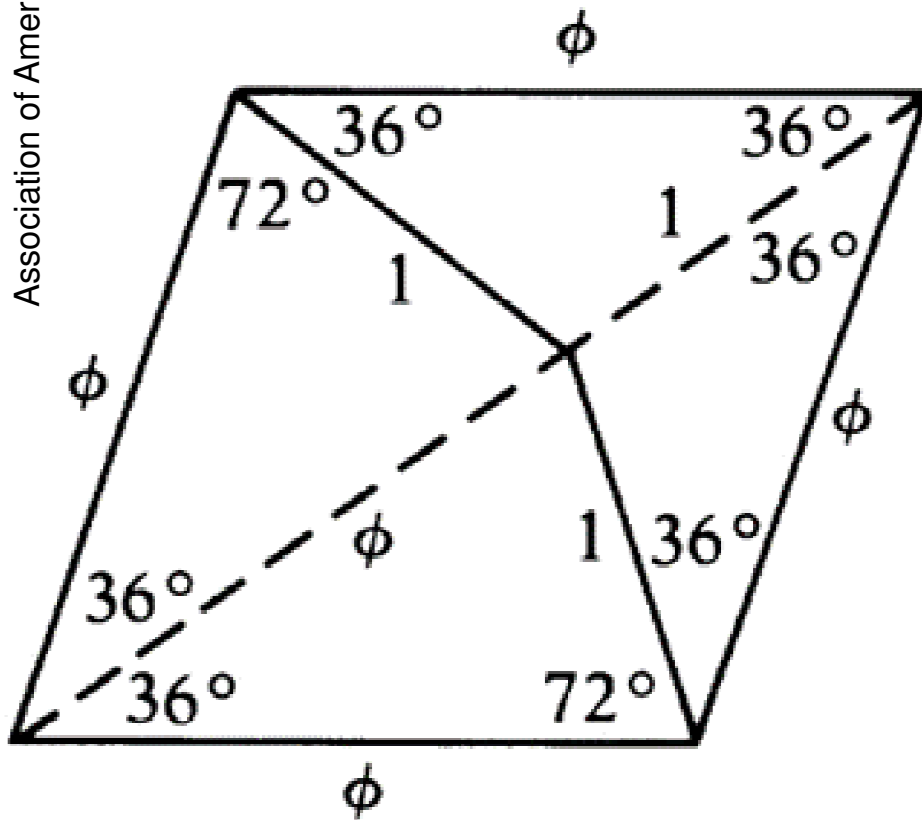


© Max Muller, 2023

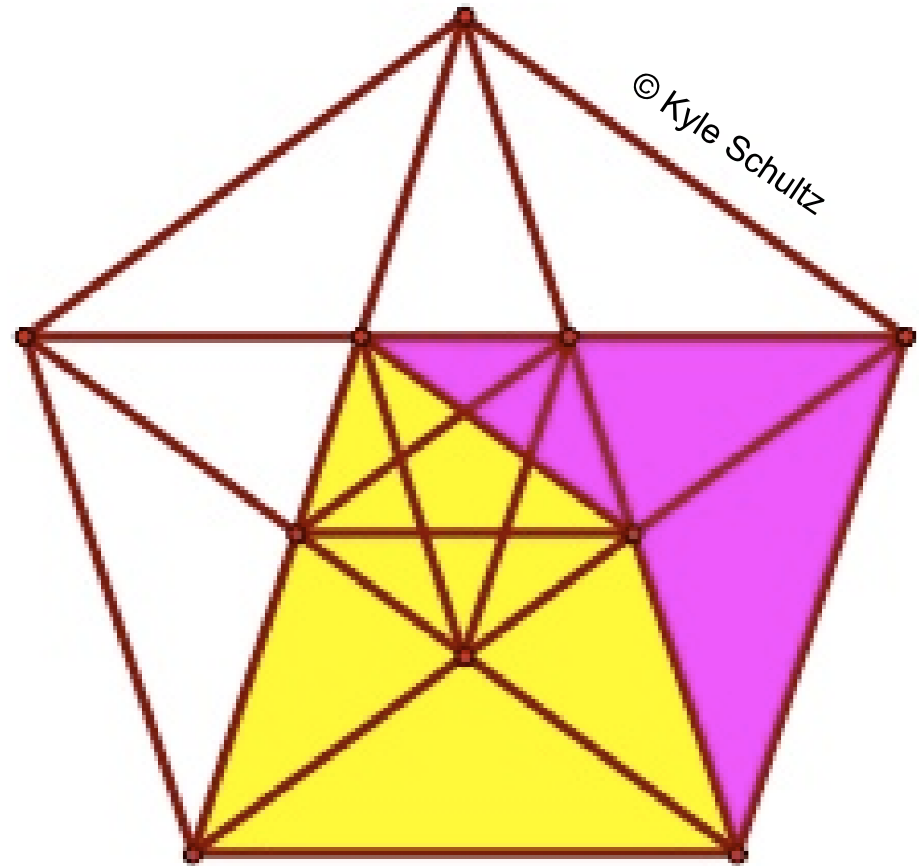
Le rapport (1,612...) entre le nombre de tuiles bleues (245) et le nombre de tuiles rouges (152) tend vers le nombre d'or (1,618...).

Deux tuiles fameuses (1974)

© CUP / The Mathematical
Association of America, 1997



$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

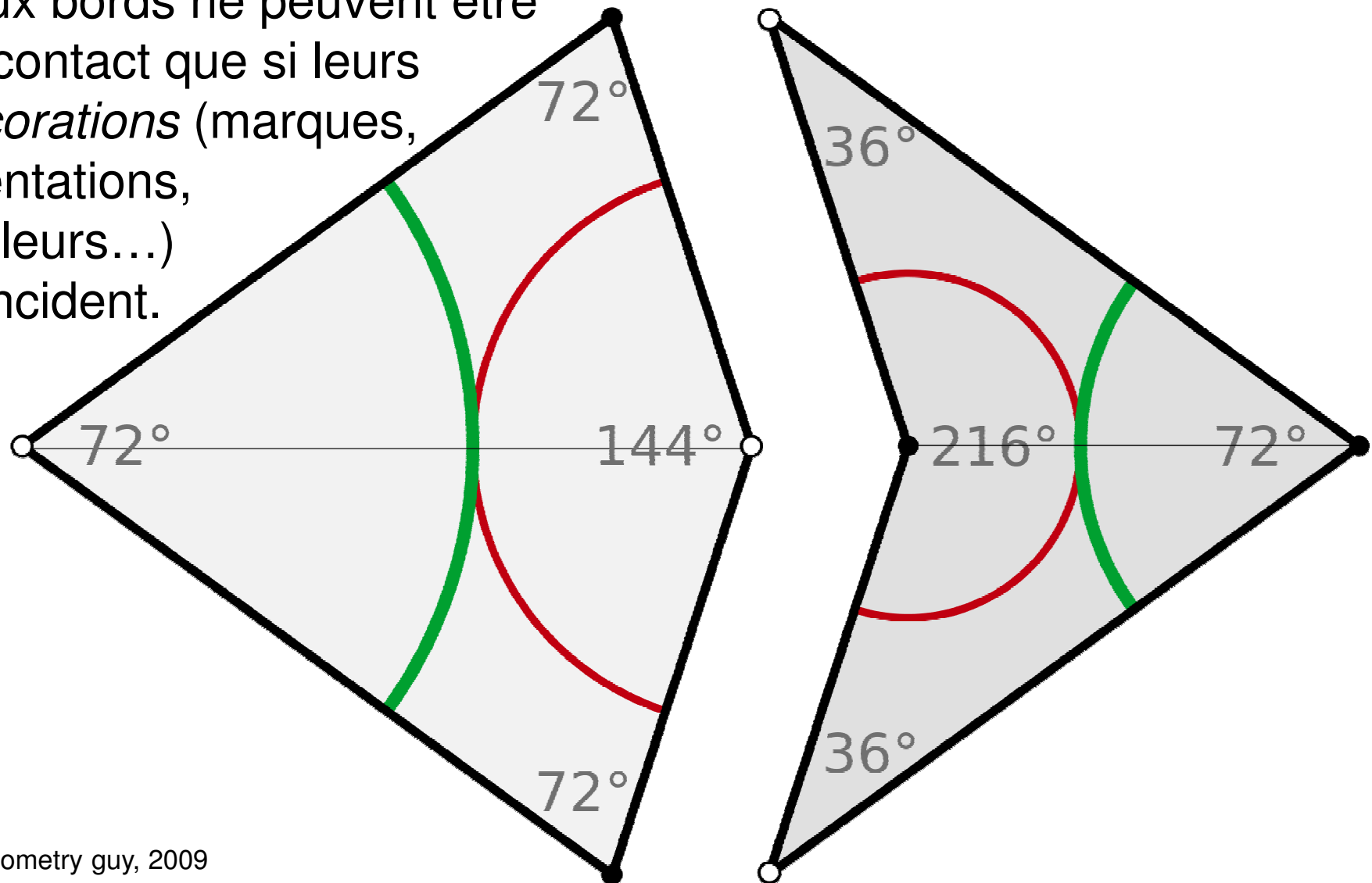


© Kyle Schultz

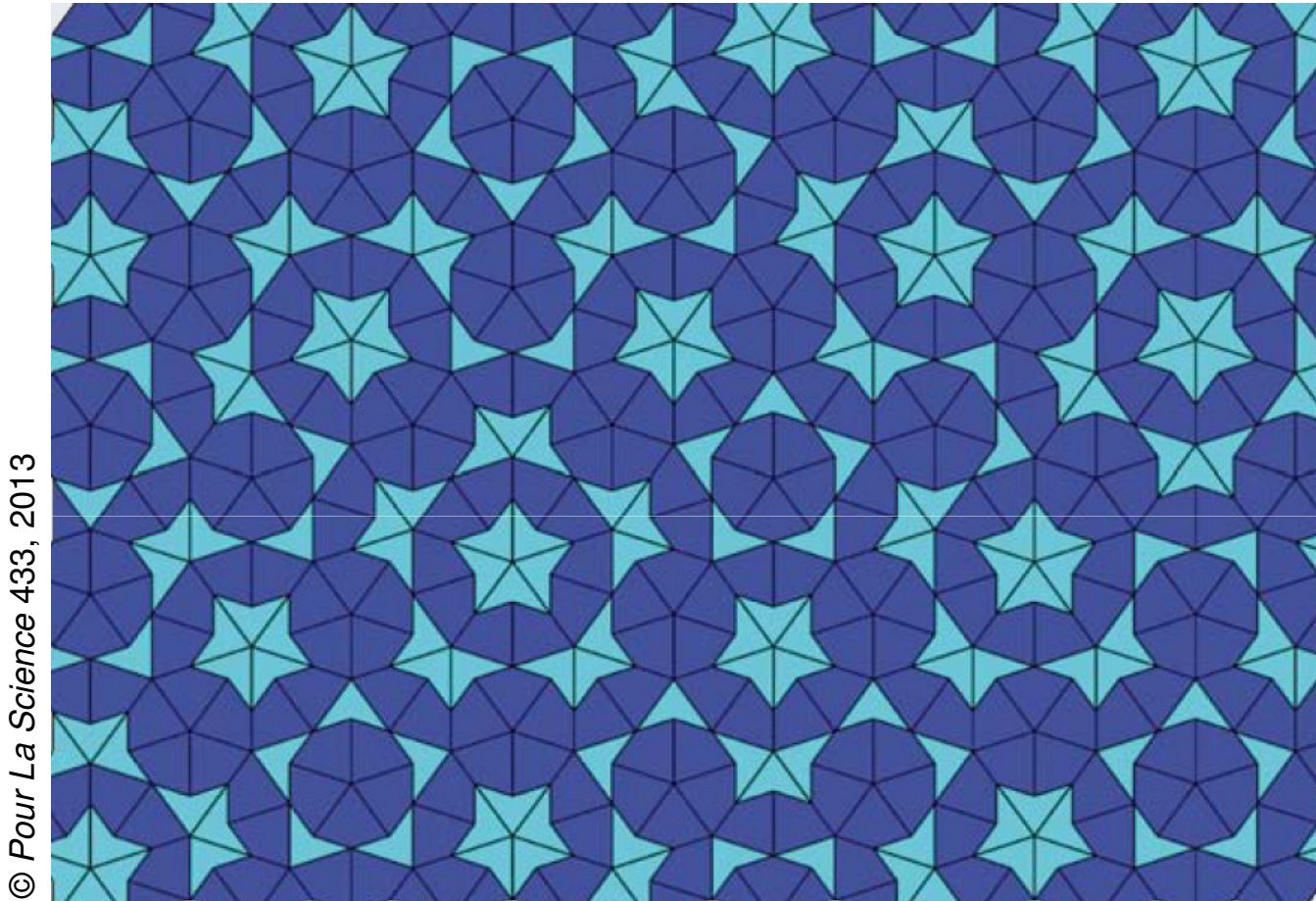
Le *cerf-volant* (ou *kite*, en jaune)
La *flèche* (ou *dart*, en violet)

Les règles d'assemblage

Deux bords ne peuvent être en contact que si leurs *décorations* (marques, orientations, couleurs...) coïncident.



Avec le cerf-volant et la flèche



Pavage aperiodique quasi-périodique

Aucune symétrie de translation.

Toute partie finie du pavage se retrouve une infinité de fois dans le pavage (infinité non dénombrable de pavages de Penrose !).

Un peu de formalisme

Une *forme* du plan est un disque topologique.

On se donne un ensemble fini F de formes distinctes :

$$F = \{F_1, F_2 \dots F_k\}.$$

Un *pavage du plan* à partir de F est la donnée d'un ensemble infini dénombrable T de *tuiles*, $T = \{T_1, T_2 \dots\}$, tel que :

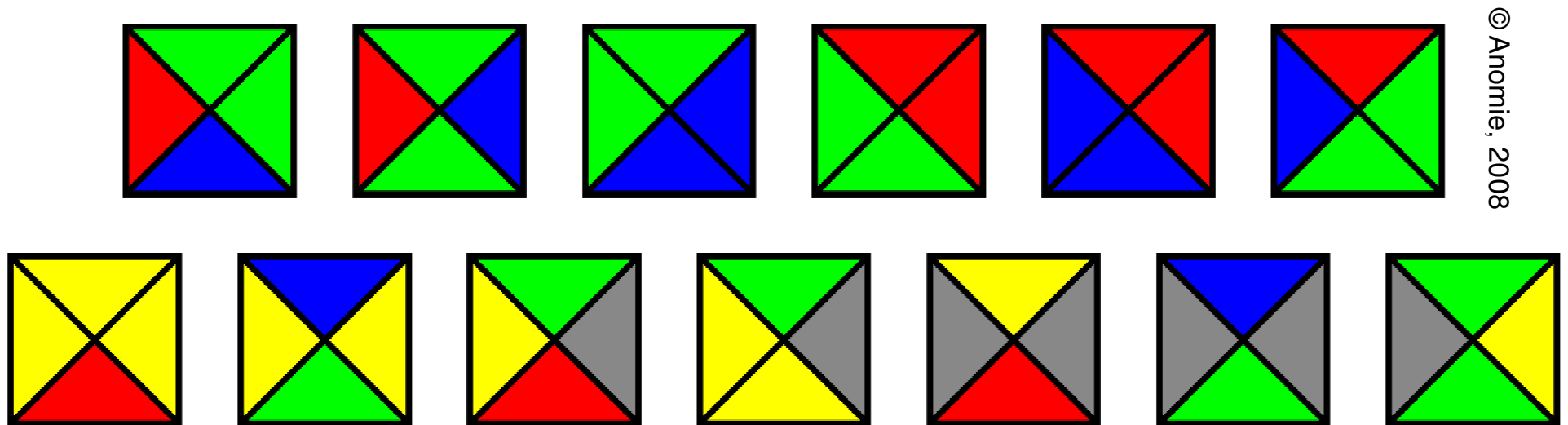
- chaque T_i est isométrique à une forme de F ;
- la réunion de toutes les tuiles est le plan euclidien (tout point du plan appartient à au moins une tuile) ;
- l'intersection des intérieurs de deux tuiles distinctes est vide.

S'il existe un pavage du plan avec $k = 1$, la forme du plan unique contenue dans F est une *monotuile*.

**Mais revenons
aux origines
des pavages apériodiques**

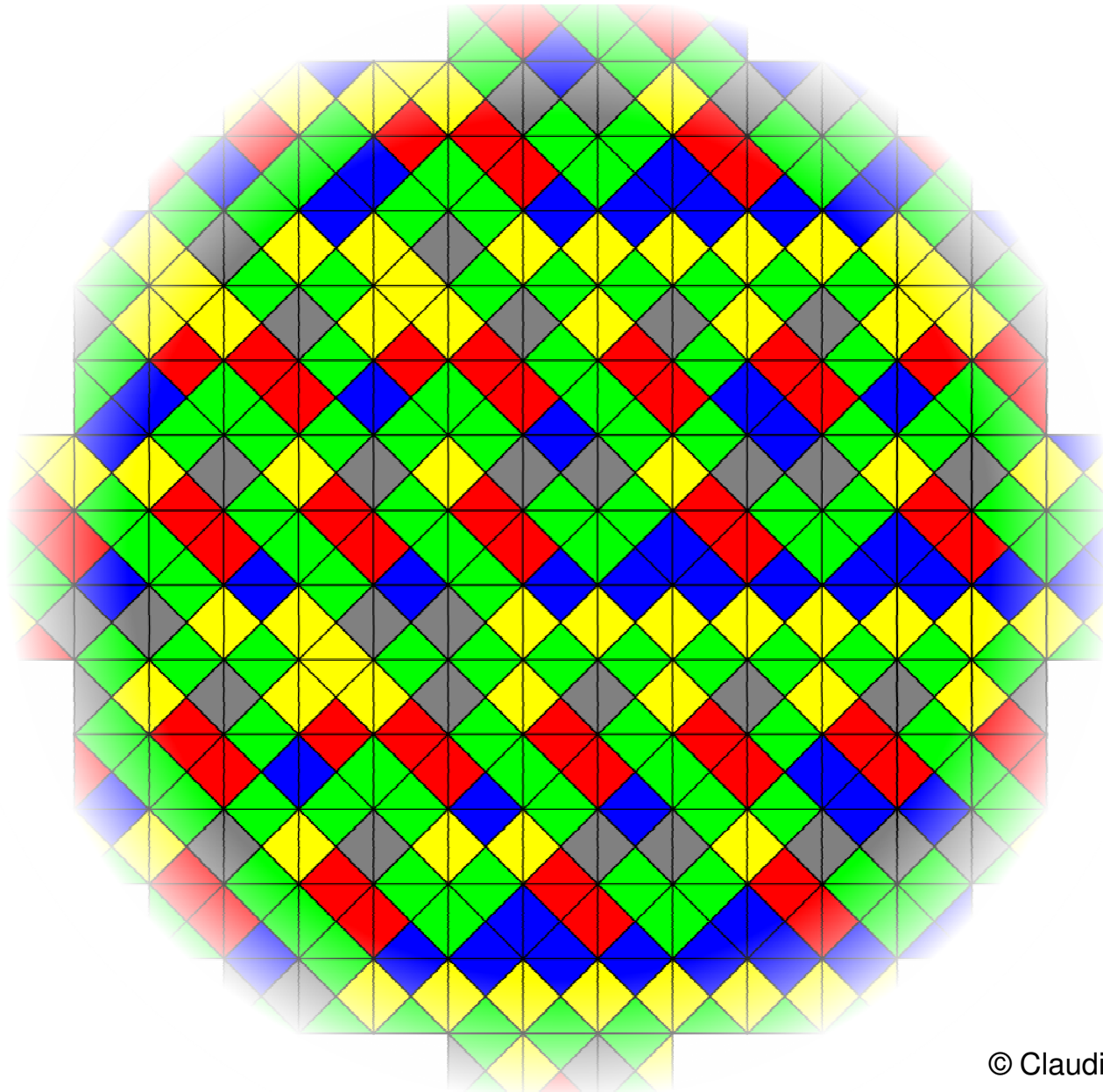
Un peu d'histoire

1961 : Hao Wang introduit treize carrés avec règles d'assemblage (*dominos de Wang*).



Rotations et symétries axiales interdites :
seules les translations sont autorisées !

Un pavage avec les treize dominos



La conjecture fondamentale

Problème des dominos (décidabilité du pavage) : existe-t-il un algorithme qui permette de déterminer si un ensemble fini donné T de dominos de Wang permet de paver le plan ?

Si T ne permet pas de paver le plan, on va s'en apercevoir en un temps fini (on va tomber sur une obstruction). Si T permet de paver le plan de manière périodique, on va trouver un motif périodique en un temps fini.

Conjecture fondamentale (Hao Wang, 1961) : soit T ne permet pas de paver le plan, soit T permet de paver le plan de manière périodique.

L'existence de « dominos de Wang apériodiques » impliquerait l'indécidabilité du problème des dominos (ils feraient obstruction (*) à la décidabilité du problème des dominos).

Une réponse inattendue...

Robert Berger (né en 1938) :

Tout calcul peut être simulé en choisissant astucieusement un ensemble fini de tuiles de Wang et en tentant d'en recouvrir le plan (si l'on tombe sur une obstruction, le calcul est terminé ; sinon, le calcul se poursuit indéfiniment).

Or, le *problème de la décision* (existe-t-il un algorithme qui puisse décider de l'arrêt d'une machine de Turing ?) est indécidable.

Donc la conjecture fondamentale est fausse !

En conséquence, il existe un ensemble de tuiles apériodique.

La quête commence !

1964 : Berger trouve un ensemble apériodique de tuiles de Wang comprenant 20 426 tuiles. Il réduit cet ensemble à 103 tuiles.

1968 : Donald Knuth (né en 1938) obtient 86 tuiles.

1971 : Raphael Robinson trouve un ensemble de 6 tuiles.



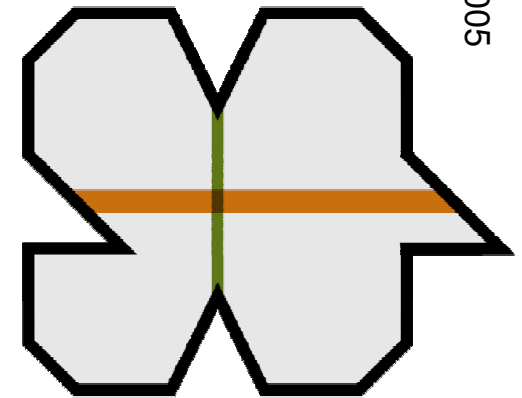
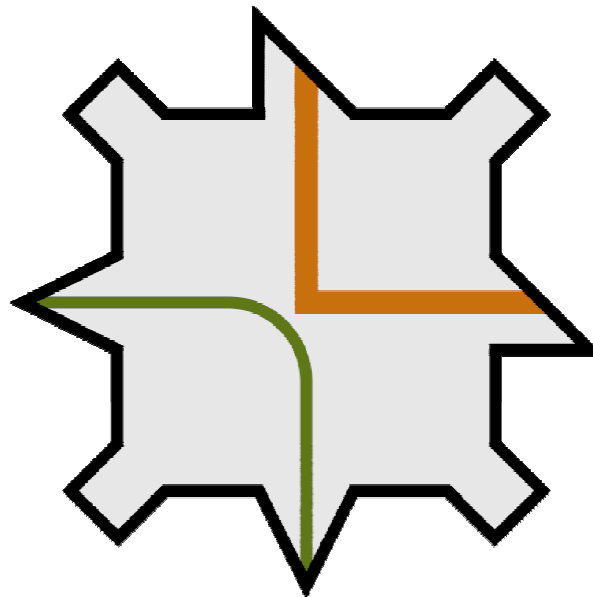
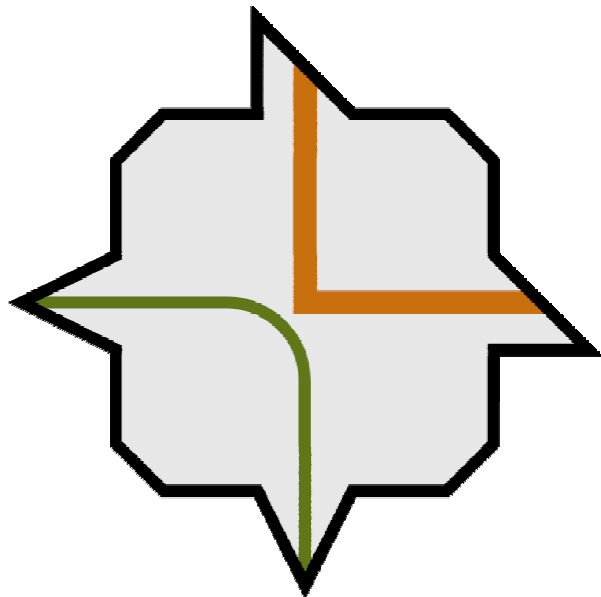
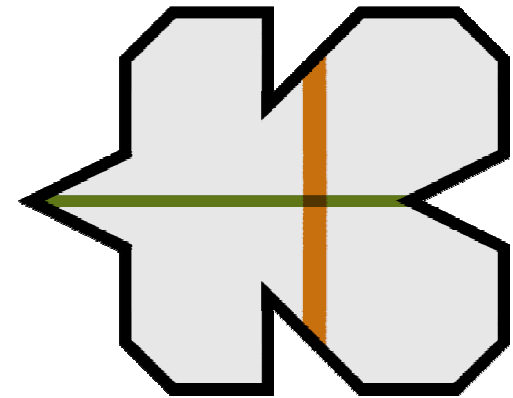
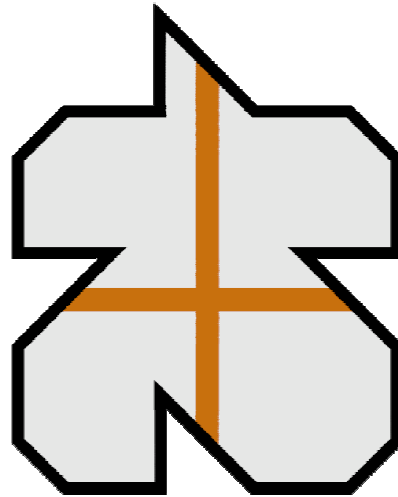
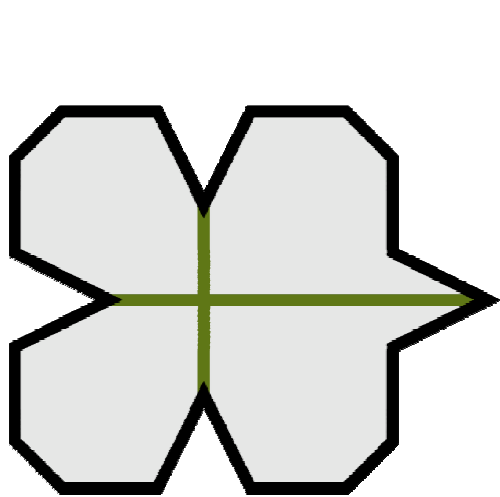
Hao Wang
(1921–1995)

Raphael
Mitchel
Robinson
(1911–1995)

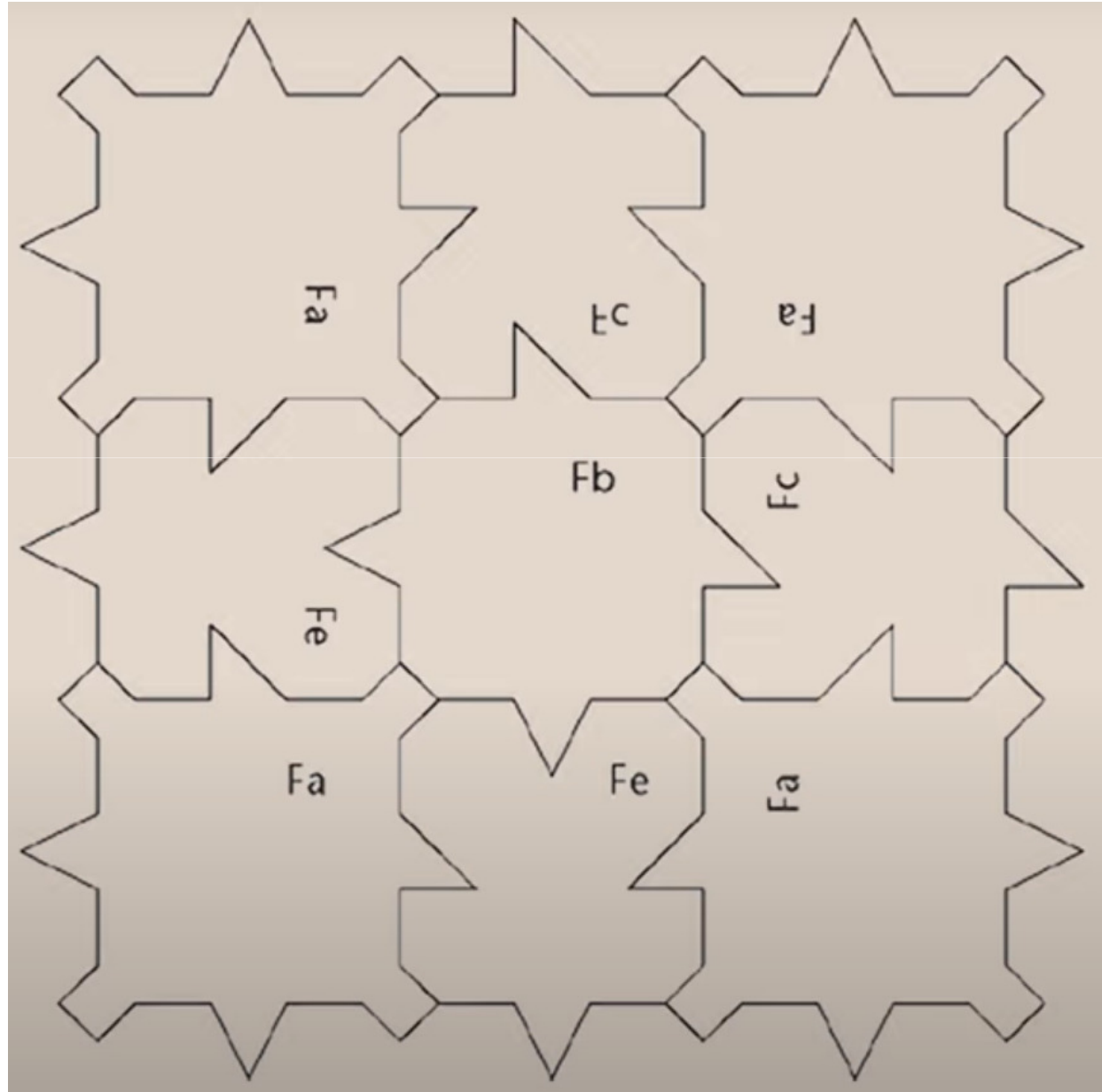


© George Bergman / Oberwolfach
Photo Collection, 1990

Les six tuiles de Robinson

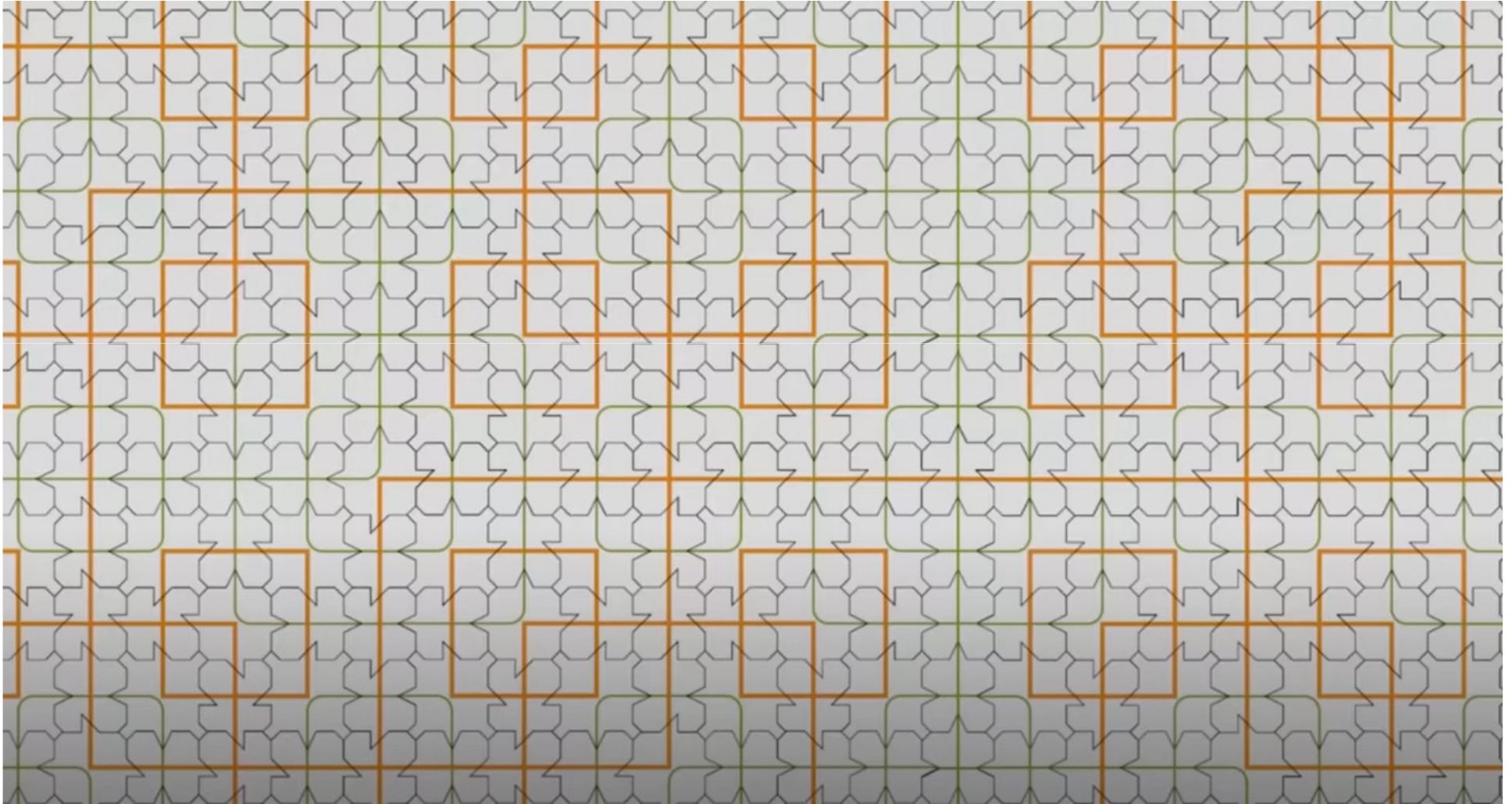


Rotations et réflexions permises !

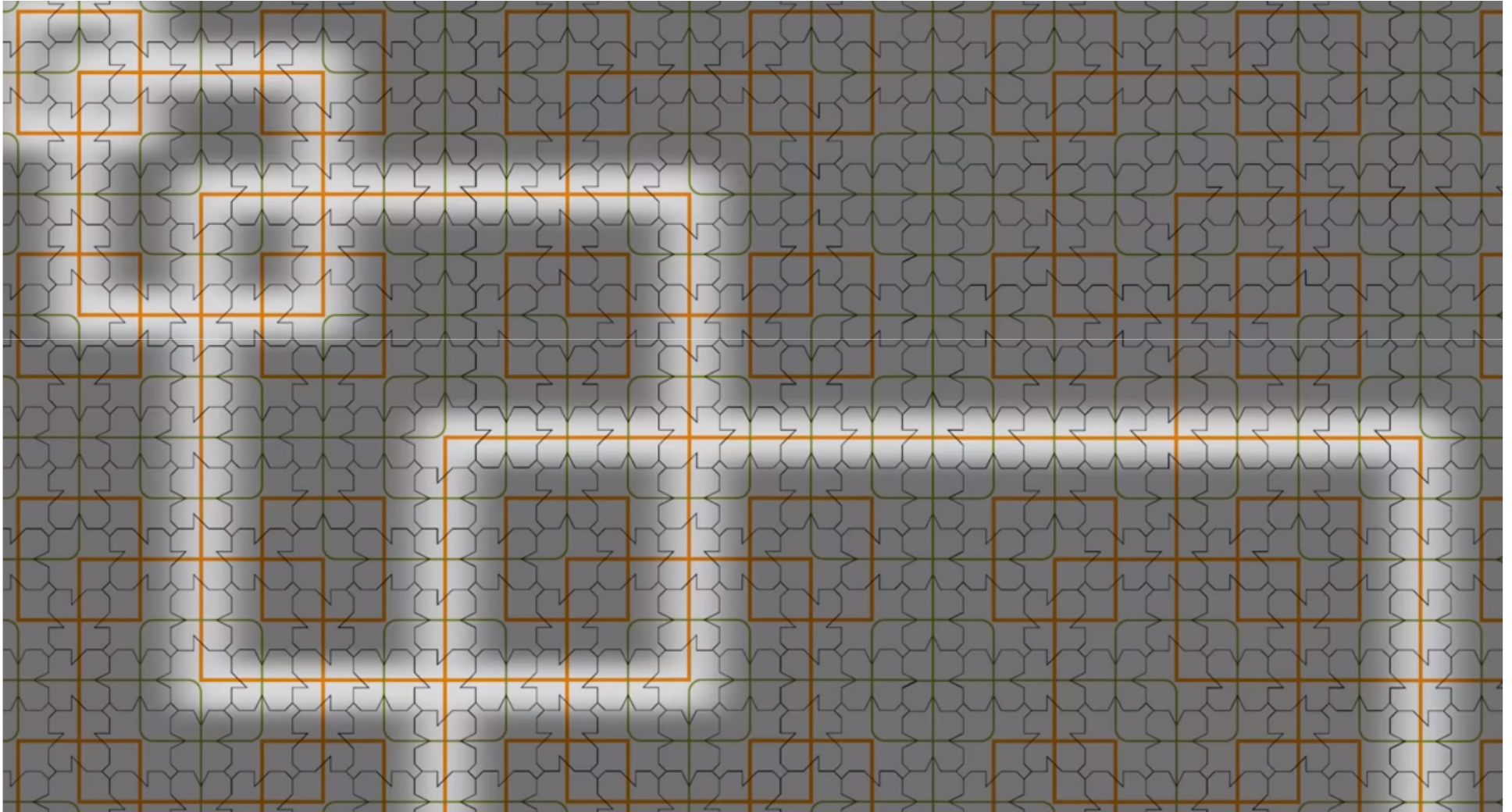


© Robinson, 1971

Un pavage possible

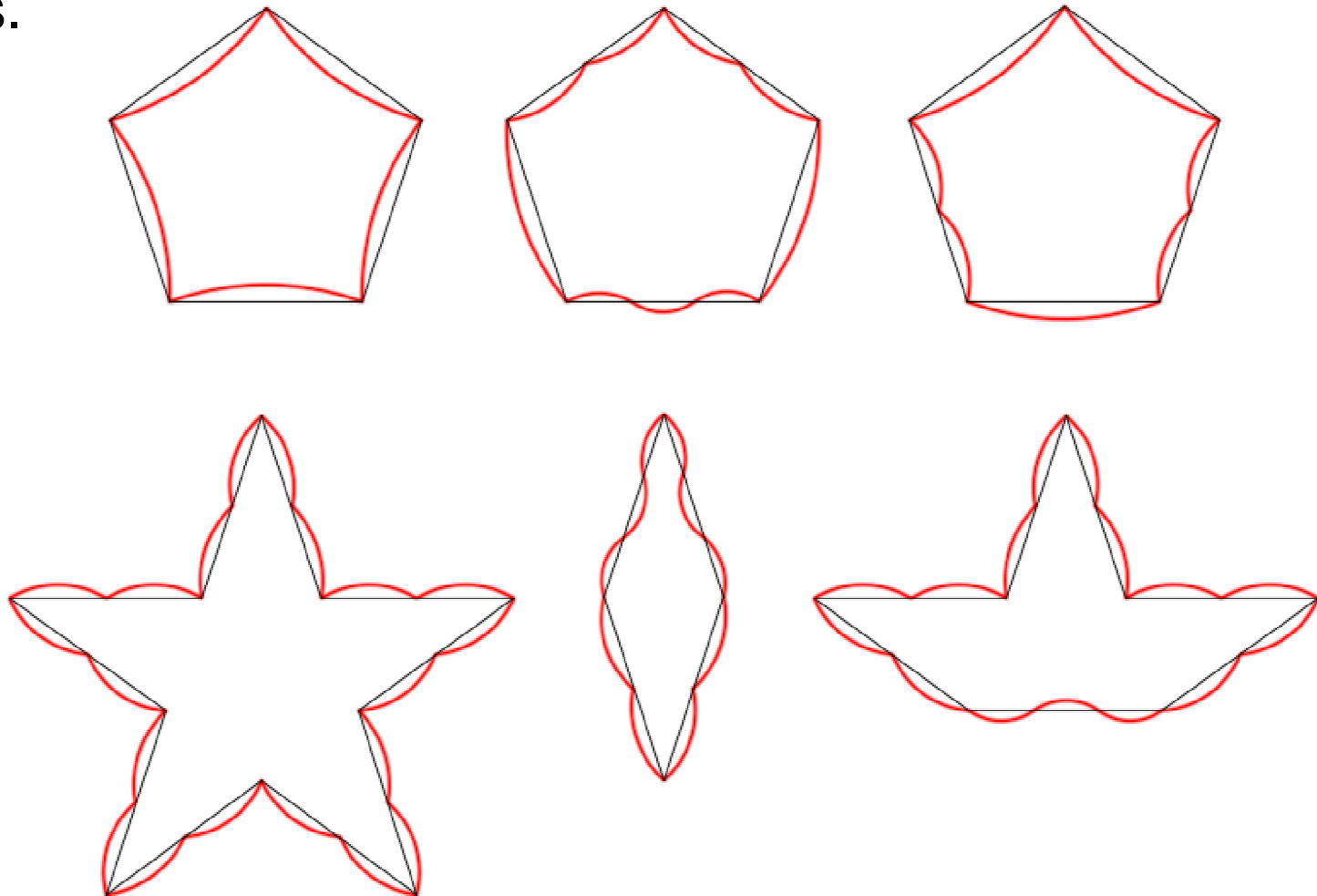


Une structure hiérarchique émerge

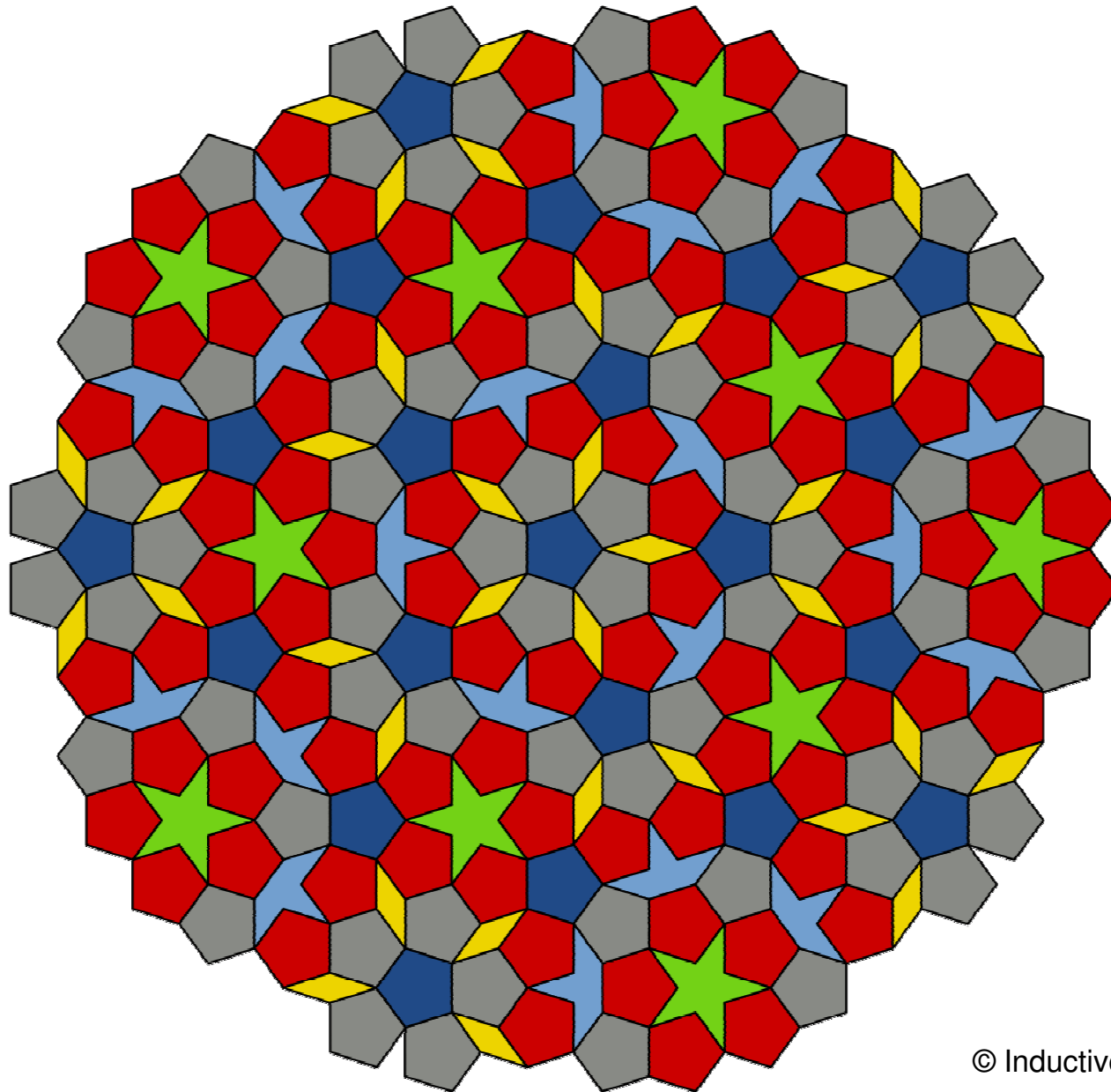


Les six tuiles de Penrose

1973 : Roger Penrose (né en 1931) obtient 6 tuiles à partir de pentagones.



Un pavage correspondant



Deux tuiles... et ?

1974 : Roger Penrose réduit ses 6 tuiles à 3, puis à 2.

Première publication en 1977 par... Martin Gardner (1914–2010) !

Un losange fin et un losange gras (avec règles d'assemblage) ;
un cerf-volant et une flèche (avec règles d'assemblage).

Problème « ein Stein »

Existe-t-il une *monotuille apériodique* (une forme, par exemple un polygone, qui pave tout le plan et qui ne pave le plan **que de manière apériodique**) ?

Roger Penrose pense depuis toujours qu'une telle tuile (*Stein* en allemand) pourrait bien exister...

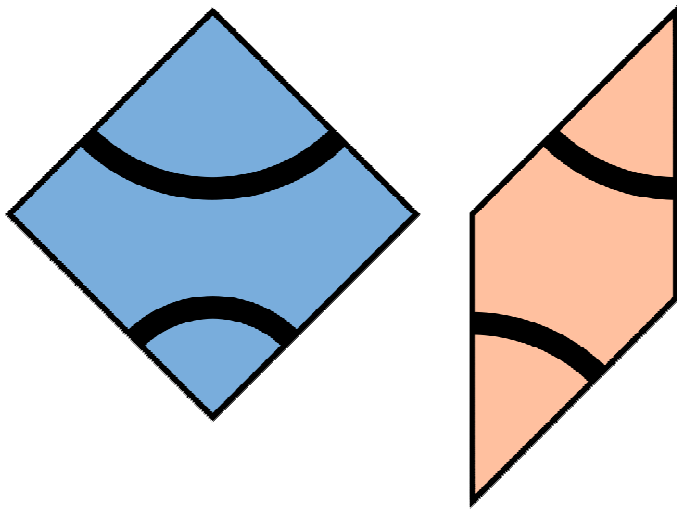
Sir Roger Penrose



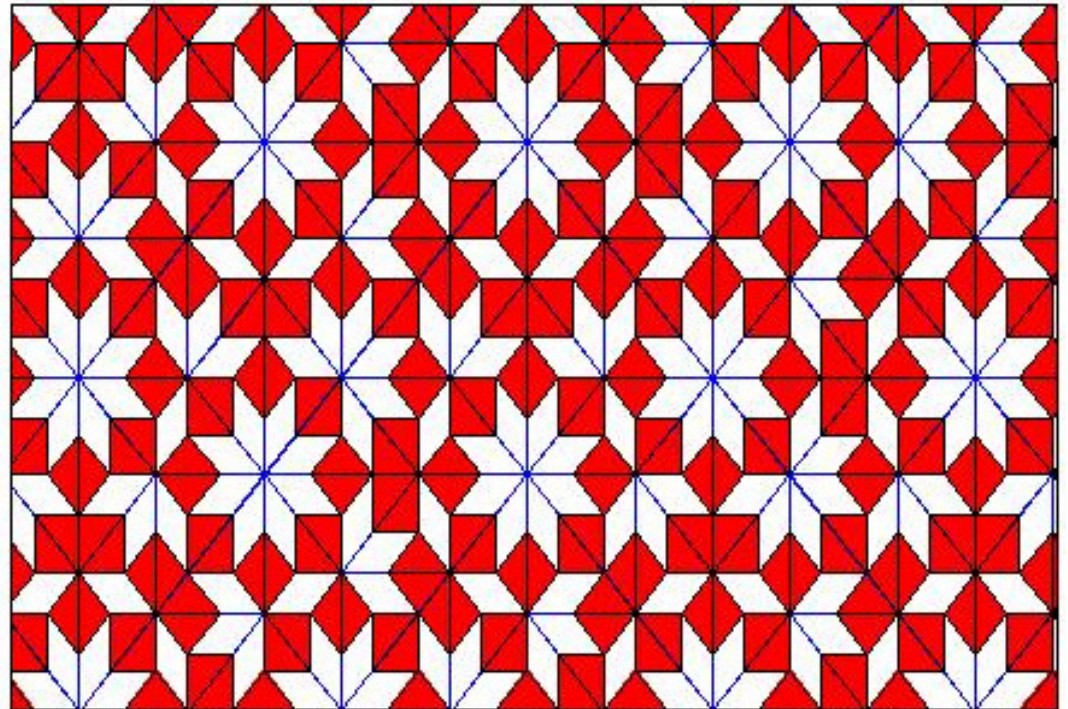
© Édouard Thomas, 2015
(Institut Henri Poincaré, Paris,
vendredi 2 octobre 2015)

L'annonce d'Ammann

1976 : Robert Ammann (1946–1994) redécouvre les pavages de Penrose avec les deux losanges. Ils sont quasi-périodiques (ces pavages sont tous *mutuellement localement dérivables* : ils peuvent se déduire l'un de l'autre par un ensemble de règles locales).

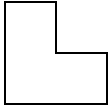


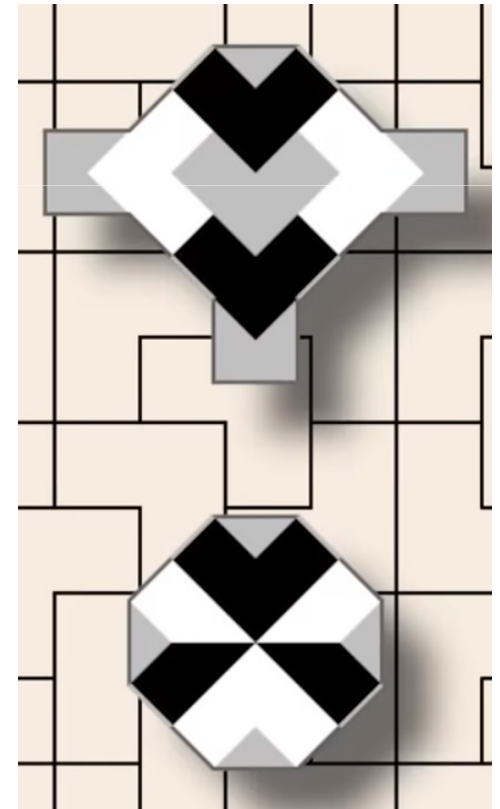
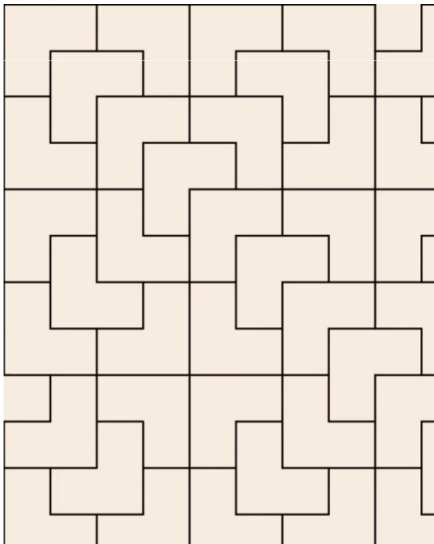
© Huacayacauh, 2022



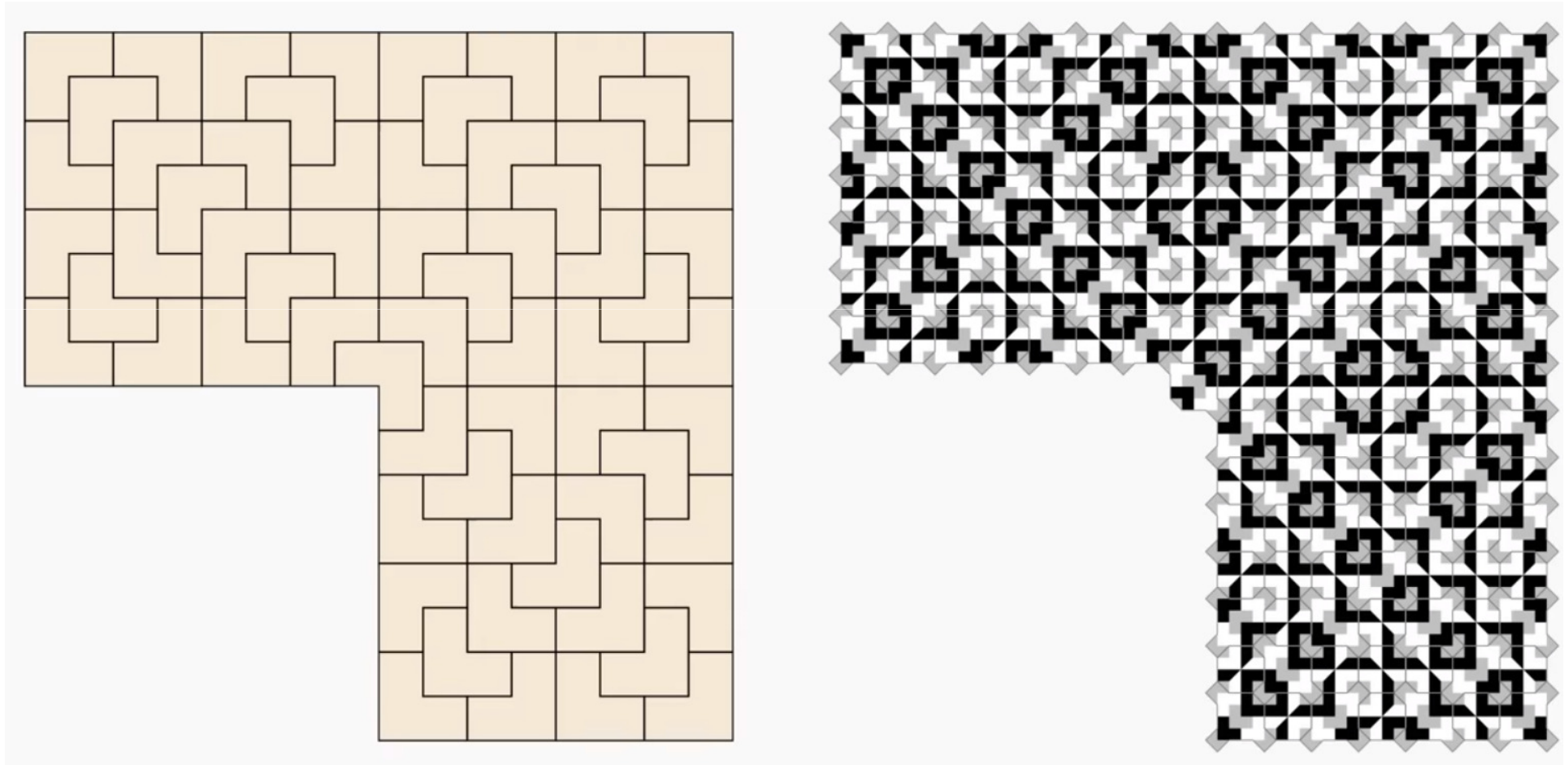
© Ael 2, 2006

Avec des équerres

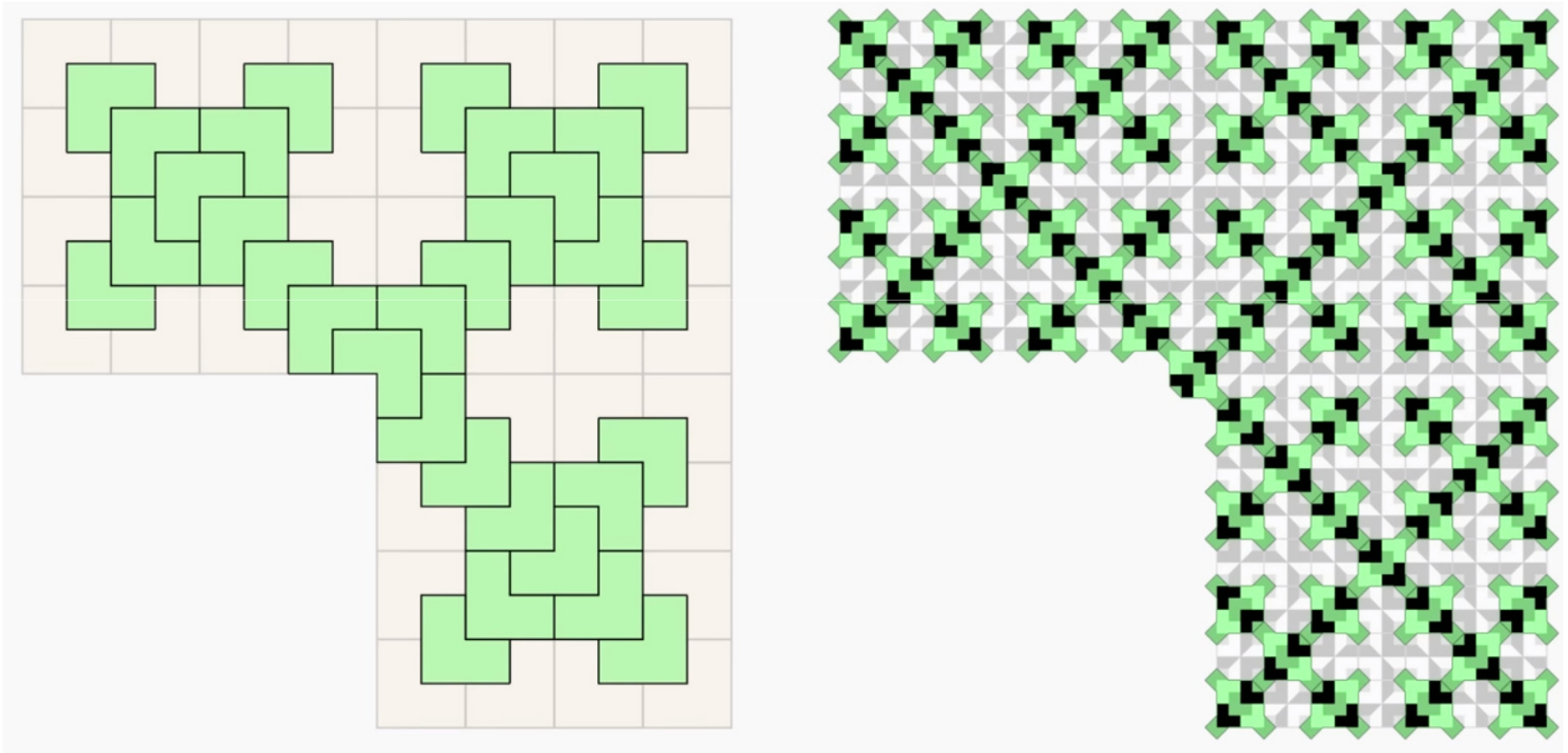
Pavage apériodique possible avec des équerres. 
Les règles d'assemblage pour interdire tout pavage périodique
conduisent nécessairement à deux tuiles : le crabe et le trilobite !
(Obstruction (***))



Pavage local (trilobite et crabe)

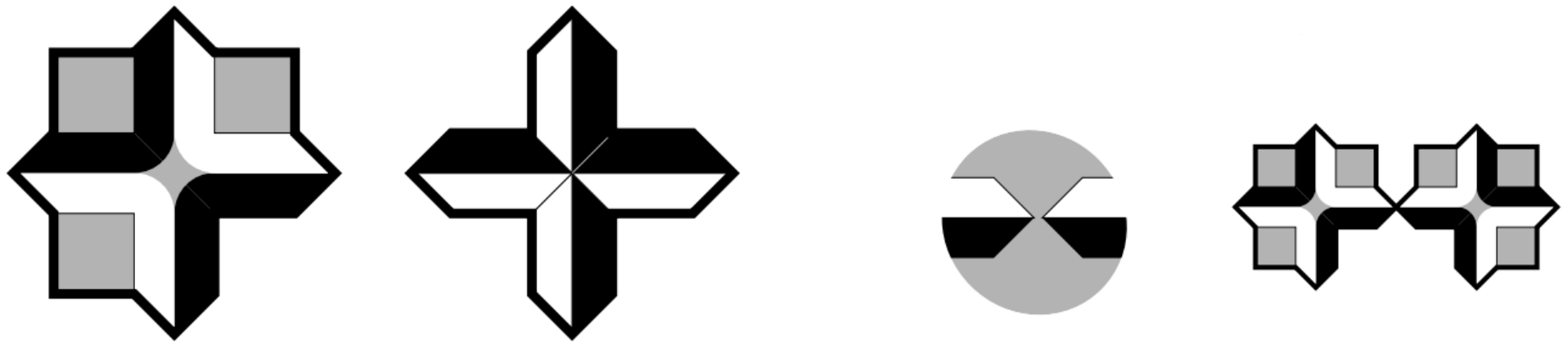


La même structure !

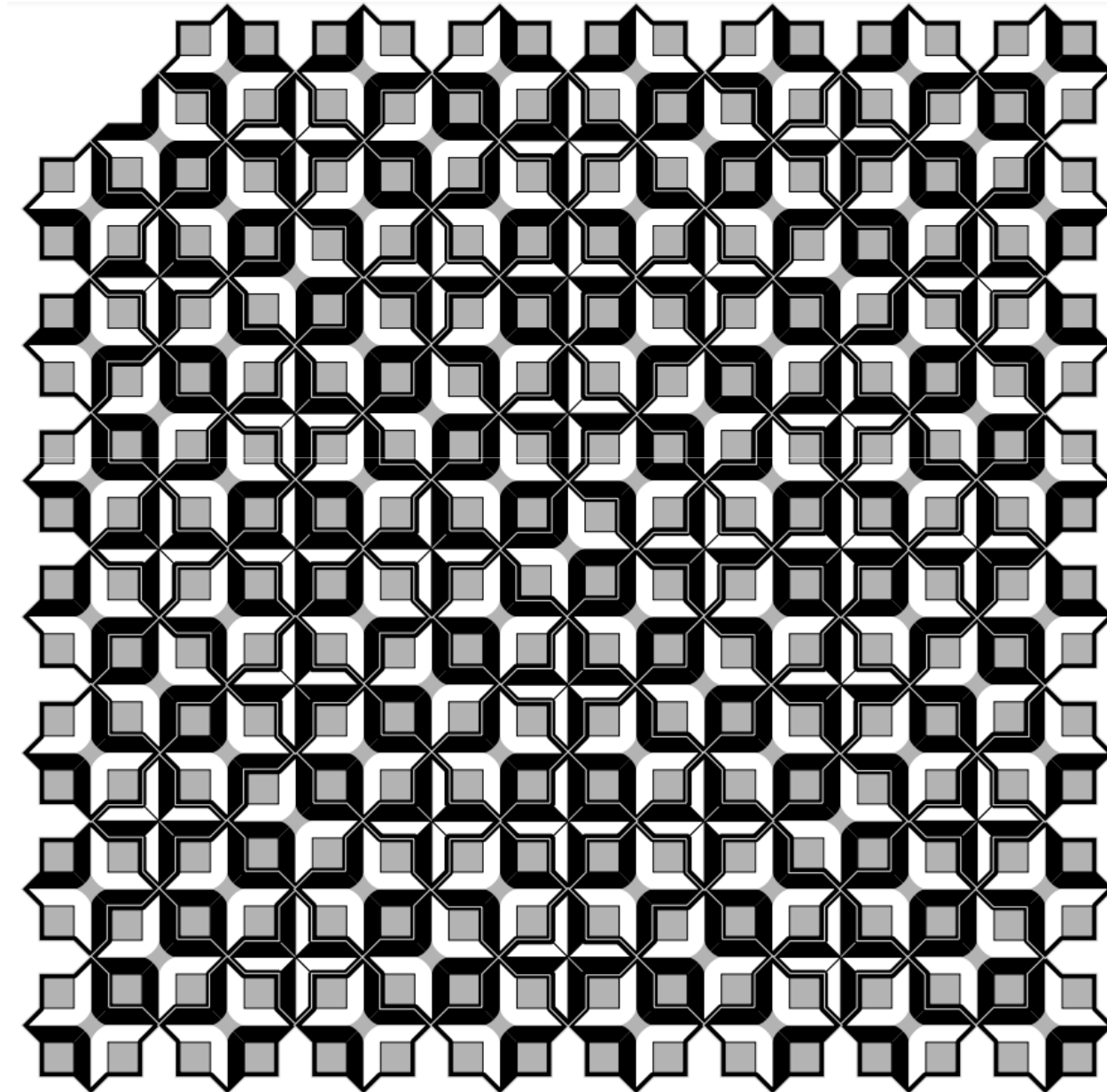


Le trilobite et la croix

1999 : nouvel ensemble apériodique de 2 tuiles, par Chaim Goodman-Strauss (le trilobite, la croix, une règle d'assemblage).



Pavage du plan (trilobite et croix)



La tuile de Socolar–Taylor

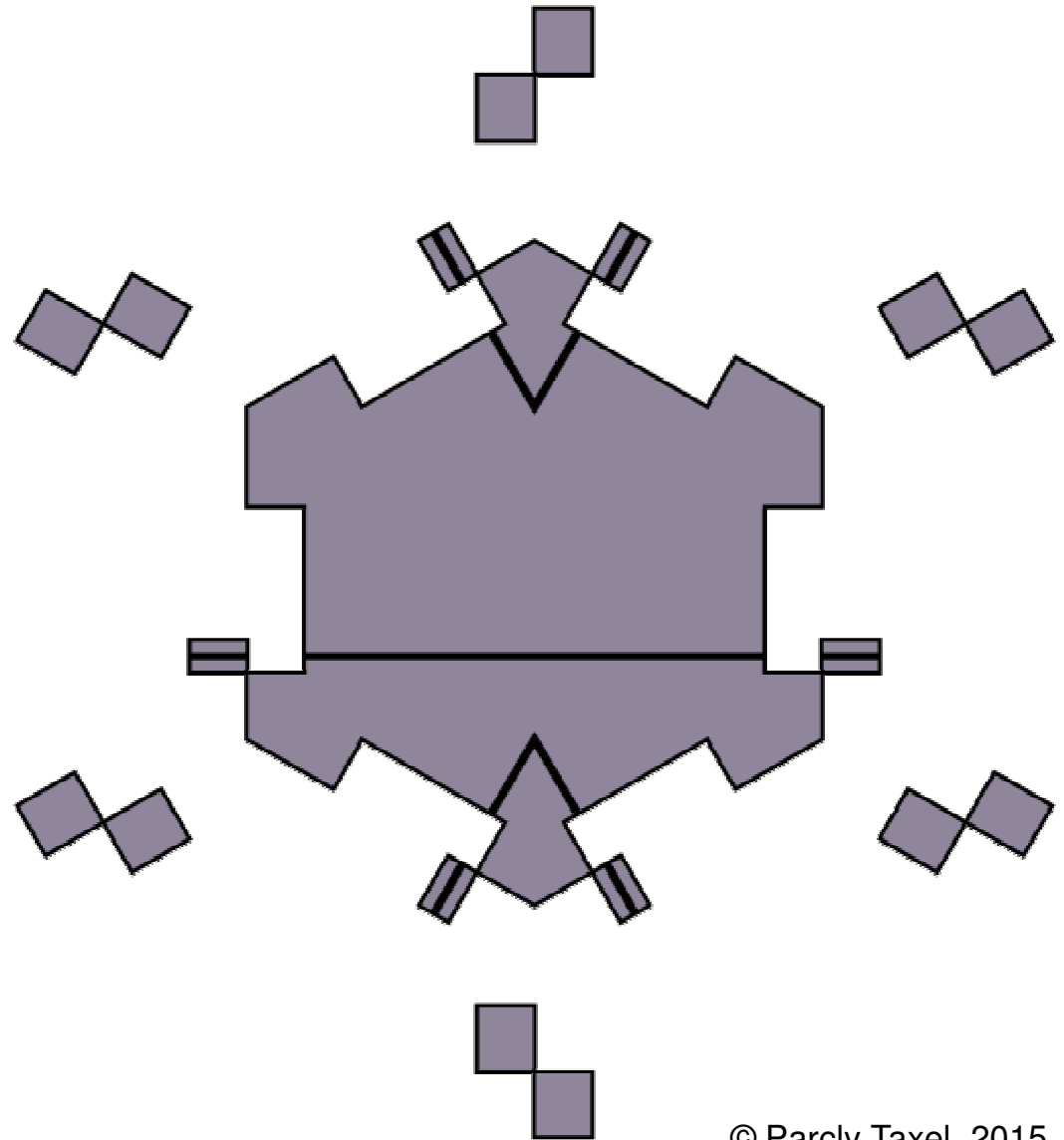
Due à Joshua Socolar
et Joan Taylor (2010)

Construite à partir
d'un hexagone régulier

Deux règles
d'assemblage

Répond au problème
« ein Stein »

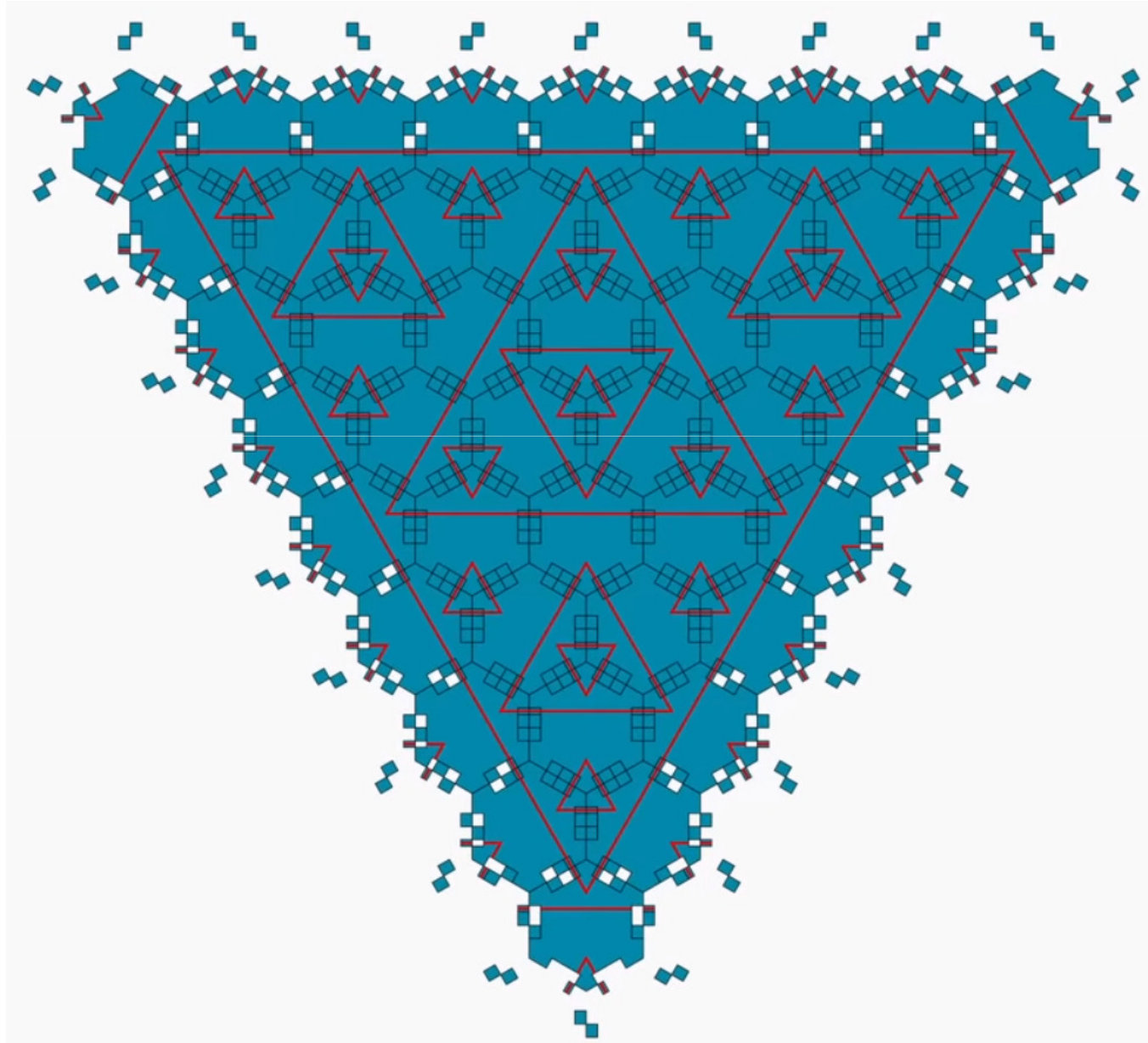
Forme non connexe !



Pavage de Socolar–Taylor



Structure : triangles de Sierpinski

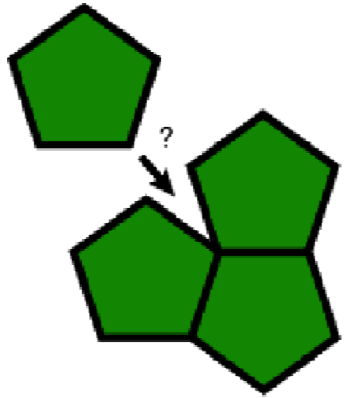


D'autres contributions

Hans Läuchli ; Jarkko Kari ; Karel Culik II ;
Emmanuel Jeandel et Michaël Rao ;
Bruno Poizat ;
Marjorie Rice et Doris Schattschneider ;
Branko Grunbaum et Geoffrey Shephard ;
Stav Olav Aanderaa et Harry Lewis ;
Shahar Mozes ;
Marjorie Senechal ;
Ludwig Danzer ;
Panagiotis Papasoglu ;
Ville Lukkarilla ;
Bruno Durand, Leonid Levin et Alexander Shen ;
Peter Schmitt et John Conway ; Petra Gummelt ;
Nicolas Ollinger ;
Andrei Romashchenko ;
Étienne Moutot...

Des tuiles
« plus ou moins “pavantes” » :
le nombre de Heesch

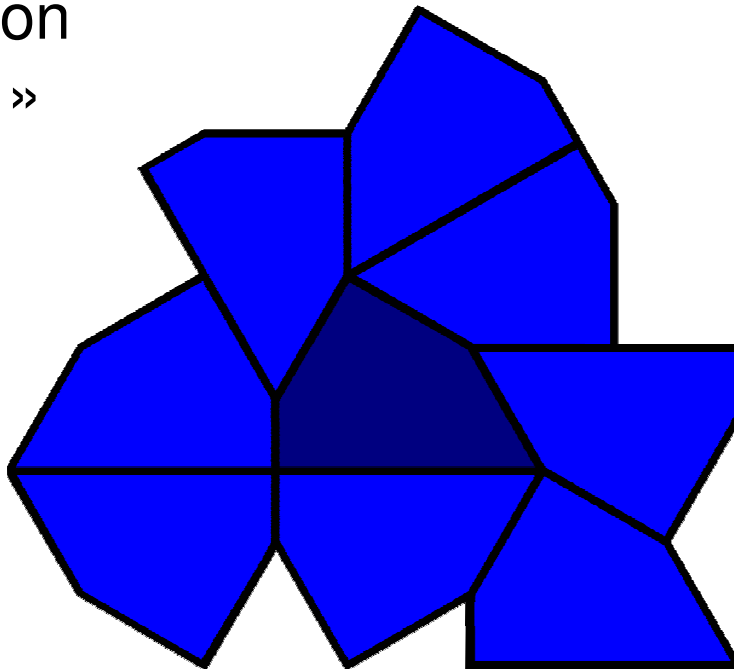
Quantifier le côté « non pavant »



© Robin Jamet, 2014

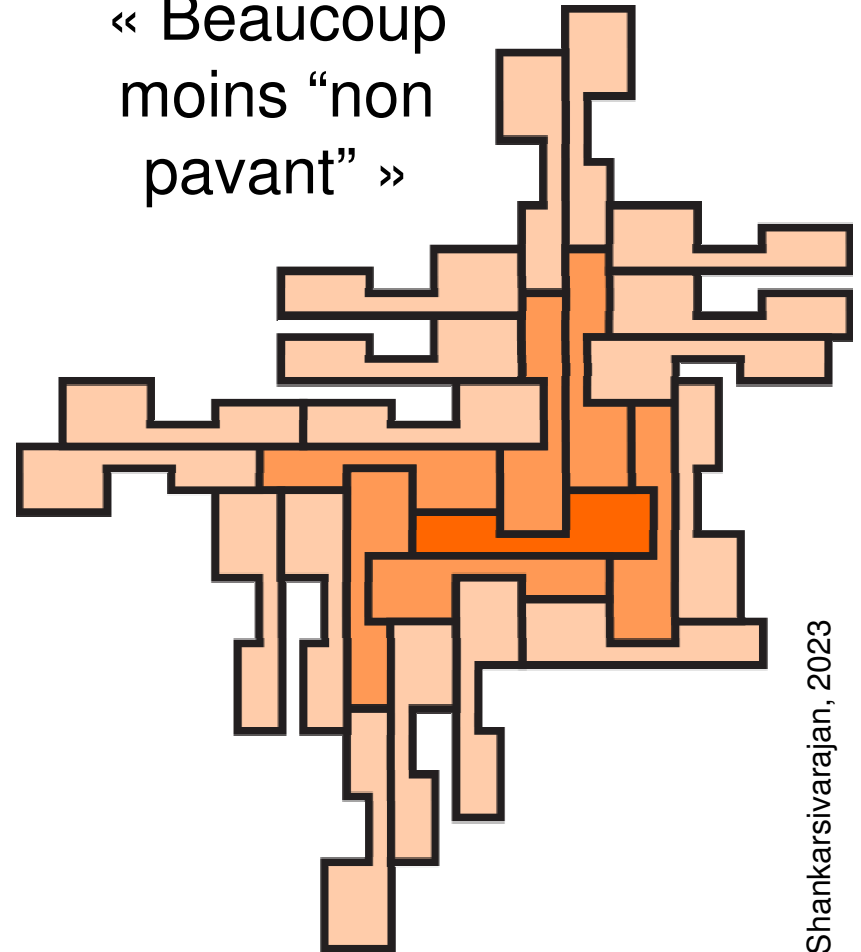
« Très “non pavant” »

« Un peu moins “non pavant” »



© Shankarsivarajan, 2023

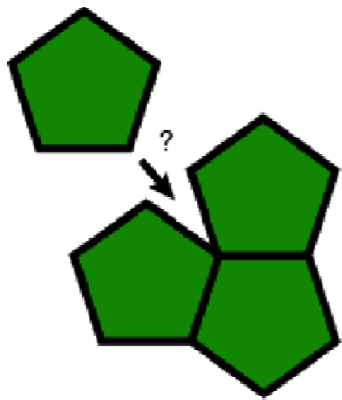
« Beaucoup moins “non pavant” »



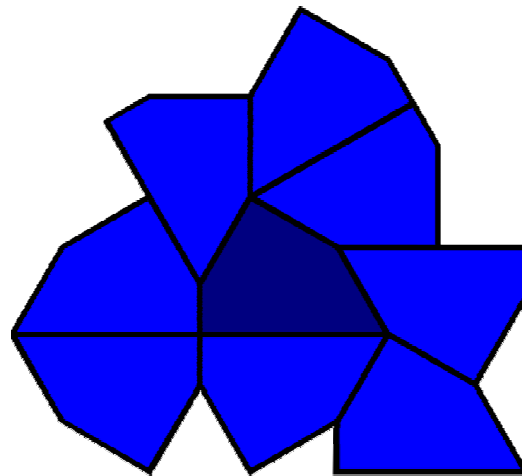
© Shankarsivarajan, 2023

Le nombre de Heesch d'une tuile

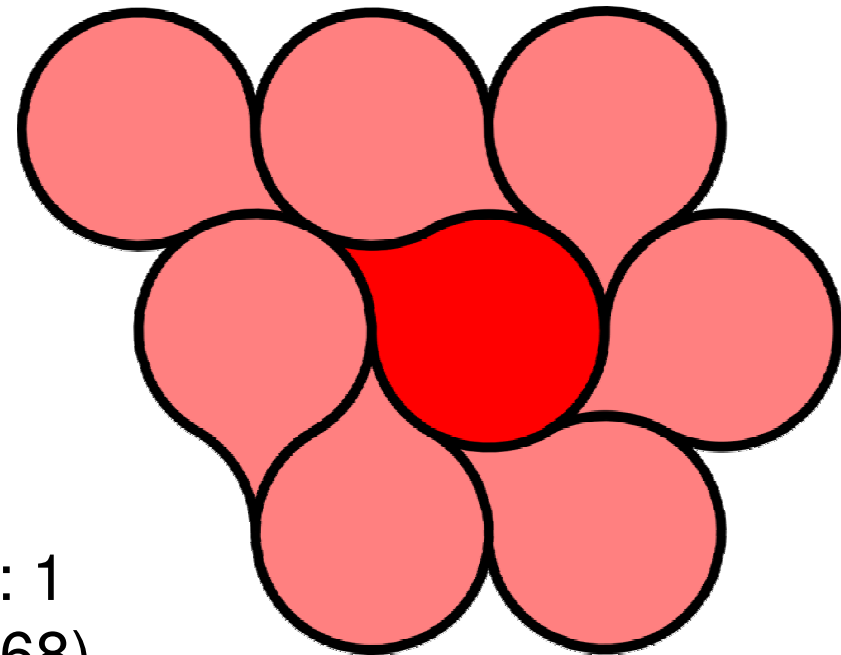
Nombre maximal de couches successives que l'on peut constituer à partir de copies d'une même tuile, sans laisser de vide, sans superposer deux tuiles.



Nombre de
Heesch : 0



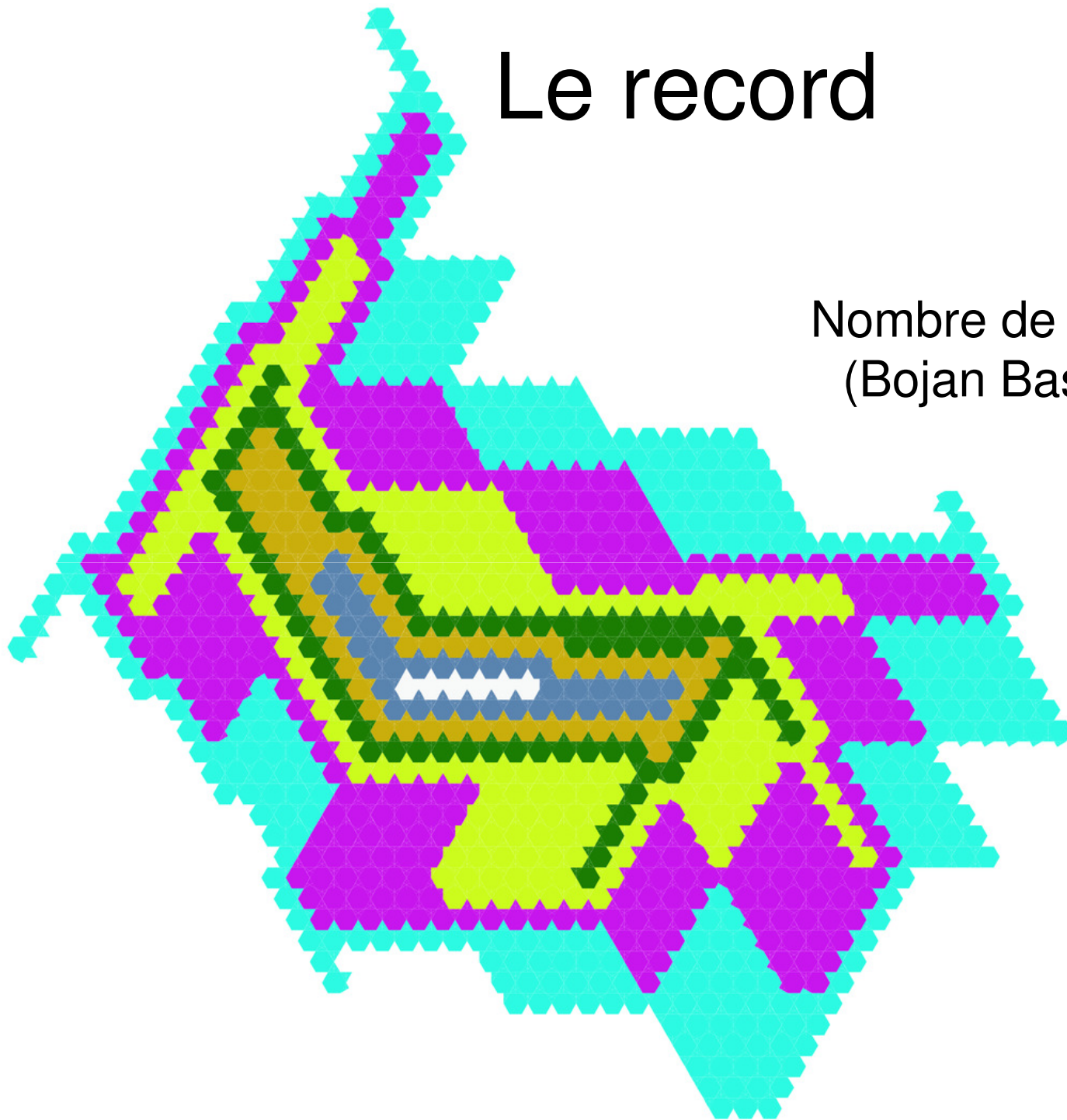
Nombre de Heesch : 1
(Heinrich Heesch, 1968)



Nombre de Heesch : 1
(Walther Lietzmann, 1928)

Le record

Nombre de Heesch : 6
(Bojan Basic, 2020)



La conjecture de Heesch

Nombre de Heesch « faible » : tuile « loin d'être "pavante" ».

Nombre de Heesch « nul » : on ne peut même pas commencer !

Nombre de Heesch « grand » : tuile « pas loin d'être "pavante" ».

Nombre de Heesch « infini » : tuile "pavante".

Conjecture : pour tout entier n , il existe une tuile dont le nombre de Heesch est exactement égal à n .

(Vraie pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.)

Construire des pavages apériodiques :

méthode par coupe et projection,

méthode par inflation et substitution,

structure hiérarchique unique

Paver une droite

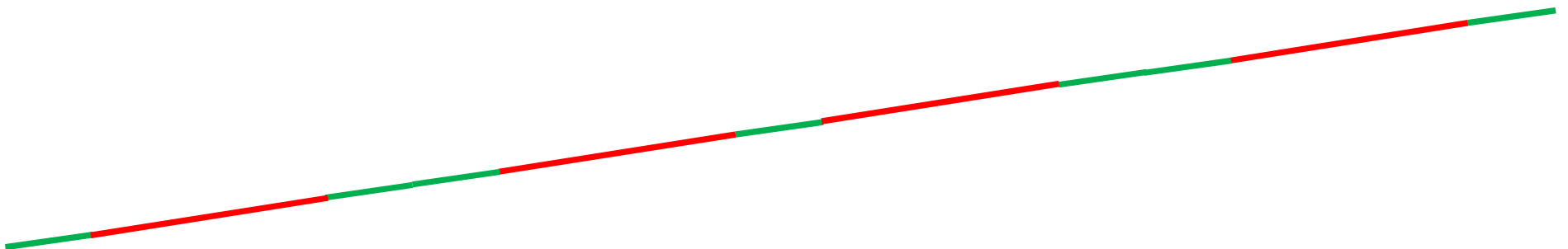
On souhaite paver une droite
avec des segments, de manière apériodique.

Avec un seul segment,  c'est impossible.

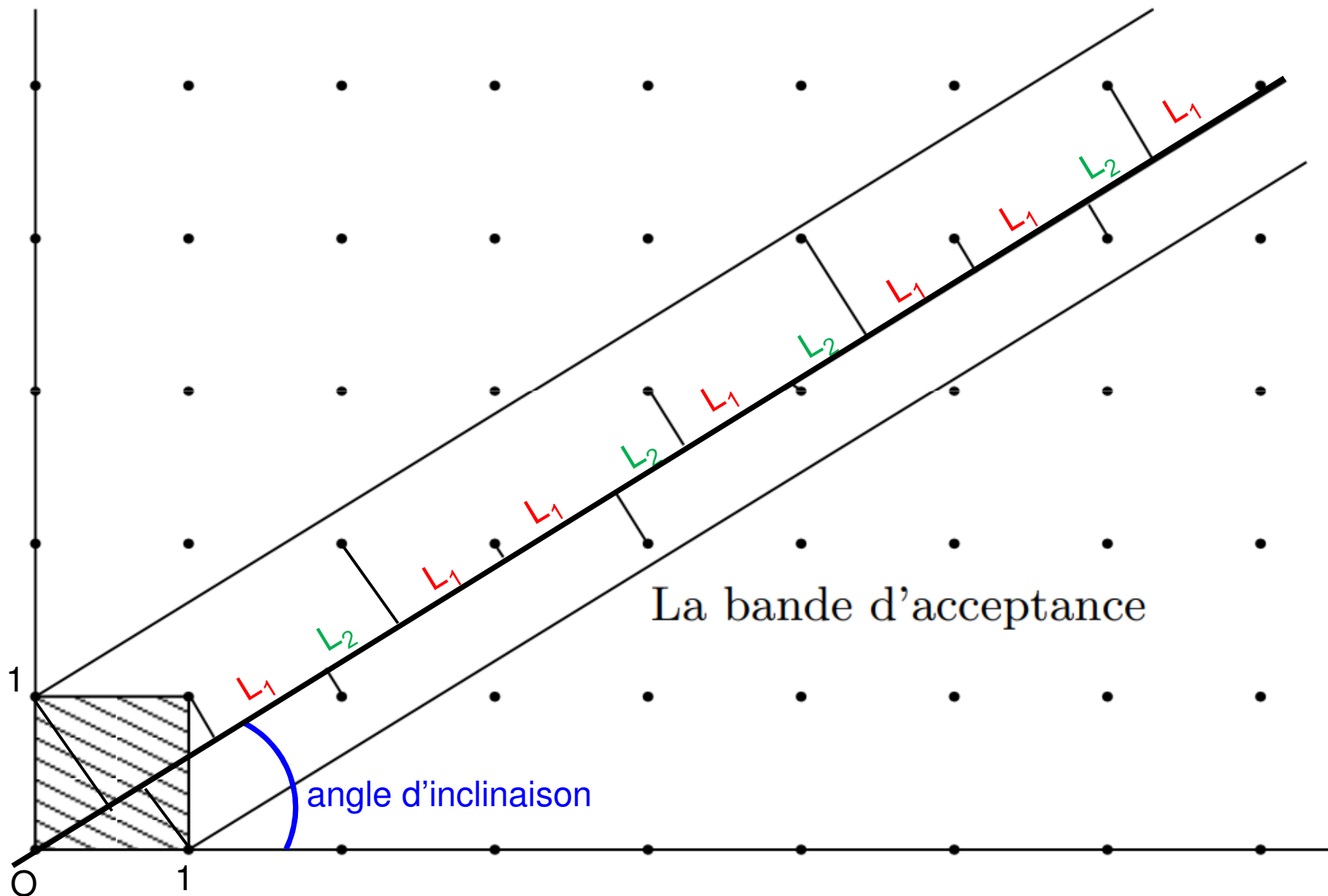
Une solution : prendre (des copies de) **deux** segments,
de longueurs différents L_1  et L_2 
et concaténer ces segments de manière apériodique !

On obtient alors une suite apériodique de nombres :

$\dots L_2, L_1, L_2, L_2, L_1, L_2, L_1, L_2, L_2, L_1, L_2 \dots$



Construction géométrique



Une jolie équivalence

Le pavage de la droite est apériodique si, et seulement si, la tangente de l'angle d'inclinaison est irrationnelle.

Même si, sur la droite, la suite des longueurs des segments est apériodique, le plan dans lequel vit la droite est structuré de manière extrêmement régulière !

C'est l'essence de **la méthode coupe et projection** :

- considérer un réseau périodique de dimension finie ;
- en projeter une « tranche » sur un sous-espace vectoriel E de dimension strictement inférieure ;
- si E a une « direction irrationnelle », alors l'ensemble de points obtenu sera apériodique, et héritera de propriétés de symétrie locale du réseau périodique initial.

Méthode introduite par Nicolaas Govert de Bruijn (1918–2012).

Un nouveau point de vue

Les pavages d'Ammann et de Penrose peuvent s'obtenir par coupe et projection. Ils sont *de facto* apériodiques et héritent de propriétés de symétrie locale du réseau dont ils sont issus.

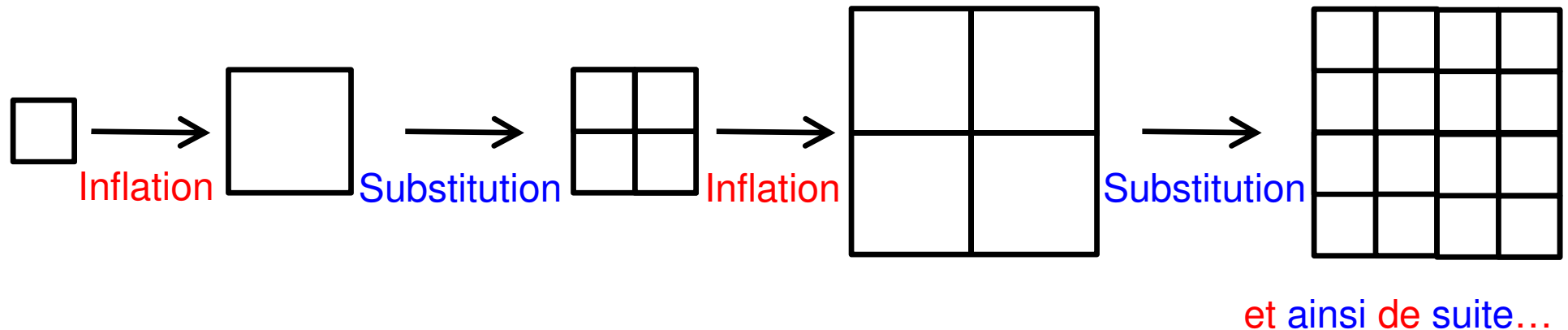
(Ainsi, les pavages de Penrose sont obtenus par la méthode coupe et projection sur un plan à partir de l'espace euclidien à cinq dimensions.)

Au début des années 1980, les pavages apériodiques sortent du cadre des mathématiques récréatives (et autres curiosités) :

- méthode coupe et projection (1981) ;
- travaux sur les quasi-cristaux (1982). Daniel Shechtman (né en 1941) reçoit le prix Nobel de chimie en 2011 ;
- méthode par inflation et substitution (Martine Queffelec, 1987).

Inflation et substitution

Une même forme se trouve reproduite plusieurs fois en elle-même, à plus petite échelle (*substitution*), comme dans une découpe géométrique (ou dissection). Une homothétie (*inflation*) permet de répéter la substitution sur chacune des formes.



Peut conduire à des pavages présentant des régularités, mais non périodiques.

À partir d'un triangle

Le triangle ABC est rectangle en A,
et $AC = AB / 2$ (donc $\tan \hat{B} = 1/2$).

On trace :

H pied de la hauteur issue de A,

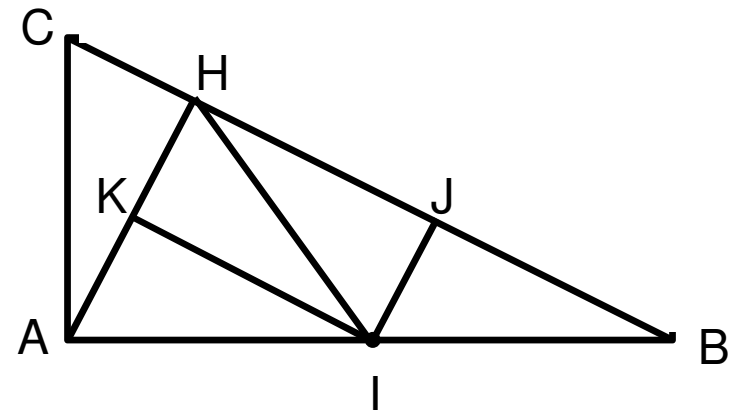
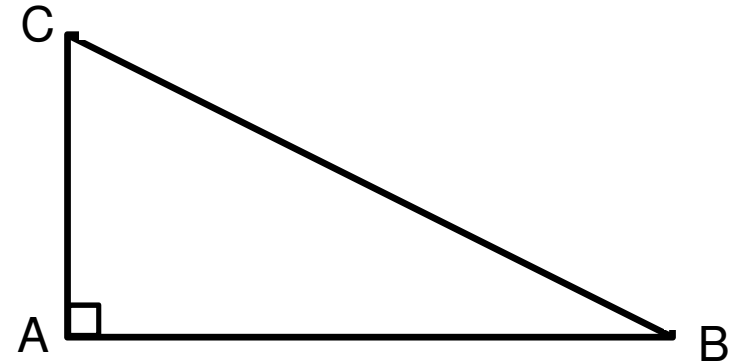
I milieu de [AB],

(IK) parallèle à (BC),

(IJ) perpendiculaire à (BC).

Les cinq triangles HAC, KIA, KIH,
JHI et JBI sont isométriques
et tous semblables à ABC.

(Même orientation pour ABC, KIH et JHI ;
l'orientation des autres triangles est opposée.)



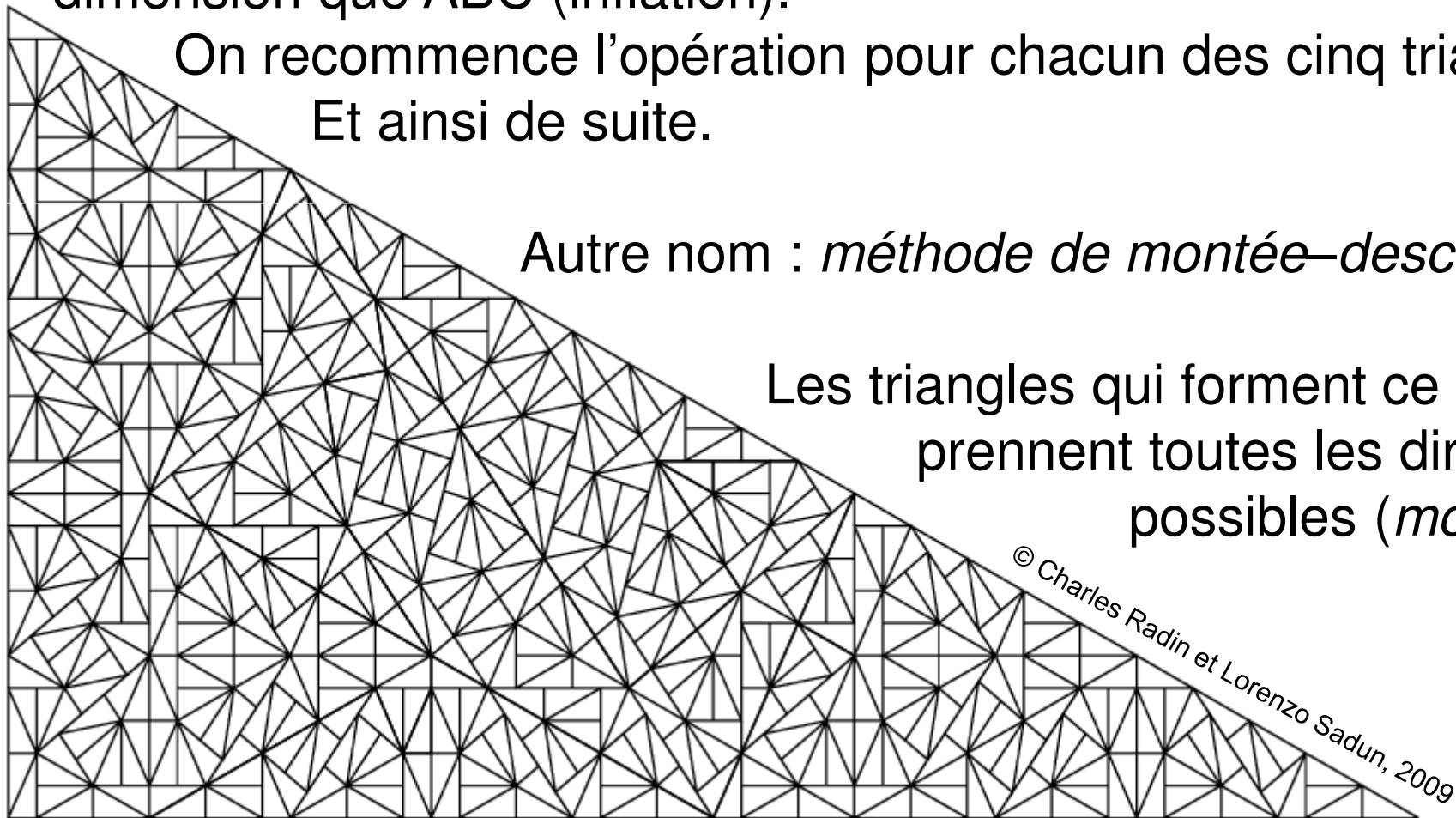
Le pavage moulinet

ABC est remplacé par cinq triangles « identiques » (substitution).
On grossit la figure de sorte que ces cinq triangles aient la même dimension que ABC (inflation).

On recommence l'opération pour chacun des cinq triangles.
Et ainsi de suite.

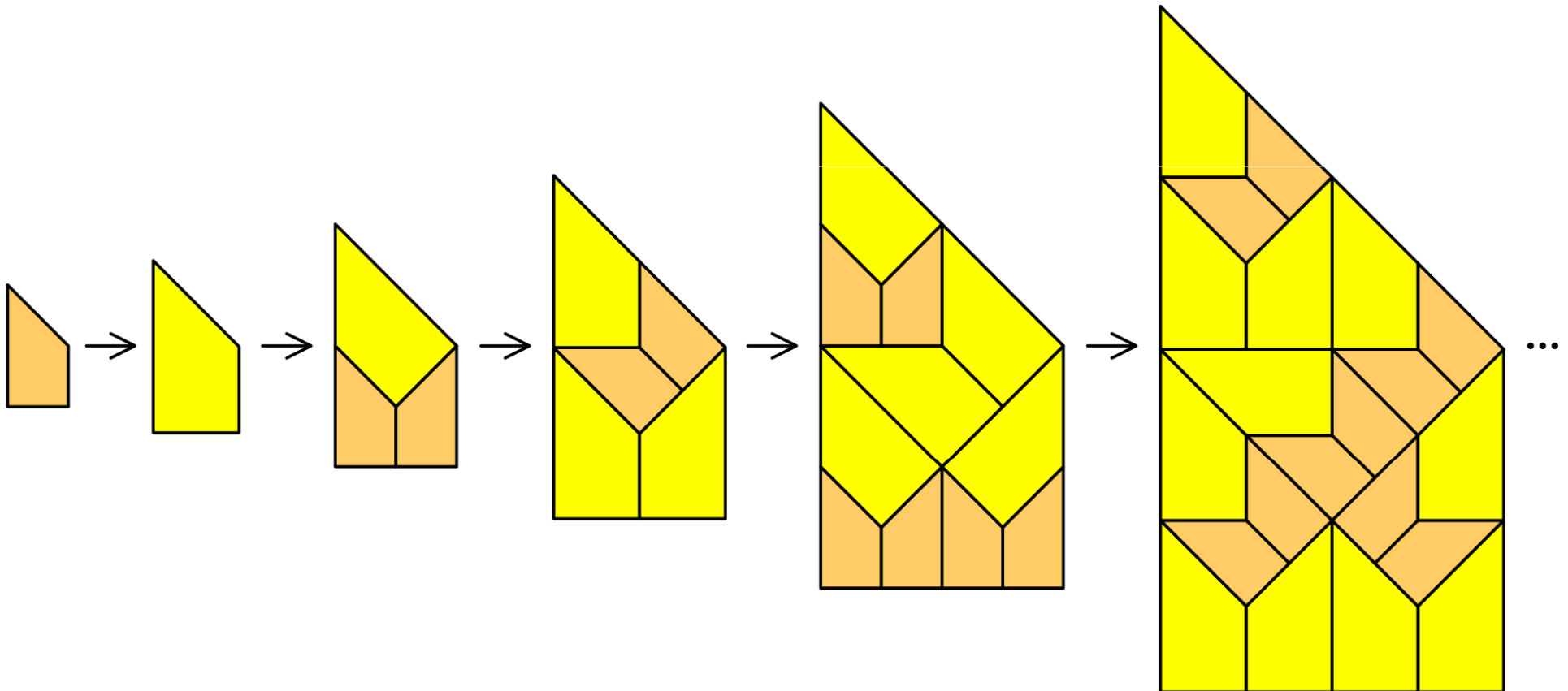
Autre nom : *méthode de montée–descente*.

Les triangles qui forment ce pavage
prennent toutes les directions
possibles (*moulinet*).

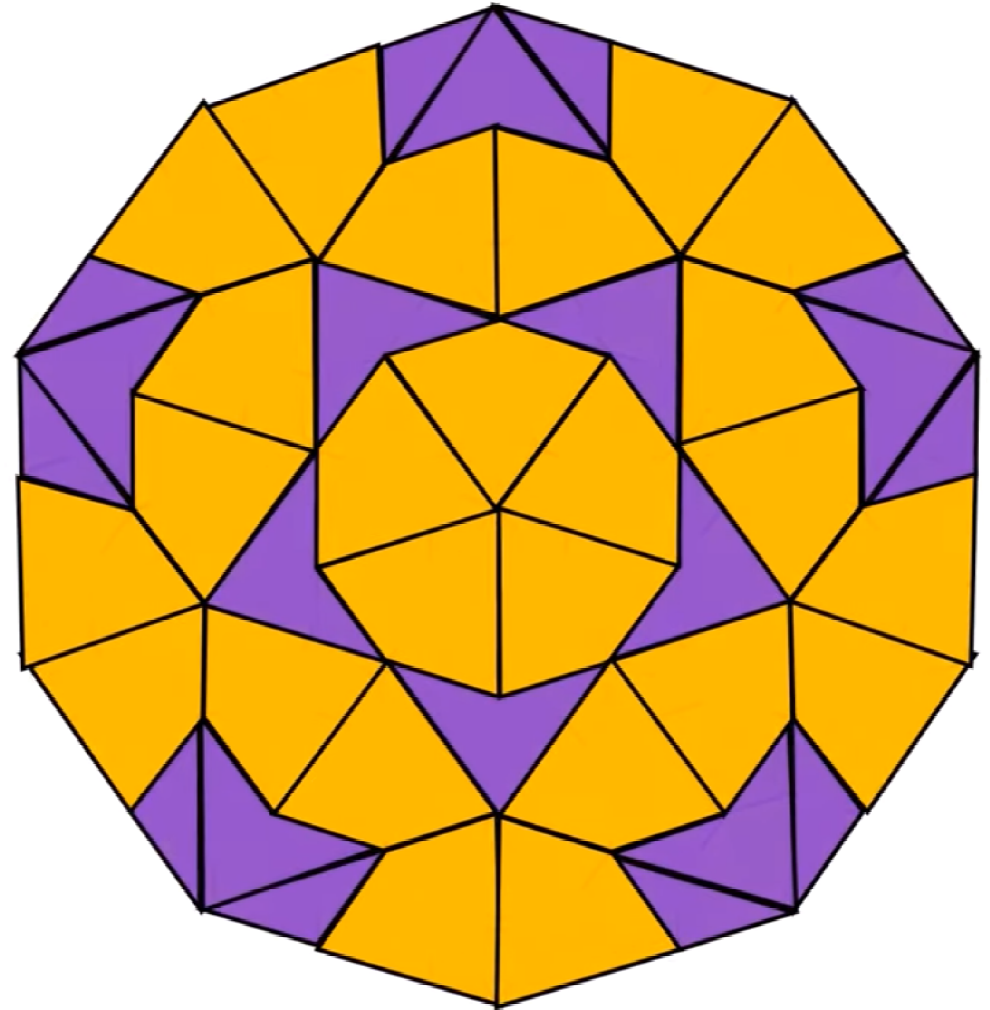
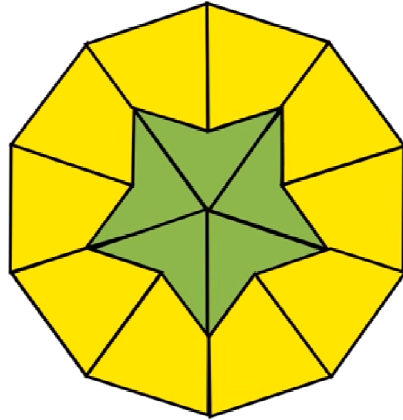
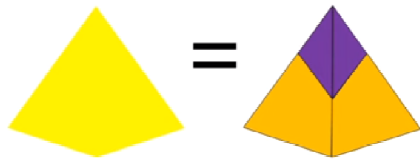
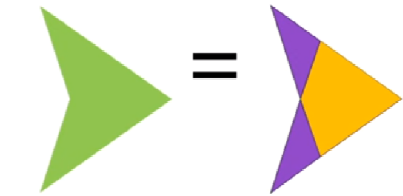


© Charles Radin et Lorenzo Sadun, 2009

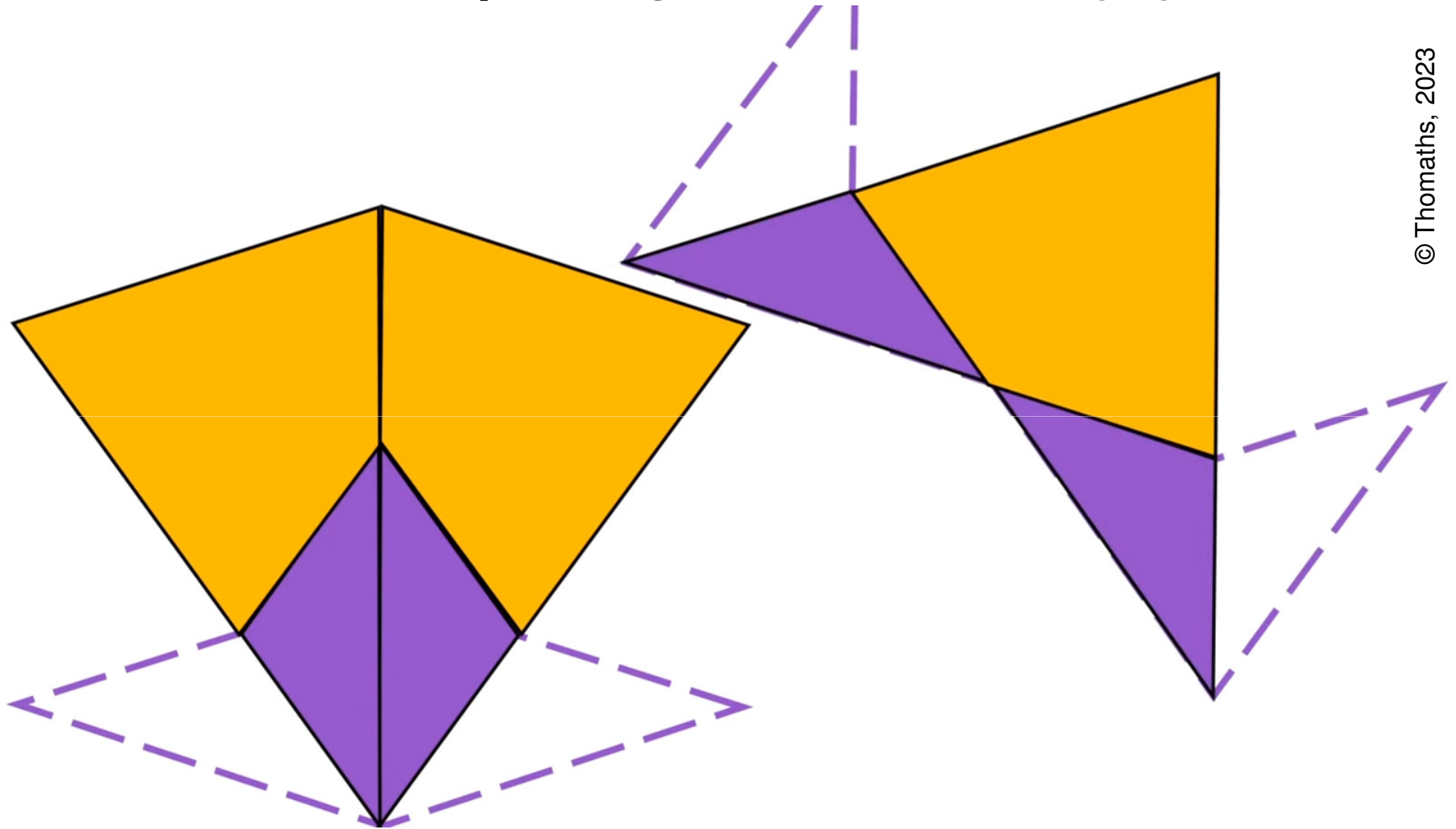
Des variations à l'infini



Avec le pavage de Penrose



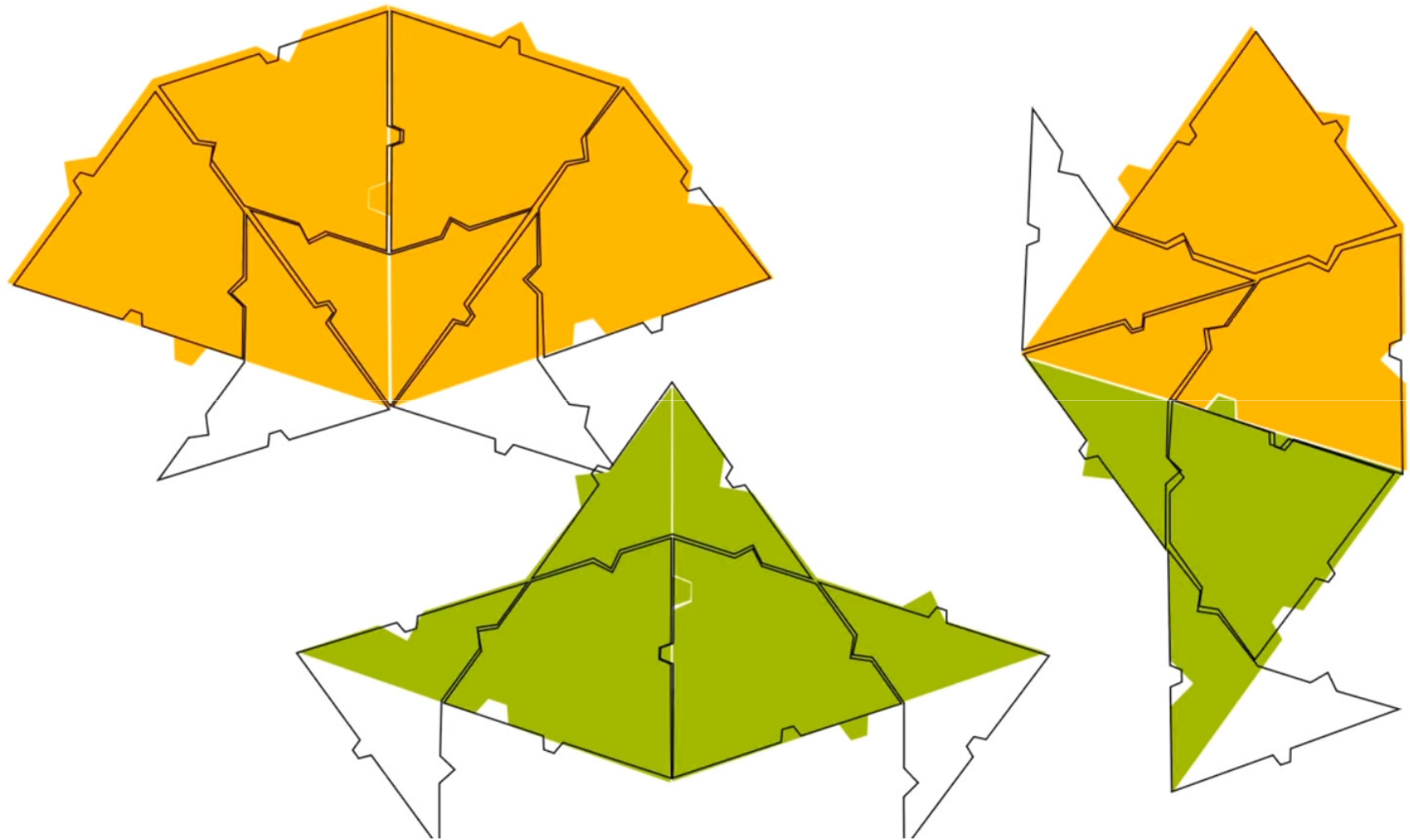
Pourquoi ça marche (1)



© Thomaths, 2023

Chaque tuile se décompose en deux « petits » cerfs-volants (en jaune) et deux « petites » demi-flèches (en violet).

Pourquoi ça marche (2)

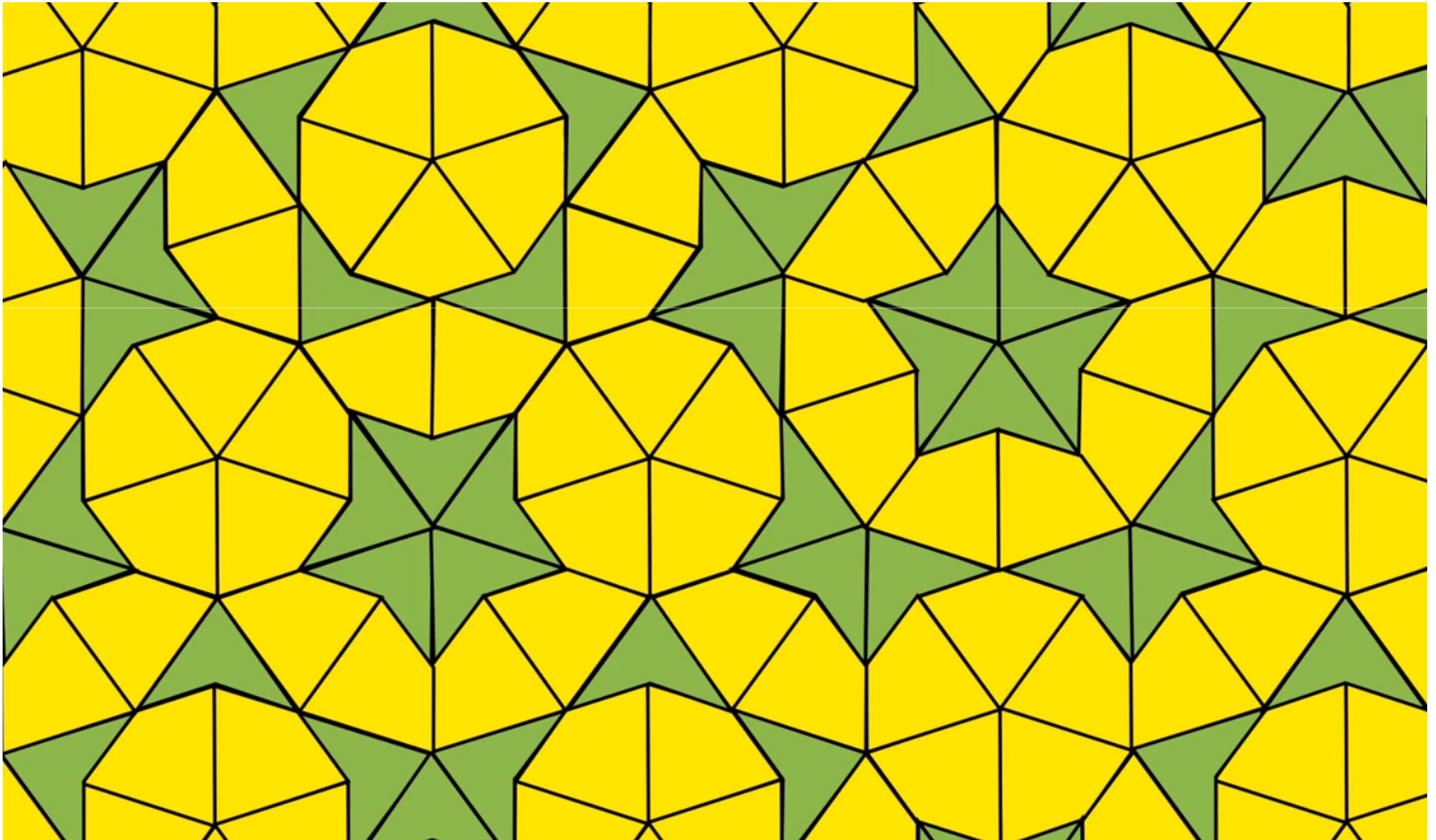


© Thomaths, 2023

Rassembler les demi-flèches va imposer un pavage apériodique.

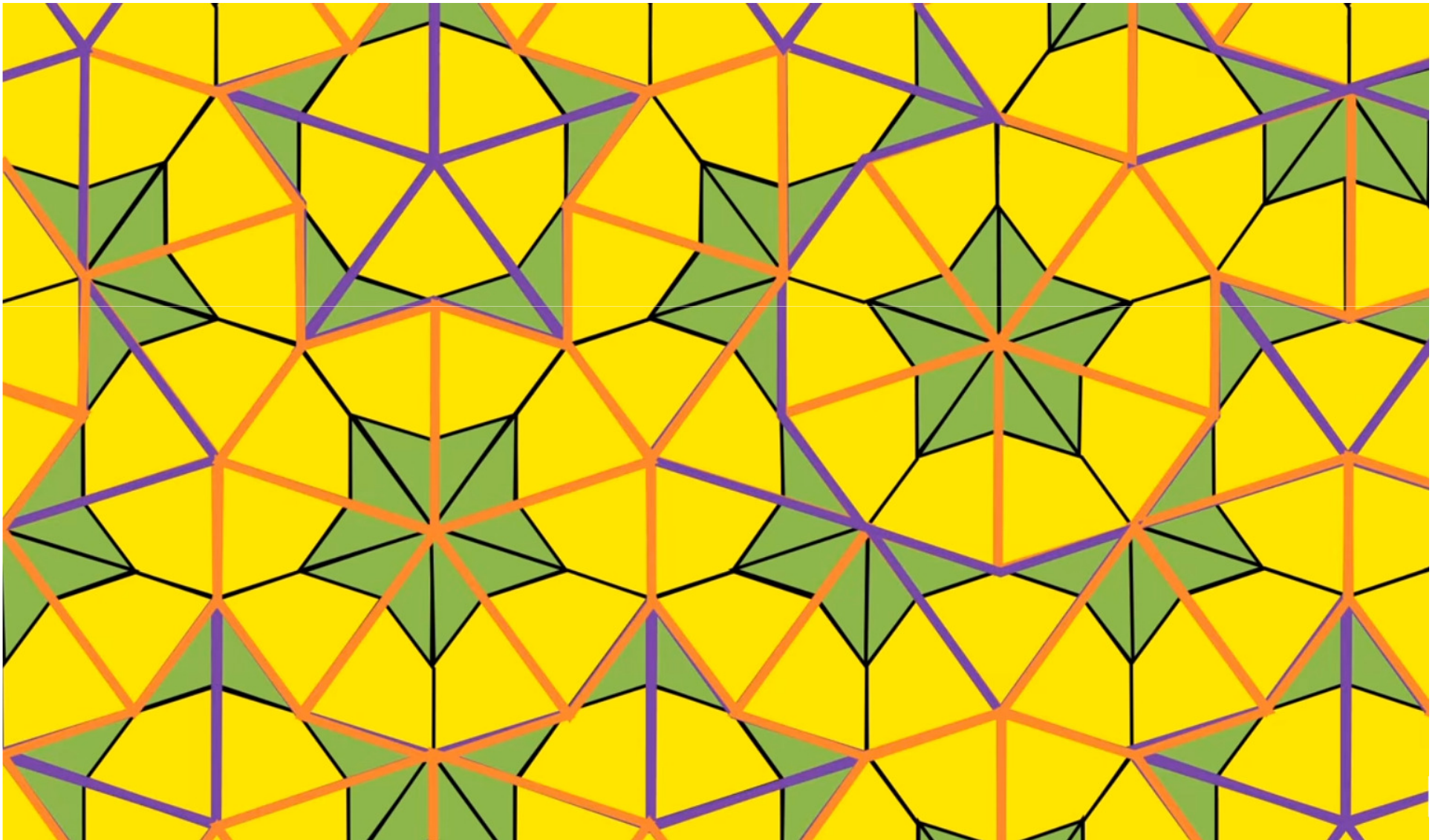
Une structure émerge (1)

© Thomaths, 2023



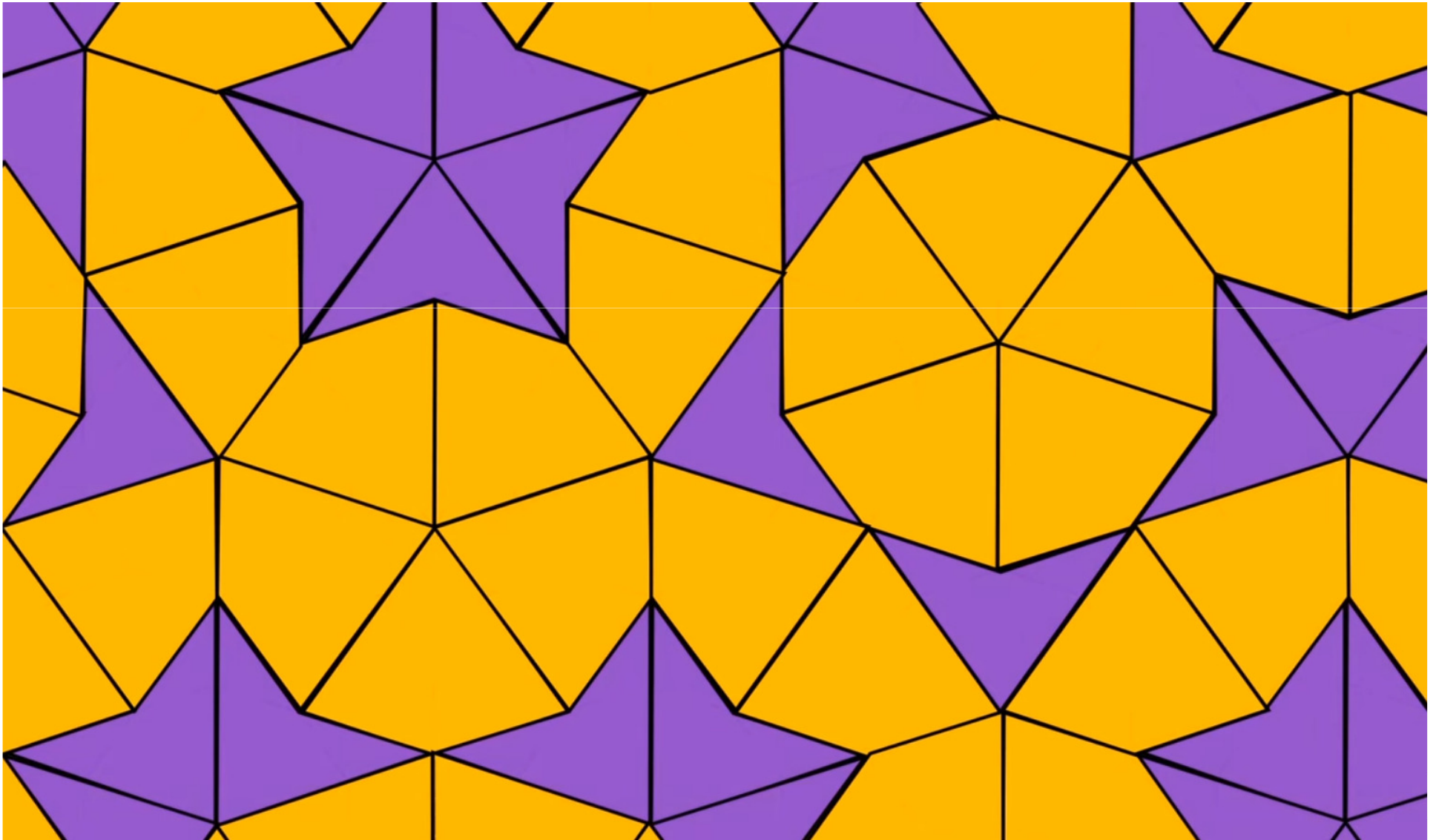
Une structure émerge (2)

© Thomaths, 2023



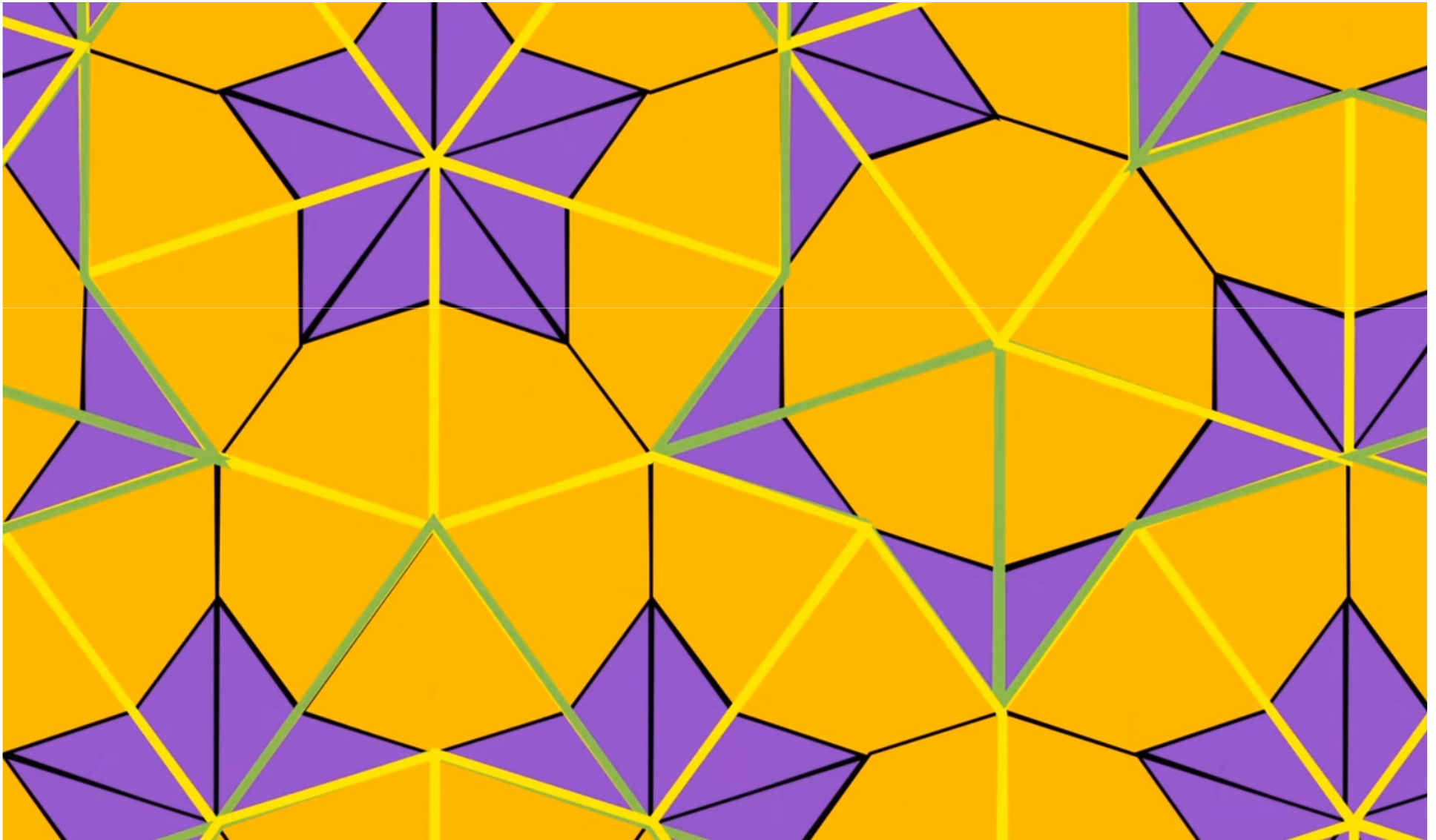
Une structure émerge (3)

© Thomaths, 2023



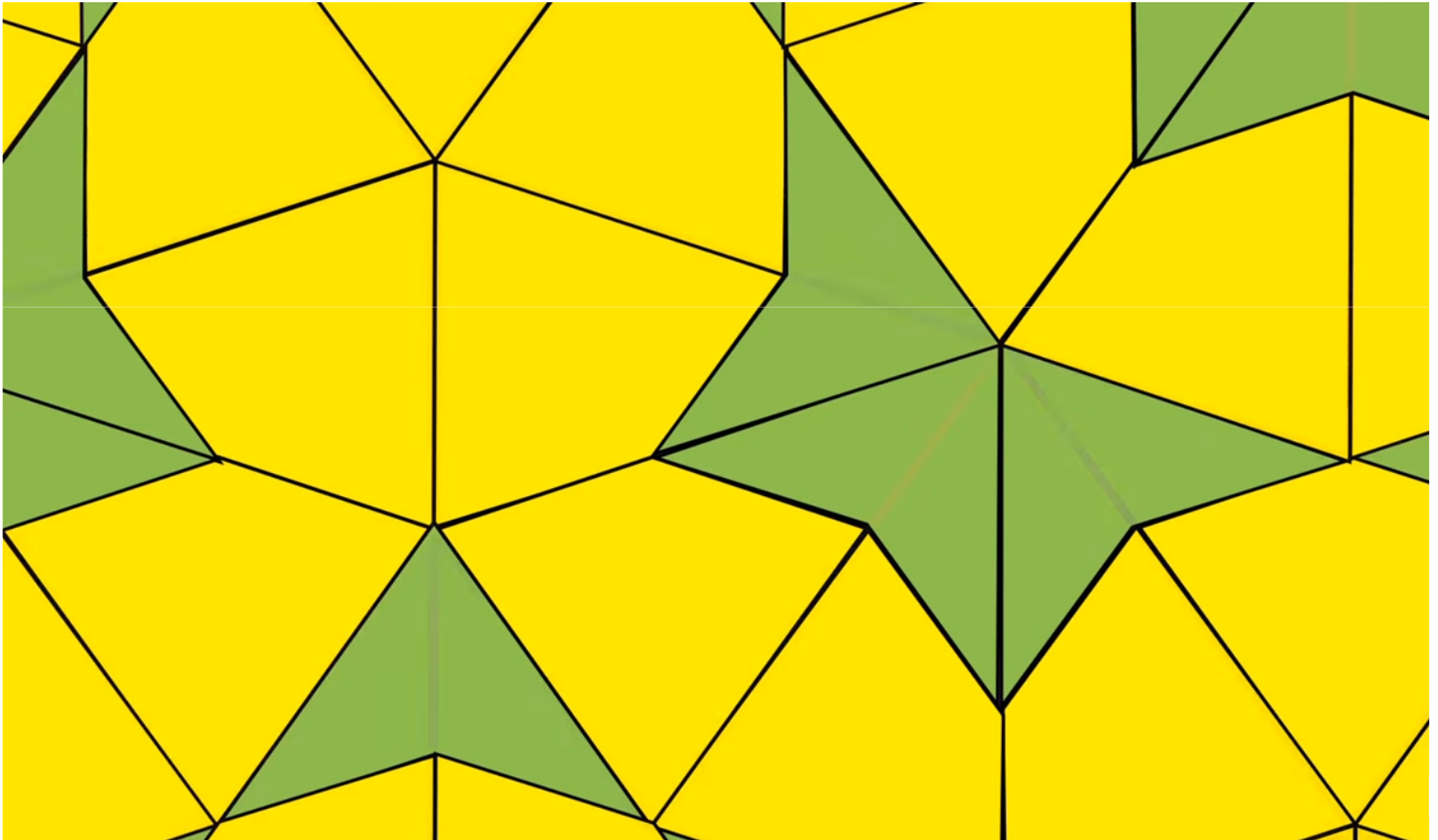
Une structure émerge (4)

© Thomaths, 2023



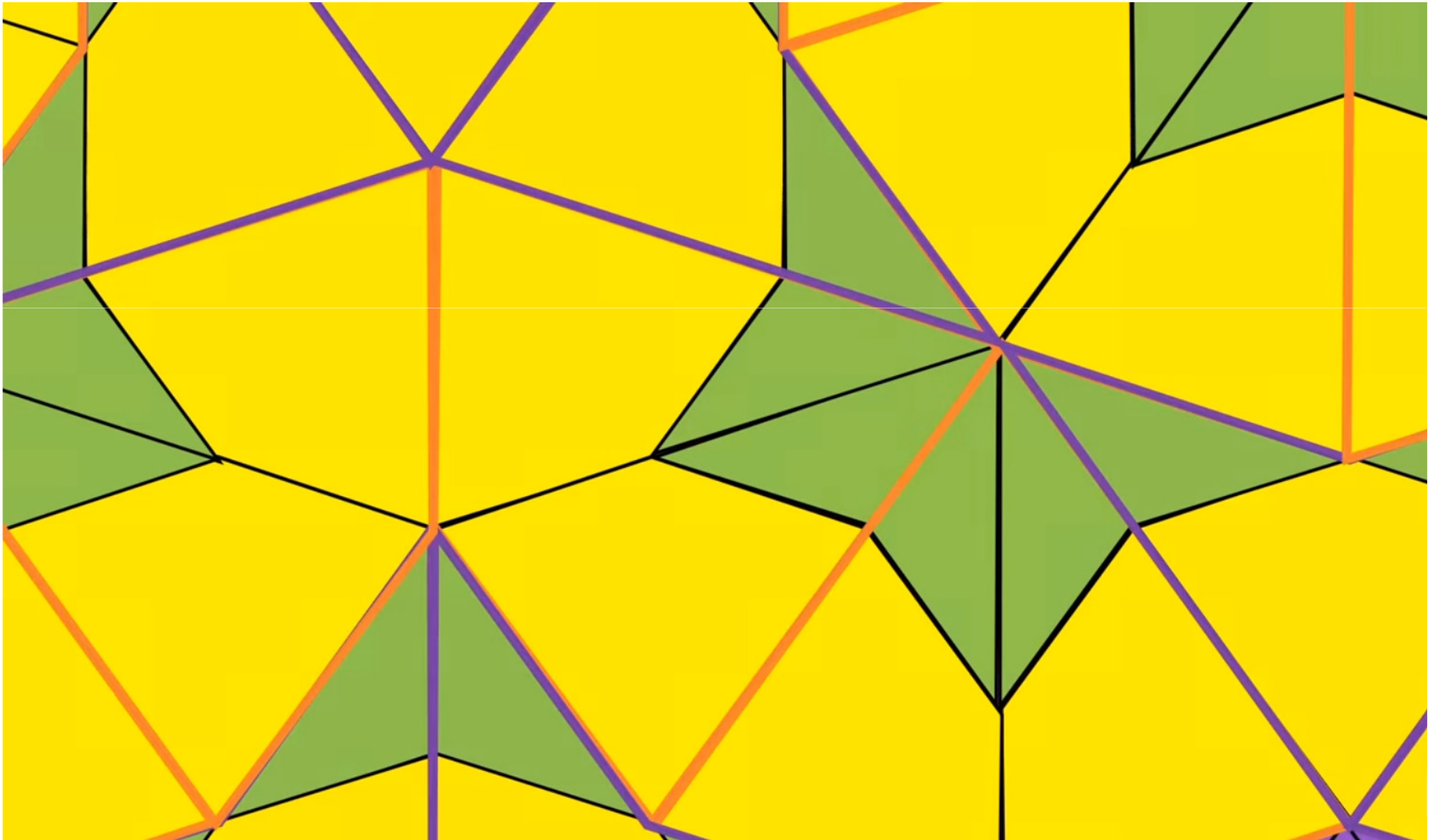
Une structure émerge (5)

© Thomaths, 2023



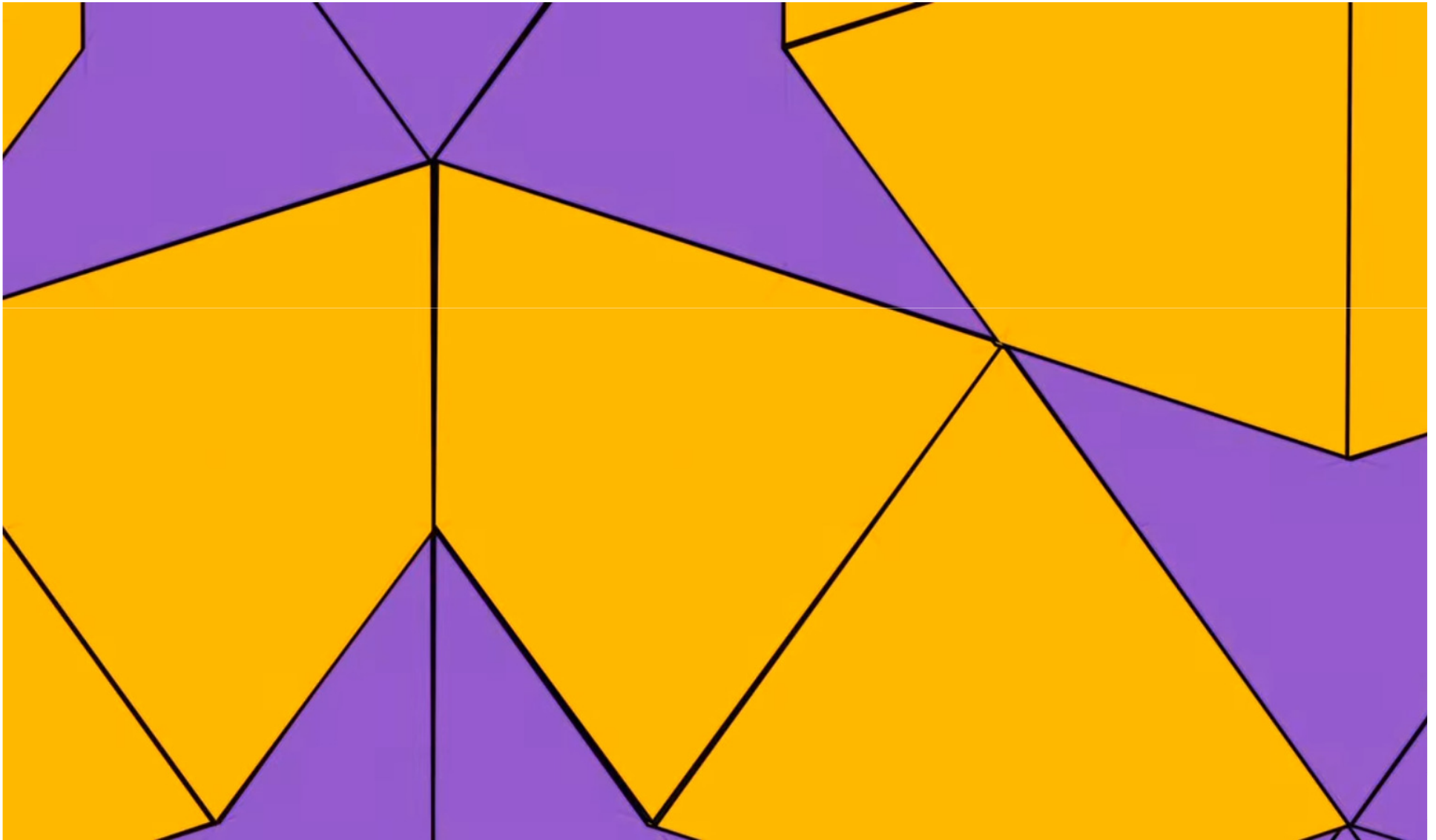
Une structure émerge (6)

© Thomaths, 2023



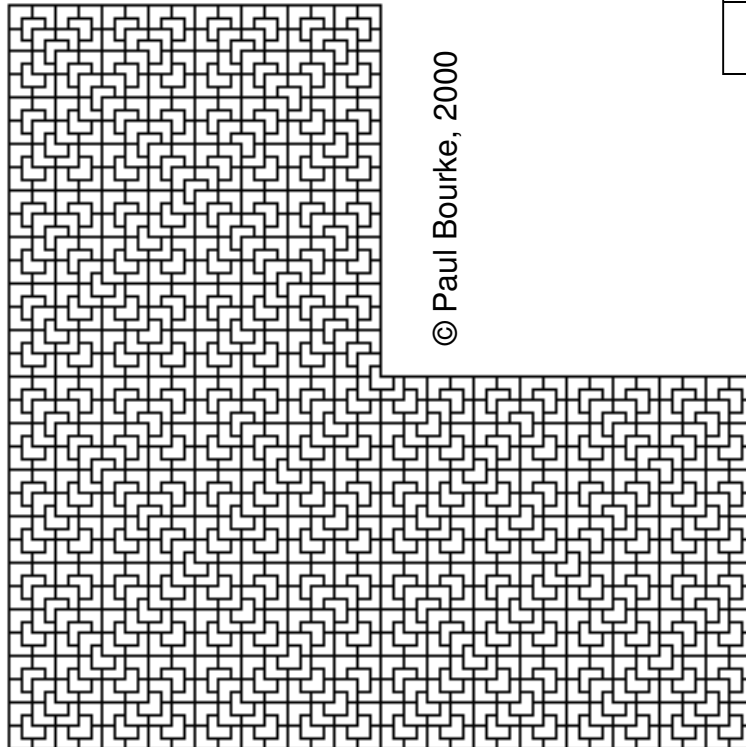
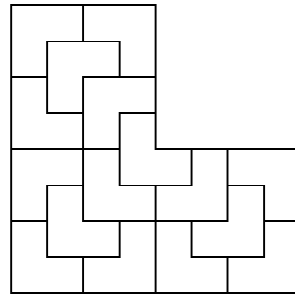
Une structure émerge (7)

© Thomaths, 2023

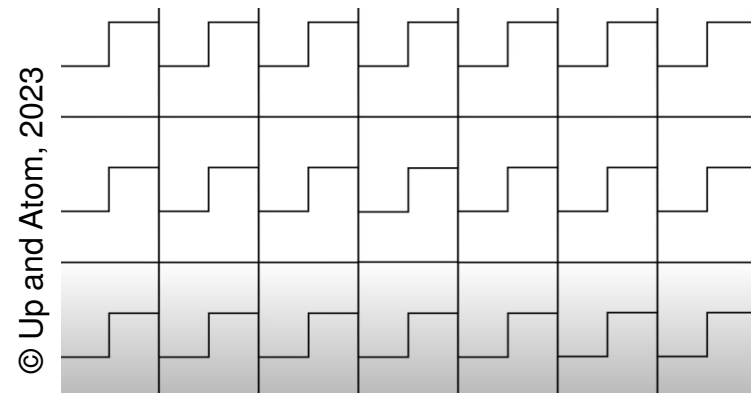
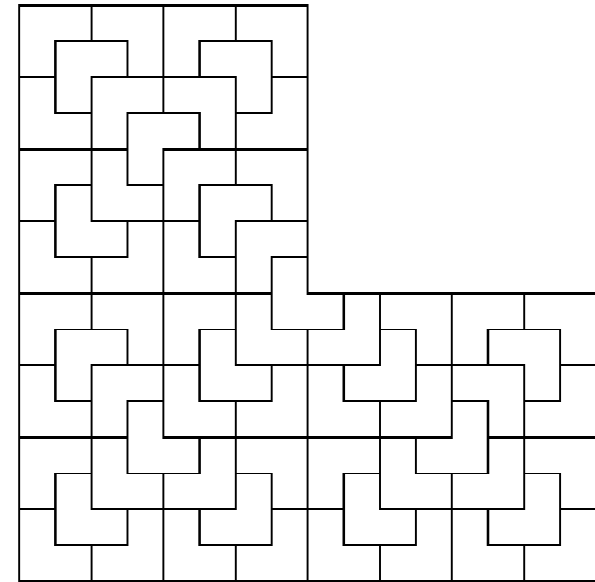


Avec des équerres

On part du triomino en forme de « L », que l'on découpe en 4.

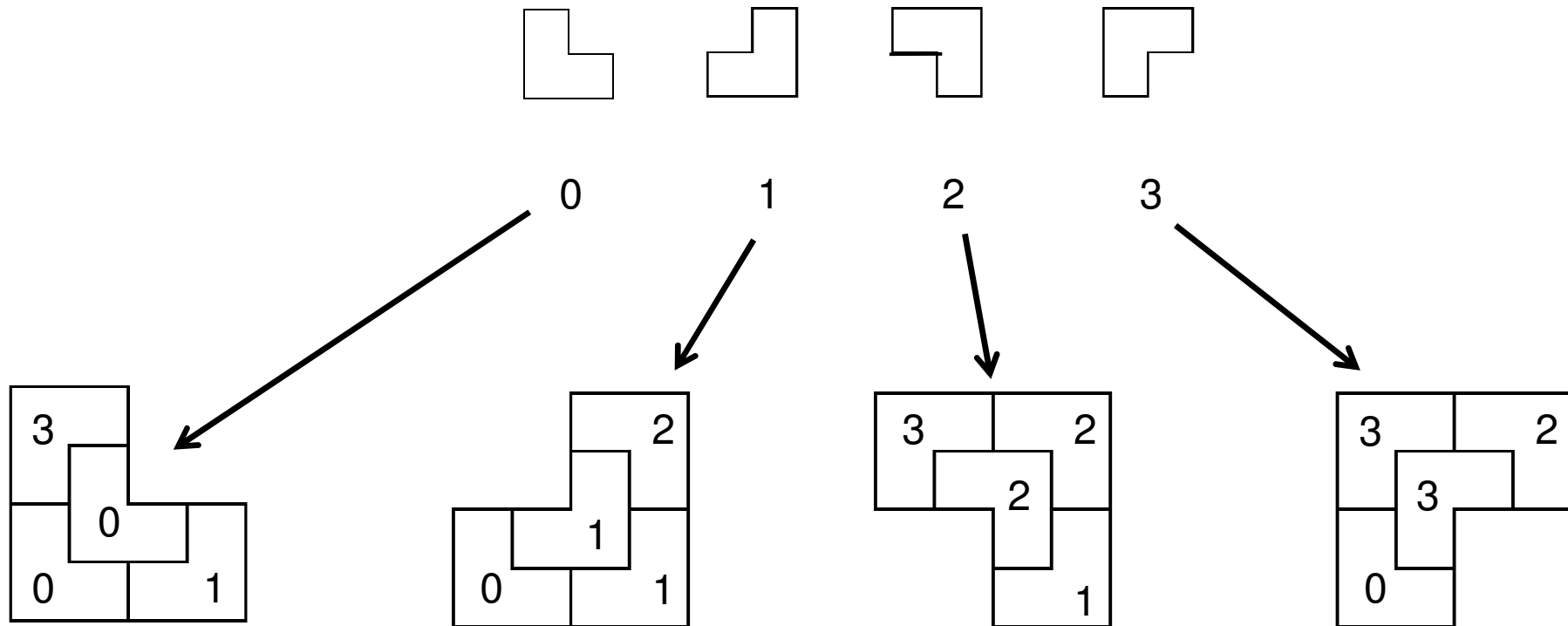


© Paul Bourke, 2000



© Up and Atom, 2023

Les règles de substitution



Atlas des substitutions du pavage du plan par des équerres.

Les pavages hiérarchiques

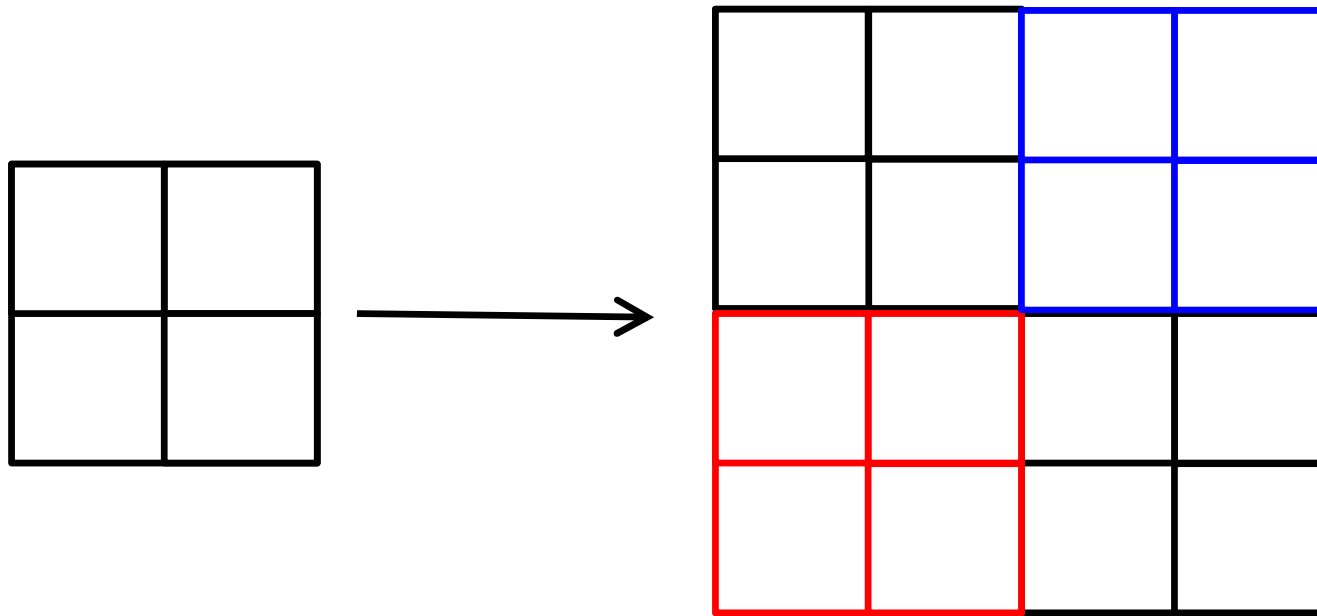
Un pavage est *hiérarchique* lorsque, par adjonction de tuiles adjacentes, on obtient des tuiles homothétiques qui, à leur tour, forment un pavage du plan.

Exemples :

- les pavages obtenus par inflation et substitution ;
- les pavages obtenus par montée–descente.

Un pavage hiérarchique est à *structure unique* lorsqu'une tuile peut être englobée de façon unique dans une tuile homothétique de la hiérarchie suivante, laquelle à son tour peut être englobée de façon unique dans une tuile homothétique de la hiérarchie suivante, laquelle...

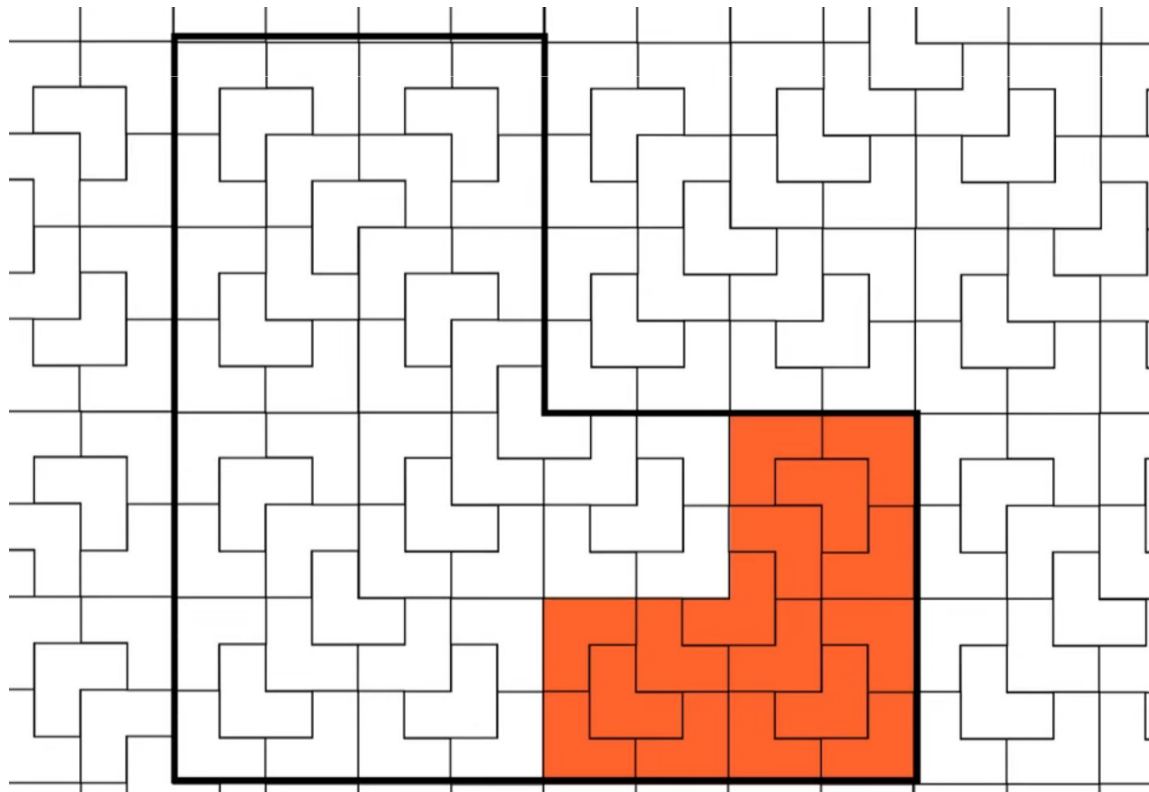
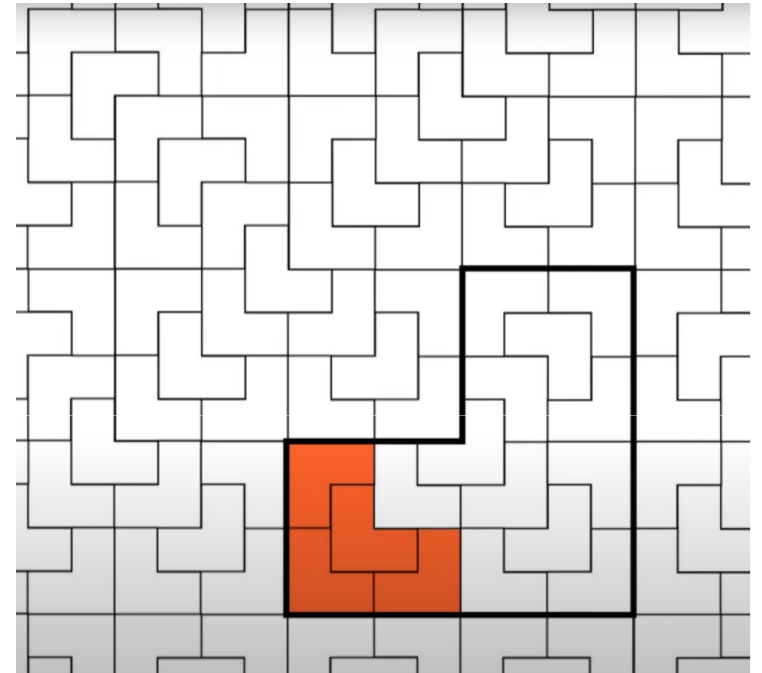
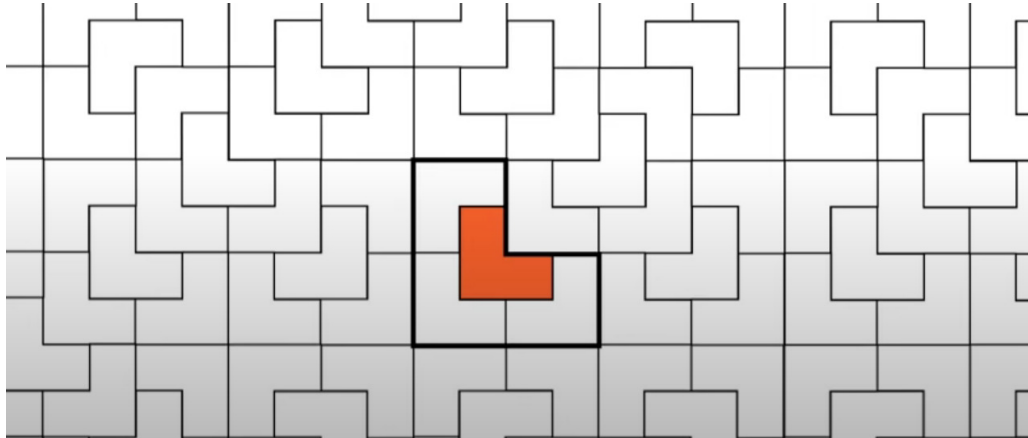
Structure hiérarchique pas unique !



À un niveau hiérarchique donné,
une tuile (à gauche, en noir) peut se retrouver
de plusieurs manières différentes
(à droite, en rouge, en bleu, en noir...)
dans une métatuile du niveau hiérarchique supérieur.

Structure hiérarchique unique !

© Up and Atom, 2023



Chaque équerre
appartient à une seule
méta-équerre.

La propriété fondamentale

Un pavage à structure hiérarchique unique est apériodique.

Démonstration (avec les mains) : par l'absurde !

On suppose qu'il existe une translation de vecteur $\vec{V}$ non nul qui laisse le pavage hiérarchique globalement invariant.

Alors $\vec{V}$ laisse globalement invariante la structure des hiérarchies. Or, il existe un niveau de hiérarchie « suffisamment grand » pour que $\vec{V}$ soit « inclus » dans un pavé P de cette hiérarchie.

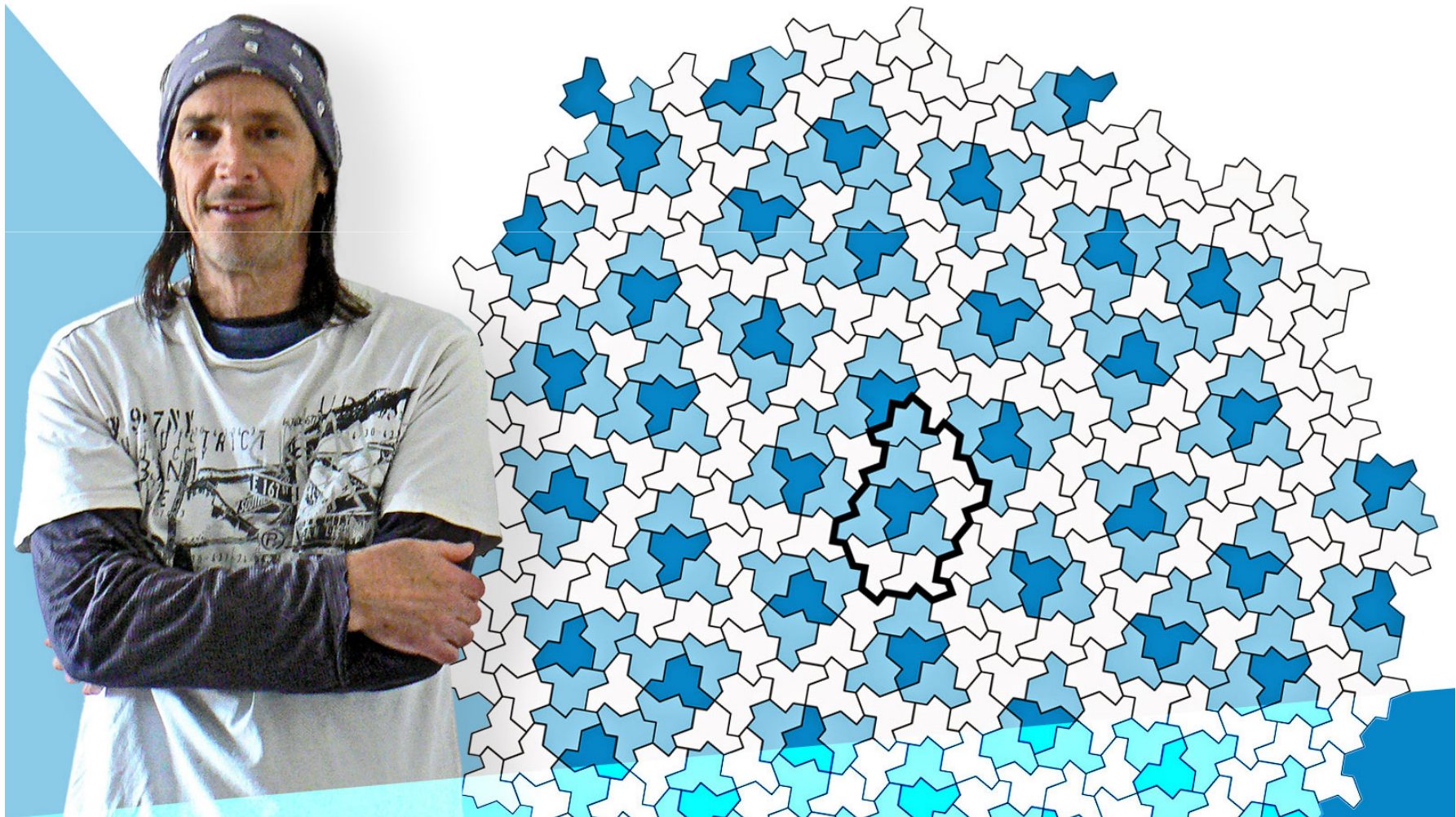
Mais alors on a un souci ! En effet, $P + \vec{V}$ se superposera avec P ; il existera une tuile de P qui appartiendra aussi à $P + \vec{V}$. Cela est impossible car le pavage est à structure unique.

2022 et 2023 :

les découvertes de David Smith

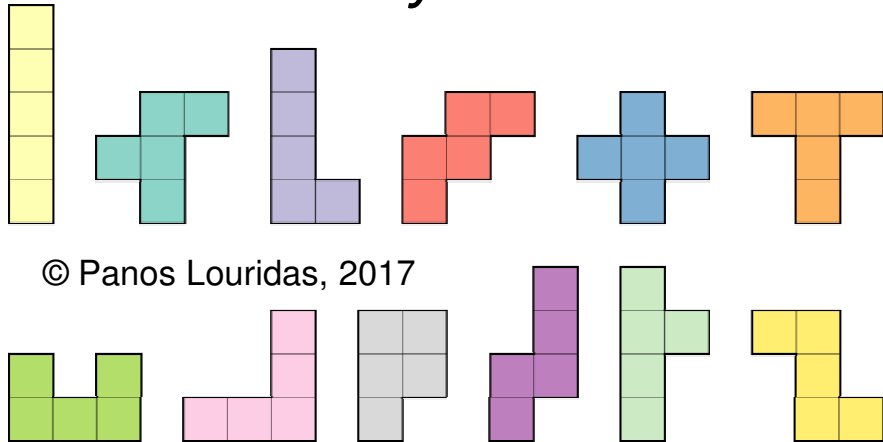
David Smith

Prote à la retraite, « *shape hobbyist* » (« amateur de formes »).
S'intéresse aux polyformes depuis plus de vingt-cinq ans.

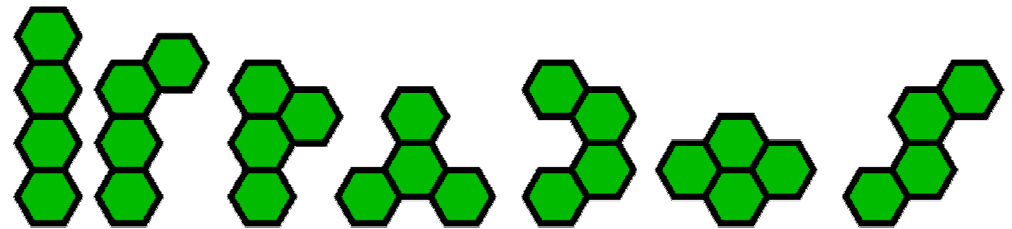


Quelques polyformes

Polyminos

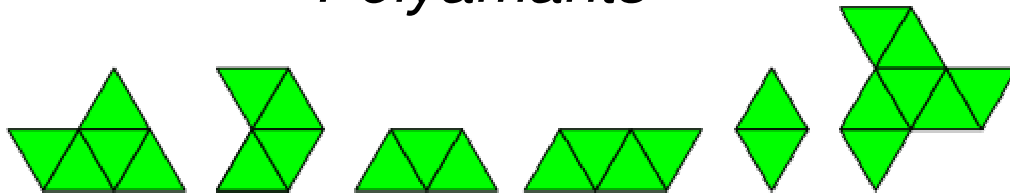


Polyhex



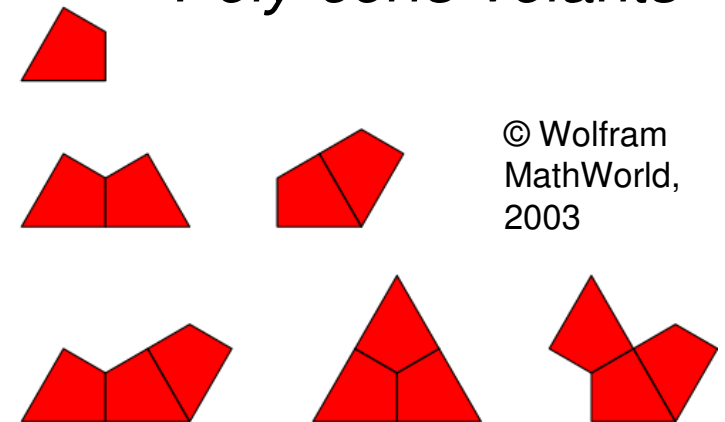
© Lurlock, 2011

Polyamants



© Cin316, 2015

Poly-cerfs-volants

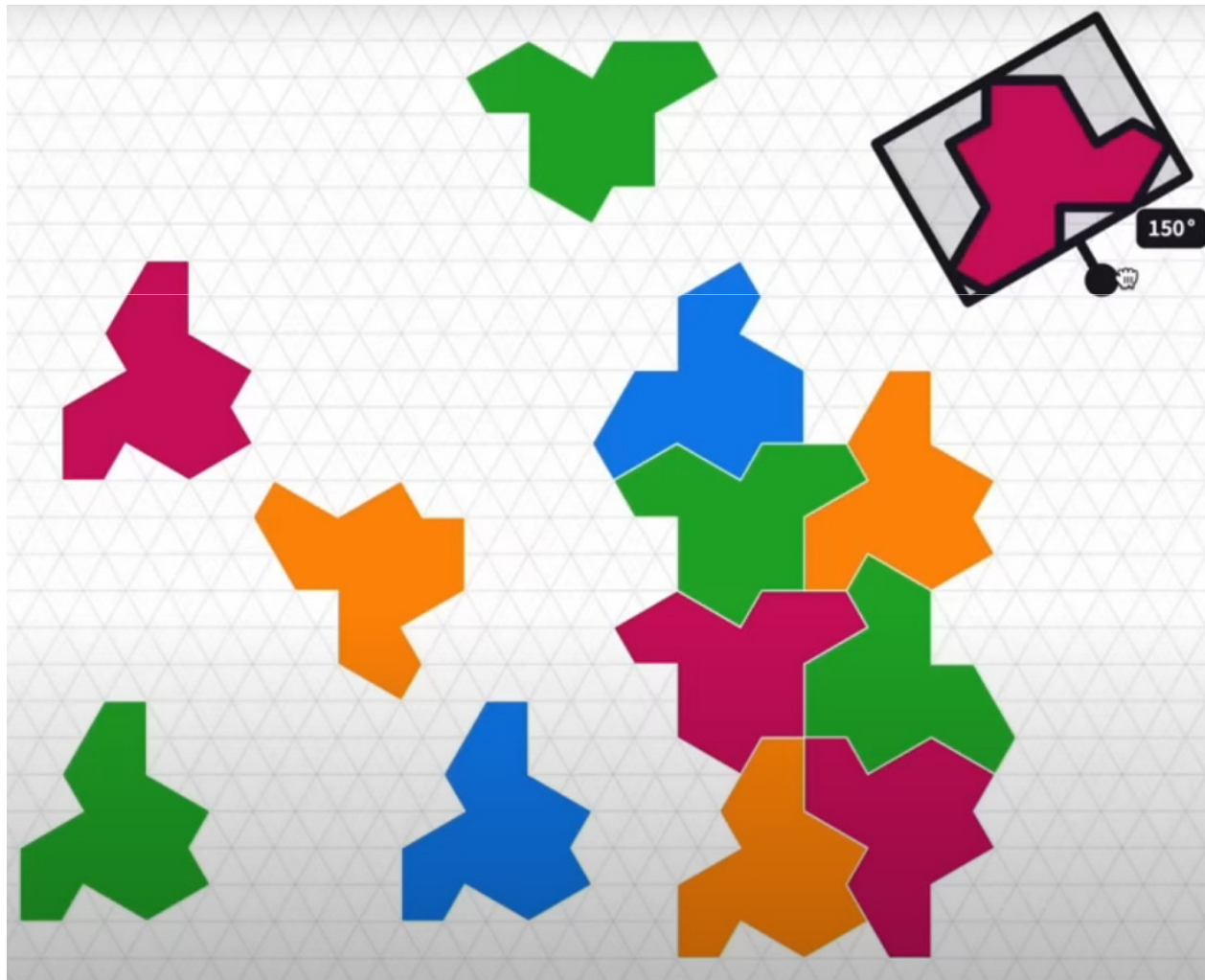


© Wolfram
MathWorld,
2003

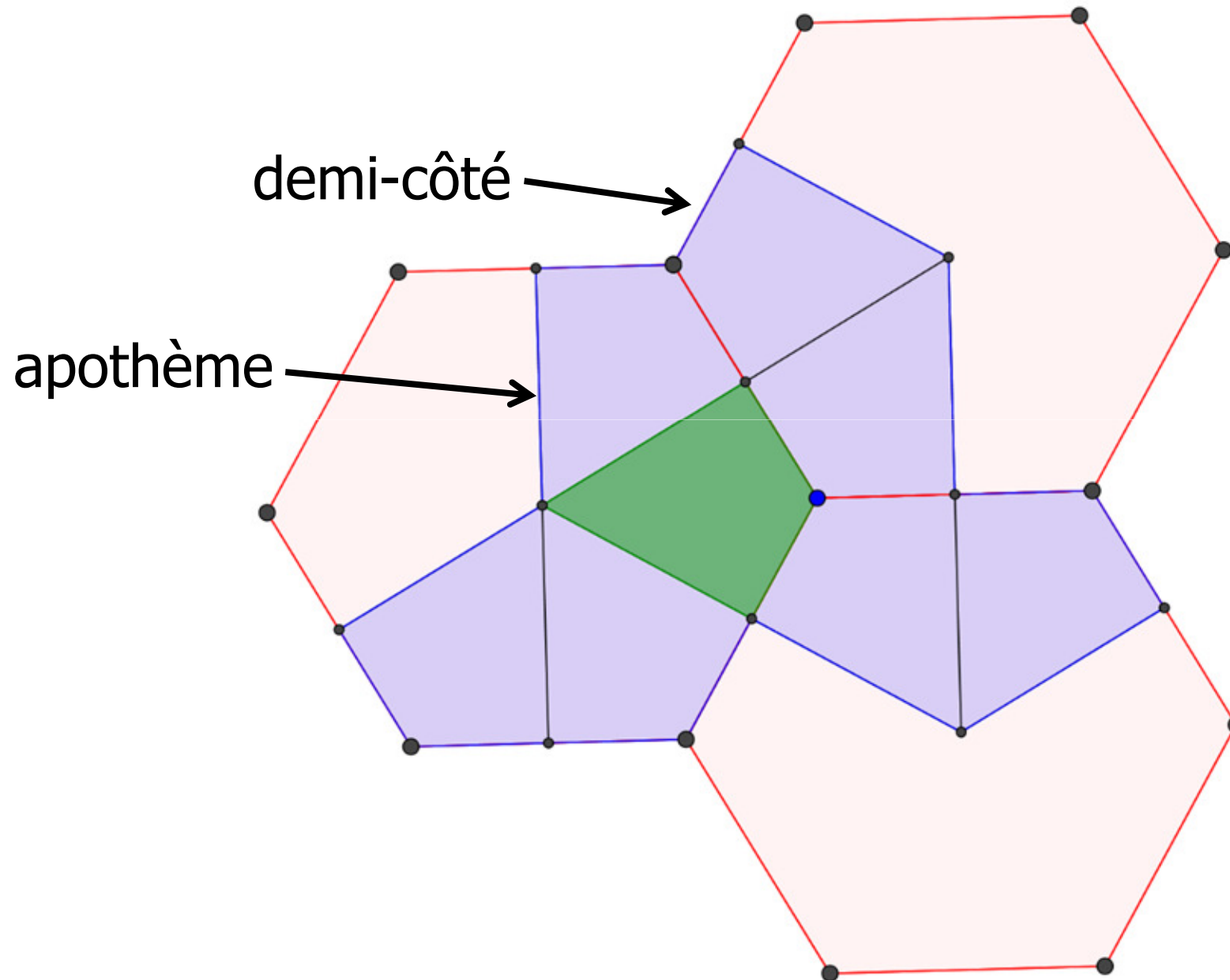
(Joseph Samuel Myers, Brendan Owen,
Glenn Rhoads, Roger Penrose, John Horton Conway...)

À partir de poly-cerfs-volants

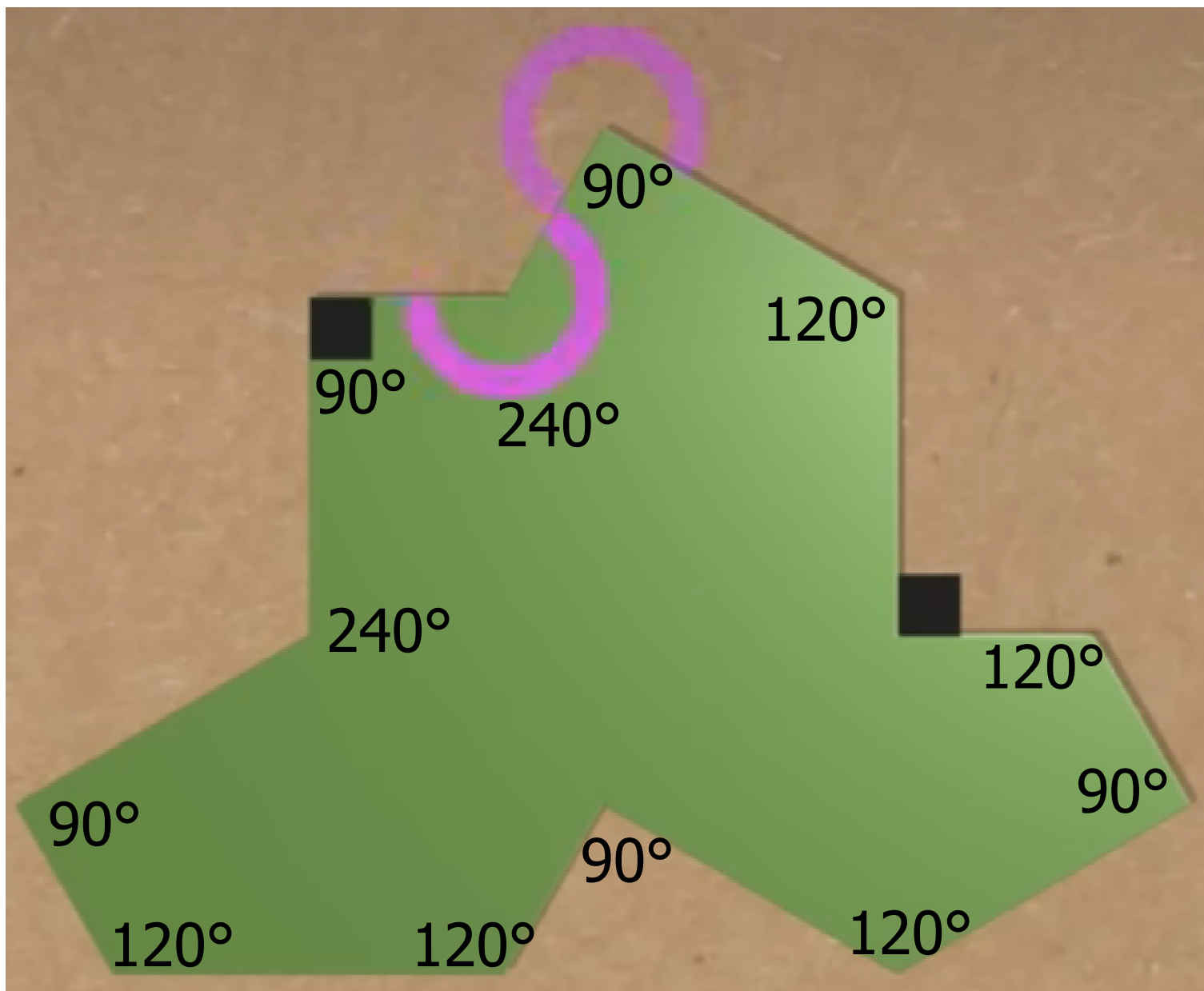
15-17 novembre 2022 : David Smith découvre le « chapeau ». Impossible de paver de manière périodique !



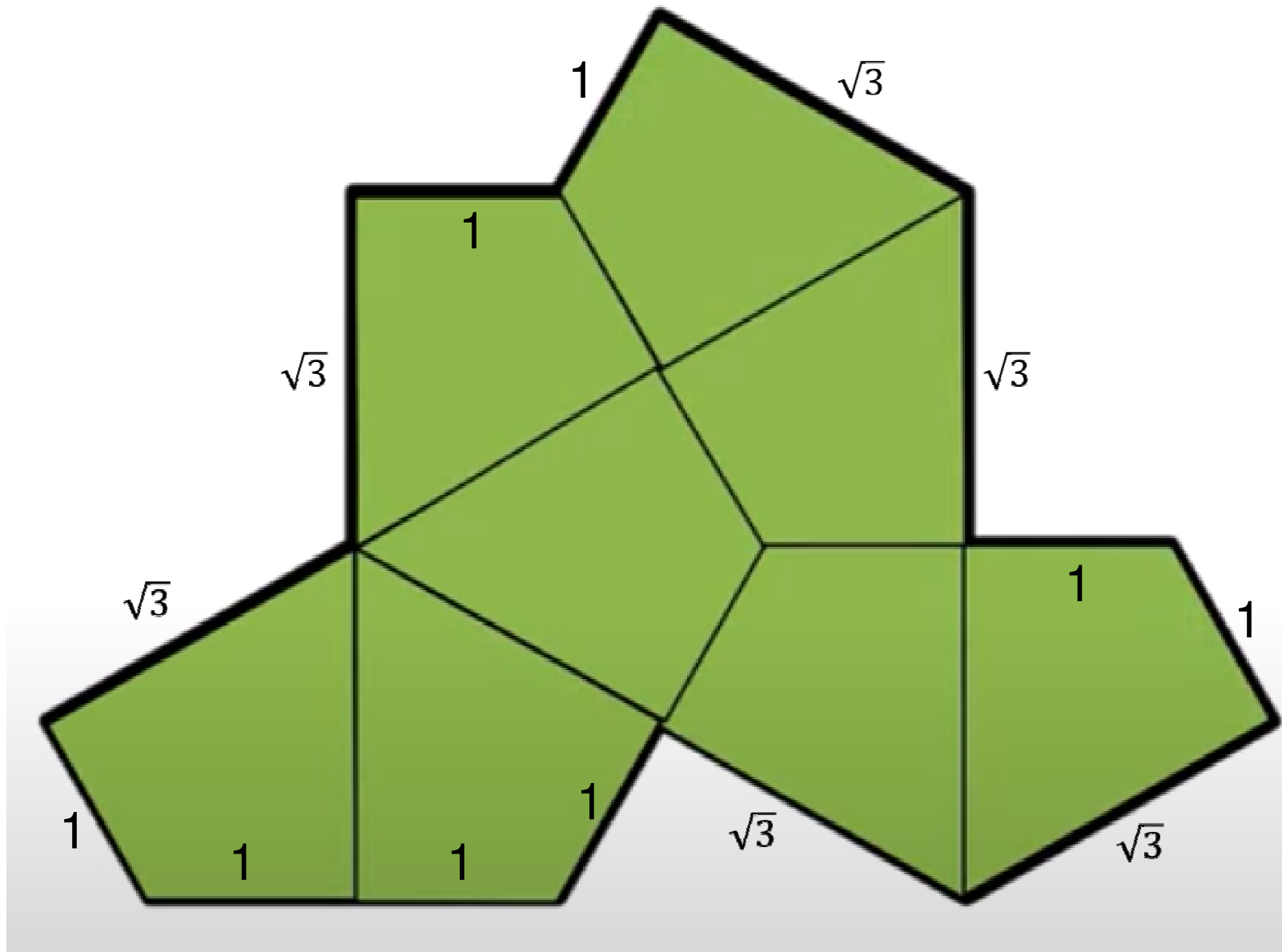
La construction du chapeau



Les angles



Les longueurs



La première apparition du chapeau

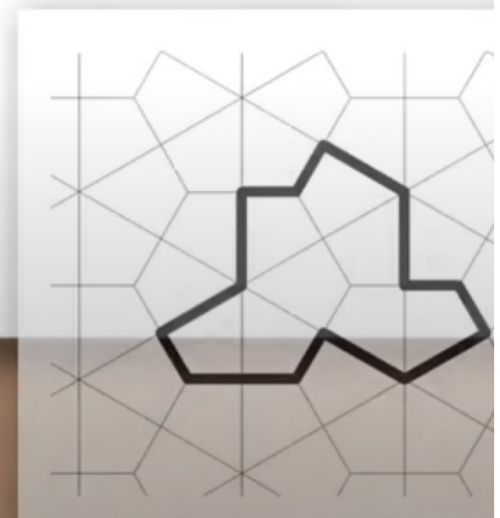
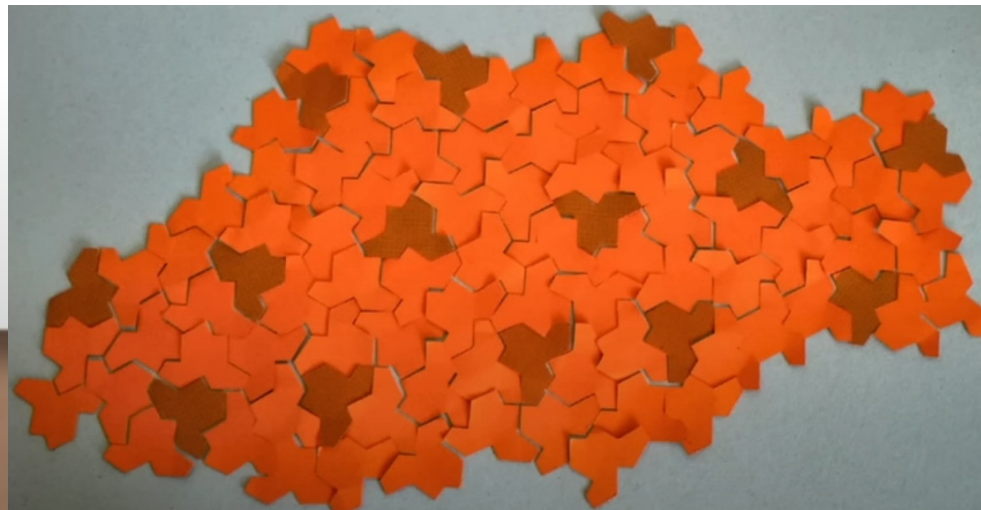
From: David Smith

20 novembre 2022

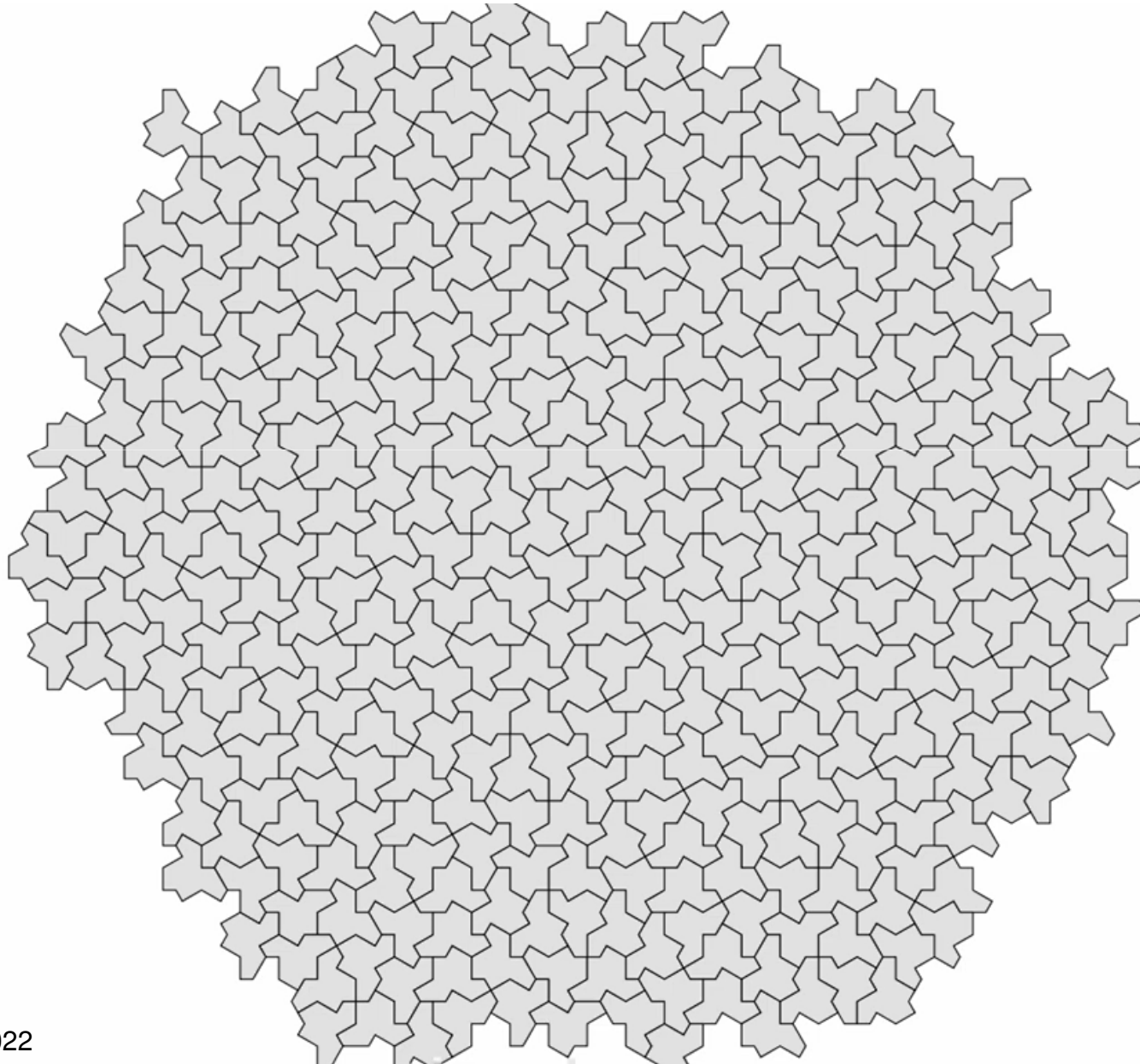
To: Craig Kaplan

Can the 'CryptoMiniSat' program deal with drafters or kites (from regular hexagons)? Below is one such shape composed of eight kites... It has a Heesch number of at least three, if it's a non-tiler (I couldn't get it to tile periodically).

© David Smith, 2022 /
Numberphile, 2023

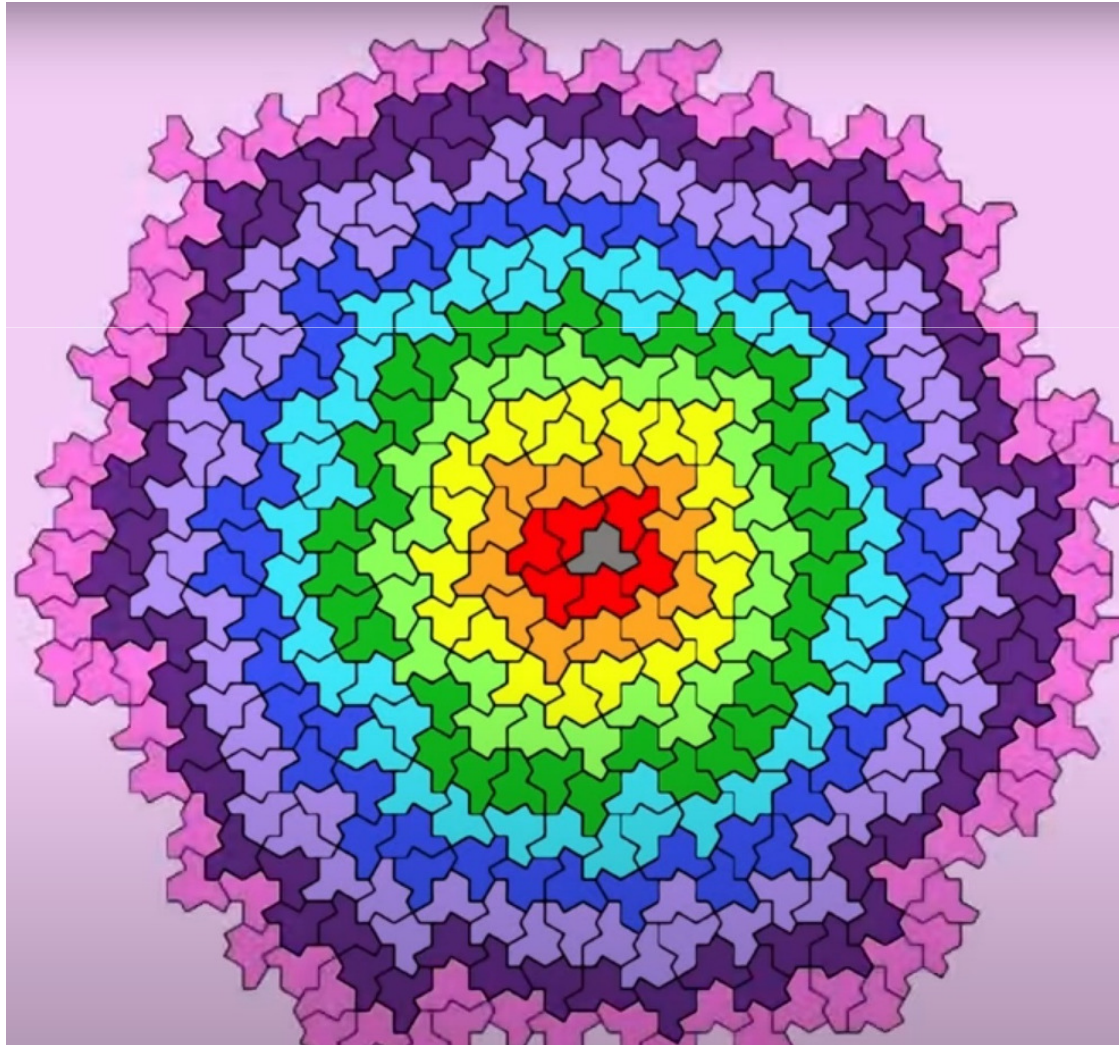


Quelques jours plus tard



Un nombre de Heesch « énorme »

Soit il existe un pavage périodique, soit le record du plus grand nombre de Heesch est battu, soit on a une monotuile apériodique !



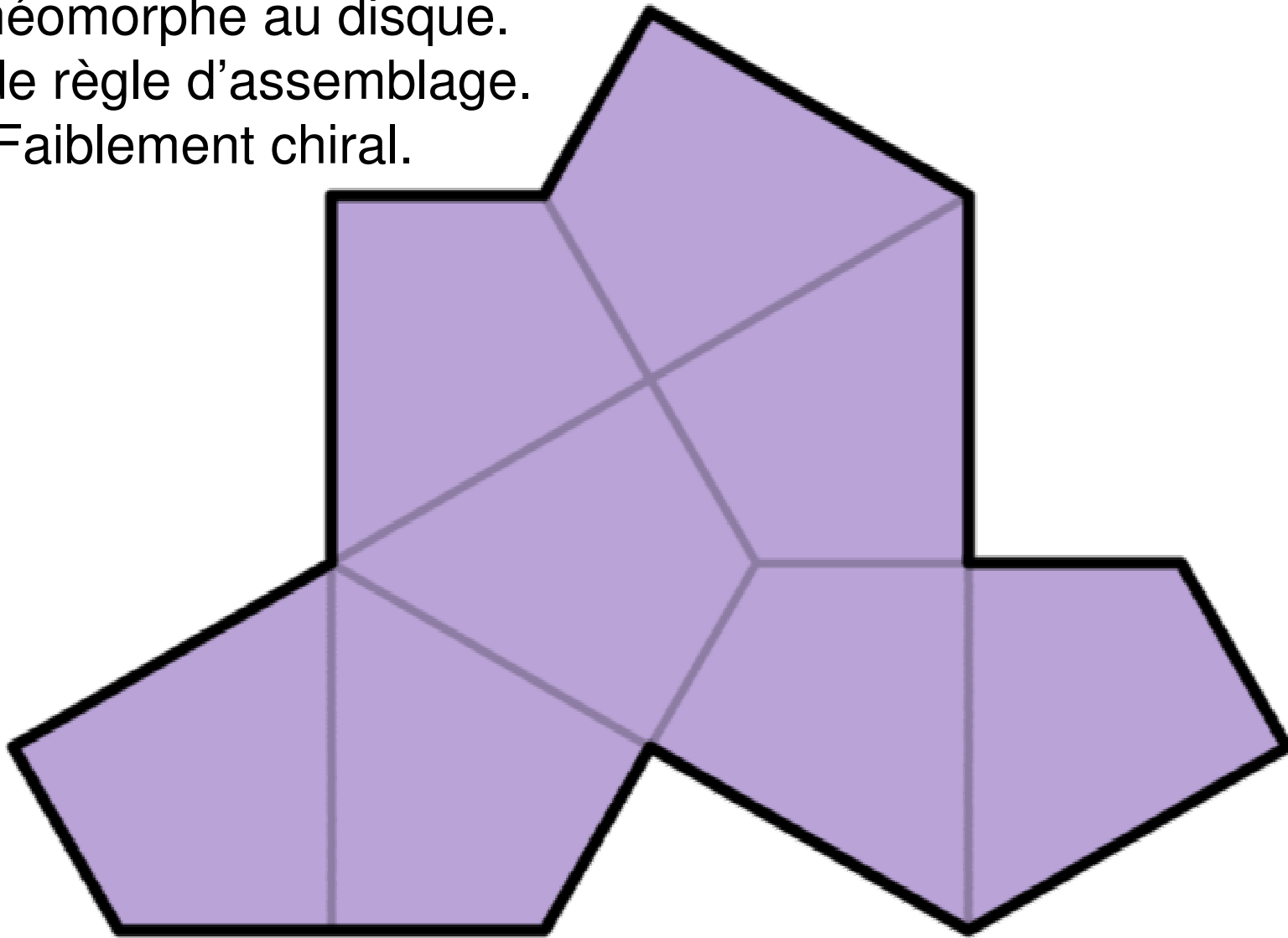
Solution au problème « ein Stein »

Simplement connexe.

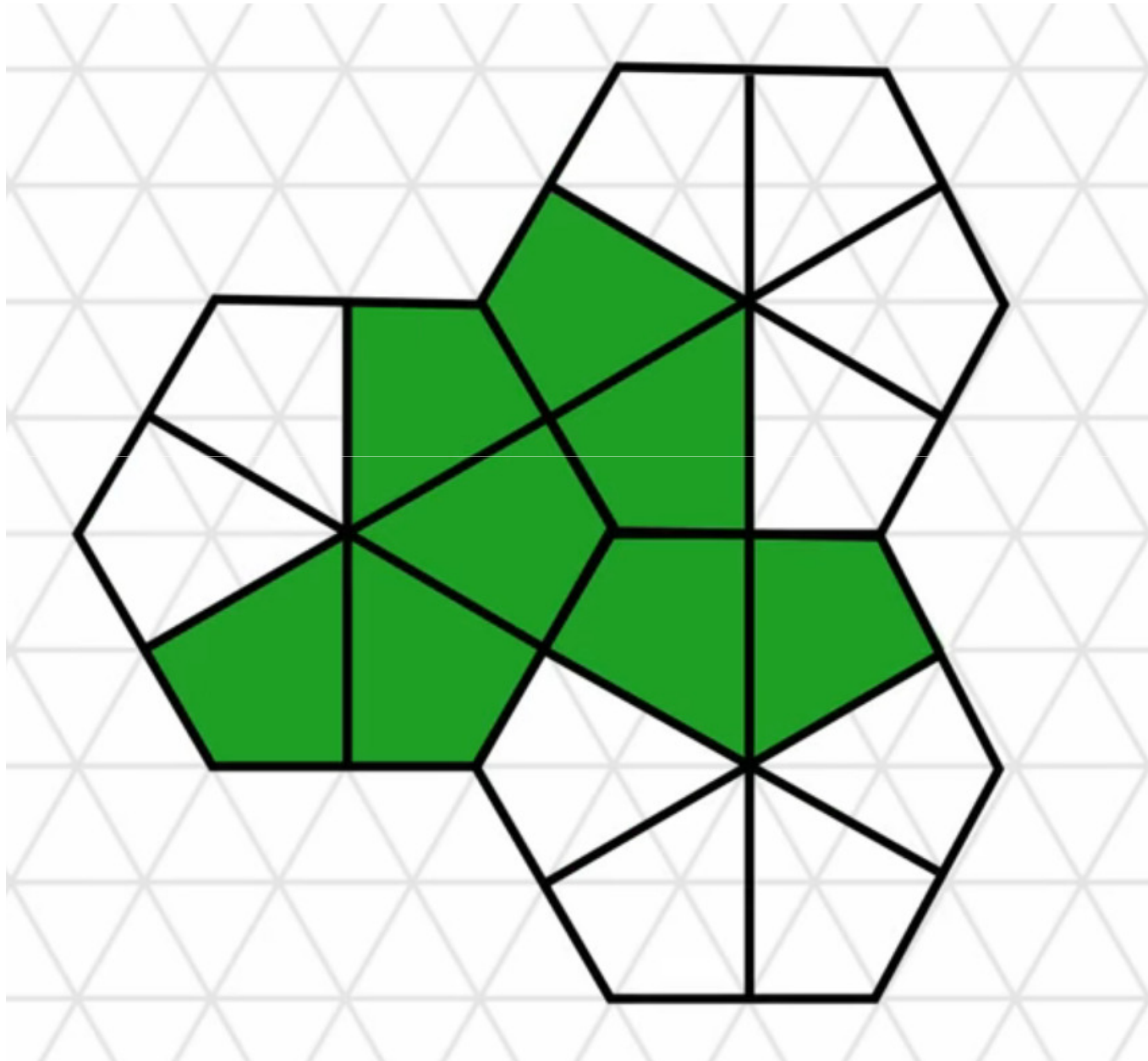
Homéomorphe au disque.

Pas de règle d'assemblage.

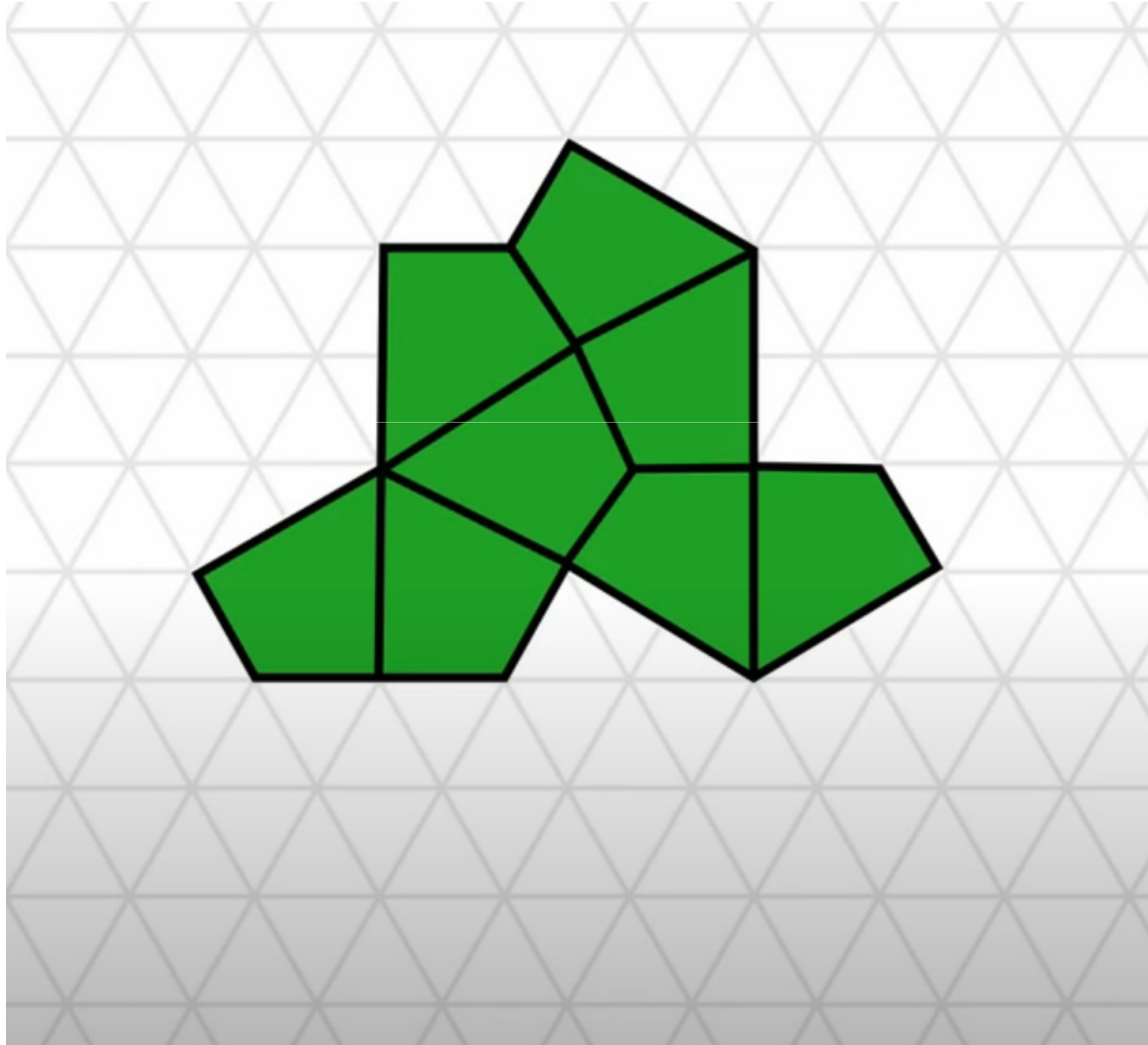
Faiblement chiral.



À partir des trois hexagones

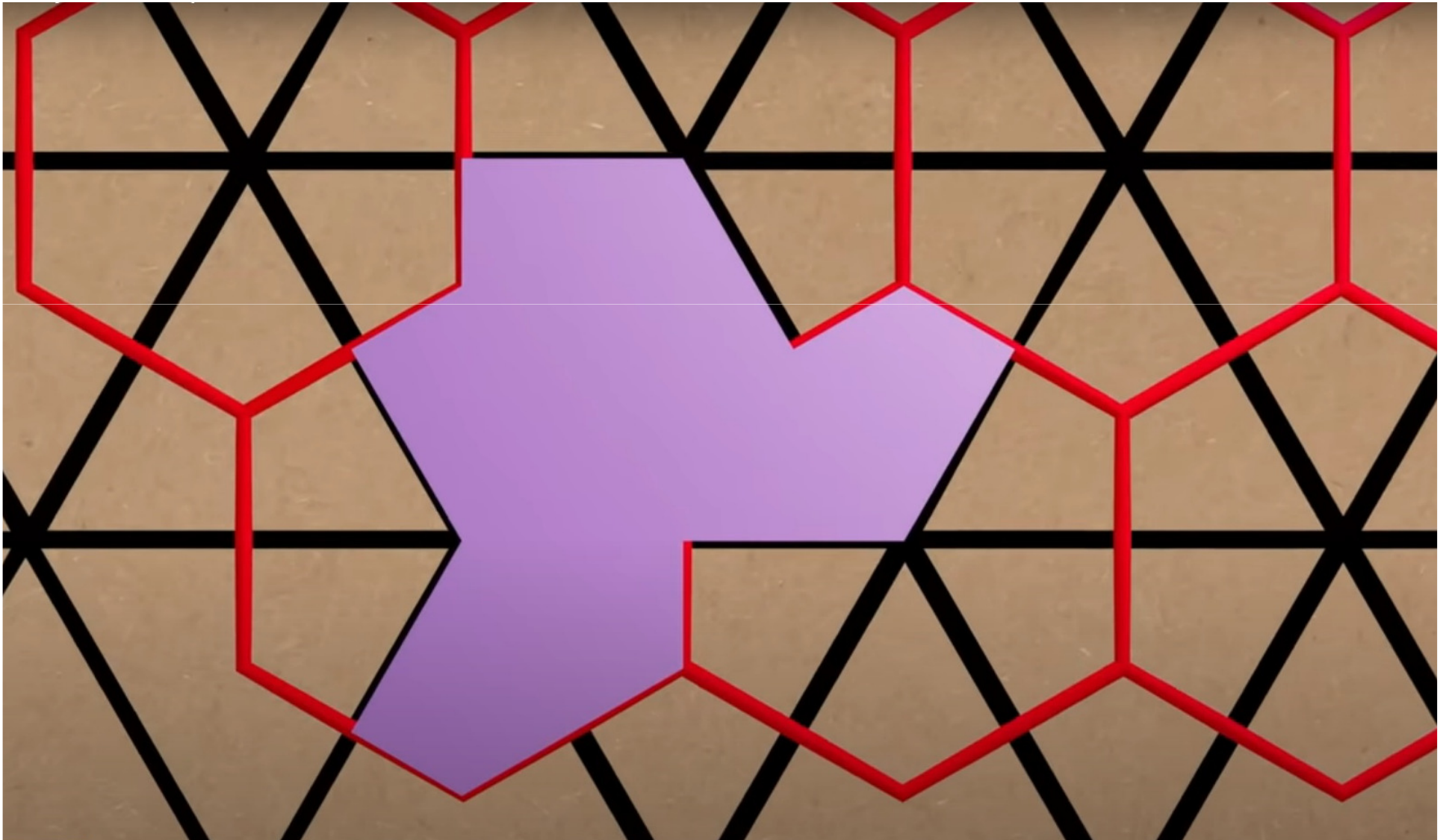


Sur son réseau triangulaire



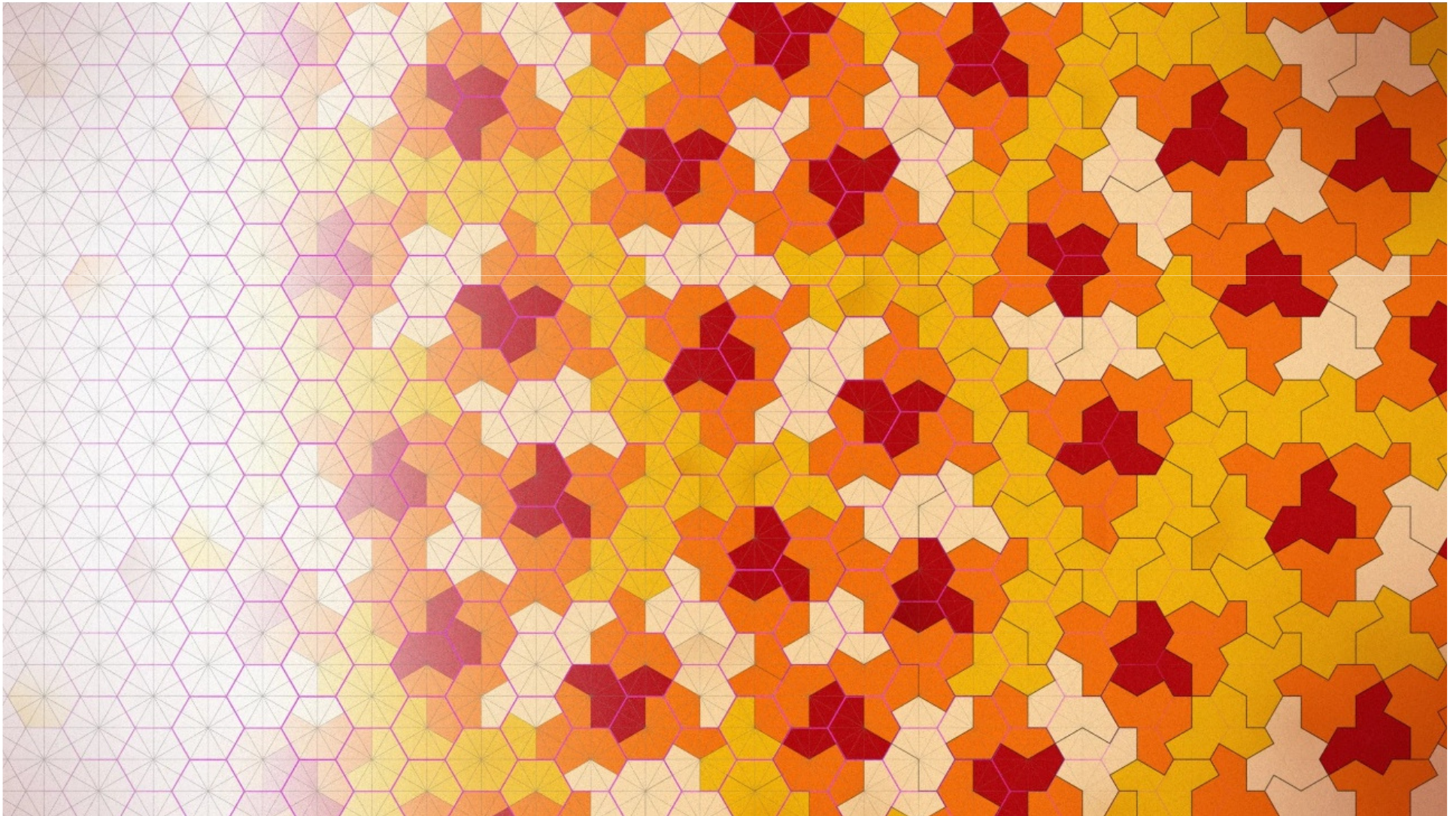
Sans les traits de construction

© Numberphile, 2023

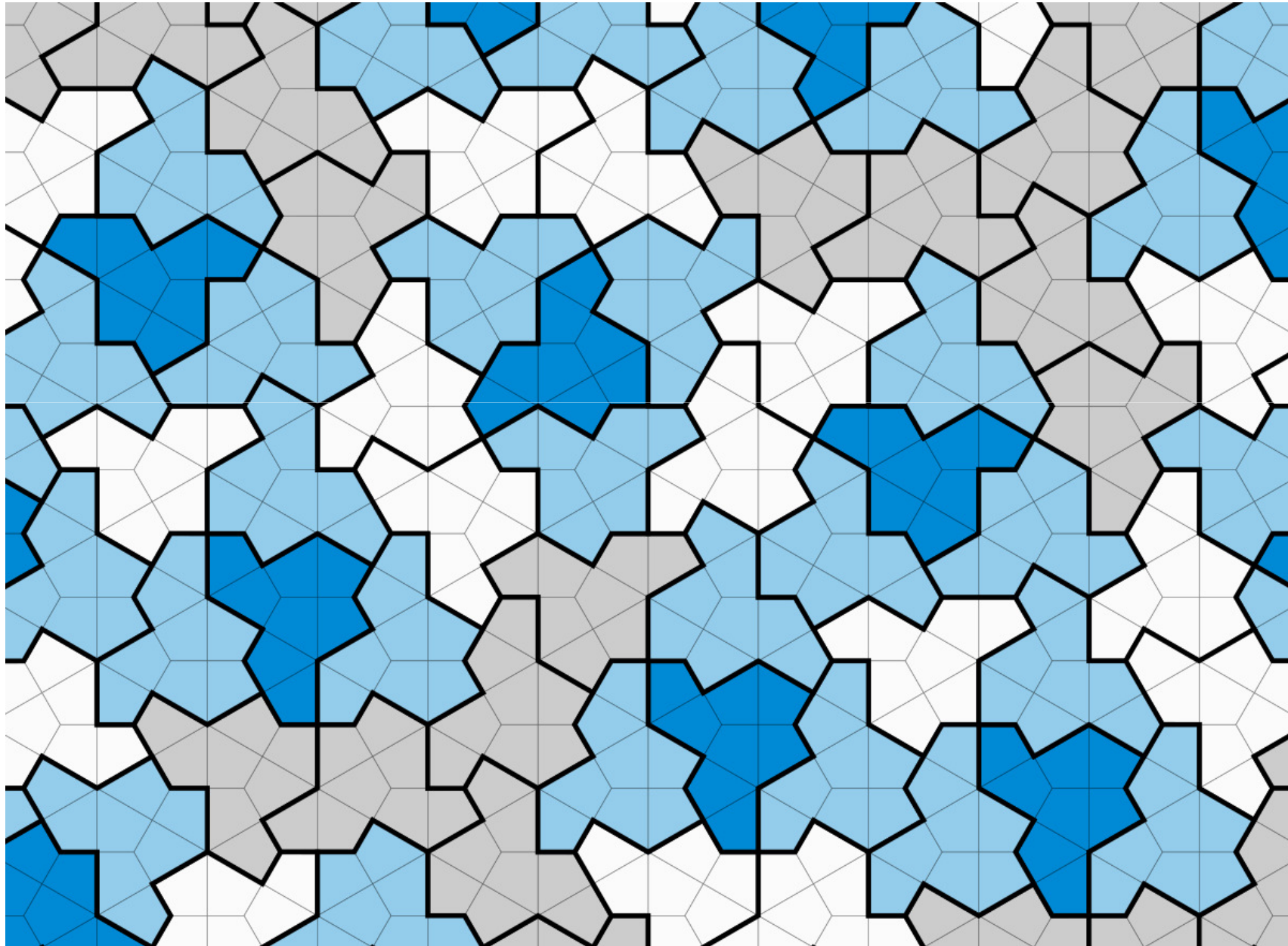


Sur un réseau hexagonal

© Samuel Velasco / *Quanta Magazine*, 2023



Un pavage apériodique



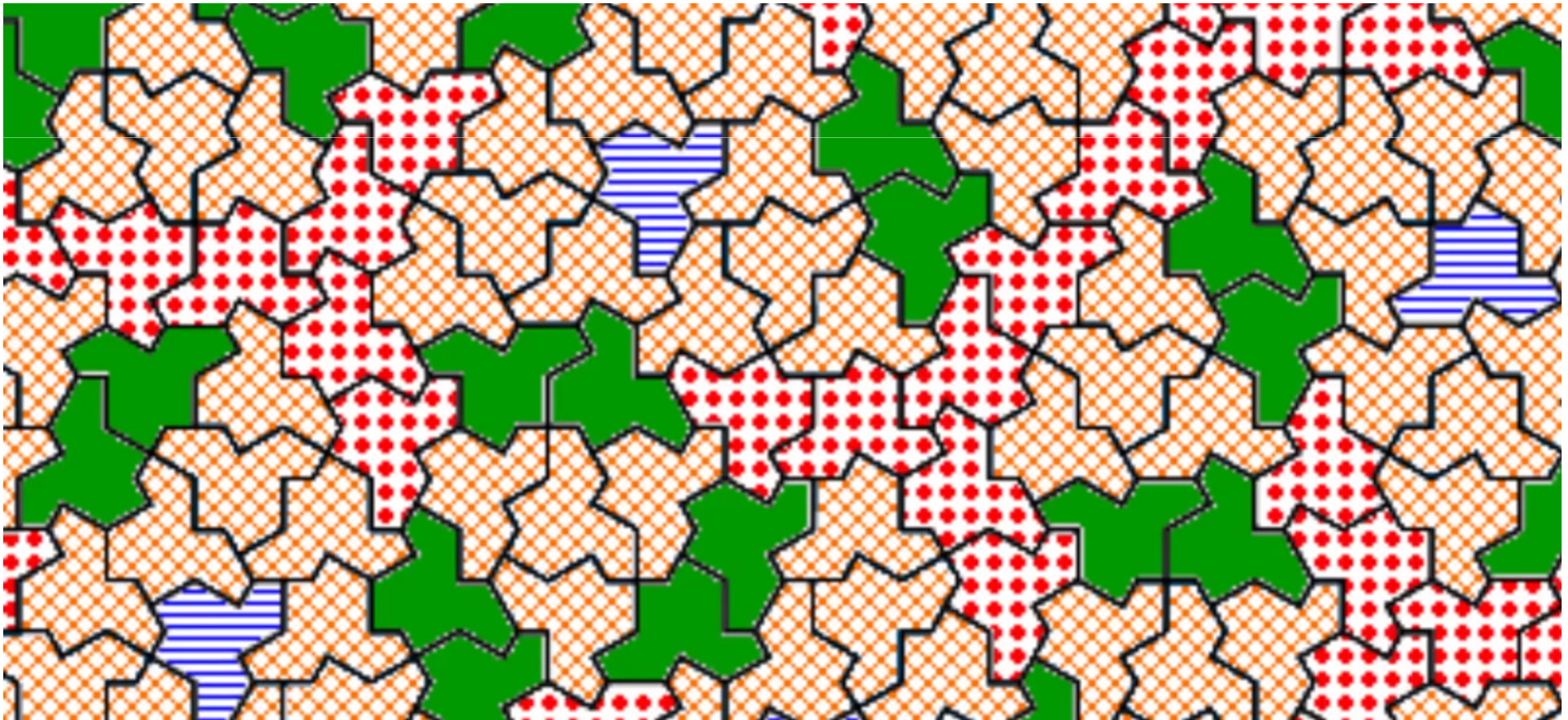
Une première démonstration

2 janvier 2023 : contactent Chaim Goodman-Strauss.

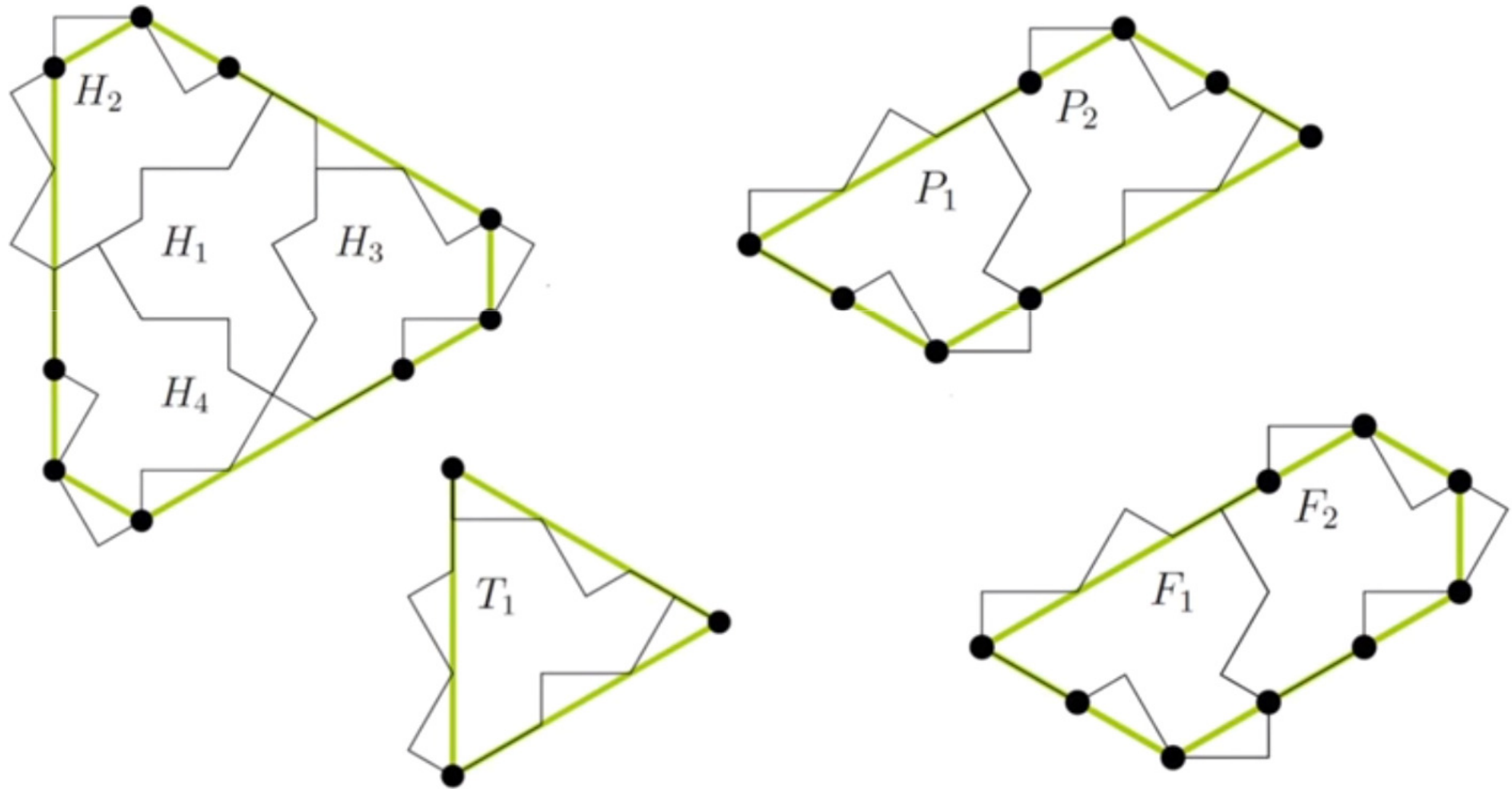
17 janvier 2023 : contactent Joseph Samuel Myers.

25 janvier 2023 (Myers) : une preuve est trouvée ; le pavage possède une structure hiérarchique unique !

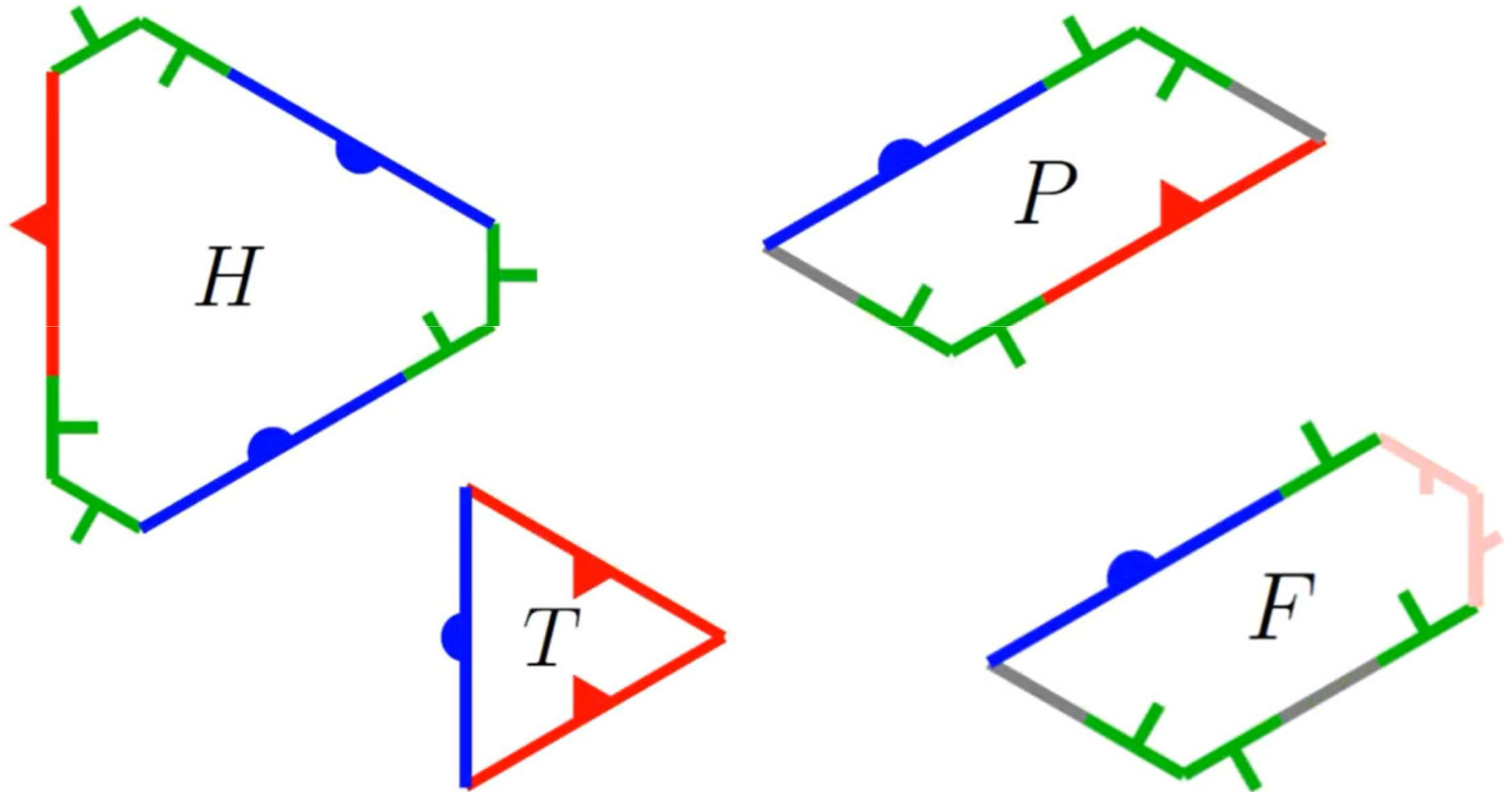
© Mostly Mental, 2023



Quatre métatuiles

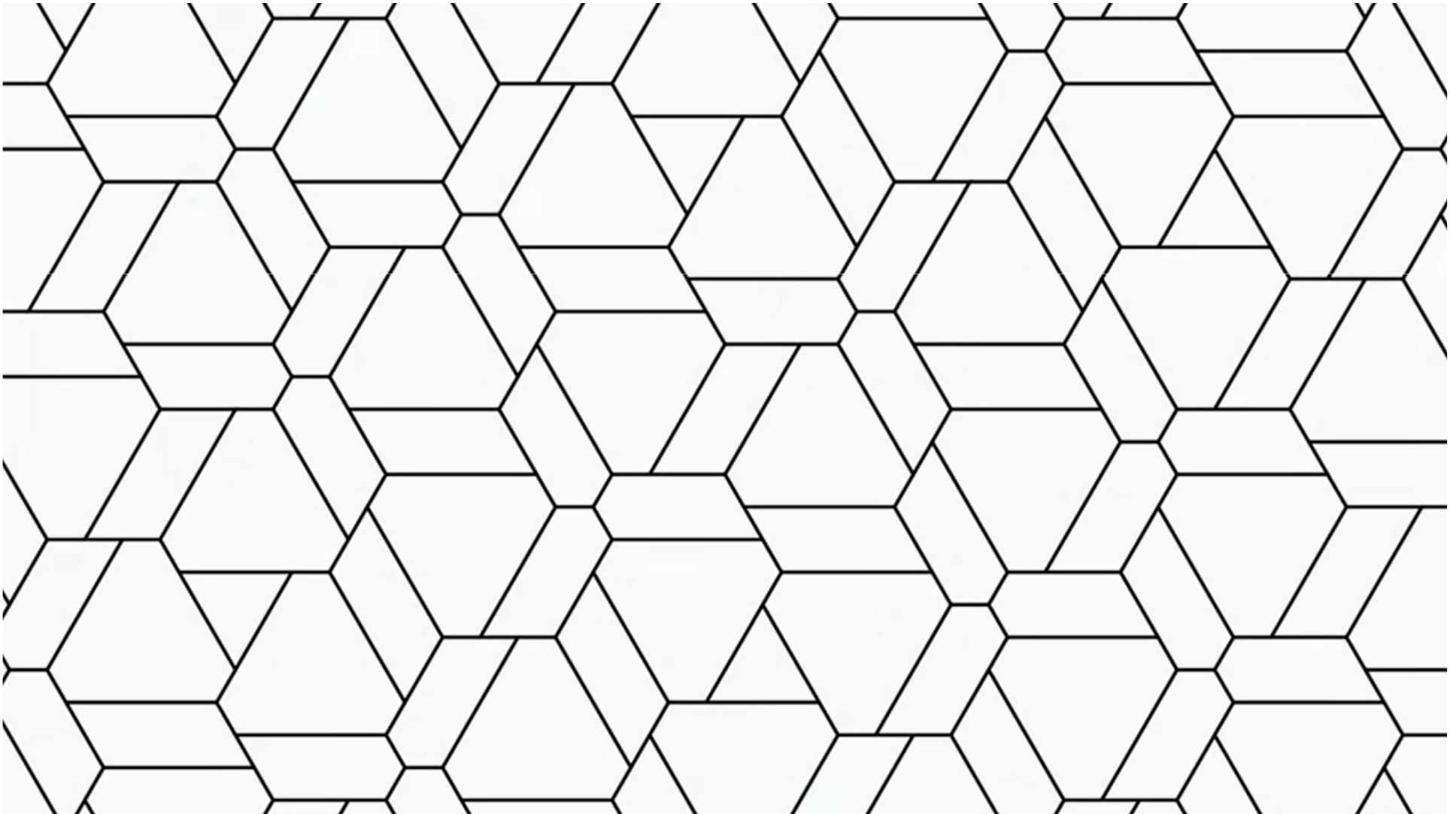


Les règles d'assemblage



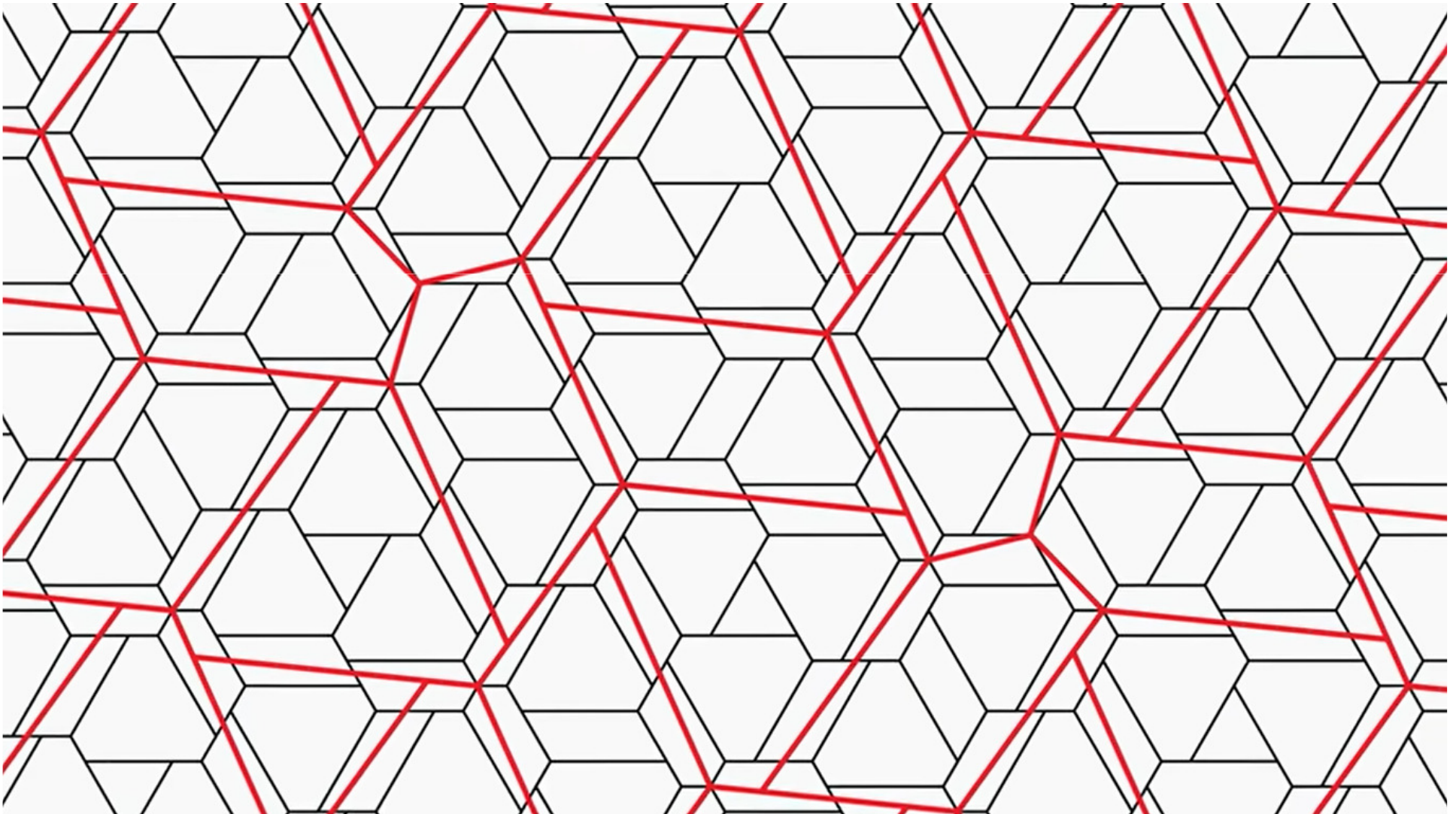
La structure avec les métatiles

© Passe-science, 2023

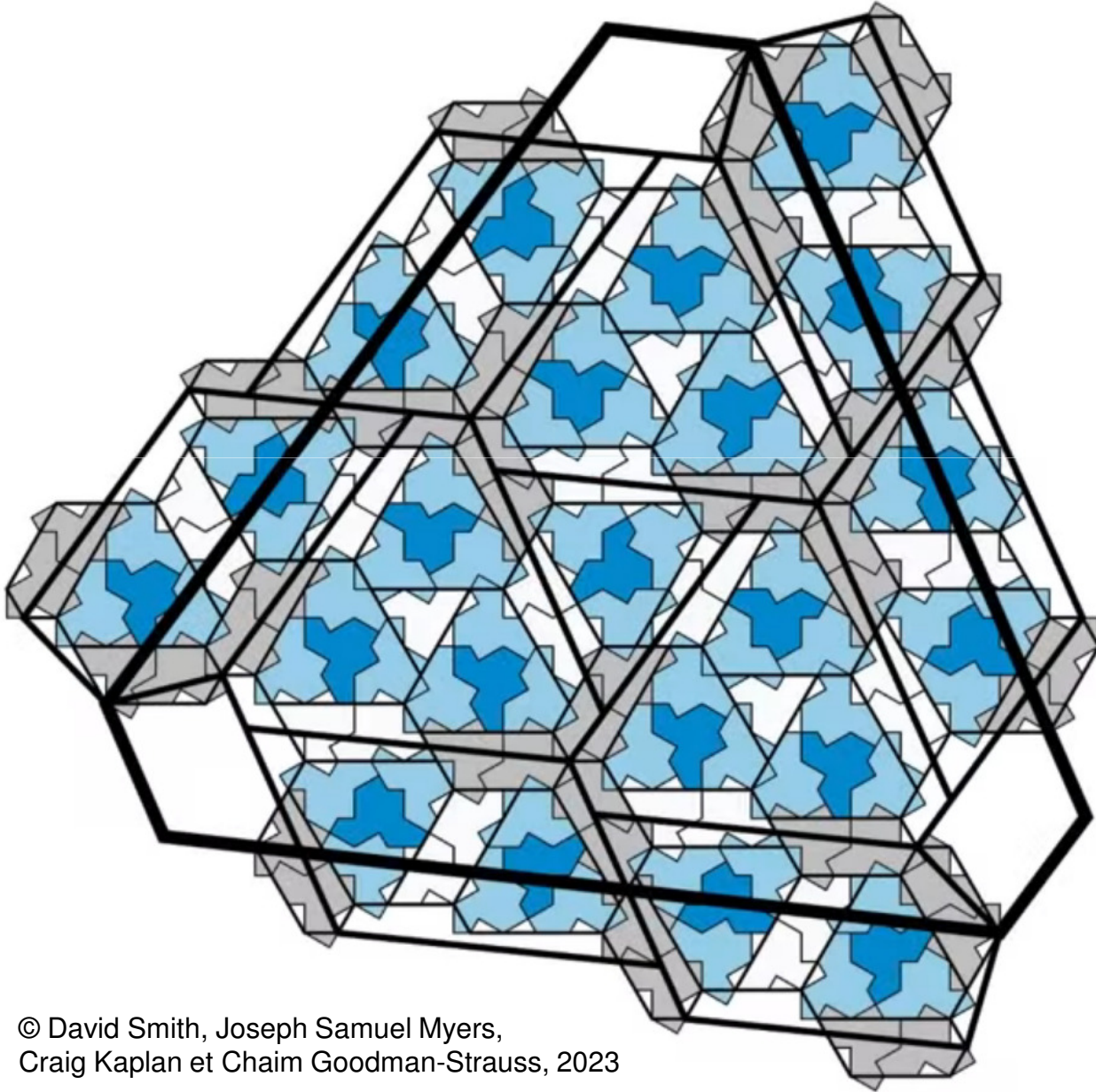


Vers une structure hiérarchique

© Passe-science, 2023



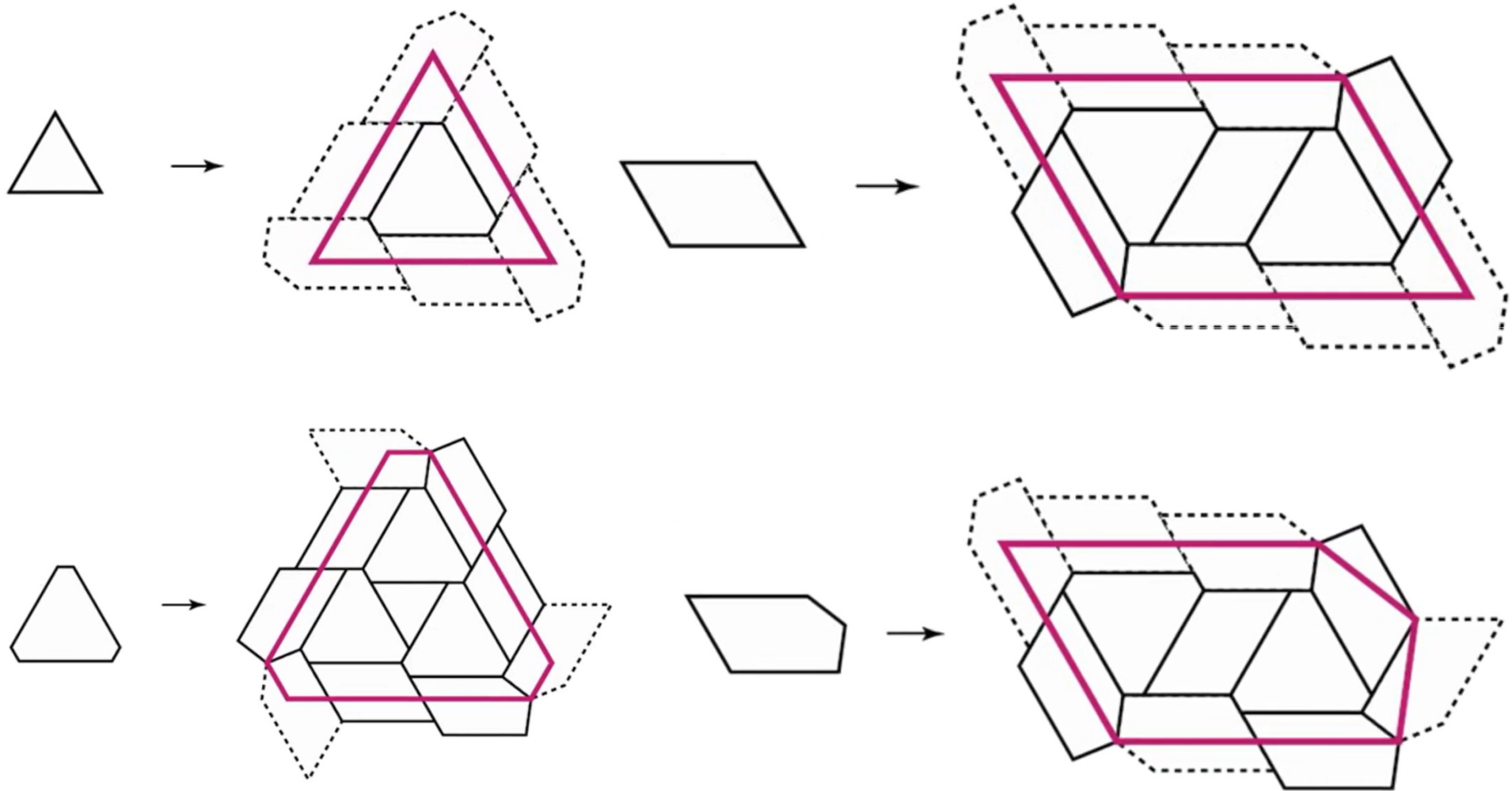
Une complexité inattendue



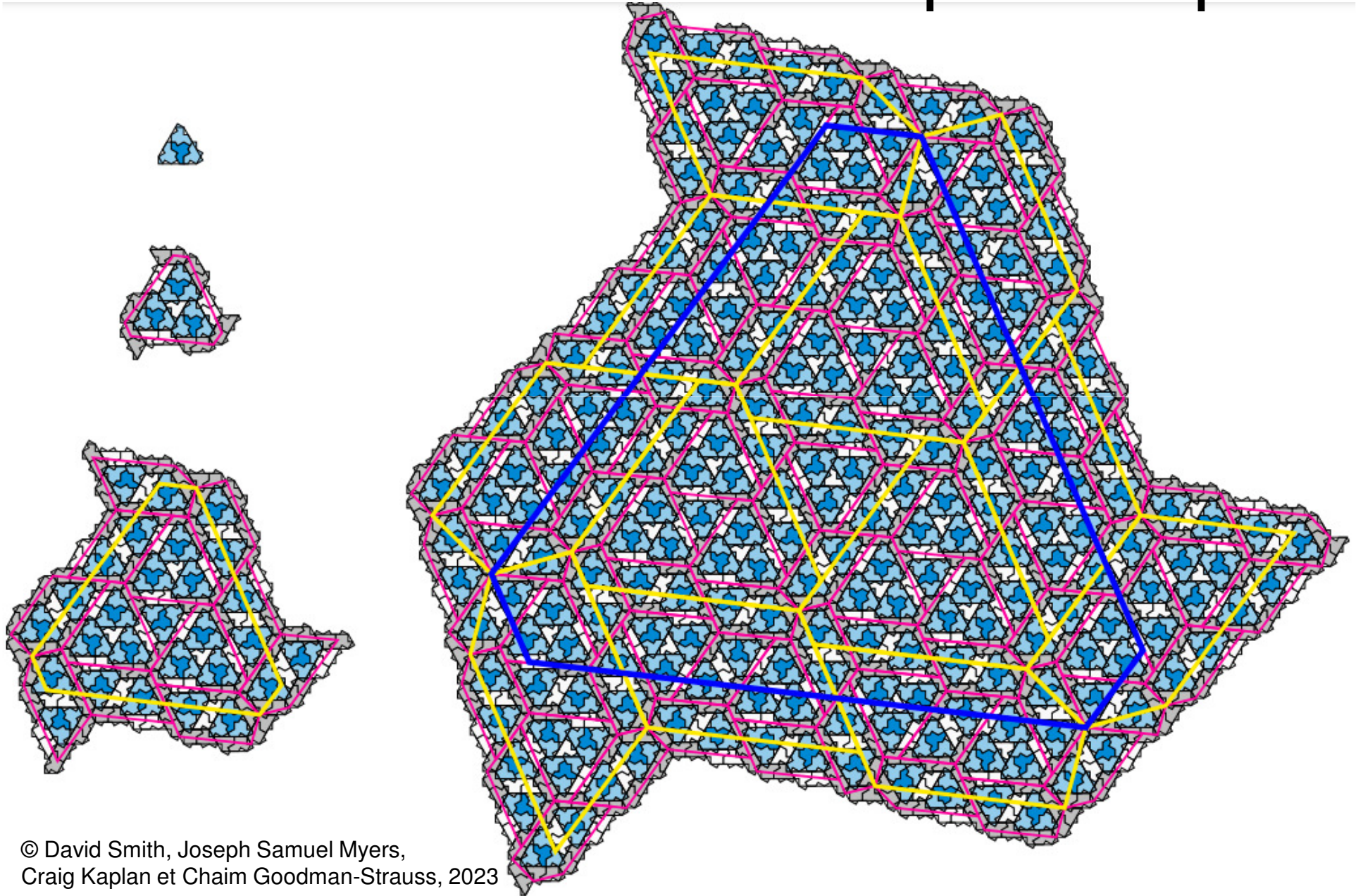
Les supertuiles ne sont pas exactement « de mêmes dimensions » que les métatuiles, et elles ne « s'alignent » pas avec elles !

La méthode s'adapte, au prix d'une grande complexité (utilisation de l'ordinateur pour l'unicité).

« Inflation–substitution »

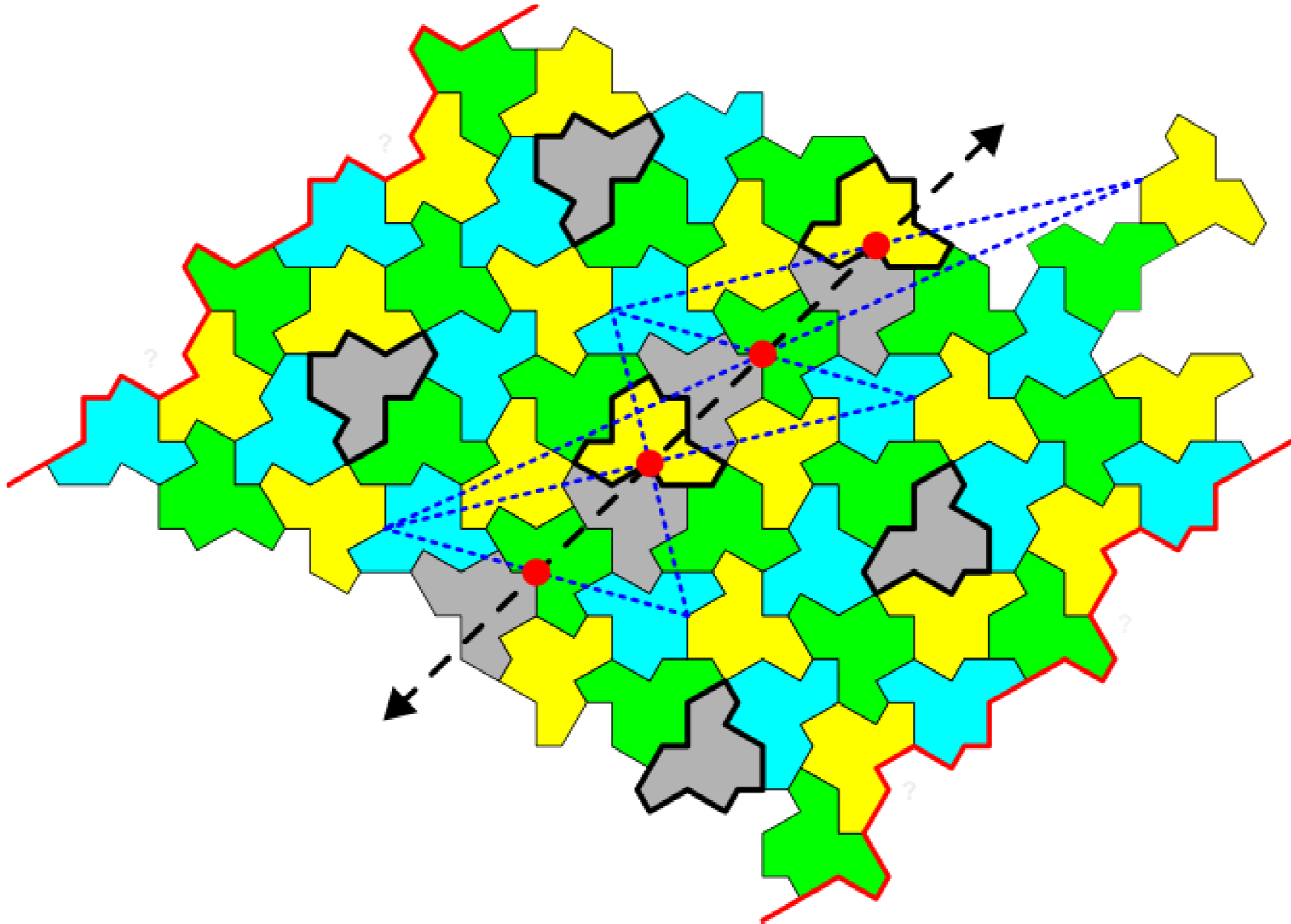


Une structure hiérarchique unique



© David Smith, Joseph Samuel Myers,
Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, 2023

Pavage périodique... d'une frise !



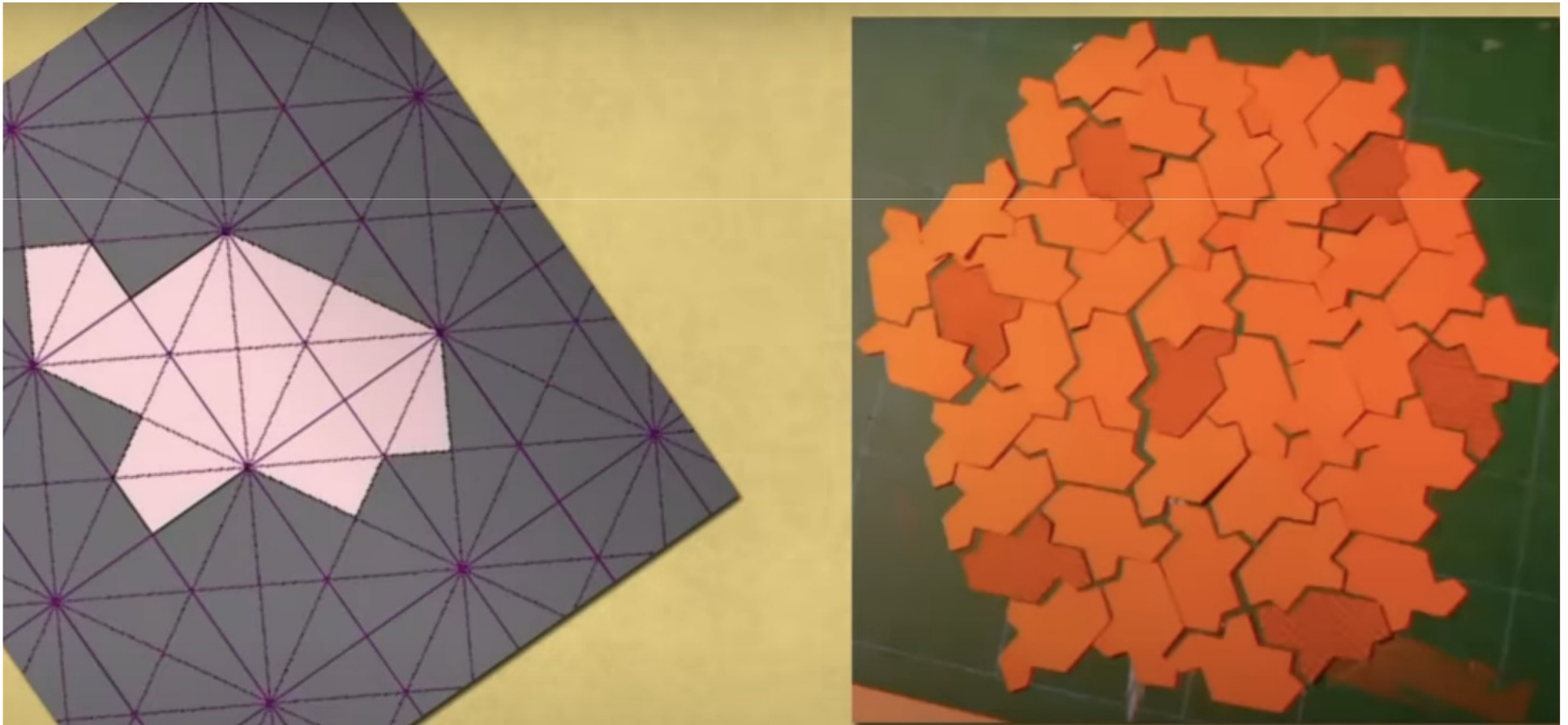


Photos : É.T., 2025

La « tortue »

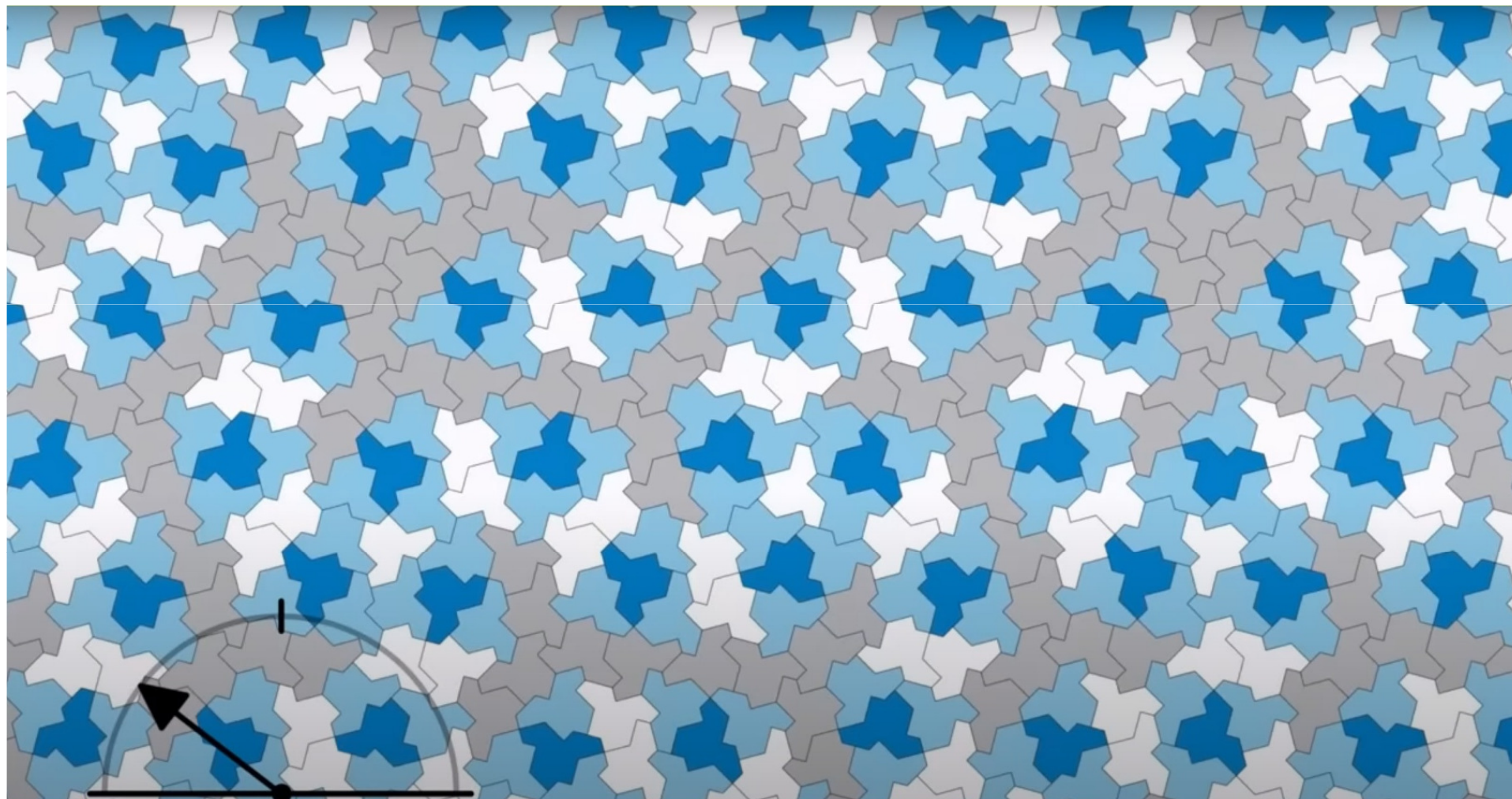
6 décembre 2022 : David Smith obtient la « tortue ».

© David Smith, 2022



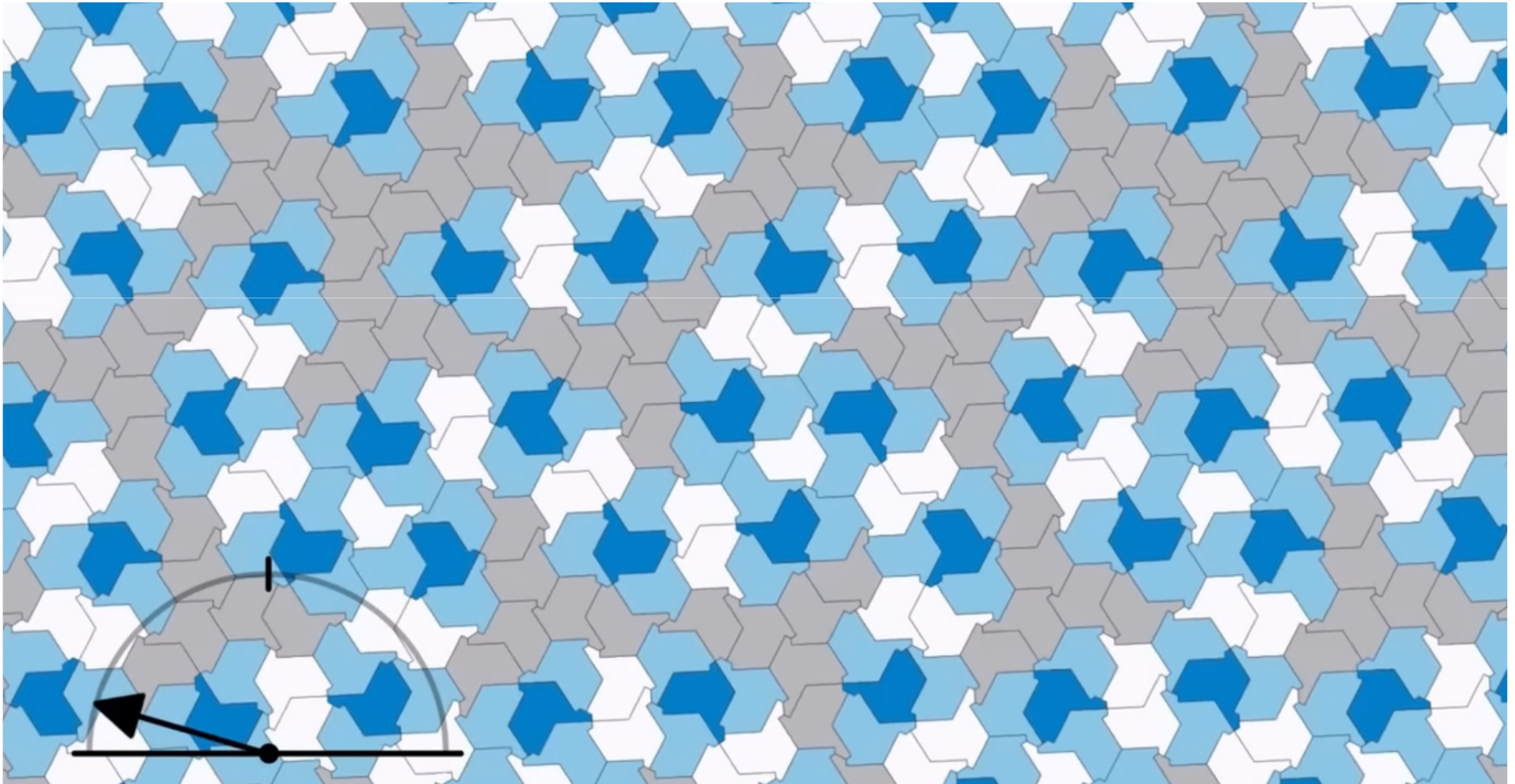
Pavage avec chapeaux

25 janvier 2023 : Myers relie ces formes dans un continuum.



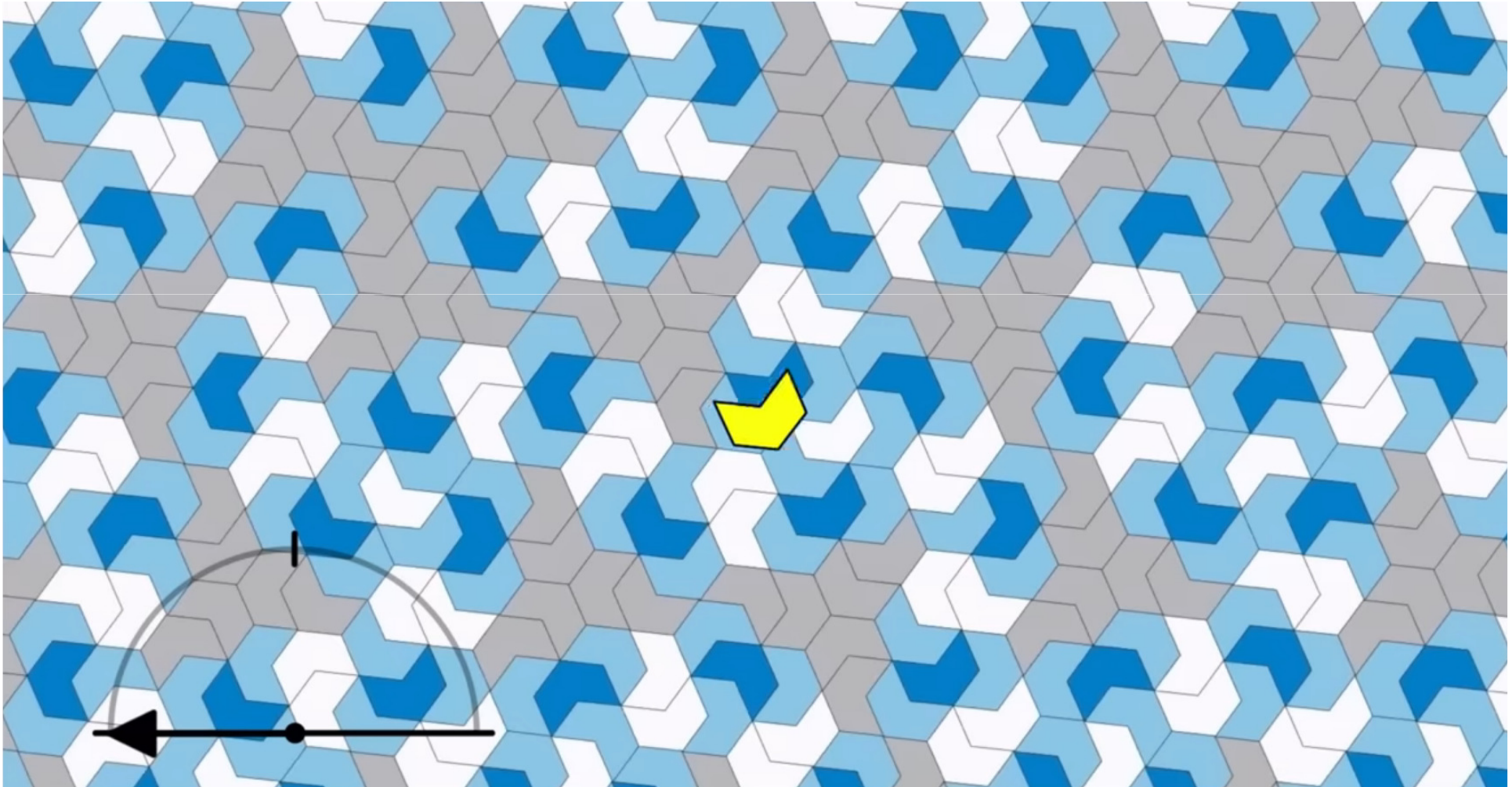
Une infinité de solutions !

Une monotuile apériodique qui répond au problème « ein Stein ».



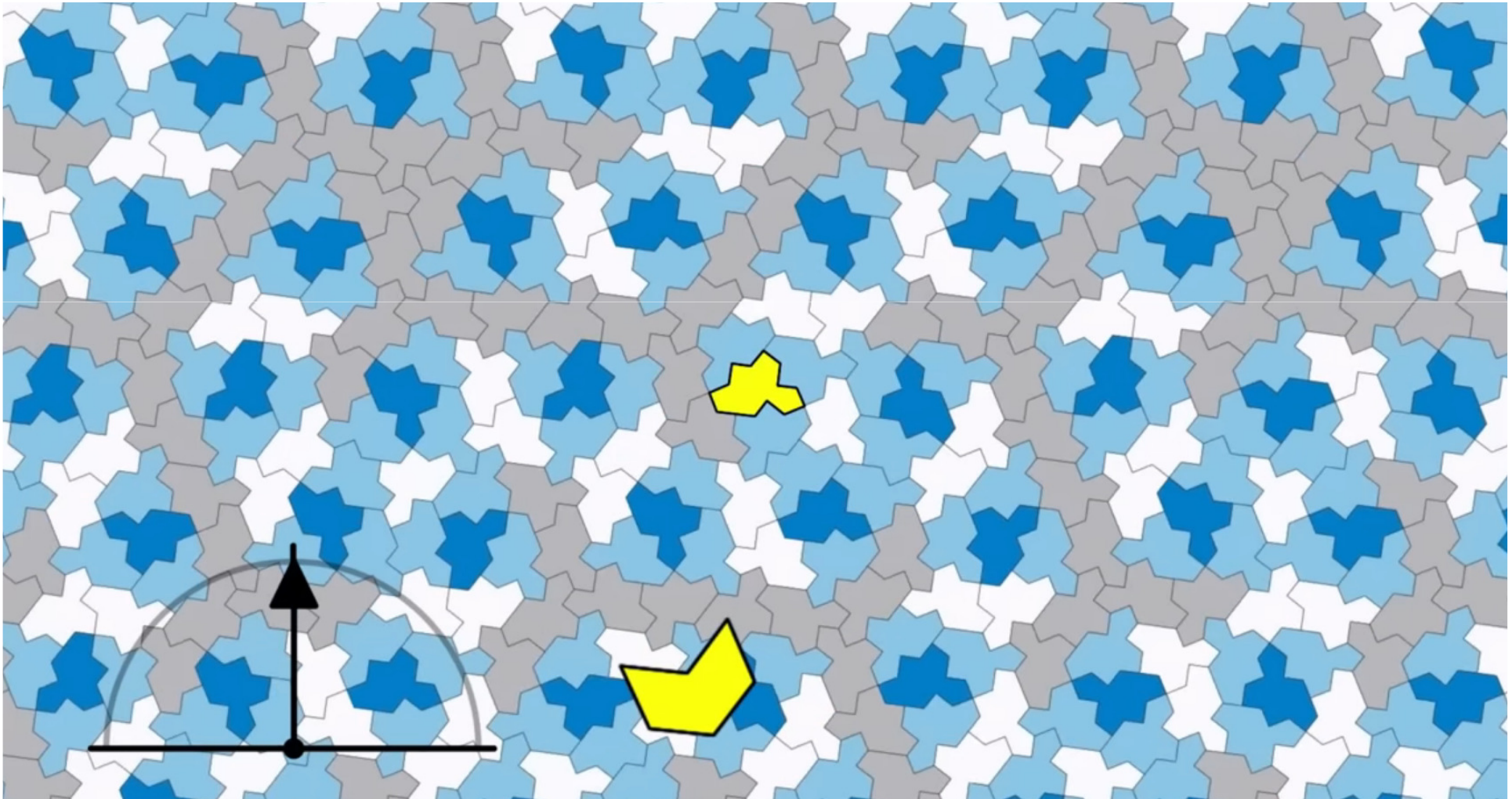
Le « chevron »

Cas extrême ; à exclure.



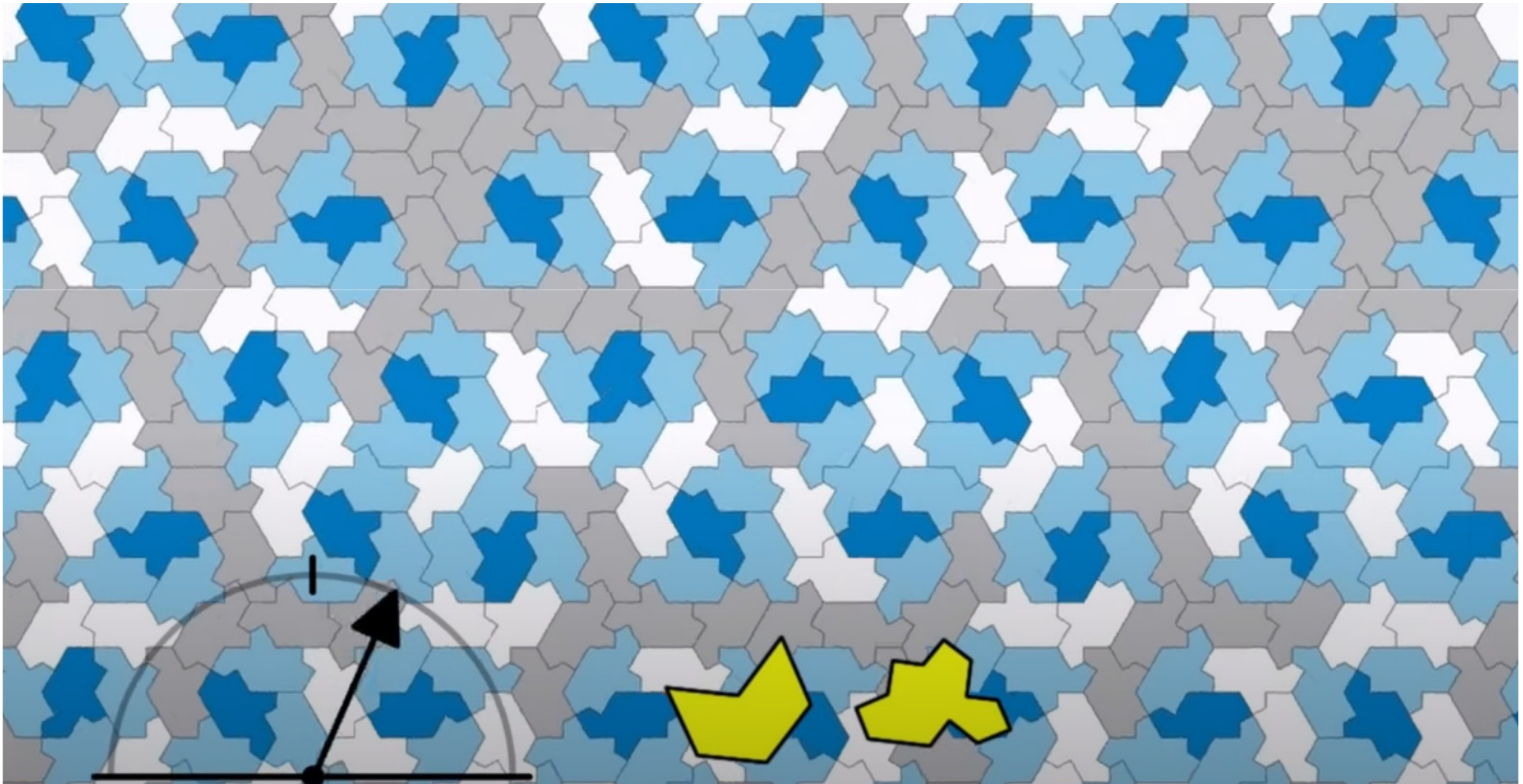
Le « spectre »

Cas médian ; à exclure (pavage périodique possible si réflexion).



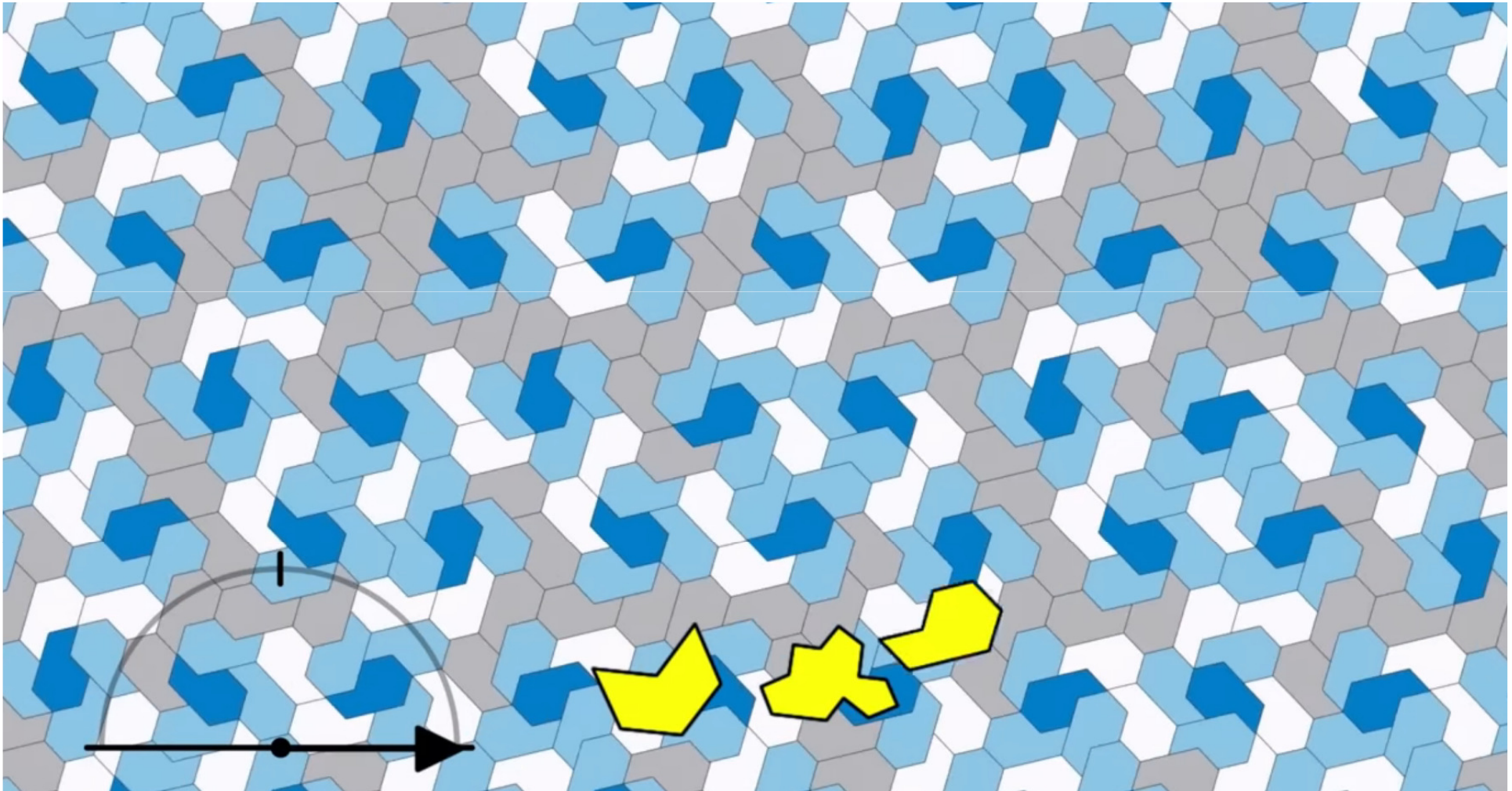
La tortue

Monotuille apériodique qui répond au problème « ein Stein ».



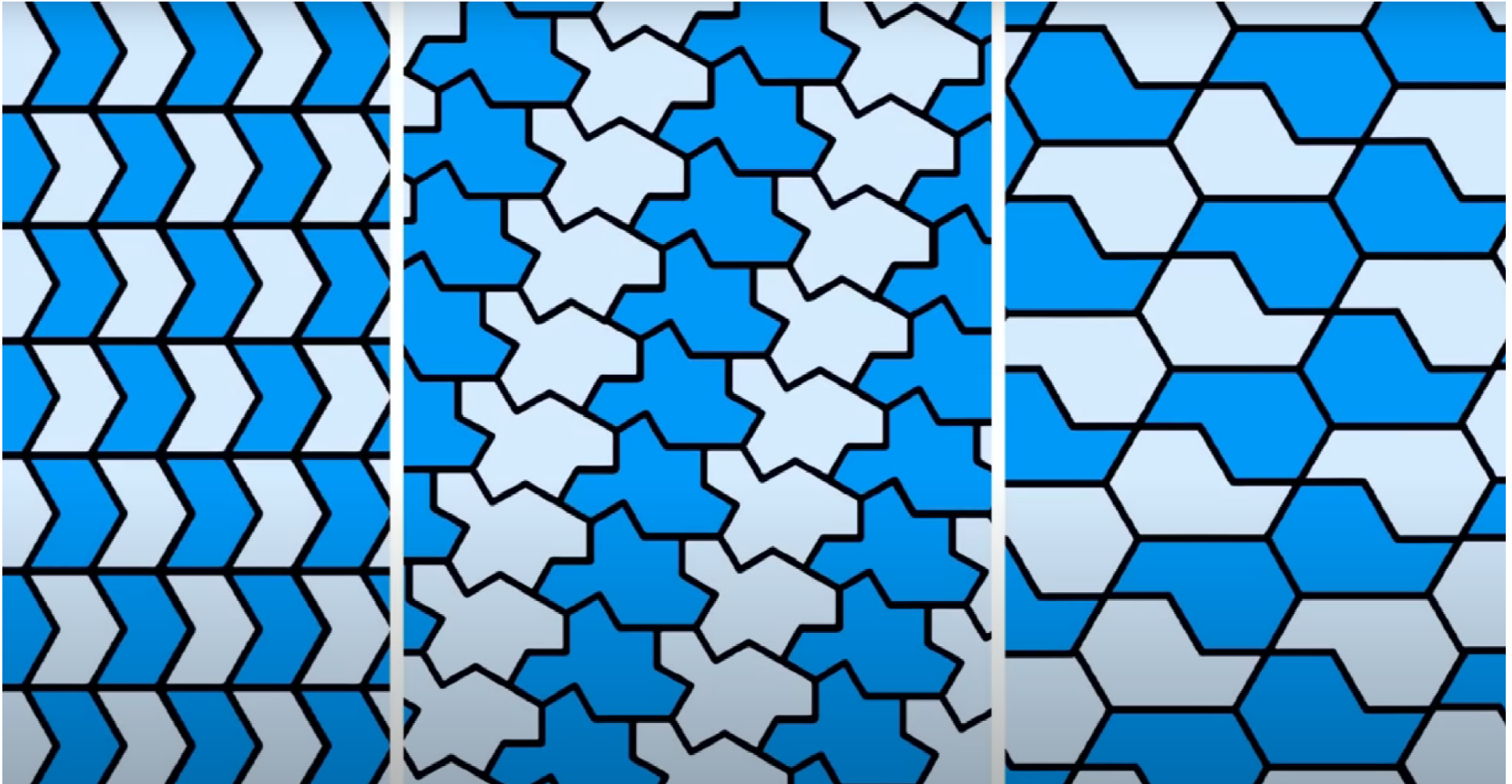
La « comète »

Cas extrême ; à exclure.



Les trois tuiles à exclure

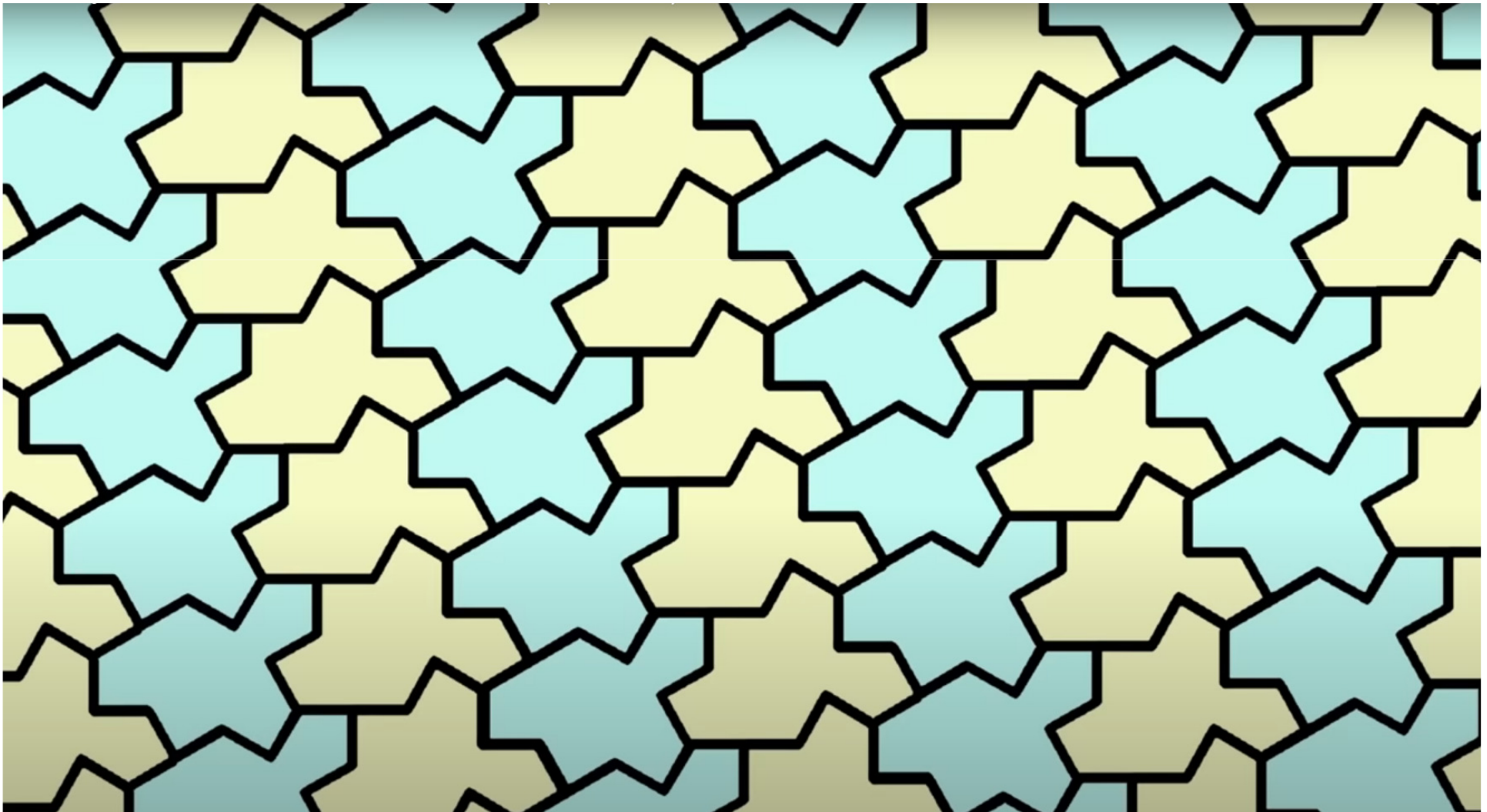
Chevron, spectre et comète permettent un pavage périodique.



Vu de plus près

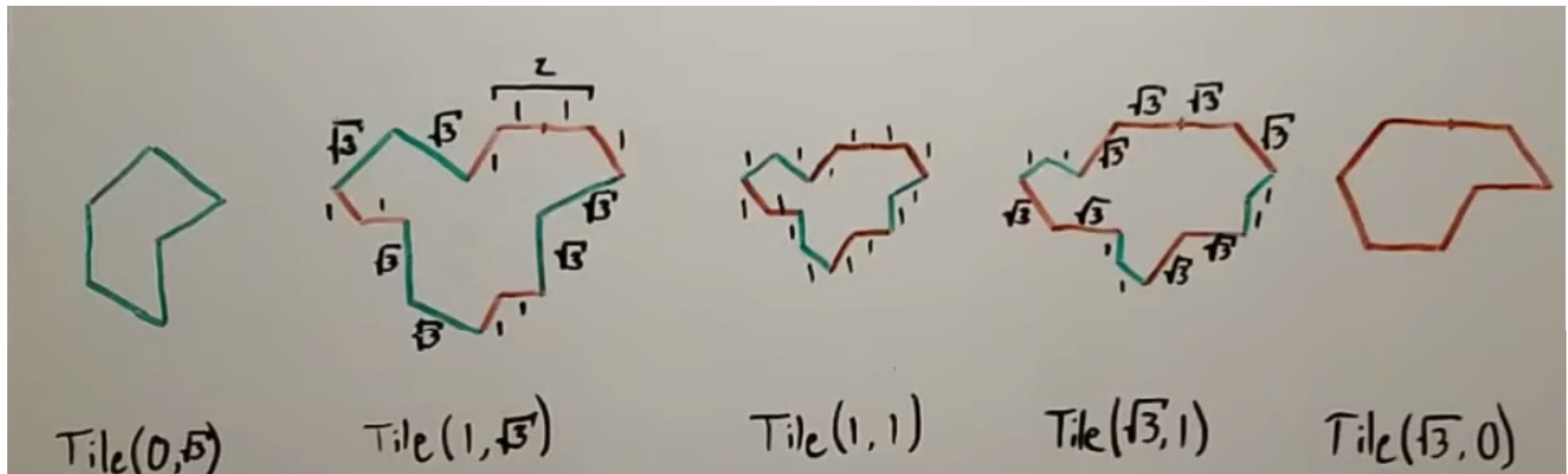
Un pavage périodique avec le spectre.

© Up and Atom, 2023



Les mesures

© Mostly Mental, 2023



$\text{Tile}(a, b)$: tuile du continuum dont a et b (compris entre 0 et $\sqrt{3}$) sont les mesures des côtés.

Pour tout $k > 0$, $\text{Tile}(ka, kb)$ similaire à $\text{Tile}(a, b)$.

Une autre méthode de preuve !

La grande contribution scientifique de l'article (au-delà du chapeau) :

introduire une nouvelle technique de preuve.

Par l'absurde : on considère un pavage périodique du plan avec des chapeaux. Alors on peut trouver deux pavages correspondants, l'un avec des chevrons, l'autre avec des comètes. Ces deux nouveaux pavages seront eux aussi périodiques, et les translations qui les laissent invariants doivent être « les mêmes ».

Mais, en comparant les grilles sous-jacentes, il est impossible d'obtenir des points dont les coordonnées correspondent à ces translations.

Contradiction ! (Argument totalement élémentaire.)

S'adapte aux autres tuiles de la famille (sauf le spectre, donc).

Plus en détail...

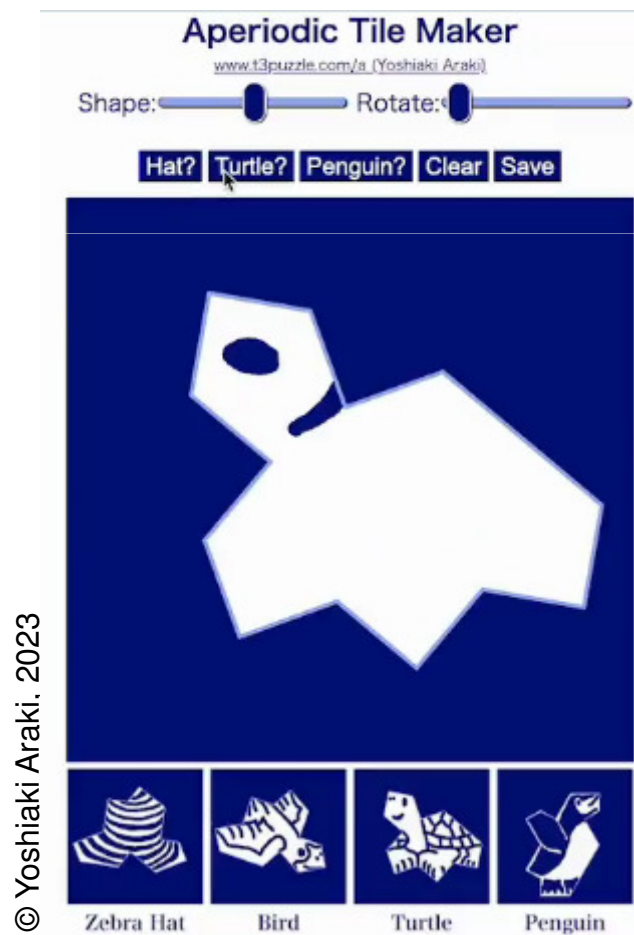
Le pavage par des comètes et par des chevrons s'appuie sur le réseau triangulaire régulier du plan. La comète a une aire double du chevron. Si un pavage avec des chapeaux était périodique, il existerait un parallélogramme qui, par translation, générerait ce pavage. Il existerait donc une application linéaire entre les réseaux de symétrie associés à ces deux formes. Cette bijection serait nécessairement une dilatation homogène dans toutes les directions (point clé de la preuve), et le rapport de la dilatation serait égal à $\sqrt{2}$. Deux sommets du chevron à une distance entière d sur le réseau associé seraient envoyés sur deux sommets à distance $d\sqrt{2}$ sur le réseau associé à la comète. L'irrationalité du rapport de la dilatation rend impossible la coïncidence de ces deux points avec les sommets du réseau triangulaire régulier. Contradiction.

Une monotuile apériodique chirale

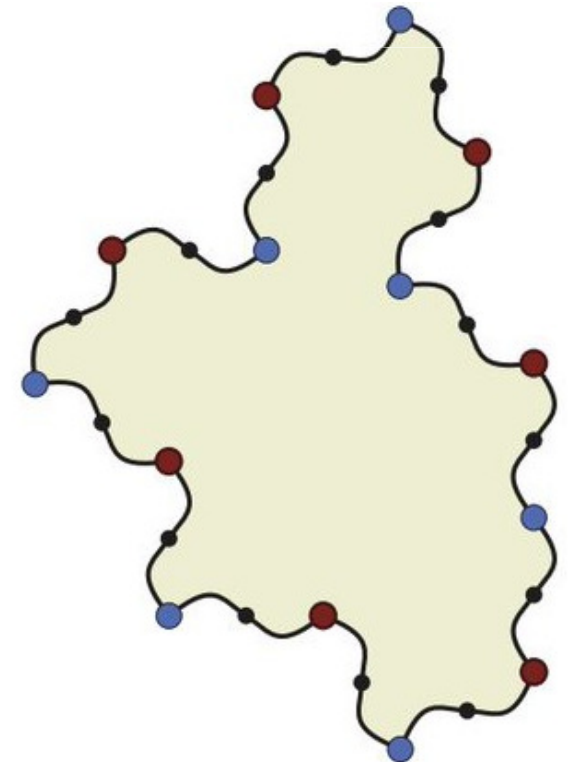
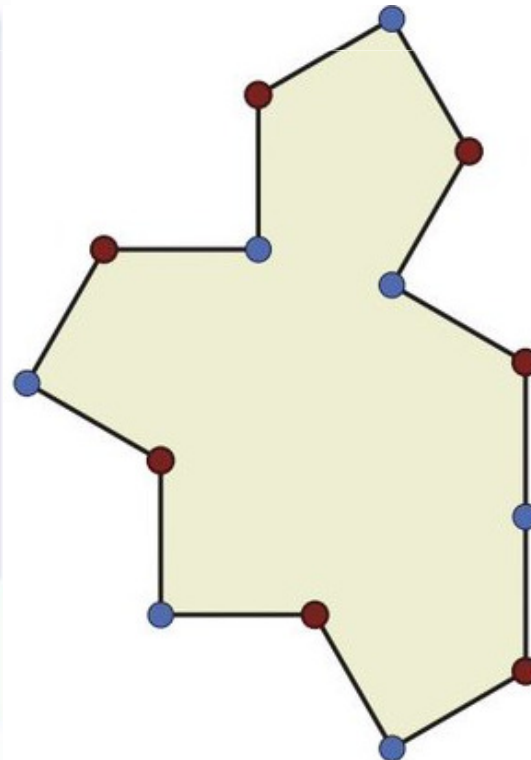
21 mars 2023 : article mis en ligne. Retentissement planétaire.

24 mars : Yoshiaki Araki poste ses créations.

26 mars : Obstruction rhétorique (****) ; Smith revisite le spectre !



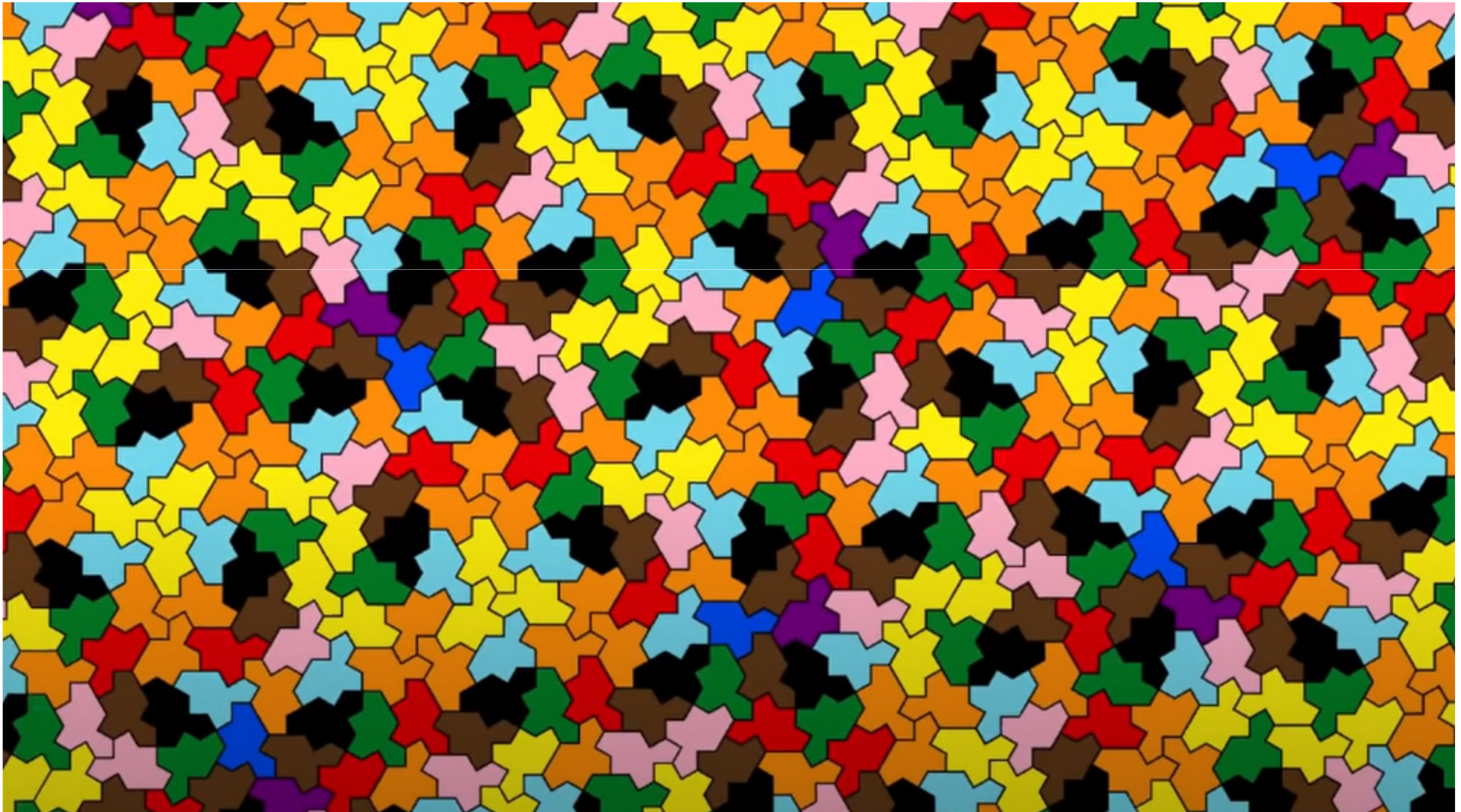
© David Smith, Joseph Samuel Myers,
Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, 2023



C'était le spectre !

Il fallait **interdire** tout retournement du spectre !

© Up and Atom, 2023

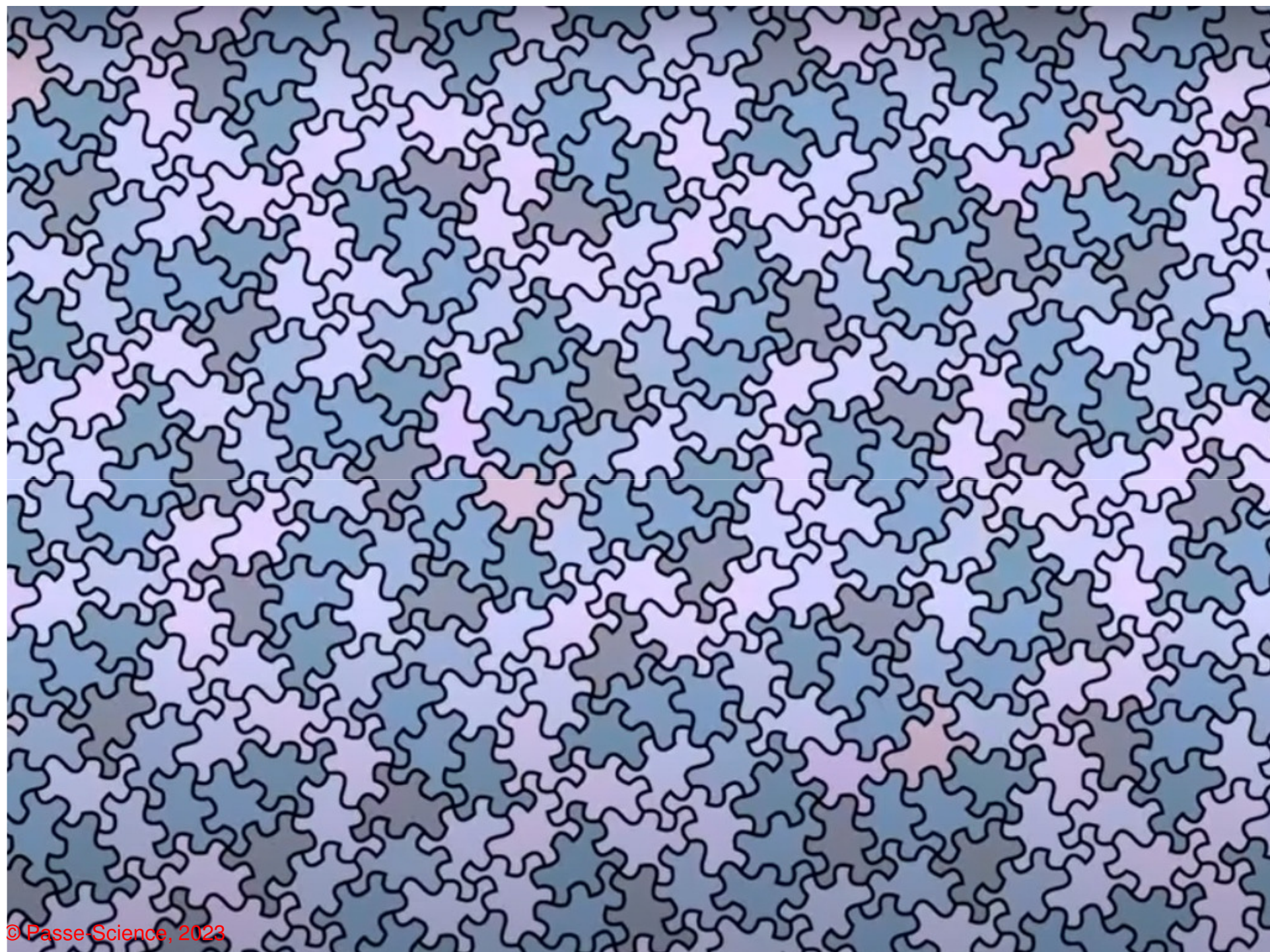


À partir du spectre

Une « vraie » monotuile apériodique chirale, simplement connexe, homéomorphe au disque, sans règle d'assemblage.



© David Smith, Joseph Samuel Myers,
Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, 2023



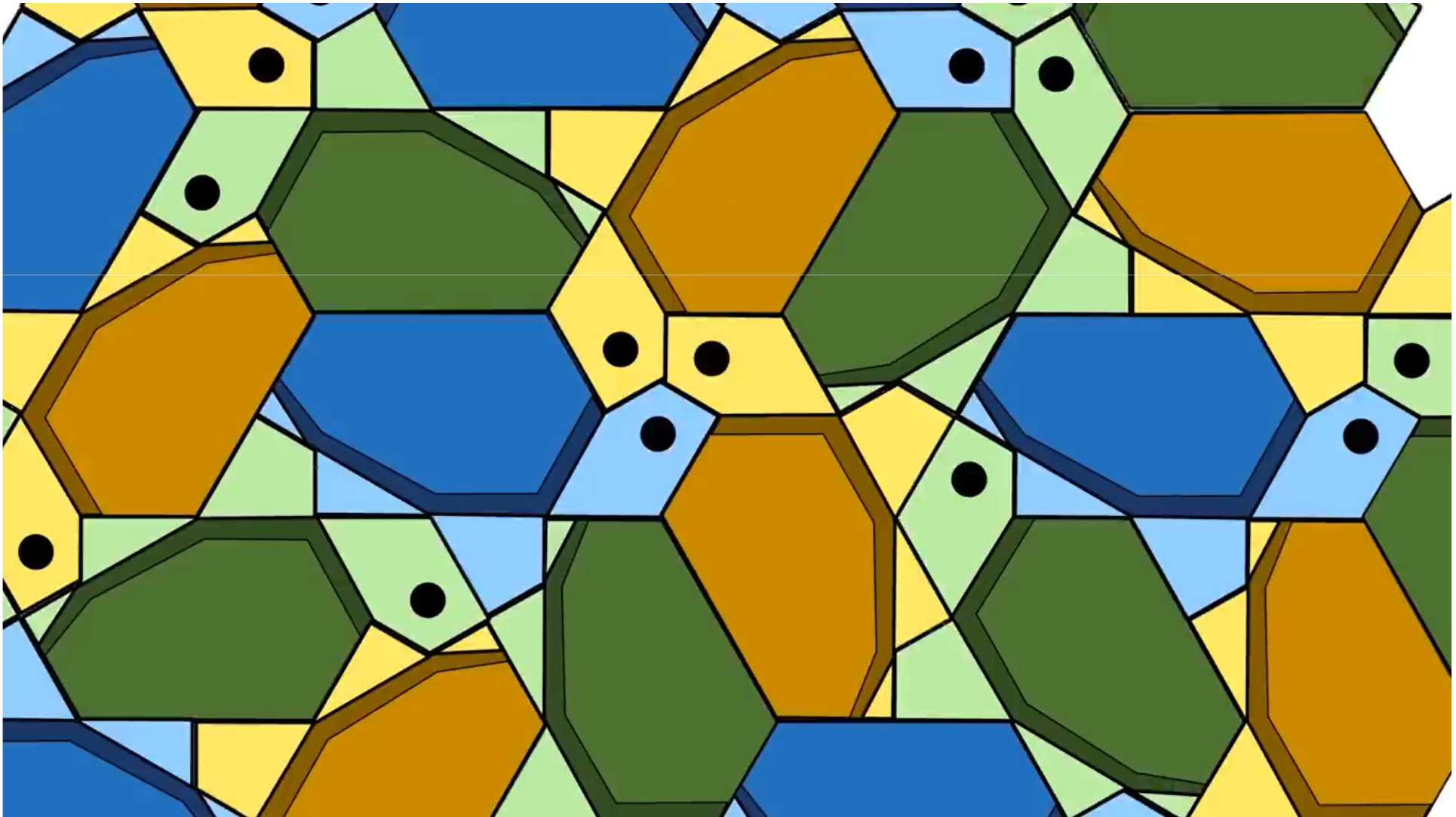
On reprend toute l'étude ?

© Yoshiaki Araki, 2023

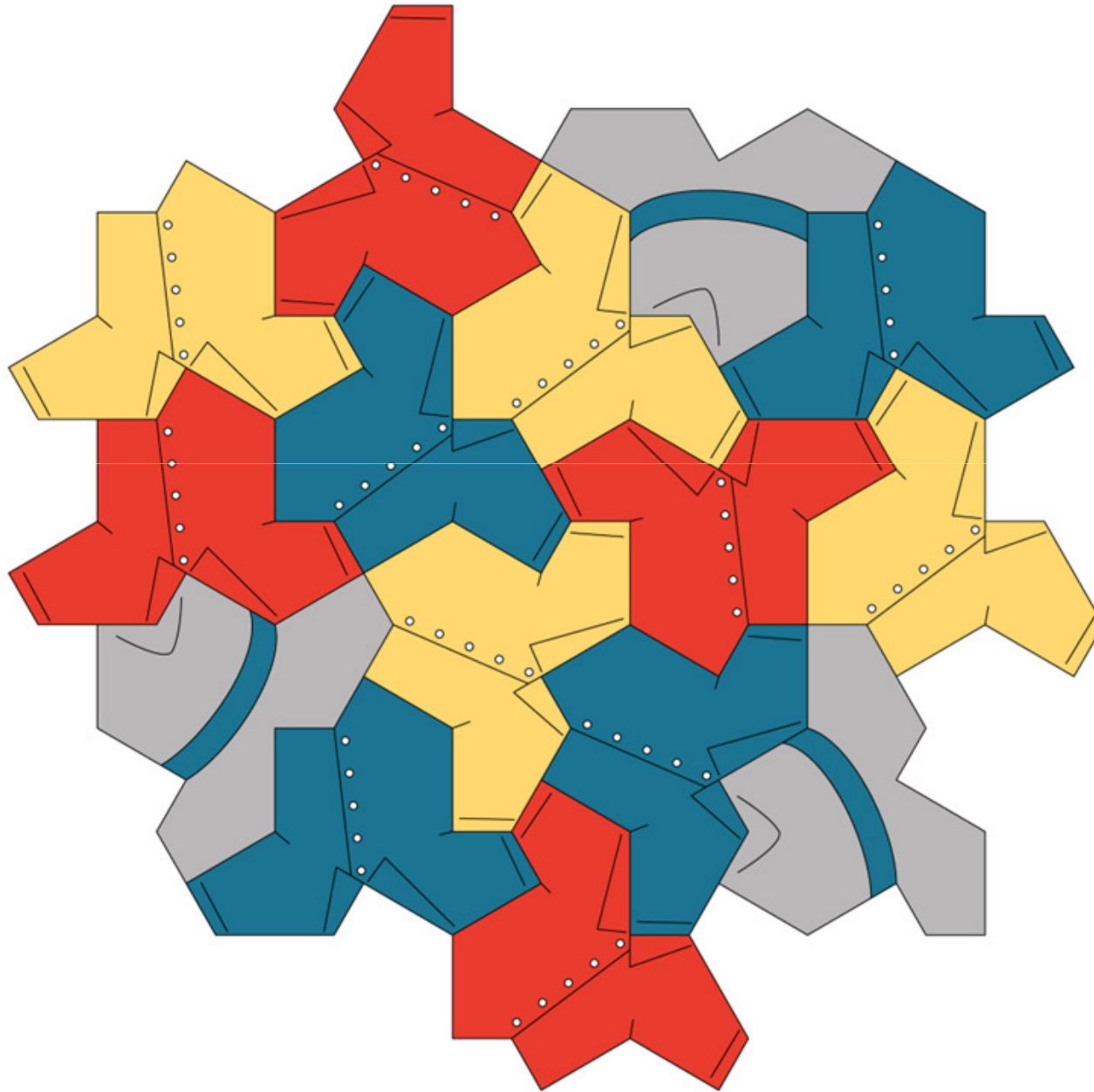


À la Escher

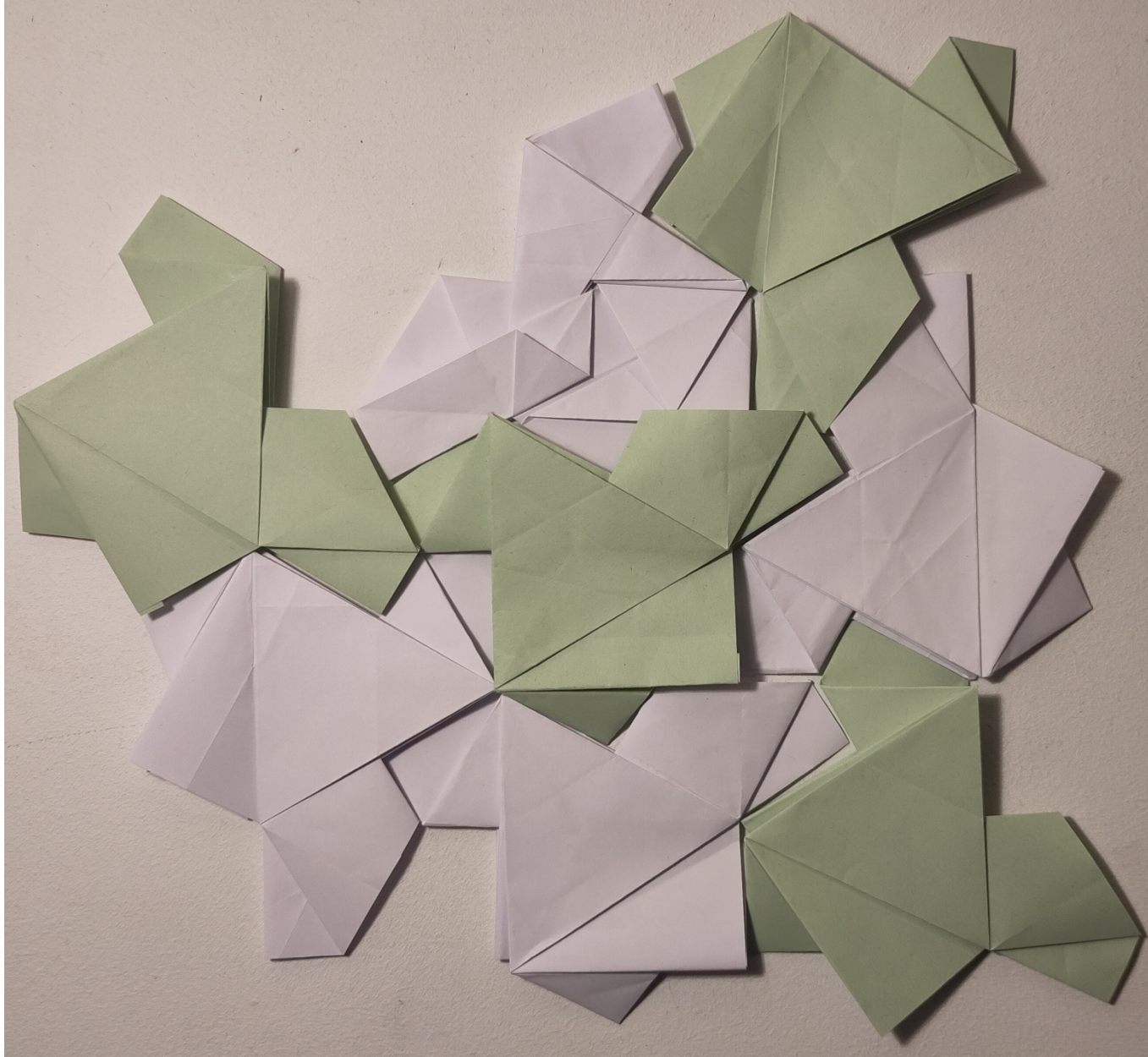
© Thomaths, 2023



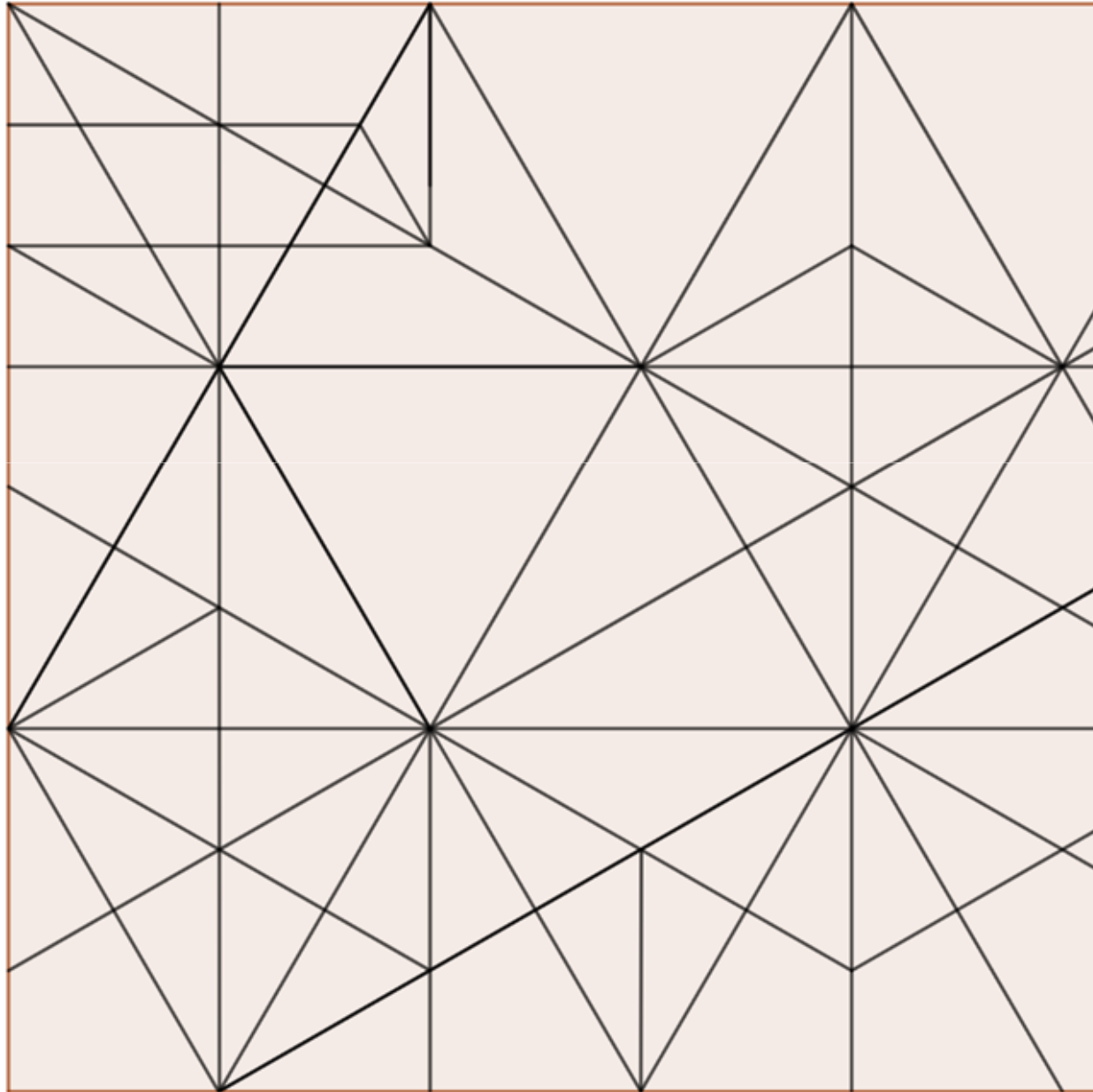
Une version magnétique



En origami



La carte de pliage



Des tuiles imprimées en 3D



Avec des tuiles de Truchet

© Numberphile, 2023





Un tatouage



Un ouvrage textile

© Emma Laughton, 2023



Des coussins

© Corinna Beuermann-Kulp, 2024 / Photo : É.T., 2025





Un maillot



Une vareuse



Un coupe-vent



Un accessoire

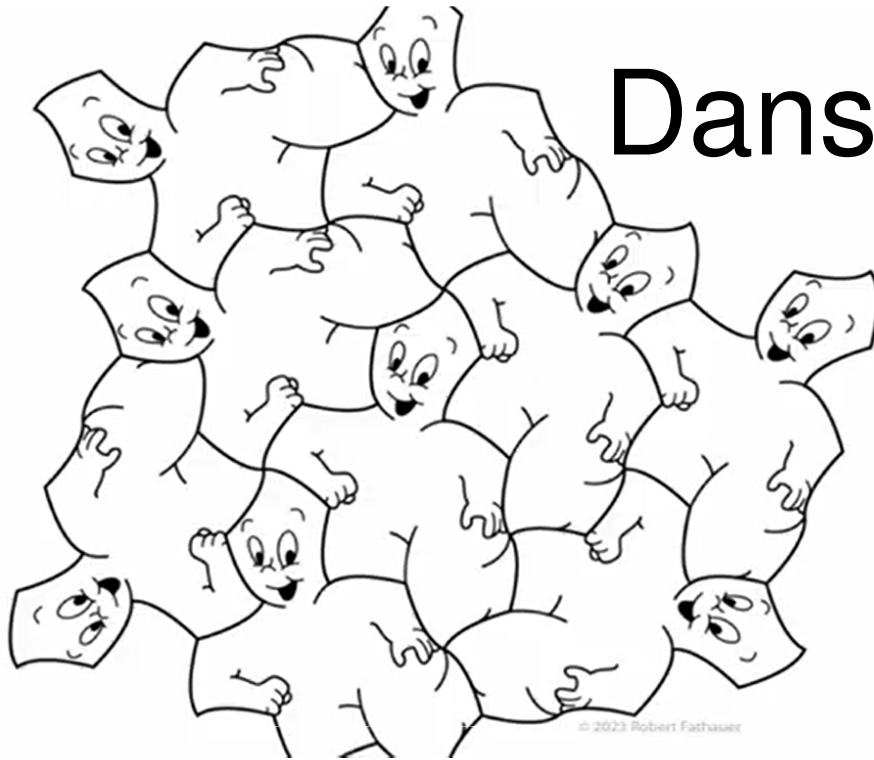


Un rideau de douche

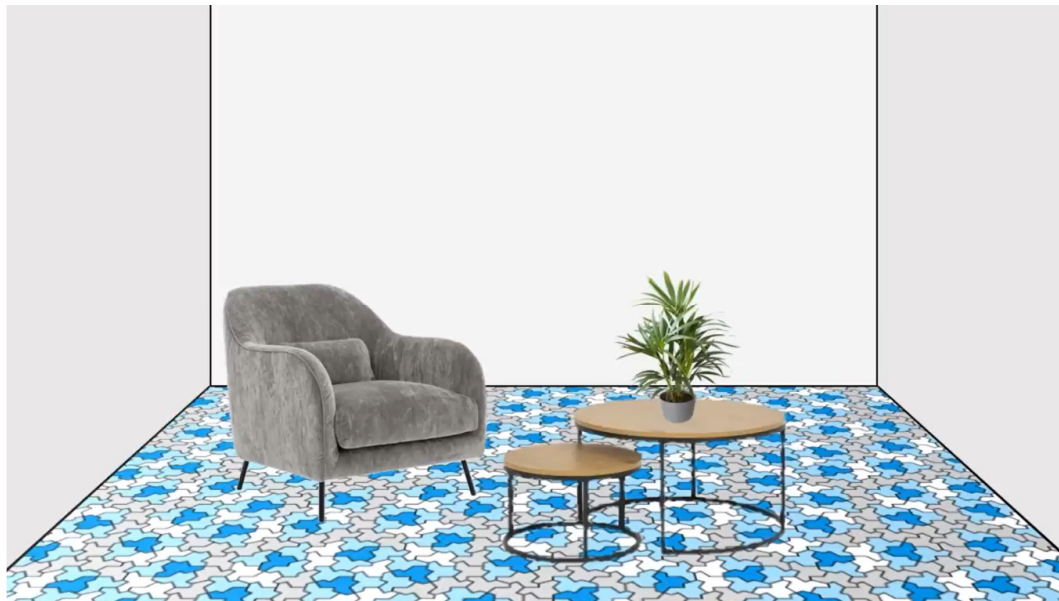


© ProtopianPickleJar, 2023

Dans la maison



© Robert Fathauer, 2023

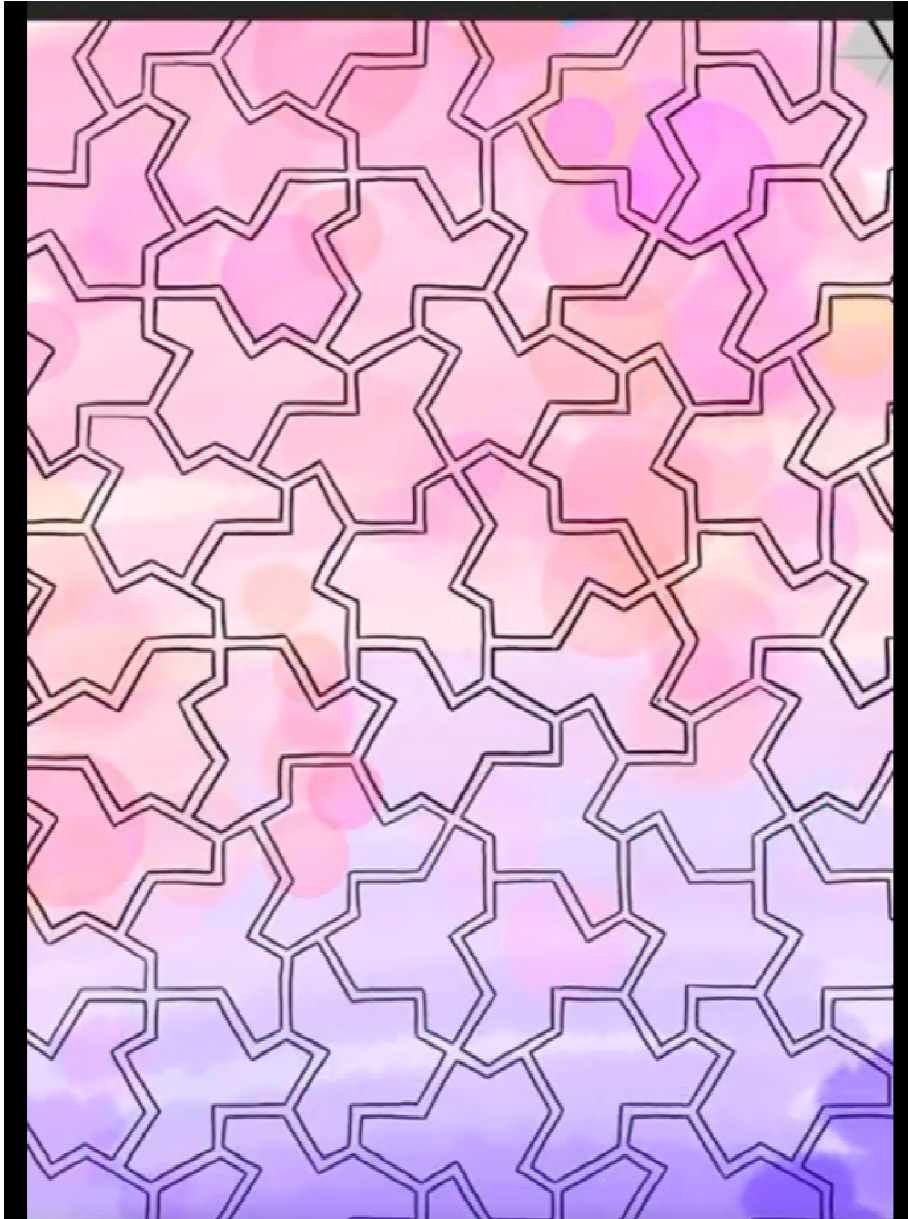


© Thomaths, 2023

Des profils pour pneumatiques



Un fond d'écran, des lunettes

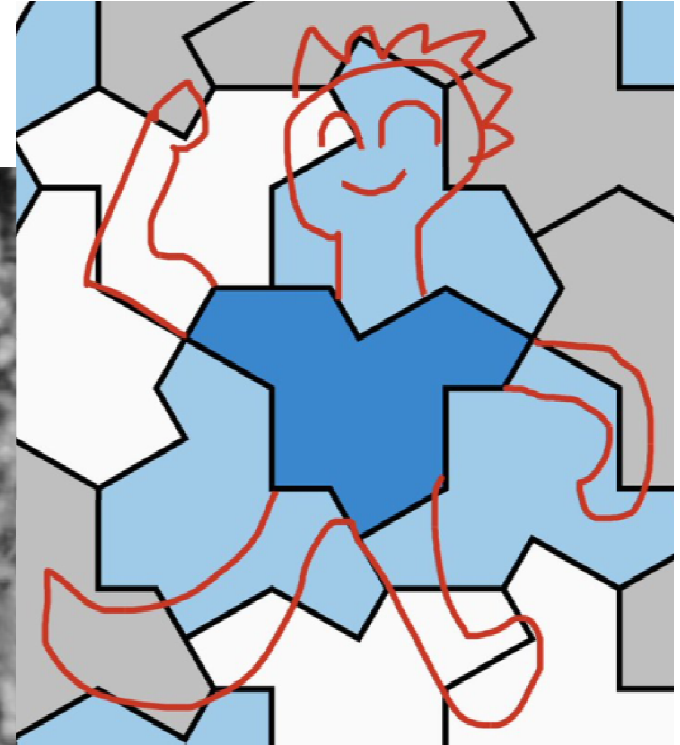
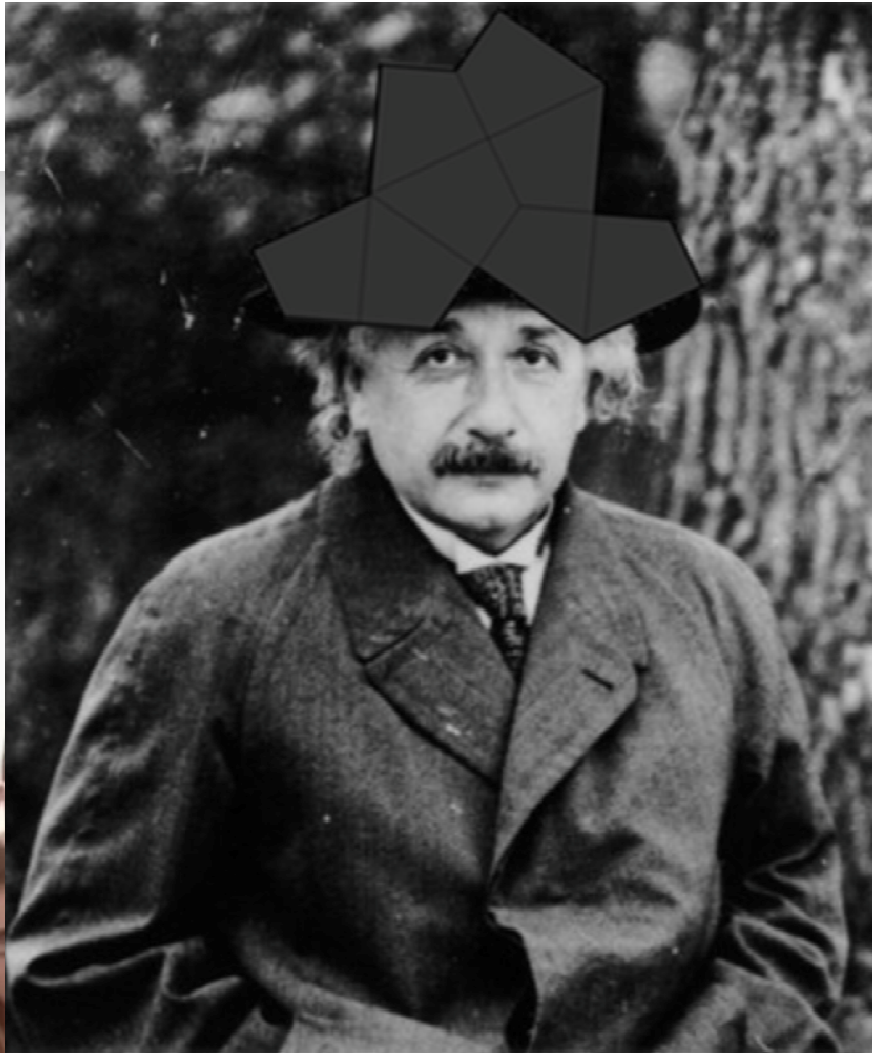


© Thomaths, 2023

© Aylean MacDonald, 2023

Des détournements

© Up and Atom, 2023



© songkeys, 2023

© John May, 2023

Un service de table



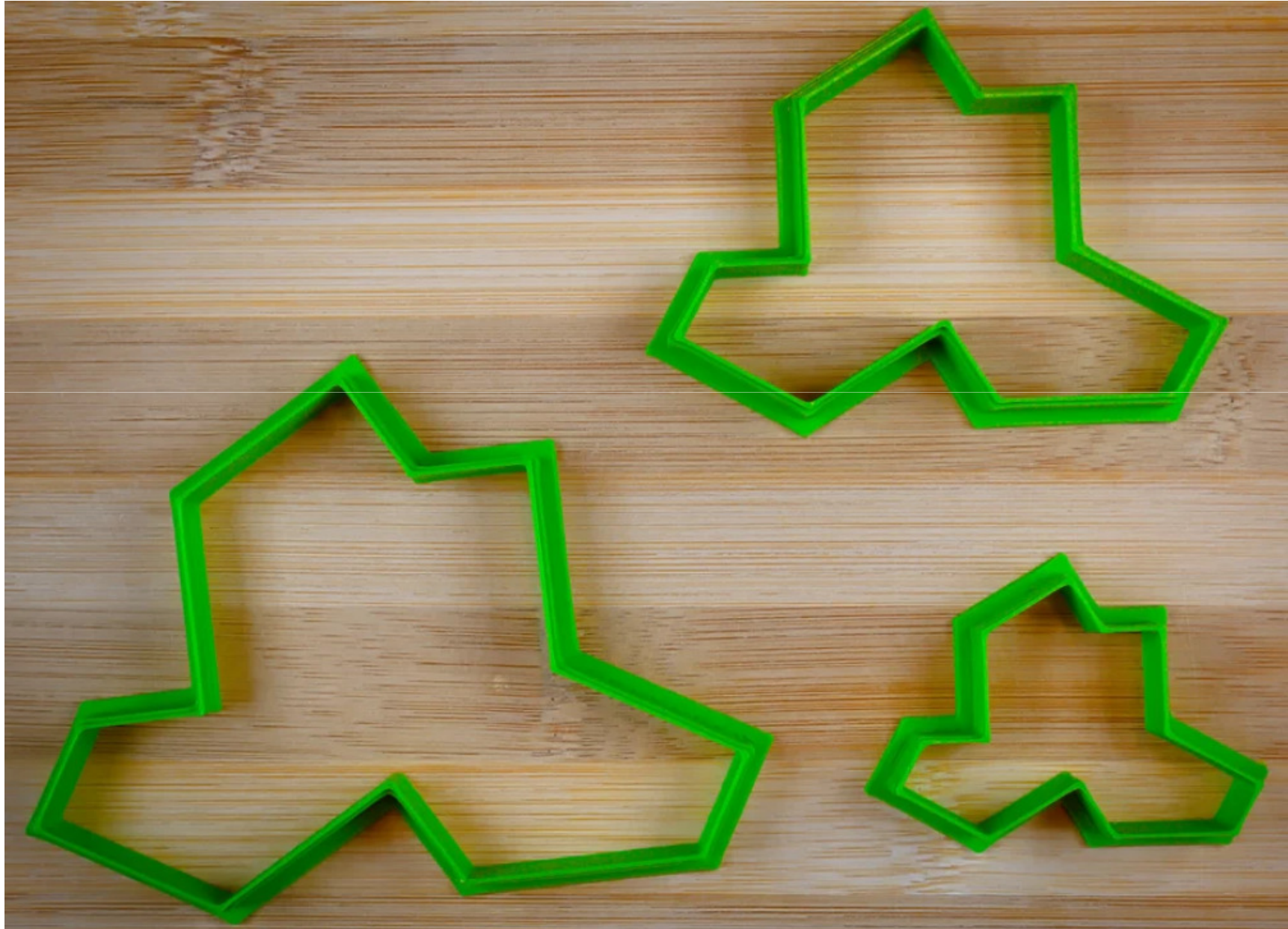
Sur des canettes



Sur des verres



Des moules



En pâtisserie

Ce ne sont pas des *tuiles*
aux amandes ! ☹

© Nikolay Tumanov, 2023





En menuiserie

© David Michael Roberts, 2023



En ballon de foot



En briques danoises



Des puzzles commercialisés

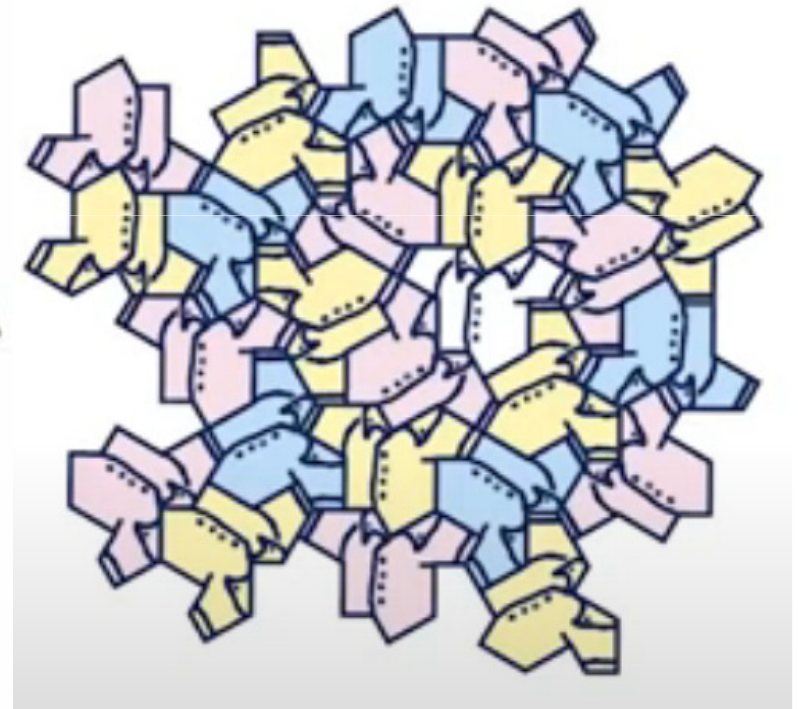
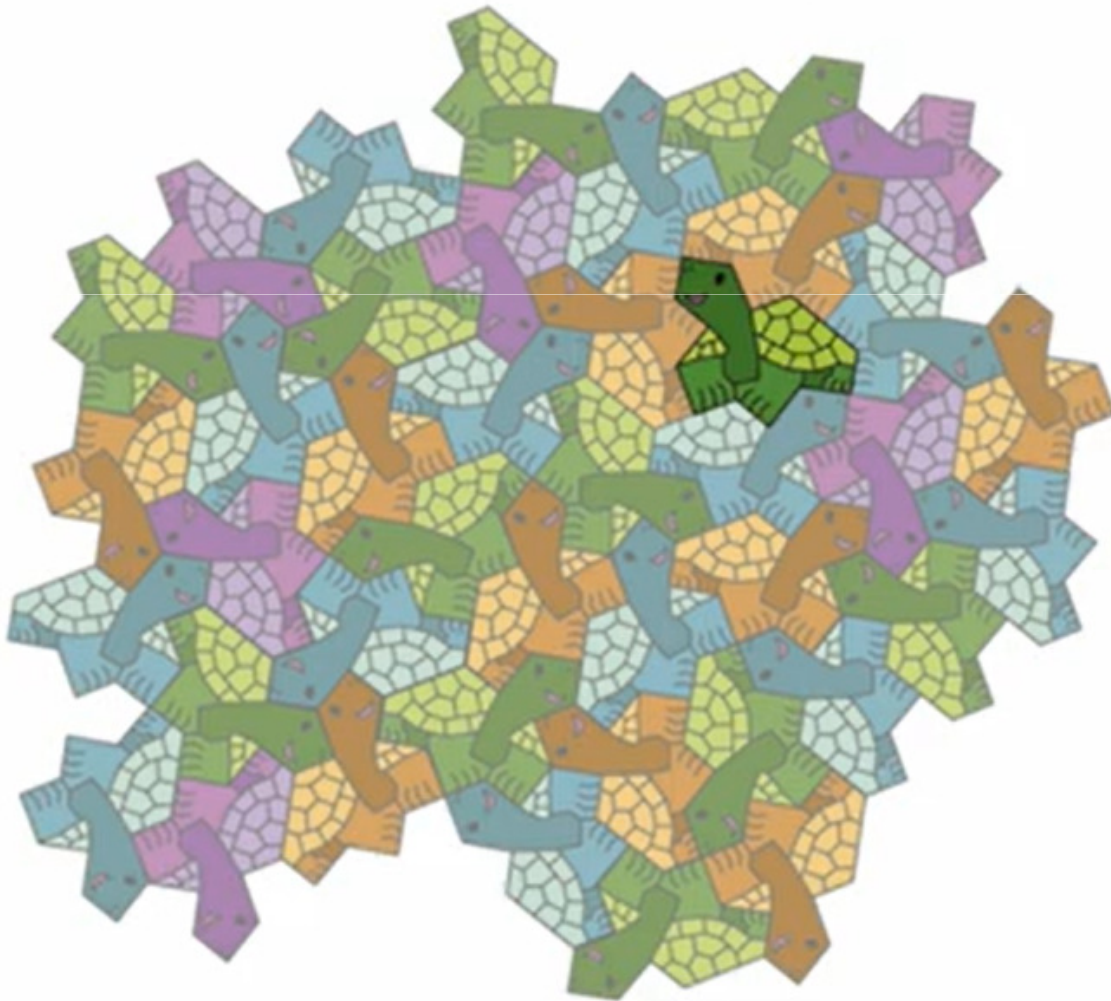


Des jeux

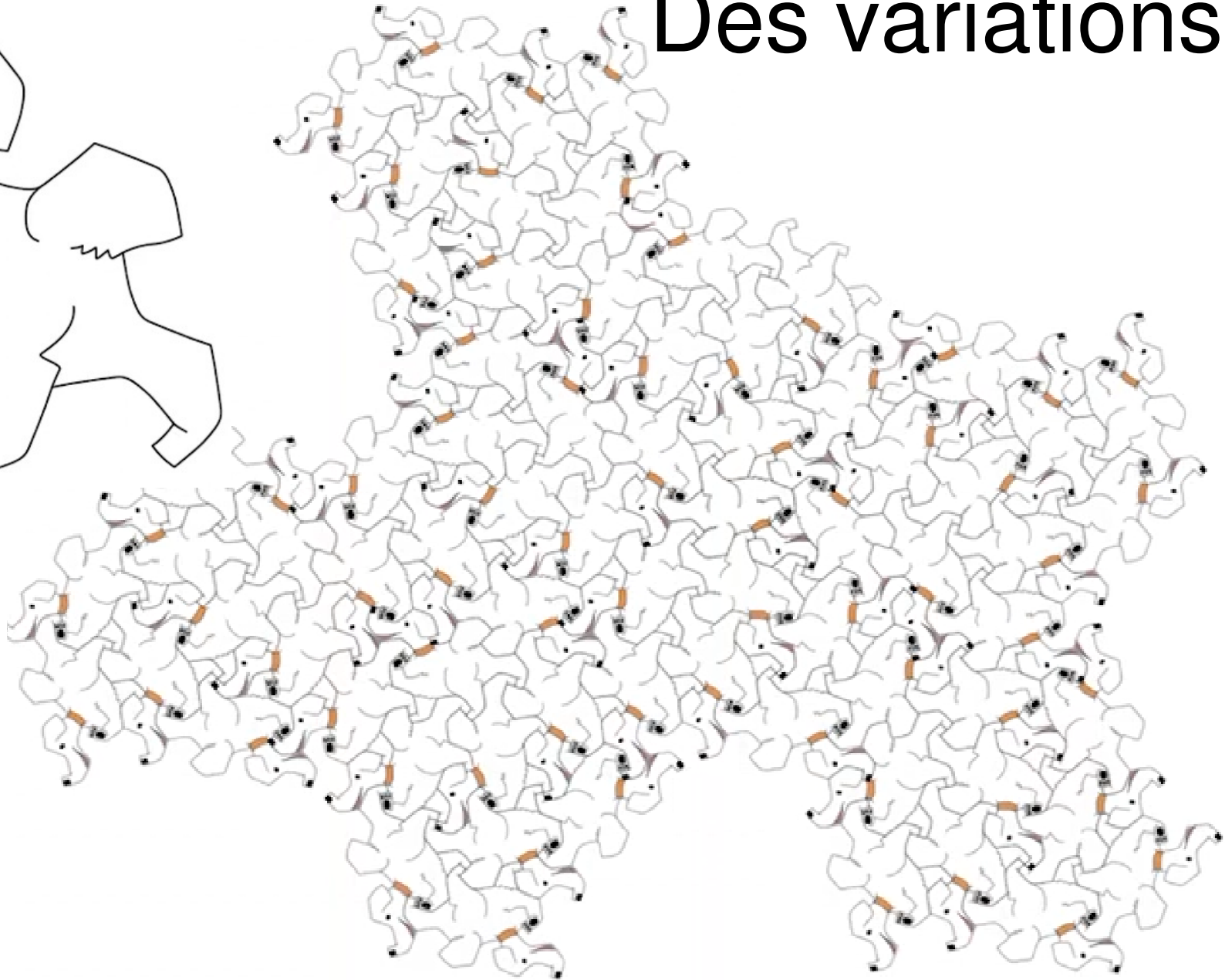
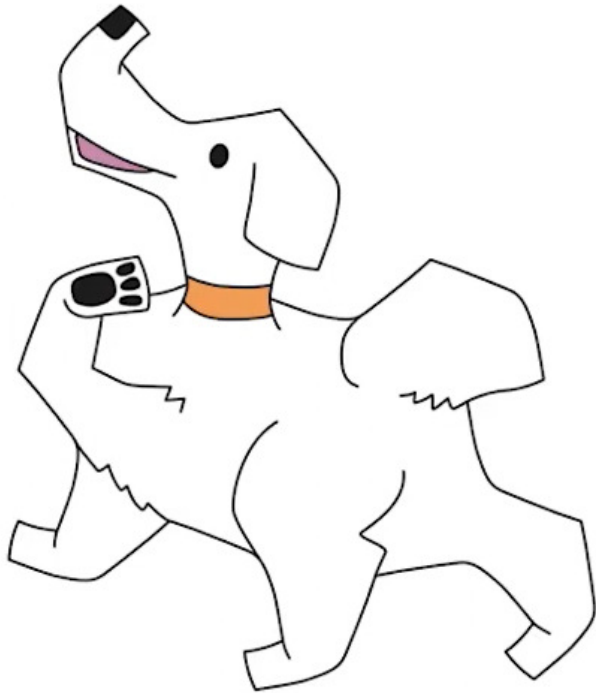


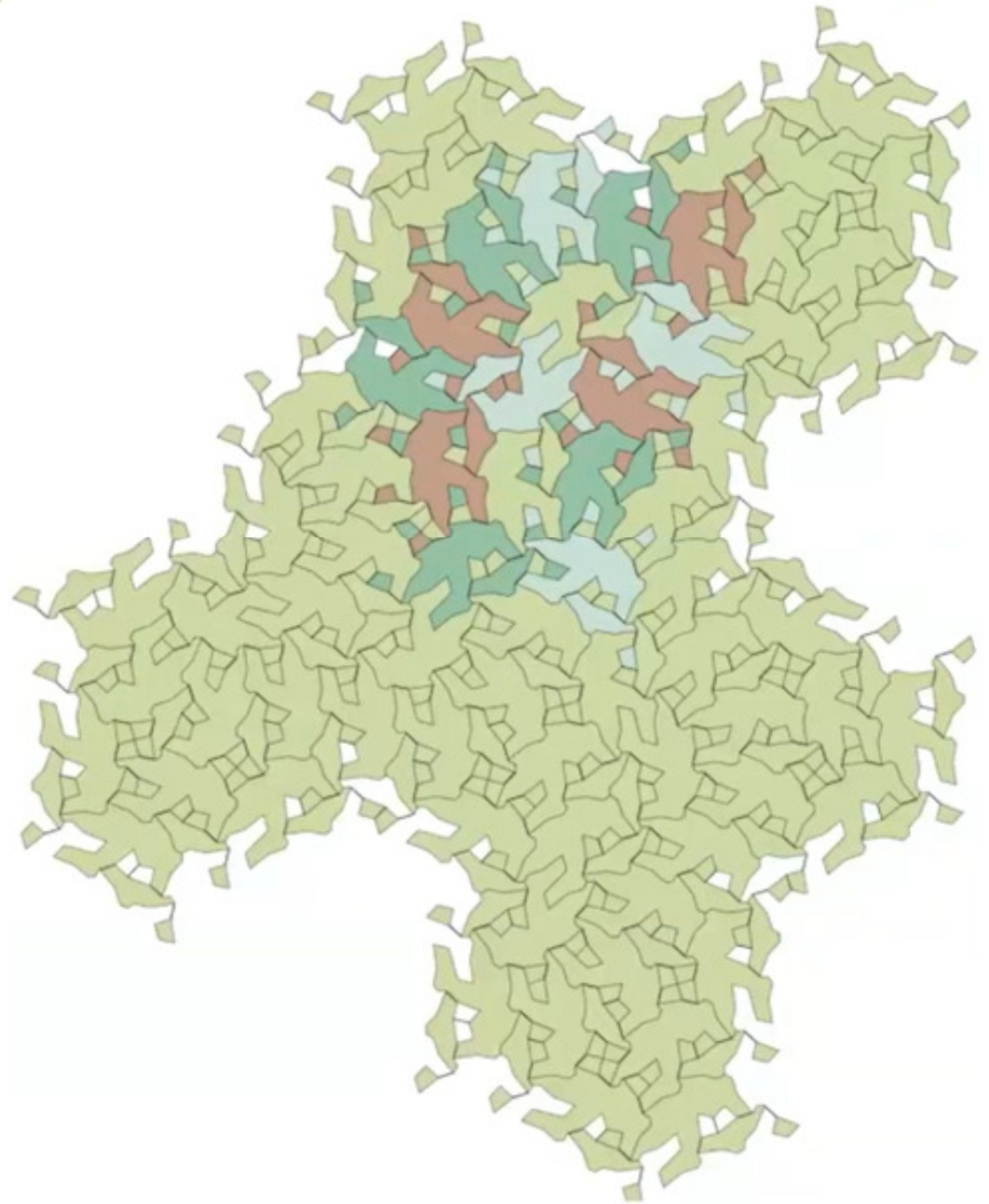
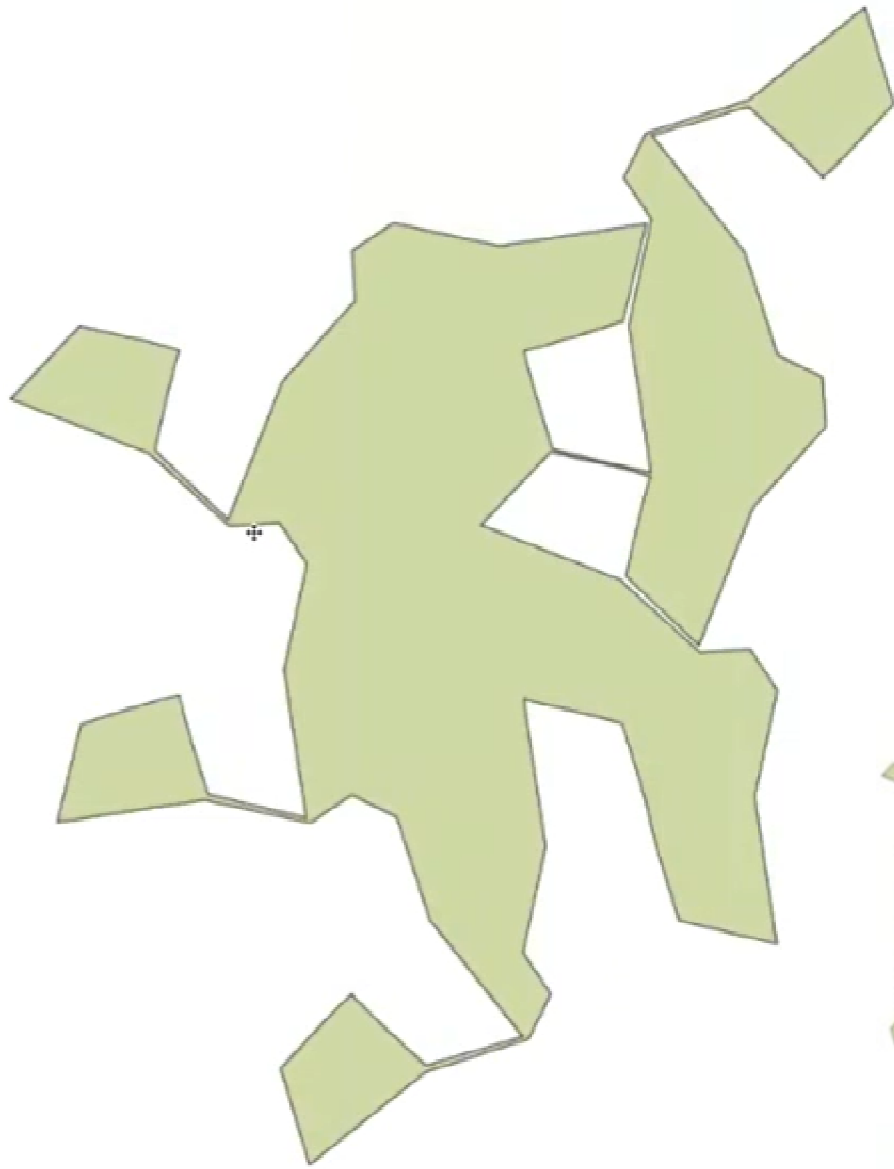
Des énigmes

Find another reflected turtle
in an aperiodic tiling.



Des variations





Des casse-tête

© Yoshiaki Araki, 2023



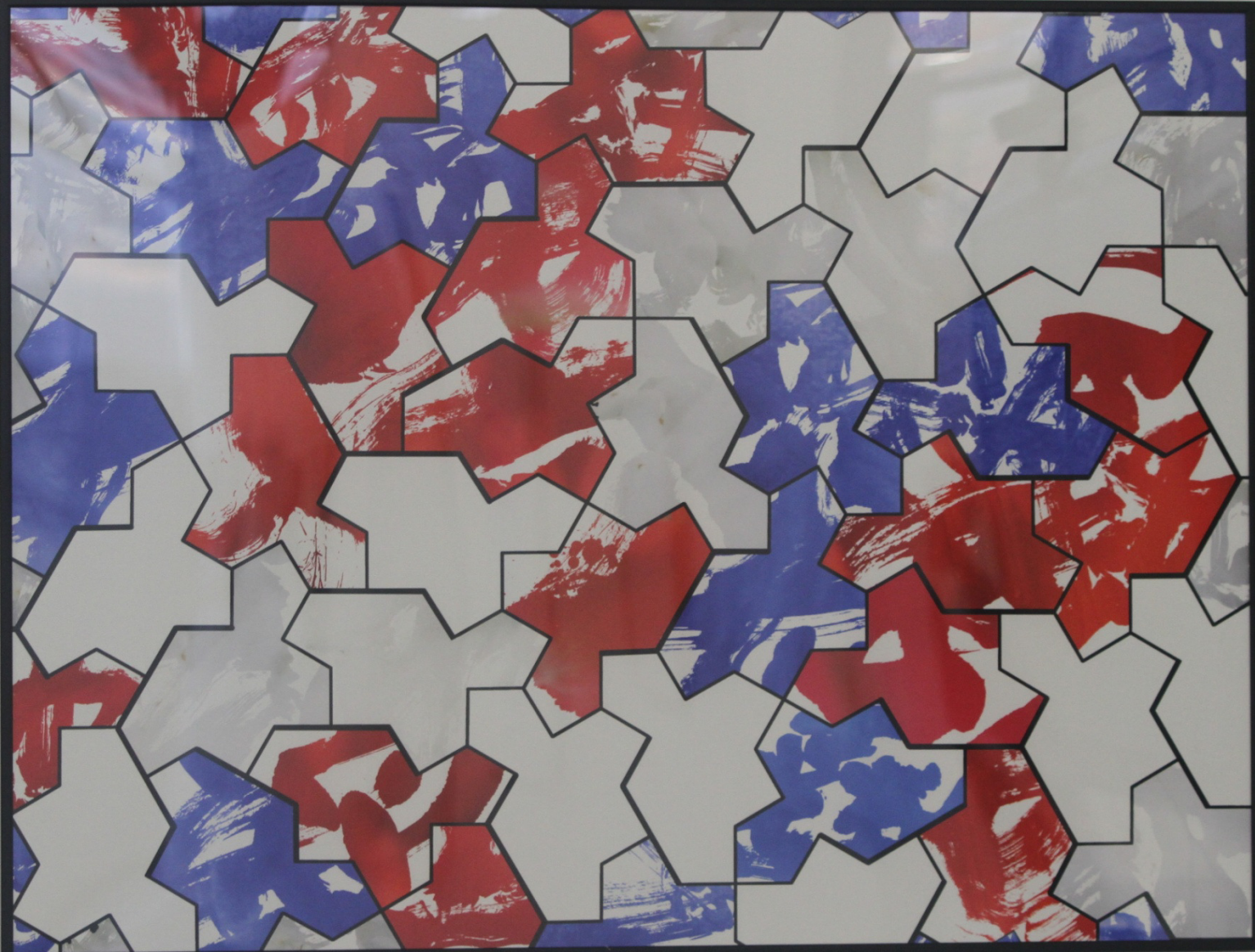
Une œuvre combinatoire



© Jun Sato, 2025 /
Photo : É.T., 2025

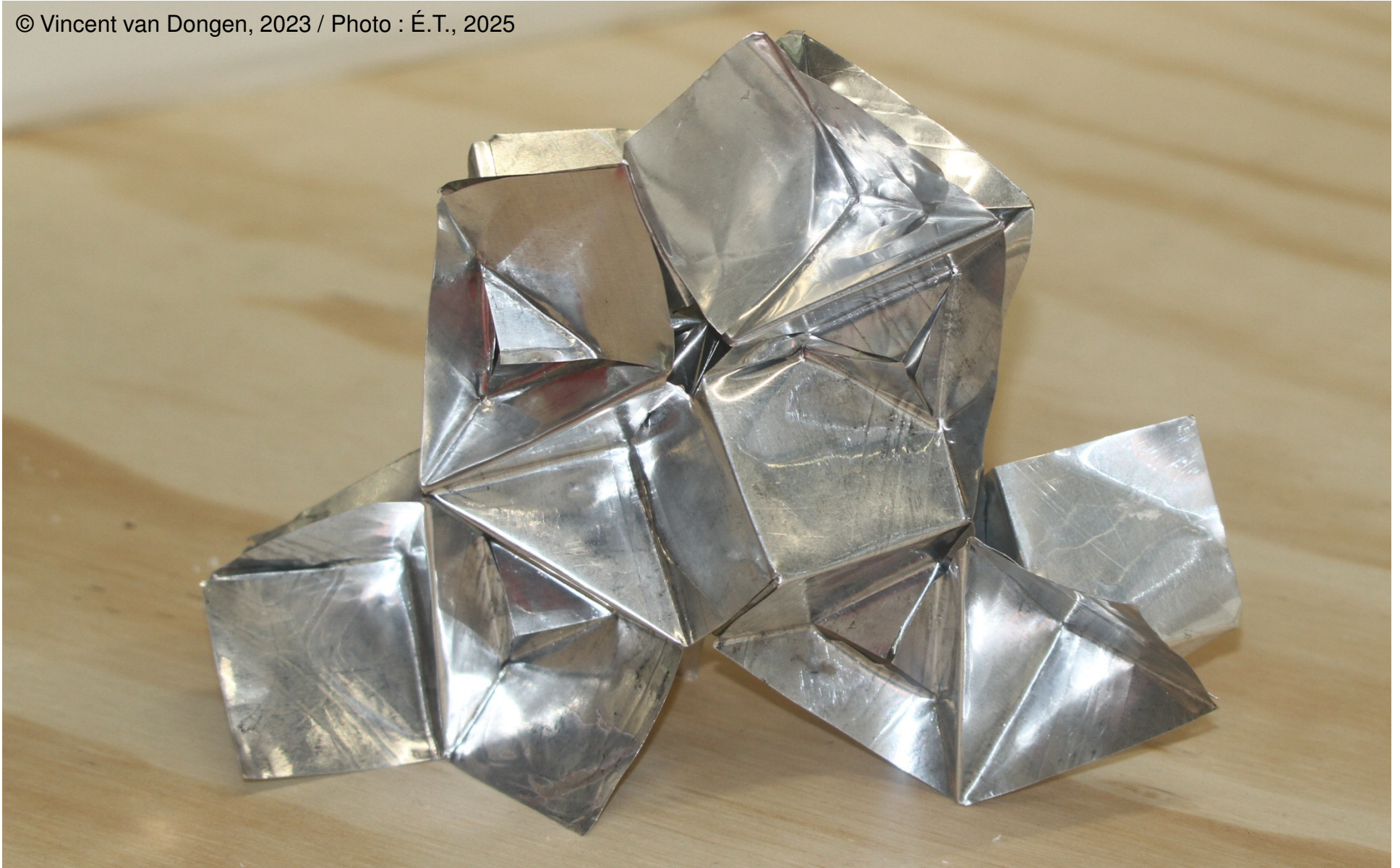
Le même artiste !

© Jun Sato, 2025 / Photo : É.T., 2025



Une œuvre 3D

© Vincent van Dongen, 2023 / Photo : É.T., 2025



Une œuvre pédagogique



© Valérie Olivier et ses élèves
du collège du Bois-de-l'Enclume,
Trilport, Seine-et-Marne, 2025 /
Photo : É.T., 2025



© Valérie Olivier et ses élèves
du collège du Bois-de-l'Enclume,
Trilport, Seine-et-Marne, 2025 /
Photo : É.T., 2025

Un spectre pour Halloween



La première musicalisation du chapeau

Suite à la commande d'une œuvre musicale originale pour France Musique par Anne Montaron, productrice à Radio France de l'émission « Création mondiale » (anciennement « Alla breve »), la compositrice espagnole Marisa Acuña s'est inspirée des propriétés du chapeau pour proposer *Le Chapeau à douze cornes* (2025), une pièce en cinq mouvements pour flûte, violon, alto et violoncelle, d'une durée d'exécution de dix minutes, enregistrée par l'ensemble L'instant donné.

Le matériel sonore

Les cinq mouvements : « Hexagone », « Trois hexagones », « Cerf-volant », « Triangles isométriques », « Le chapeau ».

Les changements de mesure et de mode évoluent en fonction de la transformation du réseau hexagonal régulier du plan en pavage apériodique à l'aide de chapeaux. Dans le vocabulaire de la compositrice, la monotuile apériodique à treize sommets possède un seul *sommet* et douze *cornes* (clin d'œil au ballet *The Three-Cornered Hat* de Manuel de Falla, 1919).

The image shows a handwritten musical score on a notebook page. At the top, there is a musical staff with a treble clef and a key signature of one sharp (F#). The melody consists of several measures of music, including a triplet of eighth notes. Below the staff, there is a diagram of a hexagram (a six-pointed star) with its vertices and intersections labeled with musical notes: DO, RE, MI, FA, SOL, LA. The diagram is drawn with red and green lines, and some areas are shaded. Below the hexagram, there is another musical staff with a treble clef and a key signature of one sharp. This staff contains a series of notes, some of which are circled and marked with an 'x'. At the bottom of the page, there is a bass staff with a bass clef and a key signature of one sharp, containing a few notes and a double bar line.

Un intérêt pour les pavages

Le Chapeau à douze cornes a été diffusé du lundi 24 au dimanche 30 mars 2025 à la faveur d'un portrait de la compositrice et d'un entretien avec les musiciens.

La pièce fait suite à *Tesselles sonores* (2022), autre œuvre originale de Marisa Acuña reposant sur un pavage périodique du plan observé en Andalousie, à l'Alhambra de Grenade, en Espagne.

(Note : dès 2023 paraissait une chanson pop *The Hat* (5'40", The Joy Formidable) ; elle ne proposait en aucune manière d'exploiter les propriétés du chapeau.)

Pour entendre l'œuvre

L'émission du dimanche 30 mars 2025, qui inclut le *Chapeau à douze cornes* dans son intégralité, est disponible en ligne sur le site de Radio France :

<https://www.radiofrance.fr/francemusique/podcasts/creation-mondiale-l-integrale/le-chapeau-a-douze-cornes-de-marisa-acuna-diffusion-integrale-6755523>

Un concours gratuit et original

Un concours de créativité autour du chapeau a été organisé : le Mad Hat Einstein Awards. **<https://momath.org/hatcontest>**

Les projets illustrant des connexions entre les mathématiques, les arts, le design et la cuisine (!) ont été encouragés.

Deux catégories (« scolaires » et « grand public ») ; un total de **plus de 28 000 € de récompense**.

Organisé par le National Museum of Mathematics (MoMath, New York, États-Unis) et le United Kingdom Mathematics Trust (UKMT, Grande-Bretagne) en 2023.



Le bilan

245 participants, de 32 pays.

David Smith et Chaim Goodman-Strauss membres du jury.

Trois gagnants ont remporté chacun 5 000 £ (6 000 €),
neuf finalistes ont empoché chacun 1 000 £ (1 200 €).

Trente-deux mentions honorables ont été décernées.

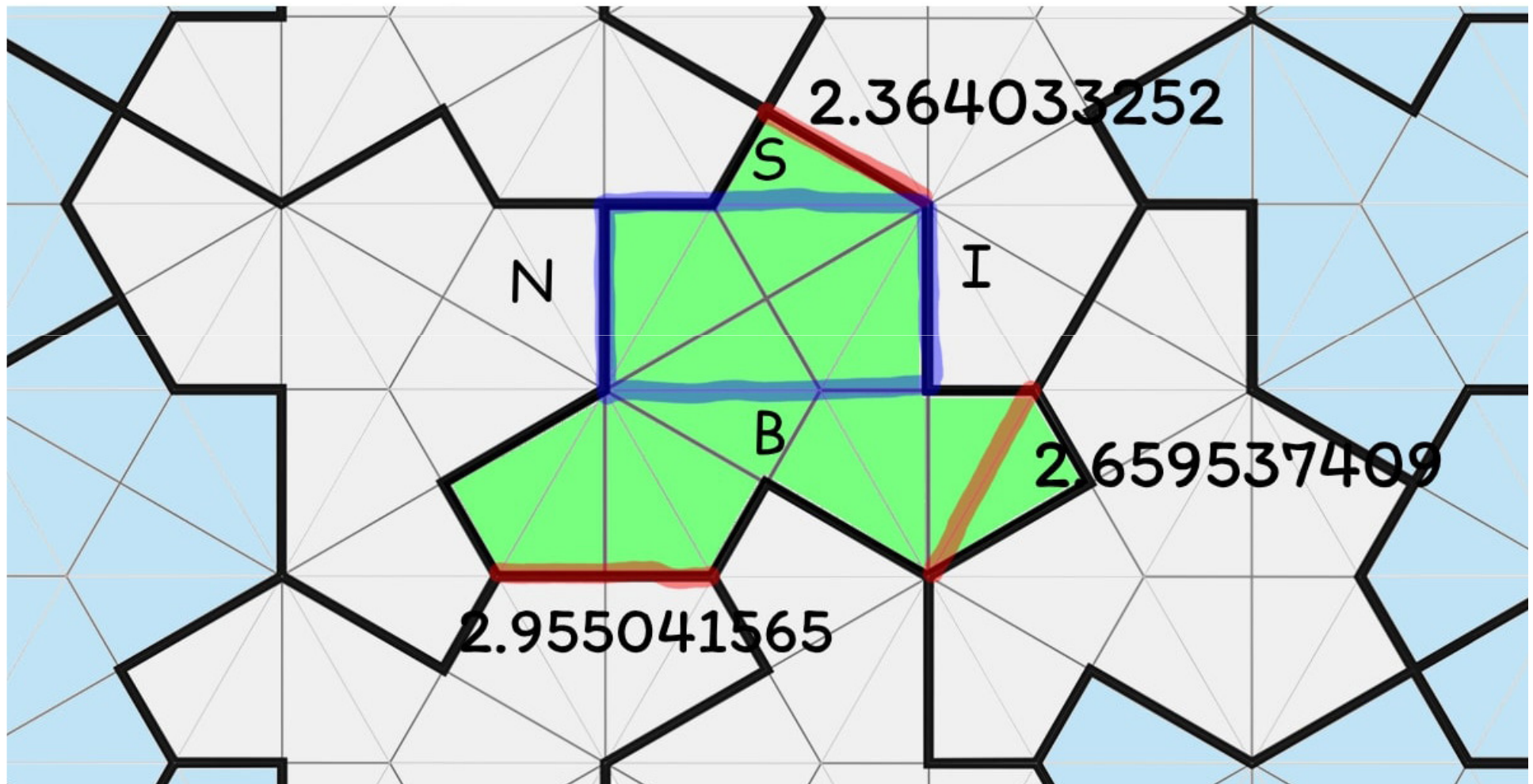
La remise des prix s'est déroulée le 12 décembre 2023
à la House of Commons (palais de Westminster, Londres).

Les sponsors : XTX Markets, G-Research, Jane Street,
Dexter et Deborah Senft, Mathigon, Philip Legner.



La catégorie
« scolaires »
(mentions honorables)

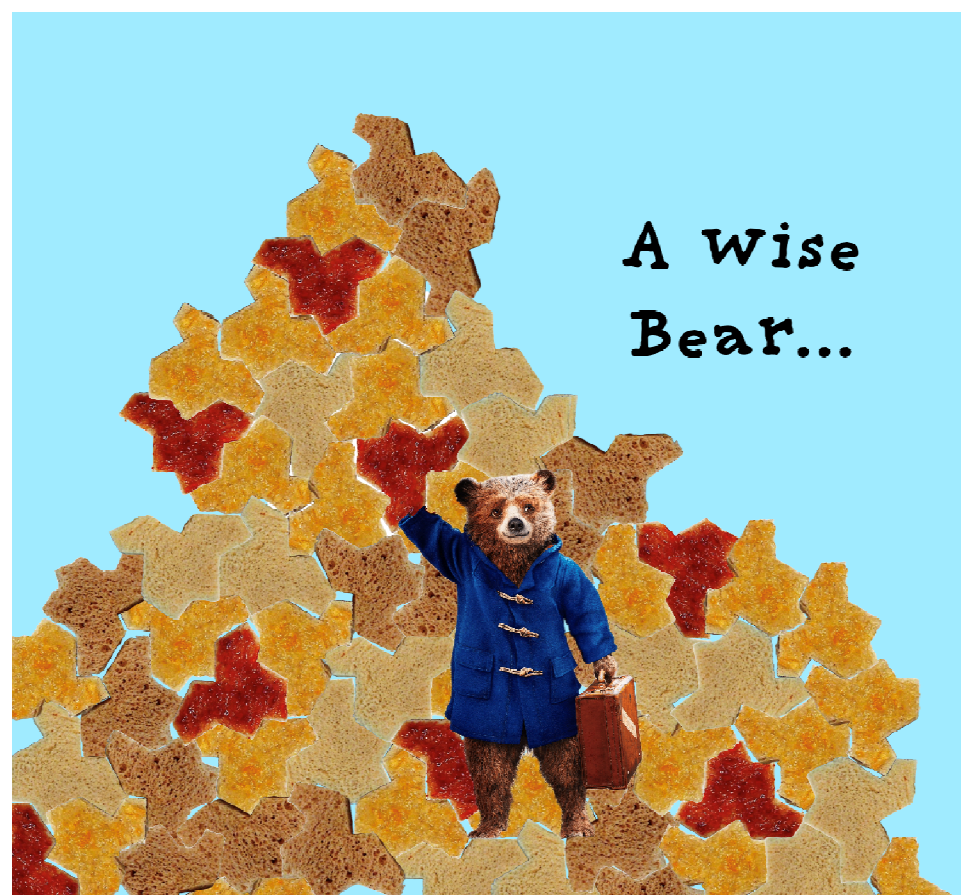
Énigme : trouver l'aire du rectangle NBIS.



© Rehan Basu, 2023



© Leslie Fry, 2023

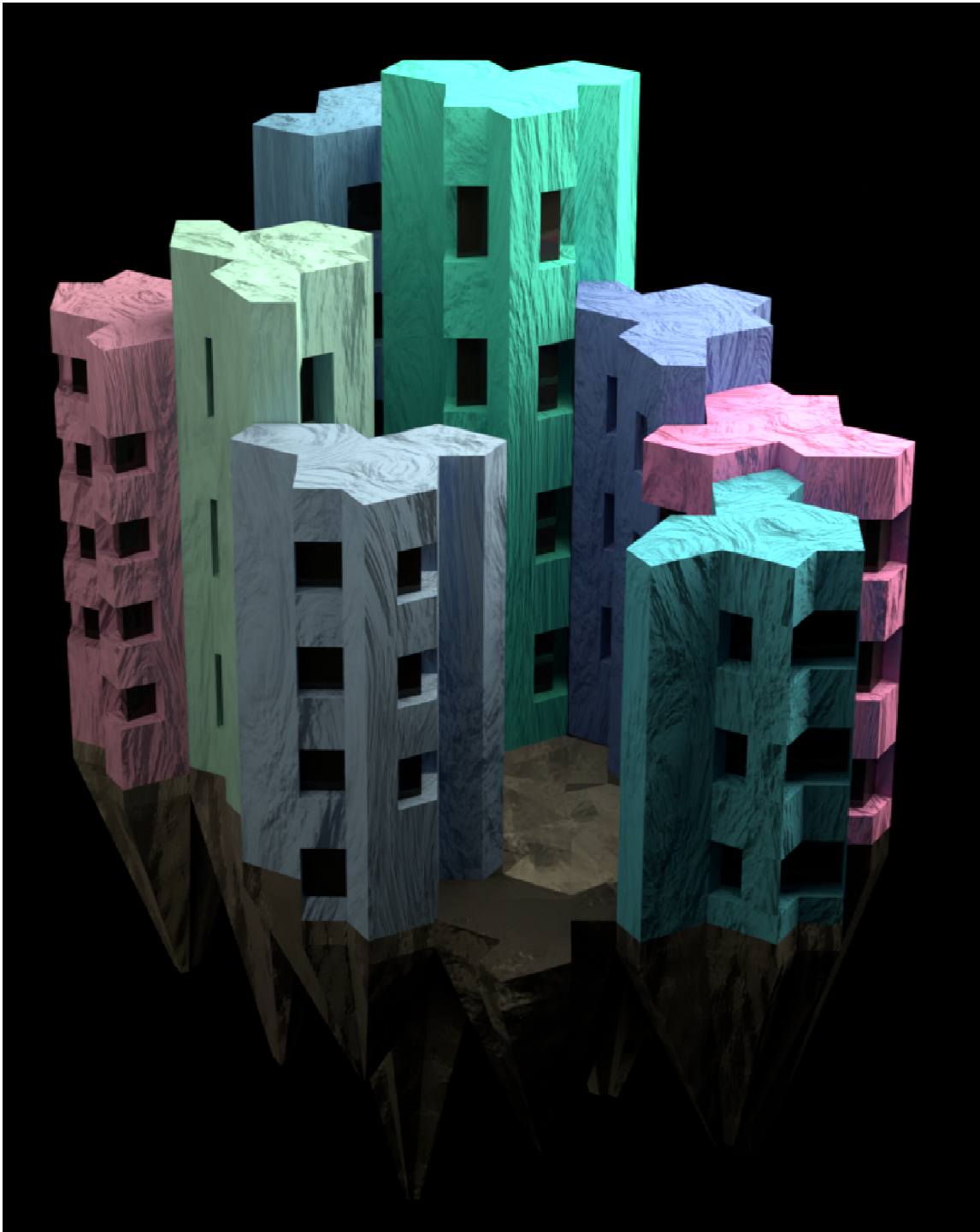


© Nancy Clark, 2023

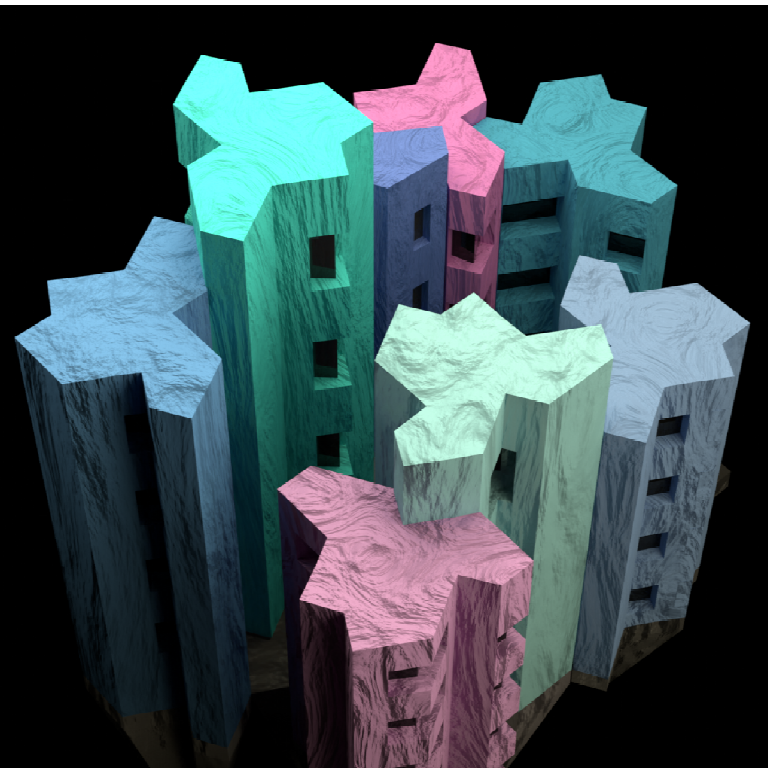


© Chelsea Lee, 2023





© Ilora Nandi Ball, 2023





© Tasnim Hossain, 2023

© Emily Kelt, 2023



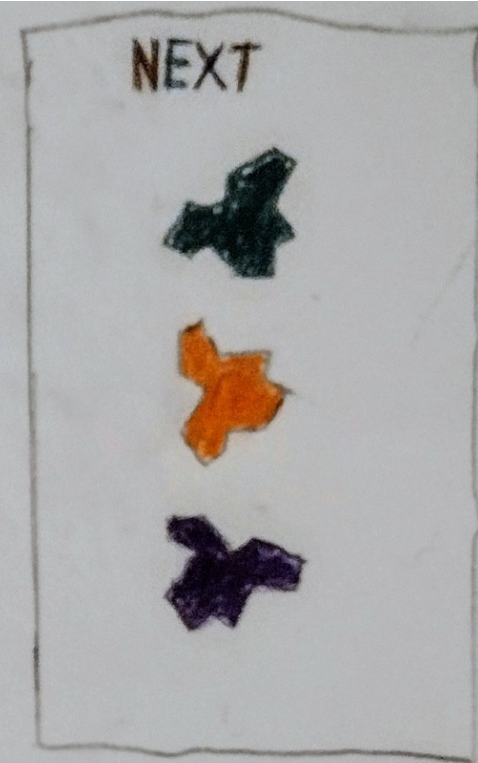
© Isabelle Smith, 2023

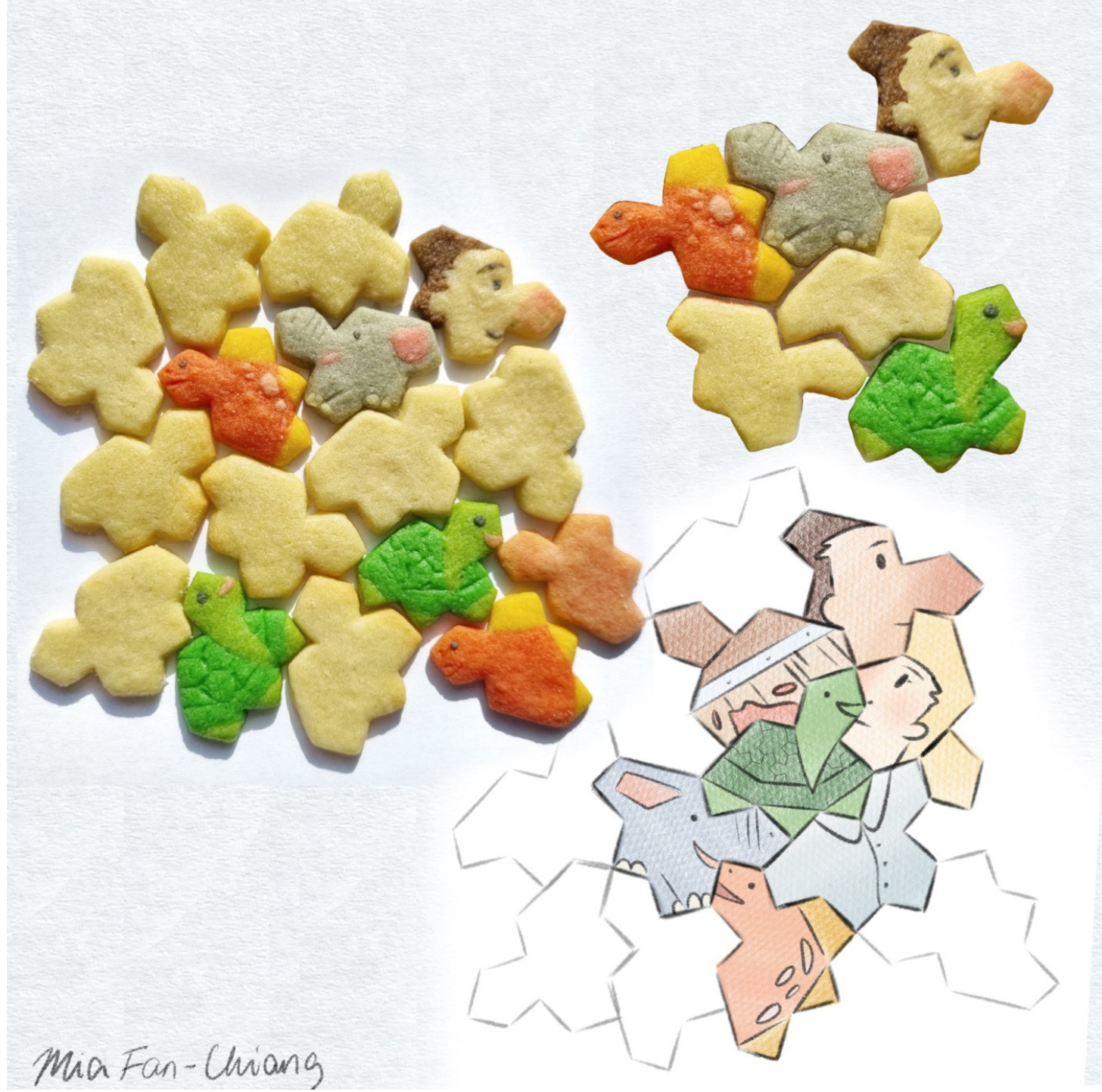


La catégorie
« scolaires »
(les finalistes)

Montris

SCORE
328
LEVEL
1
LINES
1

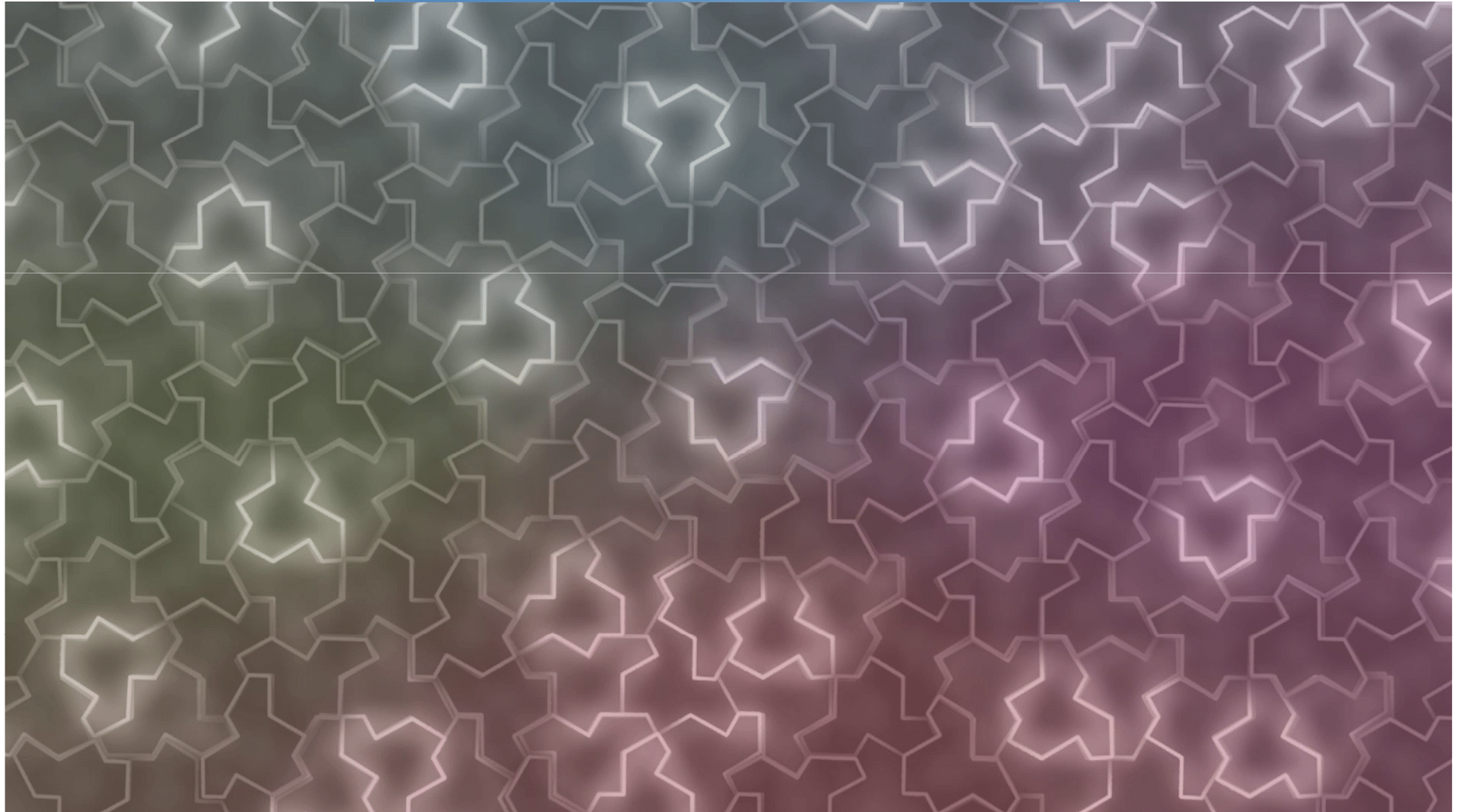
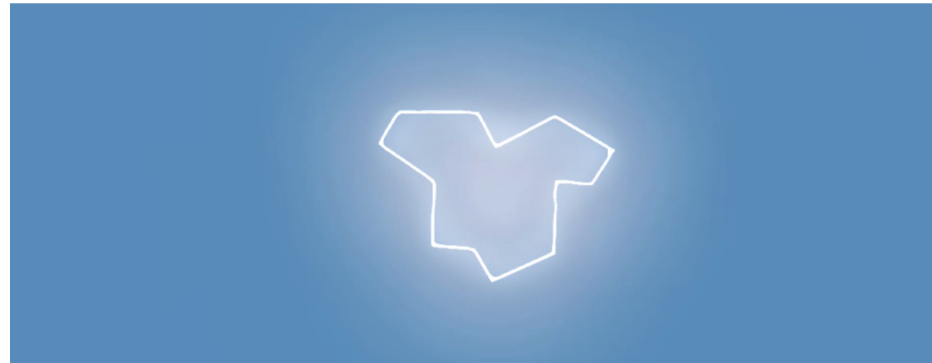




© Verity Lengley, 2023

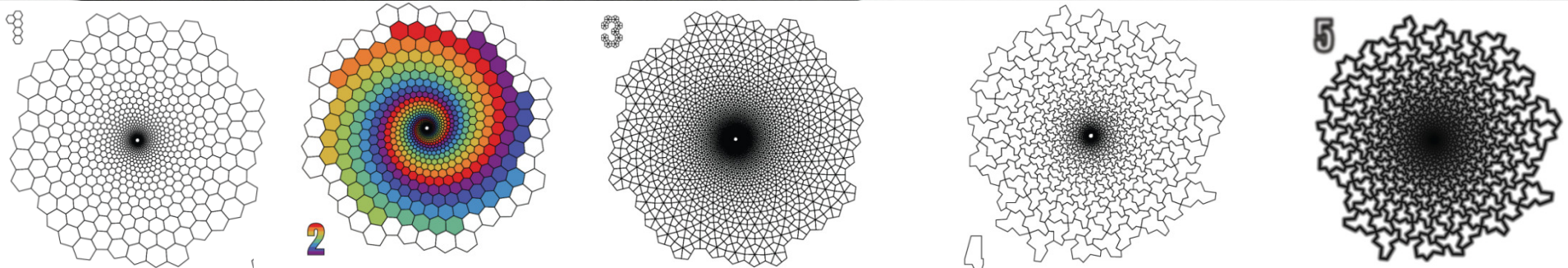
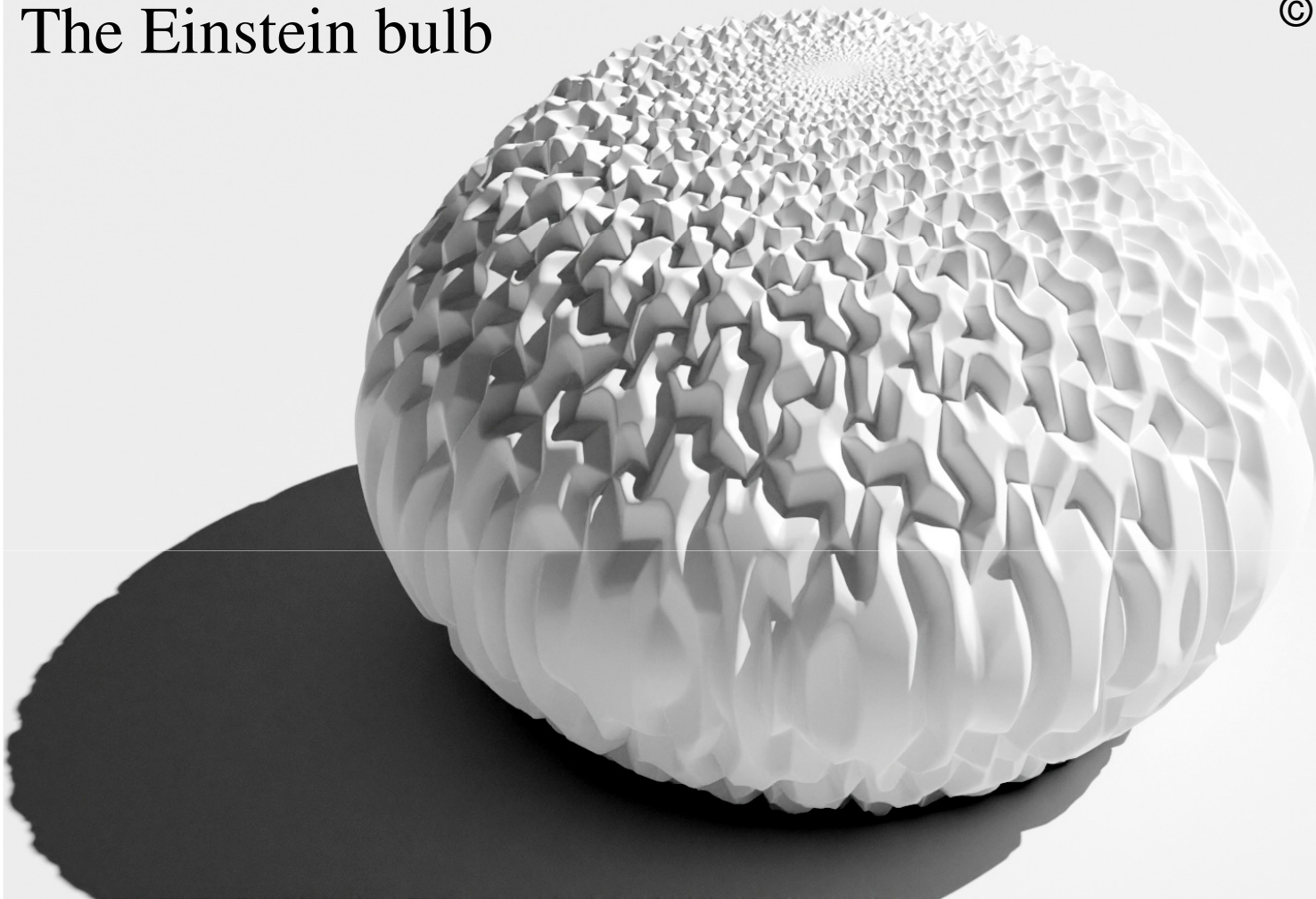


© Tadeas Martinat,
2023



The Einstein bulb

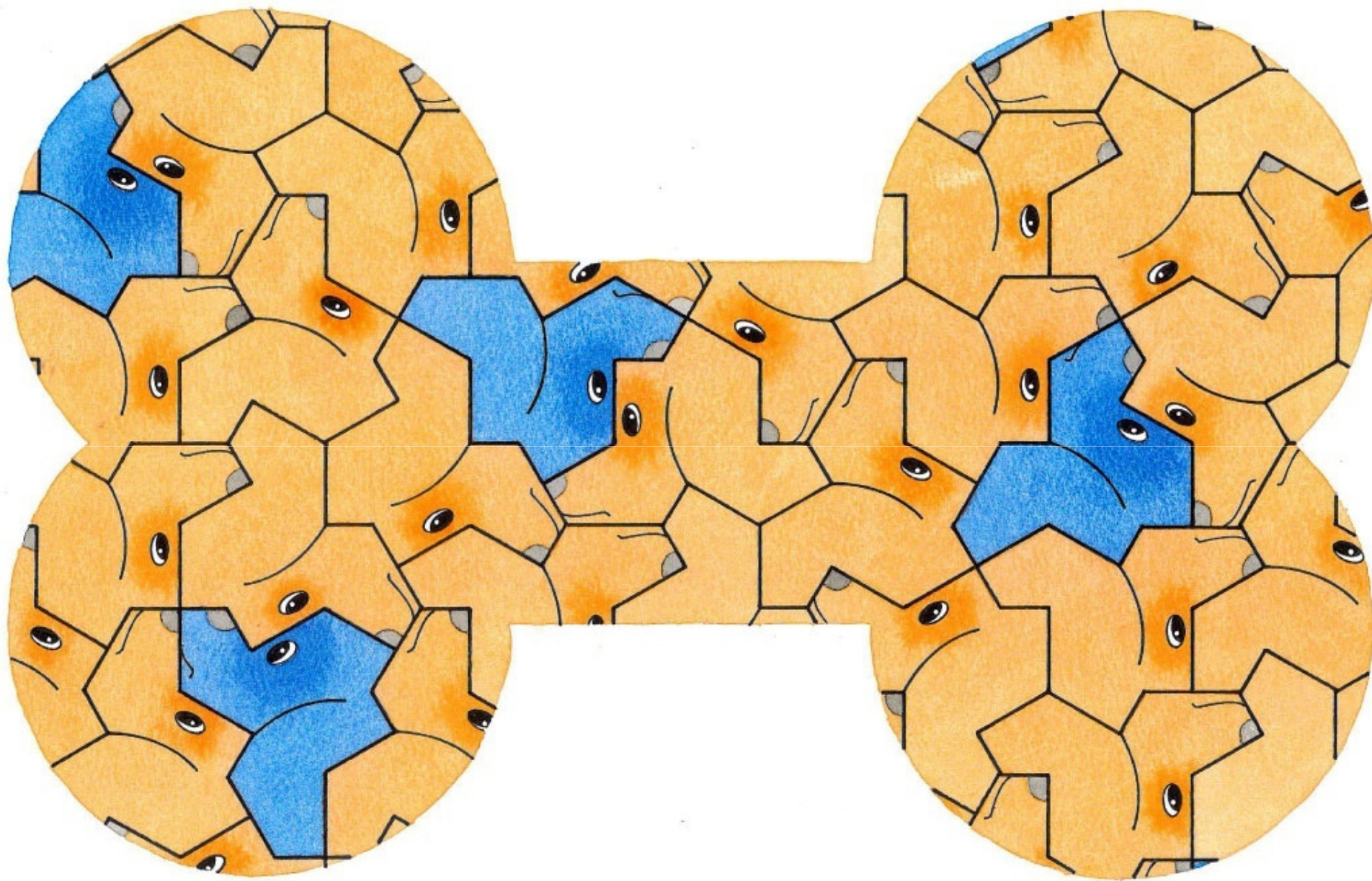
© Julien Weiner, 2023



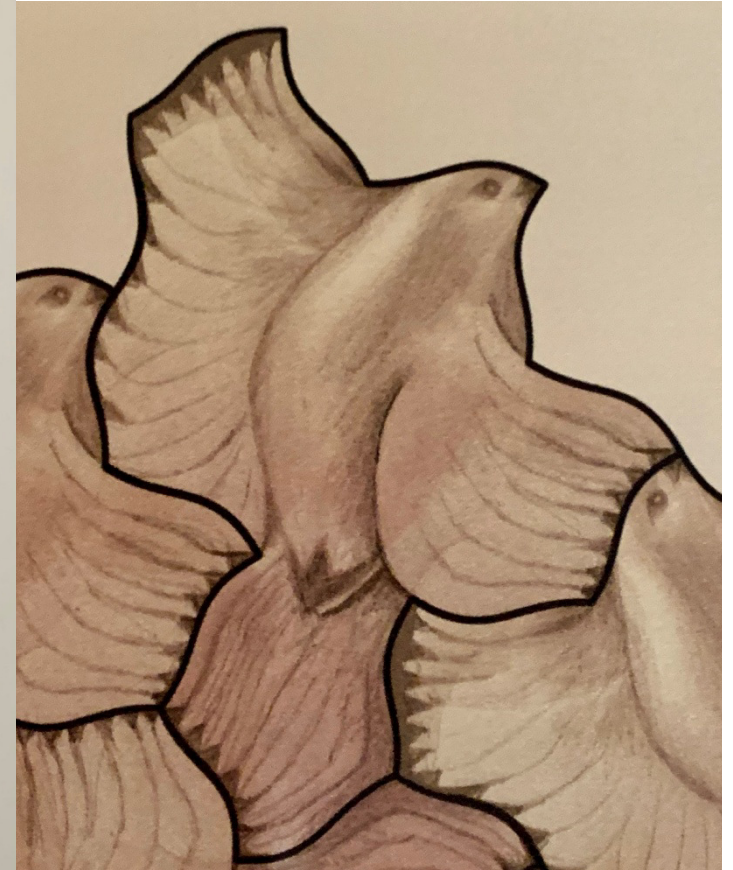
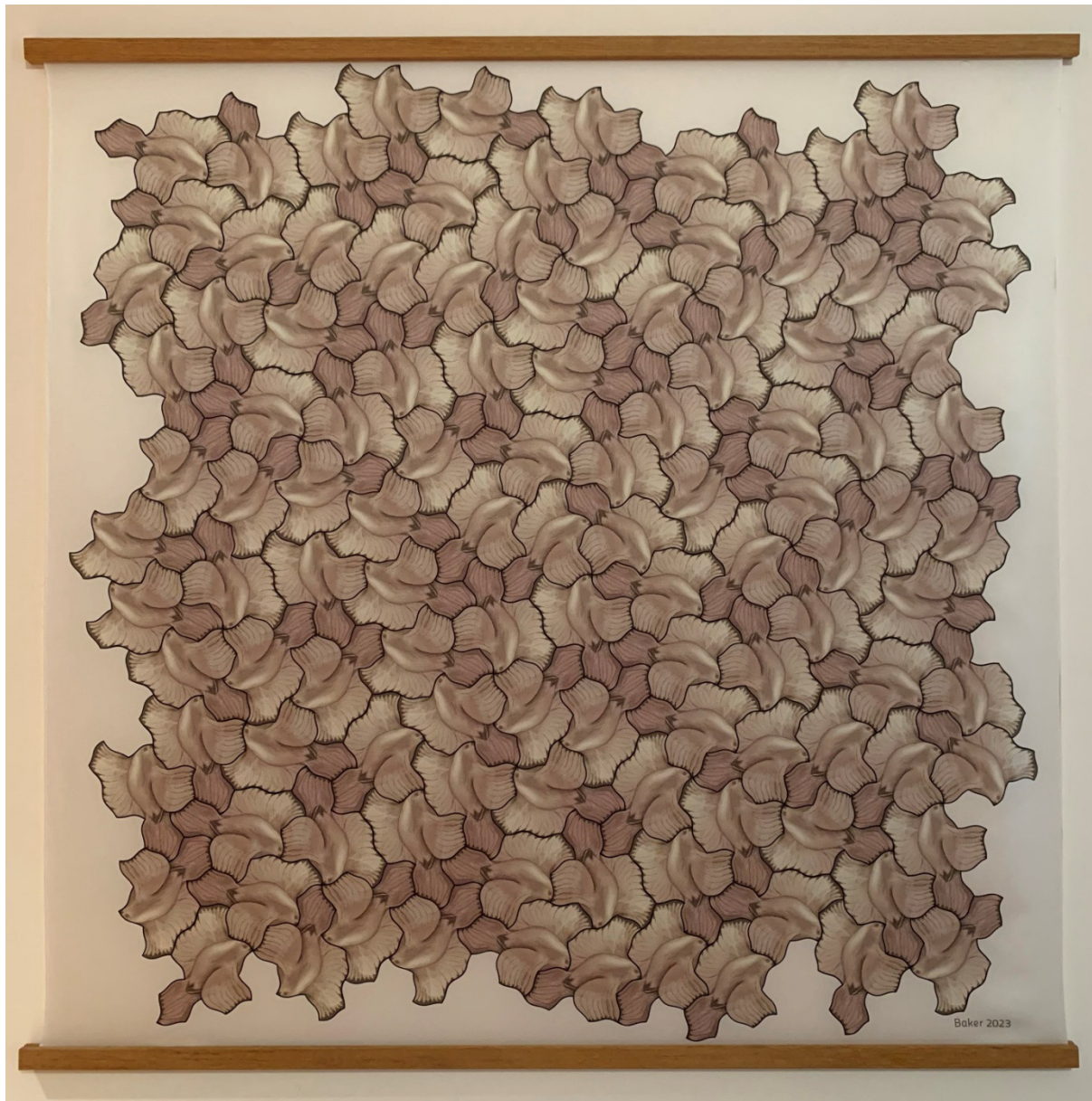
La catégorie
« scolaires »
(la lauréate)



La catégorie
« grand public »
(mentions honorables)



© David Bailey, 2023



© Ellie Baker, 2023

© Francesca Carter, 2023





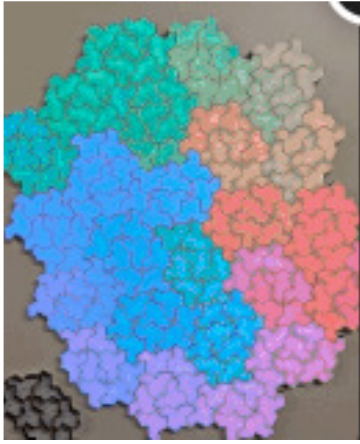


© Ildiko Fekete, 2023





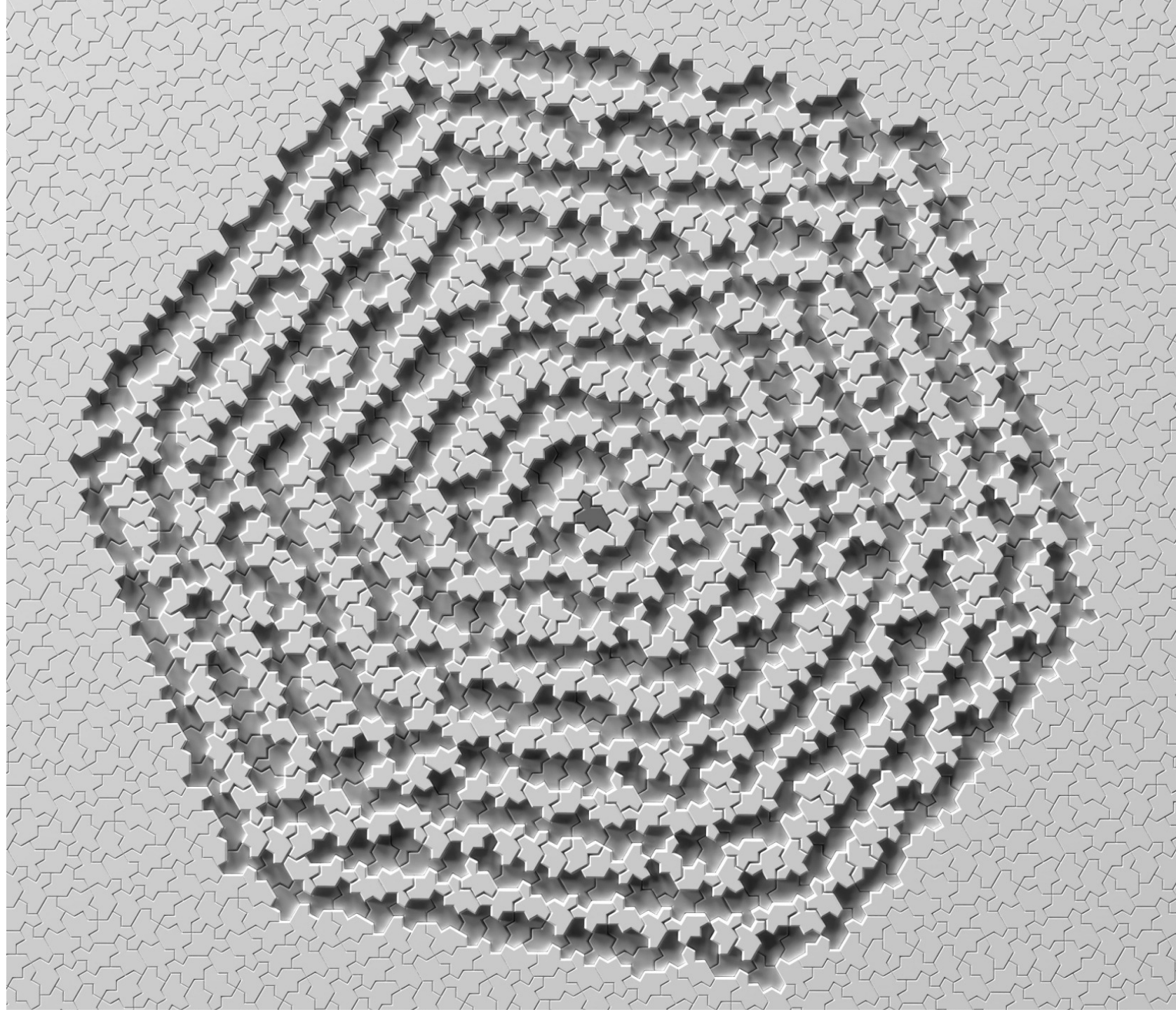
© Jon-Paul Wheatley, 2023



© Jonas Lannoo, 2023
(animation vidéo)

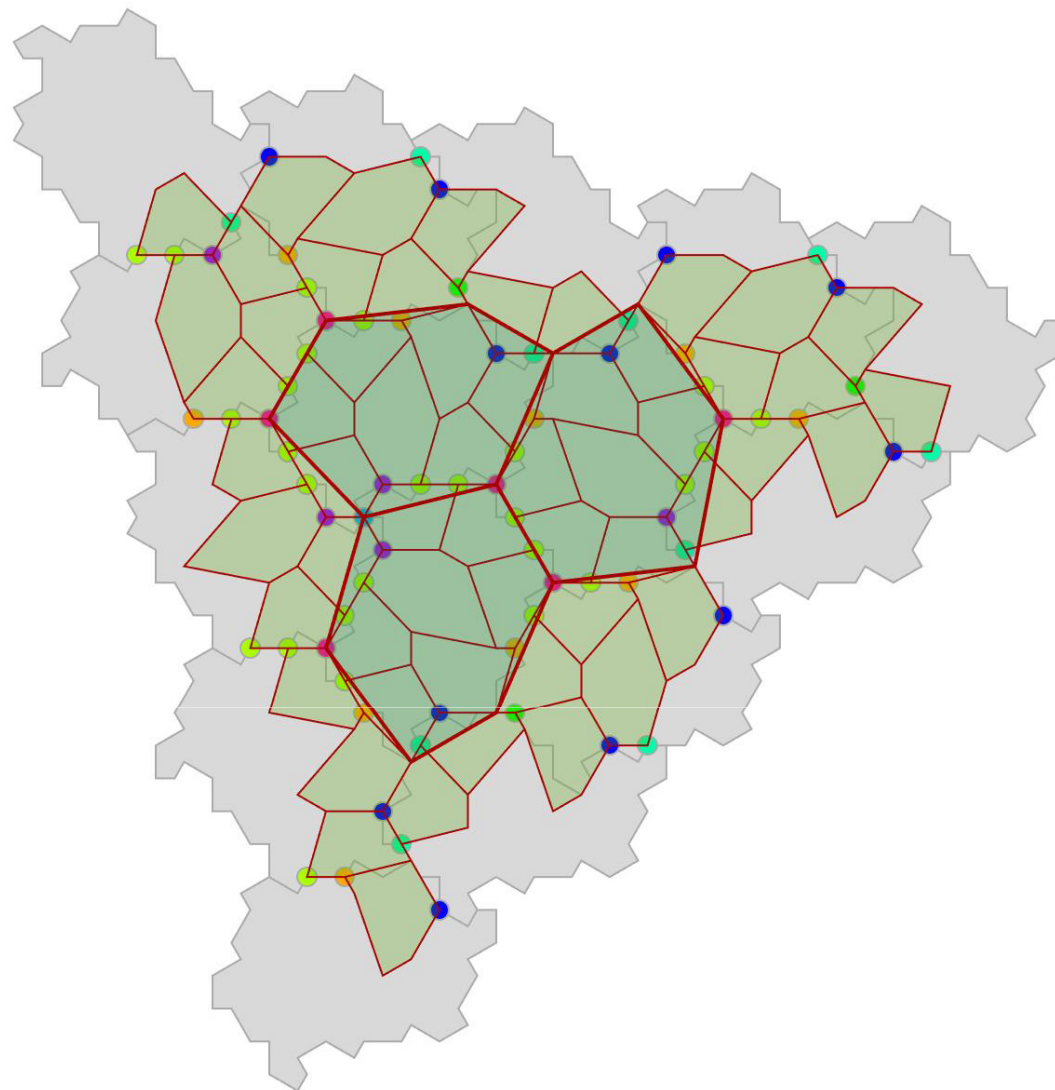
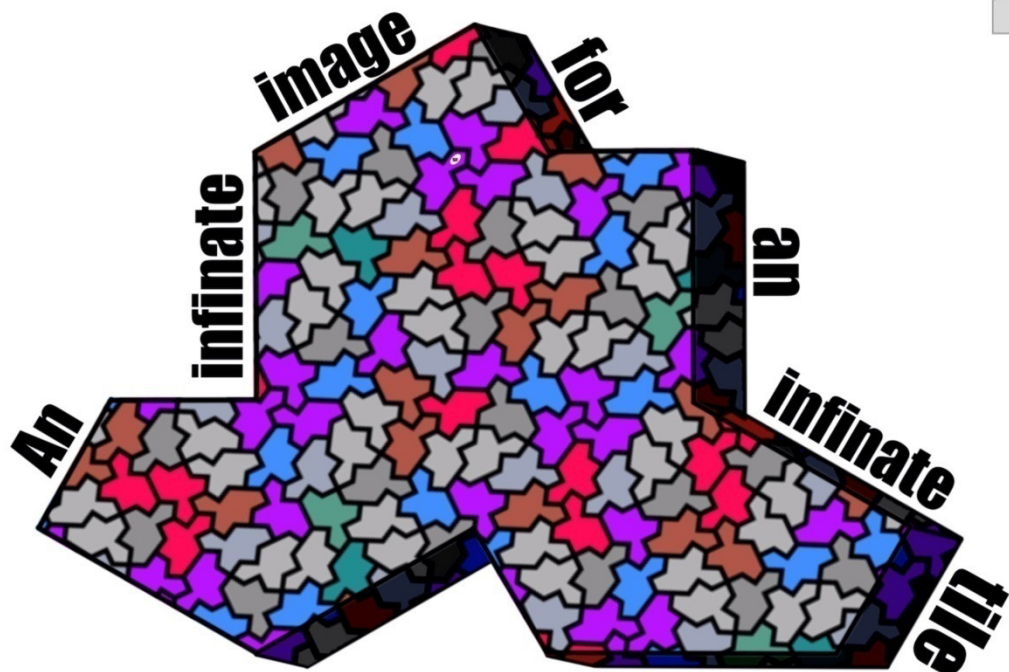
© Maia Graff, 2023





© Maia Graff, 2023

© Dominic Jenner, 2023



© Brad Klee, Johannes Martin
et Bowen Ping, 2023



© Micha Kalle, 2023



© Fatma Kayatekin, 2023



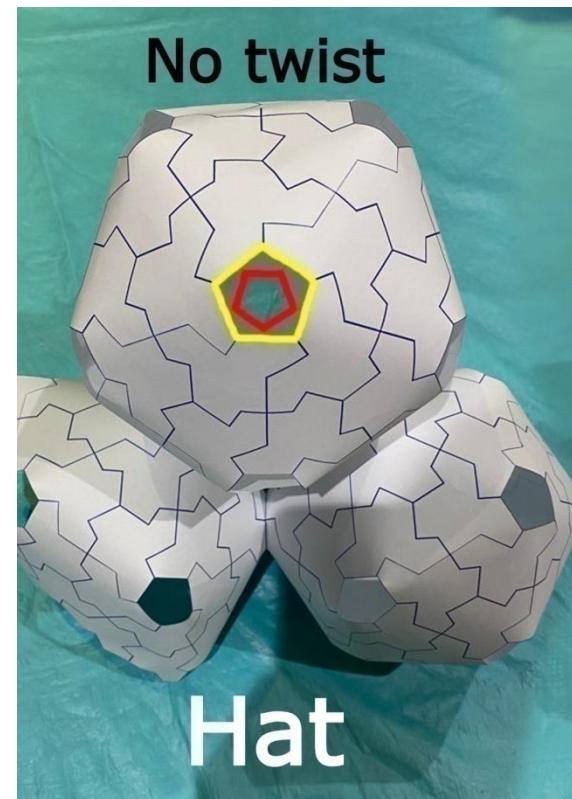
© Petter Larsson, 2023



© Tyswan Slater, 2023

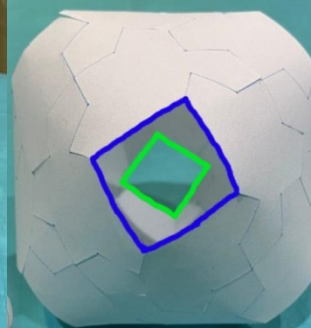
© Ally Stanley, 2023

No twist



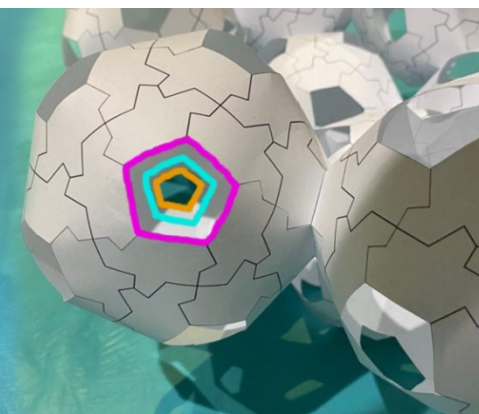
Hat

26.38° twist

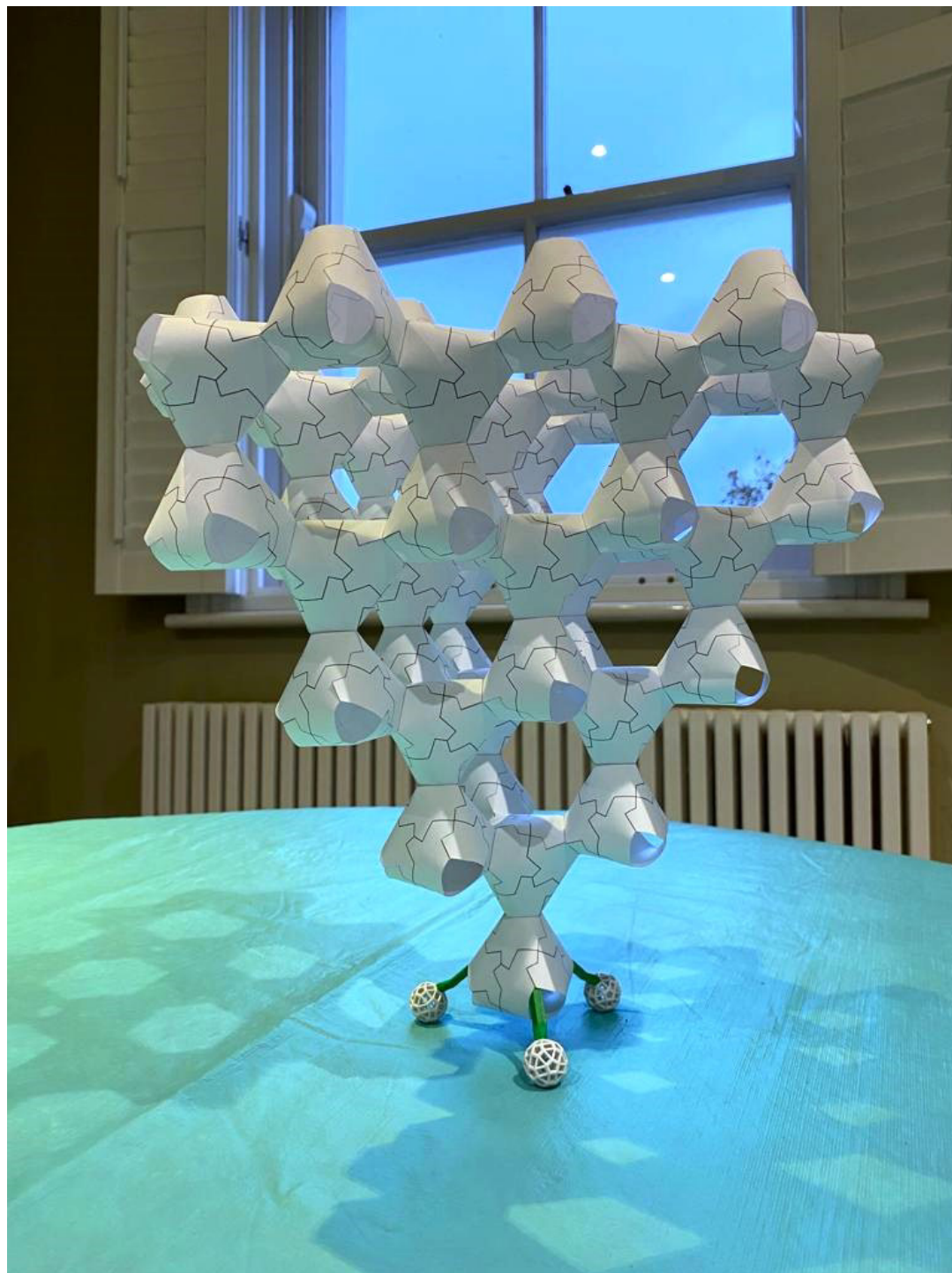


Spectre

33.35° twist

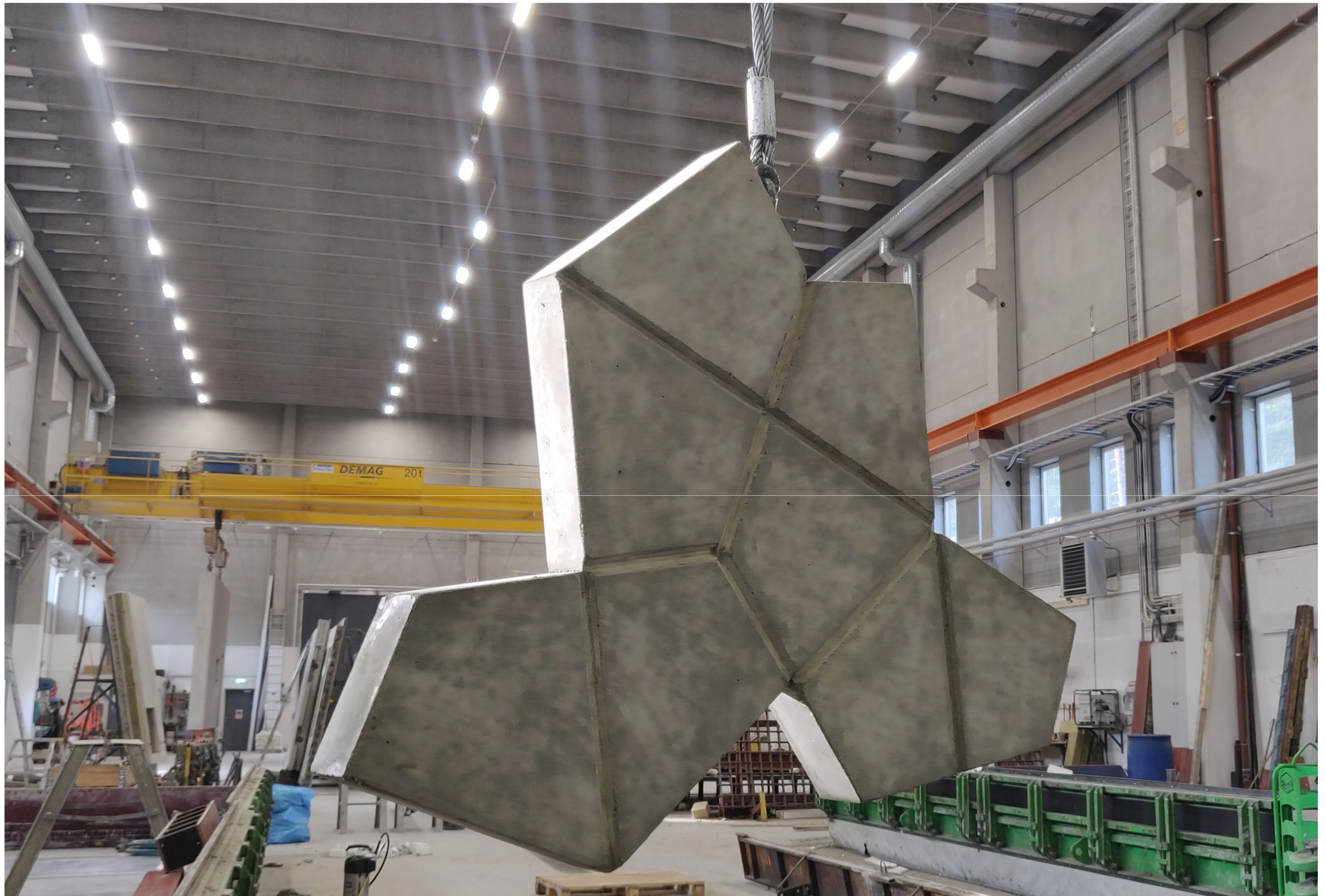


Turtle



© Ichiro Tanioka, 2023

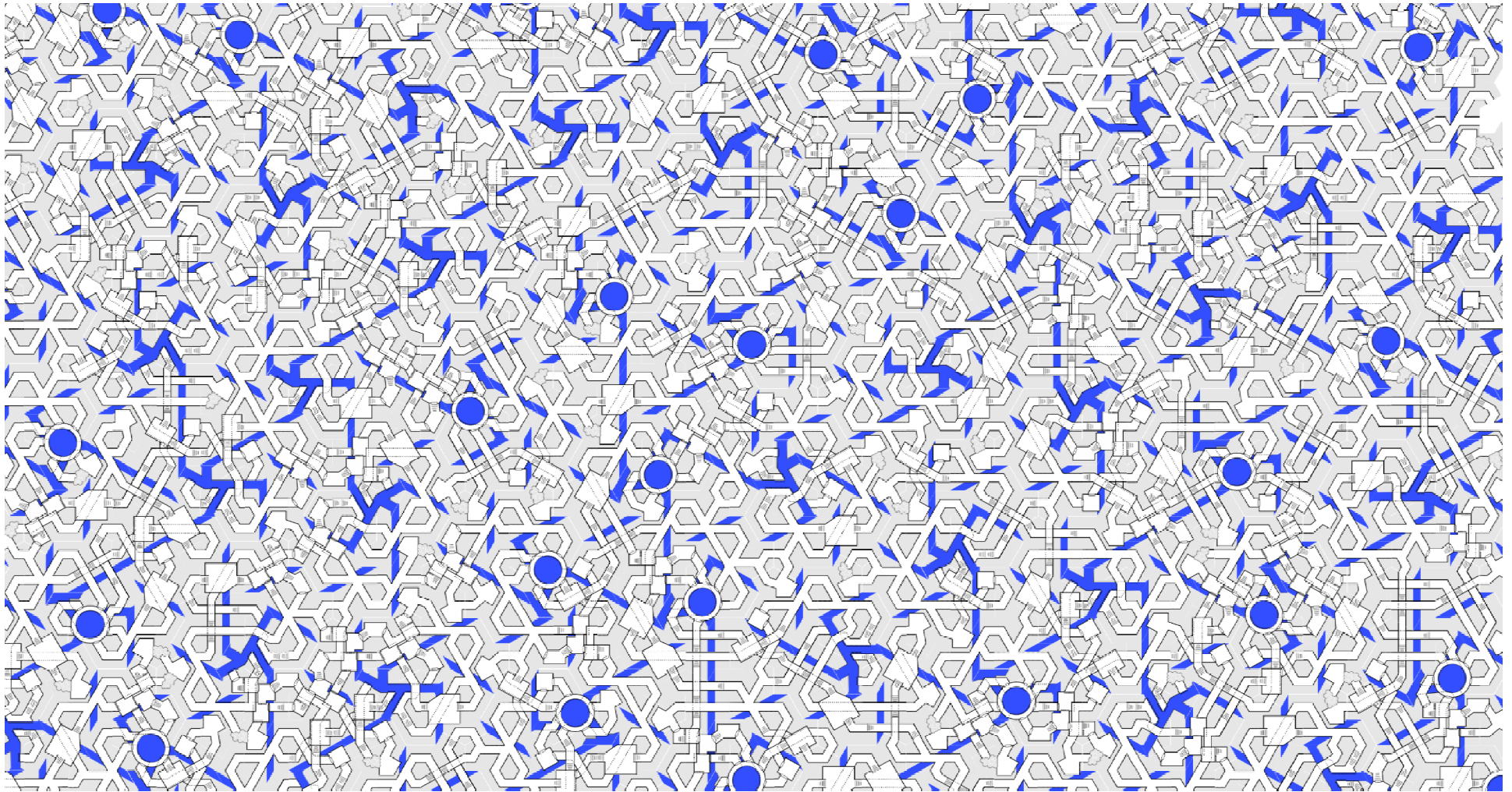




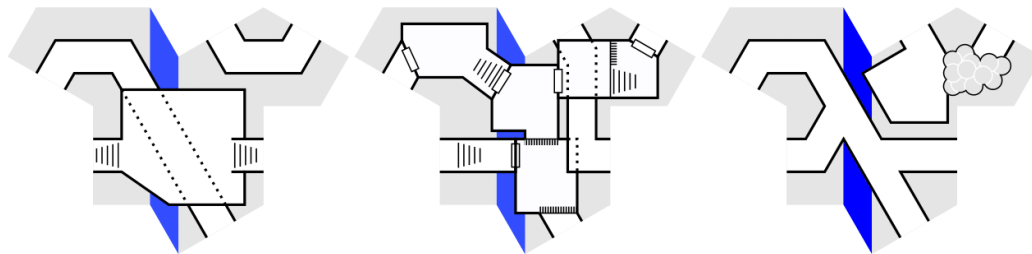
© Albin Thorning, 2023



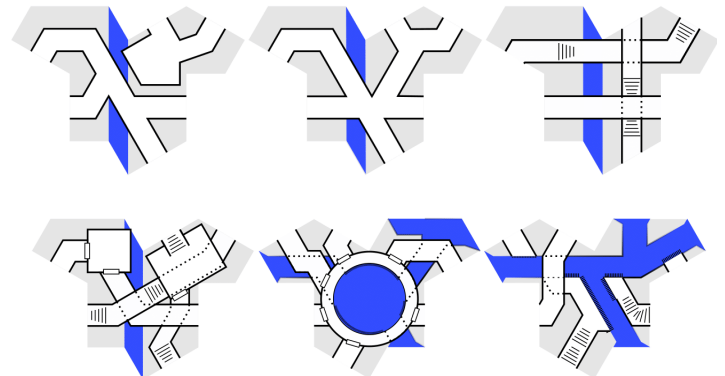
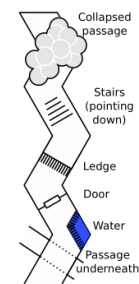
© William
Thuburn,
2023



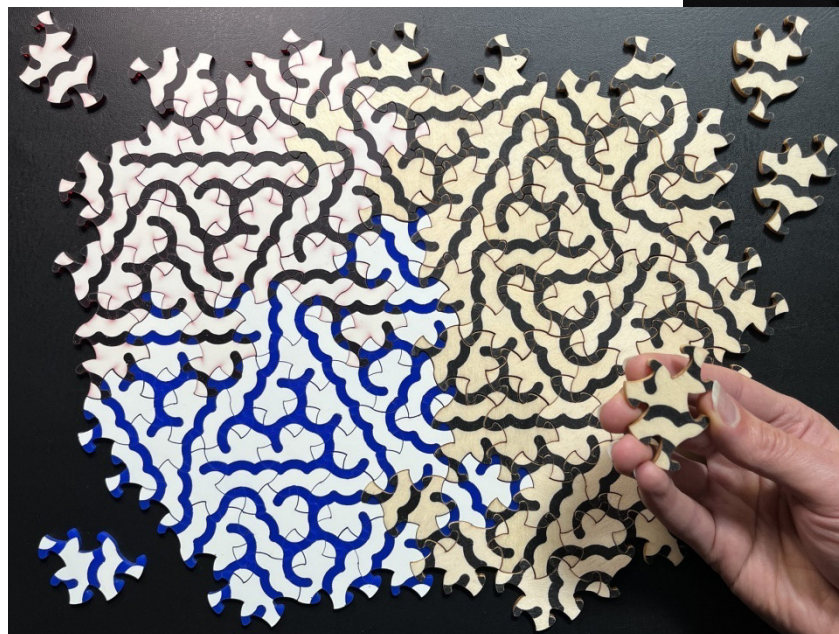
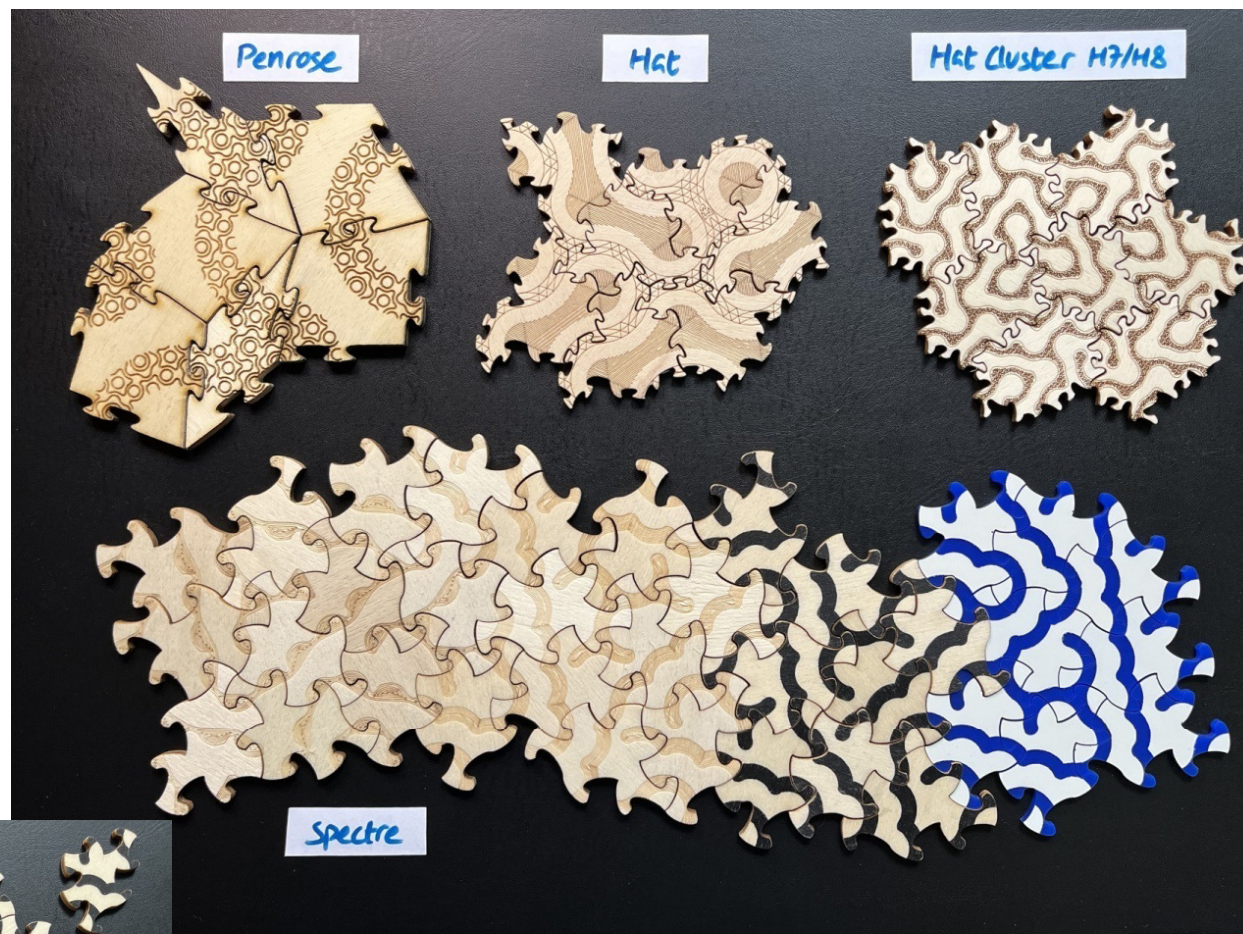
© Edward Walker, 2023



Legend



© Christian Walther, 2023





© James Westphal, 2023

La catégorie
« grand public »
(les finalistes)



© Pierre Broca, 2023

The \$ Hats

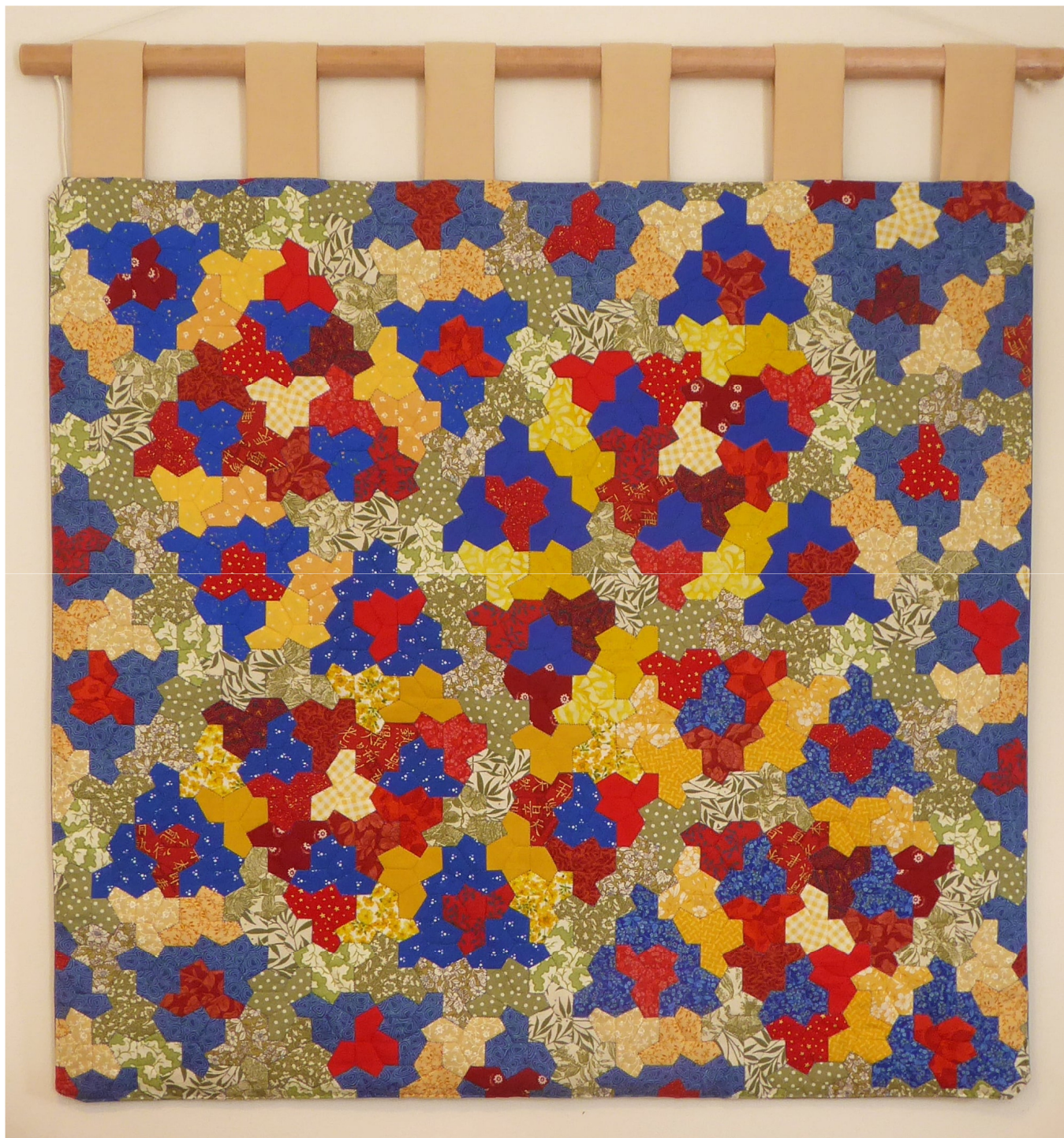
Designed and folded by
Sy Chen (陳希宇)
Tiled from multiple hats, each folded
from \$1.00 bill



© Sy Chen, 2023

© Garnet Frost, 2023

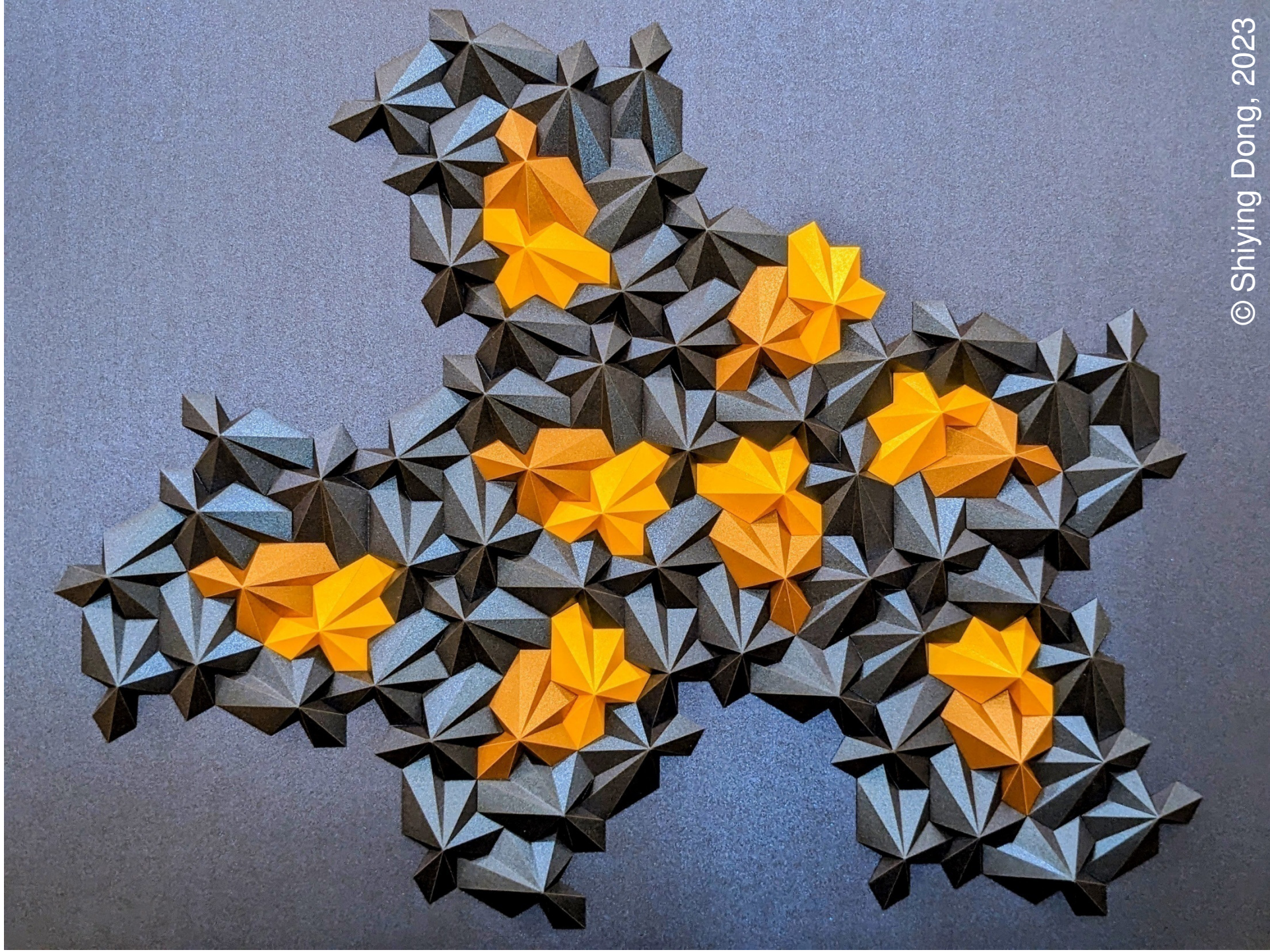




© Emma Laughton,
2023



La catégorie
« grand public »
(les lauréats)



© Shiyong Dong, 2023



Aperiodic Ravioli Tiling

© Evan Brock, 2023



© Evan Brock, 2023



Ravioli Assembly

La recherche relancée !

Classification des polygones non convexes permettant de paver le plan et des polygones convexes autorisant à paver le plan de manière anisoédrale.

Caractériser les ensembles de tuiles qui pavent le plan.

Liens avec la complexité algorithmique et la décidabilité.

Nombre de pavages k -uniformes du plan (pour $k \geq 7$).

Conjecture de Heesch.

Conjectures sur les polyminos et les polyformes.

Recherches sur les motifs des pavages « marqués »...

D'autres défis en grande dimension

Autre révolution en 2023 : Rachel Greenfeld et Terence Tao invalident la *conjecture du pavage périodique* (années 1975). En dimension « suffisamment grande », il existe un ensemble fini de tuiles qui permettent de réaliser des pavages apériodiques de l'espace euclidien **uniquement à l'aide de translations !**

Problèmes 3 et 18 de Hilbert en « grande » dimension.

Découpes géométriques et leurs généralisations.

Des pistes pour les artistes

Explorer les pavages du plan, les formes (tuiles) du plan.

Créer des décorations, explorer les motifs générés par un pavage apériodique.

Inventer de nouvelles règles d'inflation–substitution.

Déformer les tuiles apériodiques existantes.

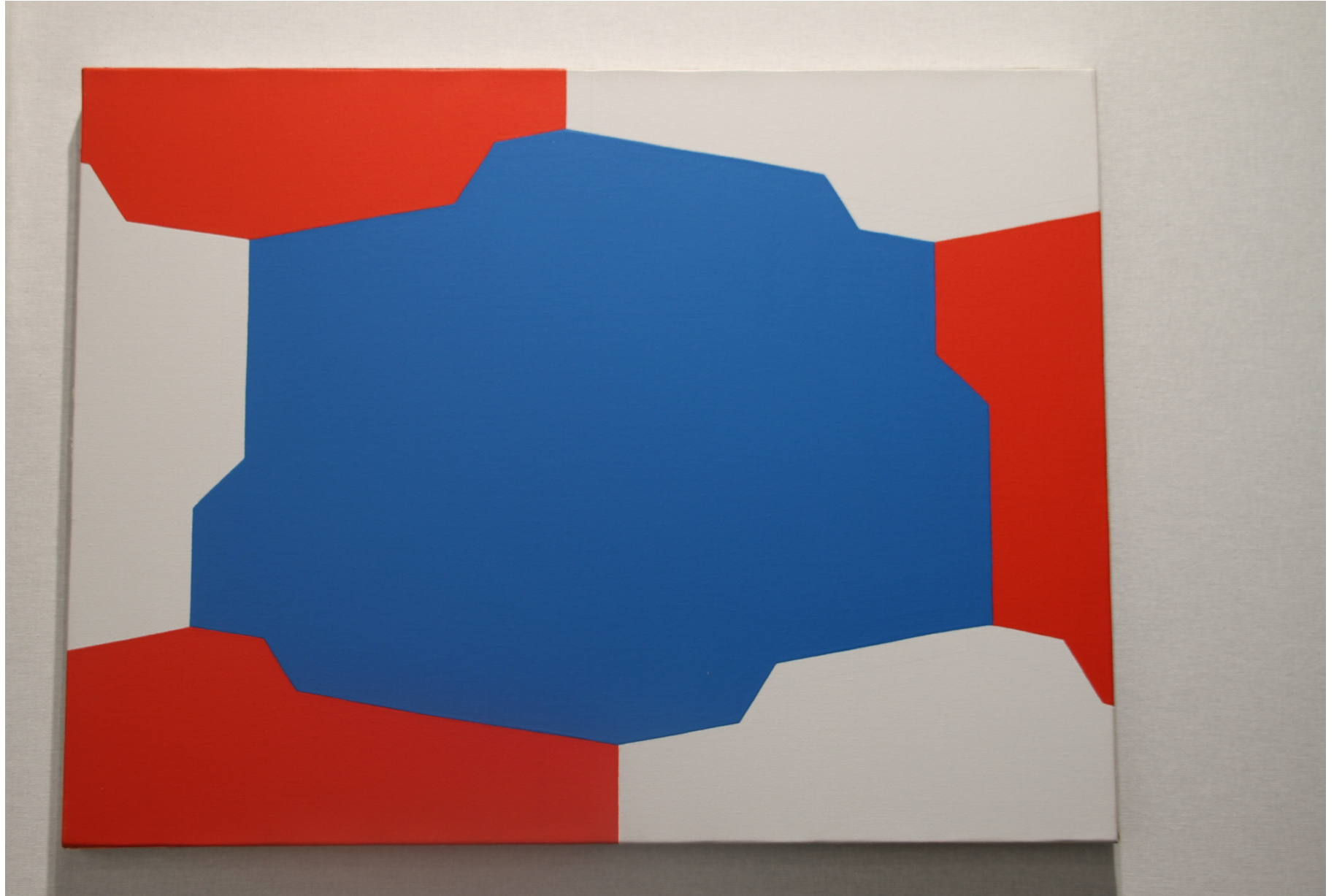
Mêler pavages périodiques et apériodiques.

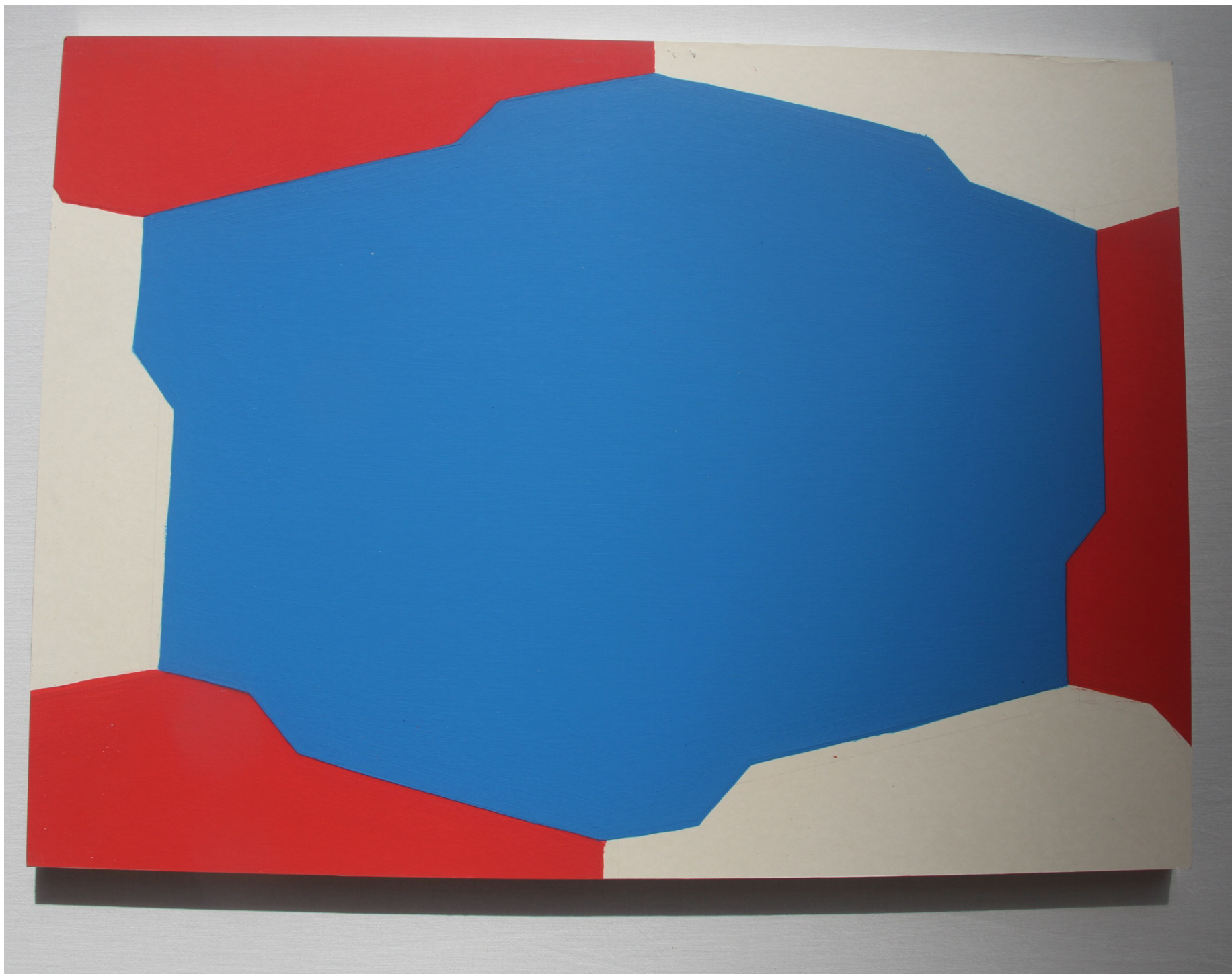
Explorer les surfaces qui peuvent être pavées de manière périodique par des tuiles apériodiques du plan.

Rechercher de nouvelles tuiles apériodiques.

Les explorations de François Ristori

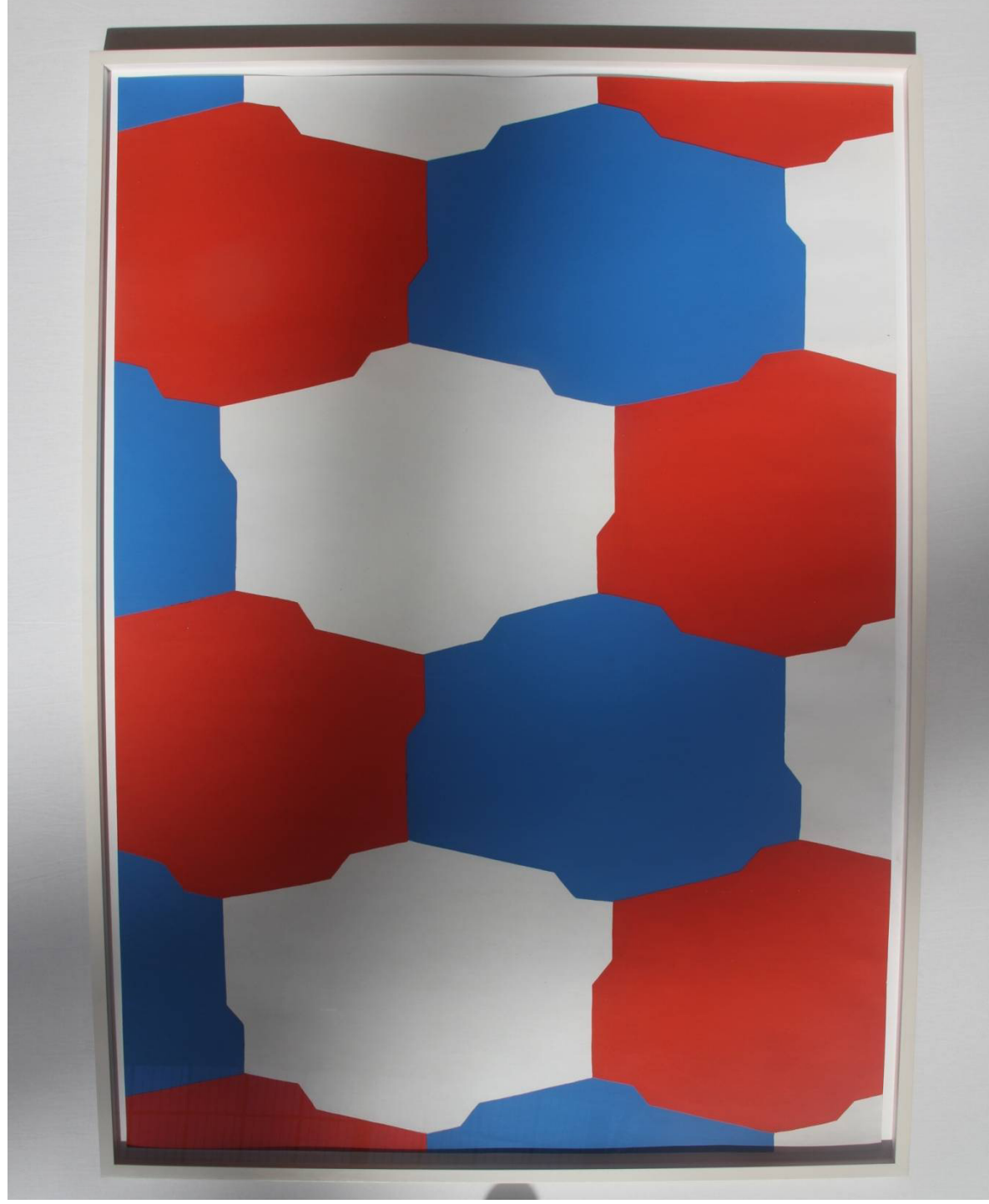
© François Ristori (1936–2015), non daté / Photo : É.T., 2023





© François Ristori, vers 1980 / Photo : É.T., 2025

© François Ristori, vers 1970 / Photo : É.T., 2025



Références

Tilings and Patterns. Branko Grünbaum et Geoffrey Colin Shephard, W.H. Freeman, 1987.

Complexité des pavages apériodiques : calculs et interprétations. Antoine Julien, thèse de doctorat de l'université Claude-Bernard-Lyon-I, 2009.

Géométrie des pavages. Pierre Audibert, Lavoisier, 2013.

Aperiodic order, volume 1: a mathematical invitation. Michael Baake et Uwe Grimm, Cambridge University Press, 2013.

Planar aperiodic tile sets: from Wang tiles to the hat and spectre monotiles. Tinka Bruneau et Michael Whittaker, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/24 (4), décembre 2023.

The path to aperiodic monotiles. Craig Kaplan, *Eureka* 67, octobre 2024.

« Chapeau », les deux articles

An aperiodic monotile. David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, *Combinatorial Theory* 4(1), 2024.

A chiral aperiodic monotile. David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig Kaplan et Chaim Goodman-Strauss, *Combinatorial Theory* 4(2), 2024.

Outils en lien avec les deux publications :

<https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat>,

<https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre>.

Les *blogs* des auteurs

« Hedraweb – Polyhedra, shapes, tessellations and patterns ».
David Smith, 2016–2023.

« Hedraweb – Polygons, life patterns, fractals and other stuff ».
David Smith, 2023–...

« Isohedral ». Craig Kaplan, 2021–...

Des logiciels pour expérimenter

PolyForm Puzzle Solver. Jaap Scherphuis, 2003.

Desmos. Eli Luberoff, 2011.

Pattern collider. Aatish Bhatia, 2021.

CryptoMiniSat. Mate Soos, Pierre Ysard, Arijit Shaw, Martin Hořeňovský, Alexander Scheel, Marcel Bargull, Andres Notzli, Simon Felix, Julian Rüth, Martin Maurer, Vegard Nossum, Sami Liedes, Alex Odinaev, Martin Albrecht, Kuleep S. Meel, Jan Mazak, Finn Haedicke, Erik Bray, Davin Choo, Yevgeny Kazakov, Rui Chen, Robert Grosse, Martin Nowack, Jörg Thalheim, Gleb Popov, Dennis Yurichev, Dan Liew, Yuri Pirola, Sudhanshu Mishra, Storyyeller, Rion Snow, Reuven Peleg, Lars Schmertmann, David Narváez, Daniel Fremont, Curtis Bright, Marie Maurer, Brian Mastenbrook, Andrew Jones, Andrew Ross, Andrew Johnson, Shaowei Cai, 2009.

Articles de vulgarisation

La quête du pavé apériodique unique. Jean-Paul Delahaye, *Pour La Science* 433, 2013.

An aperiodic monotile exists! Christian Lawson-Perfect, Katie Steckles et Peter Rowlett, *The Aperiodical*, 2023.

Hobbyist Finds Math's Elusive 'Einstein' Tile. Erica Klarreich, *Quanta Magazine*, 2023.

Math Patterns That Go On Forever but Never Repeat. Patrick Honner, *Quanta Magazine*, 2023.

Les pliages en origami

La tortue qui prenait son chapeau pour Einstein. Florentin Waligorski et Enka Blanchard, *Maths en cartes Express*, Comité international des jeux mathématiques, 2023.

The hat aperiodic monotile origami.

Turtle aperiodic monotile origami.

Florentin Waligorski, Flow Motion, 3'47 et 3'06, 2023.

Pavages de Penrose et nombres de Heesch

Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles. Martin Gardner, *Scientific American* 236 (1), janvier 1977.

5 and Penrose Tiling. Numberphile, 7'00, 2012.

Heesch Numbers and Tiling. Numberphile, 9'19, 2019.

Heesch Numbers (extra footage). Numberphile, 2'17, 2019.

Vidéos en ligne (1)

Un motif apériodique !

Pourquoi le Chapeau est-il apériodique ?

Thomaths, 9'21 et 12'24, 2023.

La première tuile apériodique de l'histoire ! The Hat.

Une nouvelle tuile apériodique : le spectre !

Passe-science, 23'41 et 14'57, 2023.

The Infinite Pattern That Never Repeats. Veritasium, 21'11, 2020.

Vidéos en ligne (2)

A Hobbyist Just Solved a 50-Year-Old Math Problem (Einstein Tile). Up and Atom, 17'58, 2023.

The Shiny New Shape That Aperiodically Tessellates!
Finally, a true Aperiodic Monotile!
Ayliean MacDonald, 3'16 et 5'35, 2023.

Aperiodic Monotile – Mad as a Hat.
Chiral Aperiodic Monotile – Spectre in the Machine.
Mostly Mental, 14'34 et 12'43, 2023.

Vidéos en ligne (3)

A New Tile in Newtyle.

A new tile (extra).

Discovery of the Aperiodic Monotile.

Numberphile, 26'50, 6'01 et 31'03, 2023.

Ein Stein Revisited – The Spectre Tile. G4G Celebration, 53'07, 2023.

The hat: an aperiodic monotile. Oxford Mathematics Public Lectures, 57'38, 2023.

Exploring the hat polykite aperiodic monotile (part I, part II). Pembesita, 18'22 et 17'42, 2023.

Chapeau, l'artiste !

© David Smith, 2022

