

Les *incommensurabilités* contemporaines en mathématiques, musique et philosophie : *saturations, obstacles ou obstructions* ?

François NICOLAS – séminaire *mamuphi* (Ircam, 8 mars 2025)

RÉSUMÉ.....	1
PROBLÉMATISATION.....	2
TROIS STRATÉGIES GÉNÉRALES.....	5
SATURATIONS.....	5
OBSTACLES.....	6
OBSTRUCTIONS.....	7
EN RÉSUMÉ.....	7
INCOMMENSURABILITÉS CONTEMPORAINES.....	8
SATURATIONS ET OBSTACLES ?.....	8
MESURES ET COMMENSURABLES.....	8
EN MATHÉMATIQUES.....	9
EN MUSIQUE.....	13
EN PHILOSOPHIE.....	14
ENTRE HOMMES ET FEMMES.....	14
EN POLITIQUE.....	15
STRATÉGIES MAMUPHIQUES ?.....	15

Résumé

Cet exposé s'attachera à **problématiser** la question suivante (sans exiger pour autant des réponses bien établies) : qu'en est-il des **incommensurabilités contemporaines** en différents domaines de pensée, singulièrement en mathématiques, en musique et en philosophie ?

I. On commencera en distinguant, dans une situation tenue pour bloquée, trois stratégies pour comprendre et résoudre ce blocage :

- 1) comme **saturation** interne : d'où un **abandon** de la situation considérée comme définitivement stérile ;
- 2) comme **obstacle** extrinsèque rencontré : d'où une **déconstruction** de la situation considérée comme impasse ;
- 3) comme **obstruction** endogène : d'où une **relève** affirmative par adjonction de l'objet ¹ qui rend secrètement compte du blocage manifeste, adjonction apte à refertiliser la situation initiale en l'étendant. Contre les deux premières orientations (postmodernes et nihilisantes), nous privilégierons la troisième, spécifiquement **moderne**, à la lumière des mathématiques.

II. On examinera ensuite, à l'époque où les incommensurabilités prolifèrent, comment aujourd'hui prendre mesure affirmative de leur existence ².

- En **mathématiques**, comment l'algèbre contemporaine prend-elle mesure renouvelée de l'antique incommensurabilité entre **arithmétique et géométrie** ?
- En **musique**, comment le discours musical prend-il mesure contemporaine de l'incommensurabilité millénaire entre **perception et écriture** ?

¹ de type nouveau...

² Bien sûr, **prendre mesure de l'existence d'une incommensurabilité** n'est pas fantasmer la mesure d'un incommensurable !

- En **philosophie**, comment les sujets de vérités prennent-ils mesure de l'originelle incommensurabilité qui partage le « il y a » en **ce qui existe et ce qui arrive** (i.e. comment ek-sister subjectivement au point exact où s'avère qu'« *il n'y a pas que ce qu'il y a* »³) ?
- Entre **hommes et femmes**, comment l'amour hétérosexuel prend-il mesure d'une certaine incommensurabilité entre les deux sexes (divisant l'humanité) sous le signe d'un bonheur partagé, à rebours de la fusion romantique, de la jalousie proustienne ou de l'antique guerre matriarcat/patriarcat ?
- En **politique** enfin, quels militants pour prendre politiquement mesure des incommensurabilités qui aujourd'hui prolifèrent (l'apartheid généralisé, le « deux poids, deux mesures » cher à l'Occident...), disloquant ainsi toute perspective d'un monde⁴ commun à toute l'humanité pour profiler la guerre comme étant la seule mesure envisageable des antagonismes actuels ?

III. On s'attachera alors à problématiser ces incommensurabilités, singulièrement les trois premières (*mamuphi* oblige !), en examinant comment, pour chacune d'elles, s'opposent aujourd'hui les trois orientations initialement distinguées : saturation et abandons, obstacle et déconstructions, obstruction et relèves. On conclura en esquissant un programme de travail *mamuphi* pour étudier les nouvelles obstructions et leurs relèves modernes.

•••

Problématisation

Il s'agit d'ouvrir un chantier
un chantier *mamuphi*,
en particulier pour l'année prochaine 2025-2026.

Pour l'ouvrir, problématisons l'enjeu susceptible de l'orienter.

Donc aujourd'hui, beaucoup de questions et peu de réponses bien établies.

Enjeu

L'orientation moderne de différentes pensées butent sur des obturations, occlusions, des barrages, des entraves, des engorgements...

Trois orientations stratégiques : saturations, obstacles, obstructions.

Les deux premières conduisent aux orientations postmodernes.

La troisième engage deux perspectives rivales : la déconstruction postmoderne ou la relève moderne – d'où la perspective d'une troisième modernité, après la première (années 1830) et la deuxième (années 1960), une modernité du XXI^e siècle (peut-être seulement de sa seconde partie !).

Orientation

Continuer, malgré tout : il s'agit de léguer un testament moderne qui soit vivant, créatif, fécond (ou fécondable).

La voie est aujourd'hui très étroite (on se sent « coincé » !) : ni saturations, ni obstacles, ni déconstruction des obstructions !

Hypothèse

il y a des obstructions qui, étant par définition secrètes, sont difficiles à déceler mais qui peuvent l'être en sorte d'organiser des relèves extensives.

³ « *Il n'y a pas que ce qui existe car il y a aussi ce qui arrive.* »

⁴ Thèse (*Logiques des mondes* d'Alain Badiou) : ce qui fait monde, c'est l'existence d'une mesure commune quant à ce qu'*exister* et *inexister* y veut dire.

Modèle

Lagrange-Abel-Galois

Saturation (de Leibniz à Cauchy)

Leibniz - Lettre au père de La Chaise (mai 1680) :

« Maintenant, je crois qu'on peut dire que la mathématique pure est enfin achevée, savoir celle qui contient les nombres, les figures et les mouvements, le reste ne sera qu'un exercice de jeunes gens pour se former au raisonnement. Mais la postérité n'aura qu'à tourner ses pensées sérieuses vers la physique. Et peut-être pourrions-nous aller fort loin de notre temps même pour la médecine, si on s'y prenait mieux. »

Buffon (qui a introduit en France le calcul infinitésimal de Newton) :

« Le règne des mathématiques est fini. » (1748)

Lagrange - Lettre à d'Alembert du 21 septembre 1781 :

« Je commence à sentir que ma force d'inertie augmente peu à peu, et je ne réponds pas que je fasse encore de la Géométrie dans dix ans d'ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde, et qu'à moins qu'on ne découvre de nouveaux filons, il faudra tôt ou tard l'abandonner. La physique et la chimie offrent maintenant des richesses plus brillantes et d'une exploitation plus facile ; aussi le goût du siècle paraît-il entièrement tourné de ce côté-là, et il n'est pas impossible que les places de la Géométrie dans les Académies ne deviennent un jour ce que sont actuellement les chaires d'arabe dans les Universités. »

Cauchy - Discours Sur les limites des connaissances humaines le 14 novembre 1811 à Cherbourg :

« On est tenté de croire que les connaissances de l'homme peuvent croître et se multiplier à l'infini. [...] Cependant si l'on observe que toute notre intelligence et nos moyens sont renfermés entre des limites qu'ils ne peuvent jamais franchir, on se persuadera sans peine que nos connaissances sont bornées comme nos facultés. [...] Que dirais-je des sciences exactes : la plupart paraissent parvenues à leur plus haute période. L'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, les mathématiques transcendentes sont des sciences que l'on peut regarder comme terminées, et dont il ne reste plus à faire que d'utiles applications. »

Remarquons la récurrence du faux diagnostic de saturation !

Obstacle : Abel

Démontre l'impossibilité de résoudre l'équation quintique générale.

Reporte alors son intérêt sur l'étude d'une condition suffisante pour qu'une équation irréductible soit cependant résoluble.

Pour ce faire, Abel démontre, dans le premier de ses mémoires de 1828-1829, le théorème suivant :

Une équation irréductible dont le degré est un nombre premier est algébriquement résoluble si deux de ses racines peuvent s'exprimer rationnellement l'une par l'autre.

Exemple : $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$ dont les racines, toutes réelles⁵, sont algébriquement reliées par la relation algébrique $\theta(x)=x^2-2$ ⁶.

D'où les équations abéliennes.

Obstruction : Galois

Galois va démontrer que si l'équation quintique générale est irrésoluble, c'est parce que secrètement cette équation rend ses 5 racines indissolublement solidaires et les groupe donc (groupe de symétrie) de manière indécomposable.

Ce faisant, Galois ouvre à une intelligence de l'irrésolubilité, par-delà le constat que l'équation est irrésoluble en exhibant l'objet secret (le groupe de solidarité) qui mesure l'existence ou non de cette irrésolubilité.

Notons le point essentiel suivant : le groupe en question est indécélable dans l'apparence du polynôme.

Rien ne permet de deviner que parmi ces 3 équations, une est irrésoluble quand les deux autres le sont :

⁵ Nommons-les par ordre numérique croissant :

$$A \cong -1,92 ; B \cong -1,31 ; C \cong -0,28 ; D \cong 0,83 ; E \cong 1,68$$

⁶ Comme dans le théorème III, on a, avec $n=5$: $A ; E=\theta(A) ; D=\theta(E)=\theta^2(A) ; B=\theta(D)=\theta^3(A) ; C=\theta(B)=\theta^4(A)$ et finalement $A=\theta(C)=\theta^5(A)$.

- $x^5-x-2=0$ ⁷
- $x^5+x-2=0$ ⁸
- $x^5+x+2=0$ ⁹

Autres exemples d'équations irrésolubles :

- $x^5+20x-16=0$
- $x^5-5x+12=0$
- $x^5-x+3=0$

Le groupe est intrinsèquement secret : son aveu ne le résorbe pas (comme il le fait quand il s'agit d'un secret extrinsèque : par dissimulation). Un secret constituant ne s'éponge pas par un aveu (Lacan : « un secret avoué reste un secret »).

Olivier Debarre



<https://www.youtube.com/watch?v=VBauUSg5Hs0>

« Les mathématiciens du temps de Galois ont considéré que ses critères de résolubilité des équations de degré premier ne constituaient pas une réponse satisfaisante à la question car ces critères nécessitaient de connaître des informations a priori sur les racines. Ils attendaient plutôt un critère général ne faisant intervenir que les coefficients de l'équation et permettant de savoir, par simple inspection de ces coefficients, si l'équation était ou non résoluble par radicaux. La théorie de Galois, très en avance sur son temps, et montrant que le problème était bien plus subtil, ne correspondait pas à ces attentes. Et ce n'est que beaucoup plus tard que le monde mathématique a commencé à réaliser que la théorie de Galois allait bien au-delà du problème, somme toute très artificiel, de la résolution par radicaux des équations algébriques. Galois avait en fait propulsé tout le domaine de l'algèbre dans un nouveau monde : celui des groupes, des extensions de corps, et de bien d'autres concepts fondamentaux des mathématiques d'aujourd'hui. En particulier, de nos jours on s'est rendu compte qu'il est bien plus important de savoir calculer le groupe de Galois d'un polynôme, plutôt que de savoir s'il est résoluble par radicaux. »

Perspective

Thèmes de travail pour la prochaine saison *mamuphi* ?

Méthode aujourd'hui

Mettre ces thèmes à l'épreuve d'une question contemporaine particulière : l'**incommensurabilité**.

Plan

- I. Trois stratégies générales
- II. Incommensurabilités contemporaines
- III. Stratégies mamuphiques ?

Délimitation

Je m'écarte de deux problématiques, non que je les réfute mais que je me situe ailleurs.

⁷ Une racine réelle : 1,267... Son GG est S_5 qui n'est pas résoluble.

⁸ $x^5+x-2=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+2)$

⁹ $x^5+x+2=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+2)$

Thomas Kuhn : *La structure des révolutions scientifiques* (1983)

Incommensurabilité entre paradigmes des différentes théories scientifiques : pas de comparaison possible car chaque paradigme véhicule ses propres critères. Or un paradigme, c'est précisément ce qui constitue et intrique problématisation et solution :

À quelles conditions une « solution » est-elle considérée comme acceptable ? Un paradigme associe une conception de ce que *problème* veut dire à une norme sur ce que *le résoudre* veut dire).

Chez Kuhn, ceci a abouti à l'idée que l'incommensurabilité tiendrait à l'impossibilité de traduire entre elles les différentes problématisations.

Mais laissons cela de côté car les incommensurabilités qui vont nous intéresser aujourd'hui ne seront pas de cet ordre.

François Julien : *L'incommensurable* (2022)

L'incommensurable comme figure de l'infini venant fêler le fini et y ouvrir la brèche de l'existence...

Il s'intéresse aux effets subjectifs de ce que « il y a de l'incommensurable ».

Notre question est autre : celle de l'incommensurabilité – ce qui rend compte qu'il y a tel incommensurable en telle situation, de sa nécessité.

Échos

Nécessité et contingence

Cette question de l'incommensurabilité mobilise la dialectique du nécessaire et du contingent :

- d'un côté, la nécessité de l'incommensurable se dit incommensurabilité (la nécessité de l'irrésolution algébrique se dit irrésolubilité) ;
- de l'autre, cette nécessité ne se donne que comme contingence (cf. contingence apparente de l'équation quintique irrésoluble) : nécessité secrète (inconsciente) dont la forme apparente est contingente.

Inconscient

D'où la figure structurale moderne de l'inconscient : structure intrinsèquement inconsciente. Qu'est-ce qui fait l'inconscientisabilité de l'inconscient ?

Trois stratégies générales

Saturations

Exemples mathématiques

Voir plus haut

Exemples politiques

Lazarus : *Anthropologie du nom*

1996

« La méthode de la saturation » : « examen, de l'intérieur d'une pensée, de la péremption d'une de ses catégories fondatrices ». (37)

Face à une telle péremption, « l'alternative est entre le reniement et la saturation ». La méthode de la saturation « ouvre à la poursuite du travail des catégories dans de nouveaux termes ».

Ici, « péremption de l'idée de parti, du marxisme-léninisme, de la catégorie de révolution, du socialisme, du matérialisme historique ».

Force est de constater que cette méthode a conduit à une pure et simple liquidation : un domaine saturé n'est pas désaturable !

Badiou : *Mémoires d'outre-politique (1937-1985)*

2023

Saturation du motif du parti dans la Révolution culturelle (Conférence du Rouge-Gorge de 2002)

Cf. entrée 32 du *Dictionnaire Mao* : **Saturation**

La saturation est le concept approprié pour indiquer, de l'intérieur du mouvement communiste, les catégories, figures ou institutions désormais dépassées, qui n'ont plus d'utilité, voire qui peuvent être des obstacles à la poursuite positive du mouvement lui-même. Il ne s'agit donc pas d'erreurs ou d'une auto-critique concernant le passé. Il s'agit de savoir que certaines formes de l'action ou de l'organisation, ou encore certains principes ou fragments de la théorie générale sont obsolètes, vu le changement d'étape ou de conjoncture générale. On dit dans ce cas que ces formes, ces types d'organisation, ces éléments théoriques sont désormais saturés. Ce qui veut dire qu'ils ont été utiles en leur temps, dans une étape définie du mouvement communiste, mais qu'ils sont désormais inutiles, voire nuisibles. Il s'est produit une saturation de leur usage historique qui fait que les reconvoquer, dans la pensée ou dans l'action, soit ne sert à rien, soit même crée des obstacles inattendus.

*Un exemple typique de saturation a été, dès le léninisme, une certaine conception du **syndicalisme**.*

*Pour ouvrir largement la troisième étape du communisme, c'est, au-delà de la saturation du syndicalisme, le concept de « **parti** » qu'il faut considérer comme saturé.*

Mais on pourra aussi, inversement, définir le révisionnisme comme ce qui propose l'abandon d'une notion qui non seulement n'est pas saturée, mais qui, loin d'être dépassée, est une boussole pour l'avenir. Un cas typique de révisionnisme est celui de la « dictature du prolétariat ». [...] Loin d'être saturée, une telle notion, extrêmement dialectique, est plus que jamais actuelle, étant au cœur des problèmes que pose et posera [...] la troisième étape du mouvement communiste.

*Concluons : **il est essentiel, en matière de saturation, de ne pas se tromper, ni en la décidant, ni en décidant de ne pas la décider.***

(452-453)

Obsolescences faisant désormais obstacles et saturant l'espace de pensée.

« Saturer »

Espace de stockage saturé, air saturé de vapeur d'eau (\Rightarrow condensation), liquide saturé de sels, saturer les consommateurs de pubs...

Du verbe latin *saturare* ou *saturo* : rassasier ; lui-même de *satis* (assez, suffisamment) et *satietas* (satiété, suffisance, abondance).

Saturation = « il y en a trop » ! Notion d'excès stérilisateur : on n'y respire plus.

Réponse : aérer, renouveler l'air, ôter ou filtrer l'excès.

Le problème : par définition, la saturation est endogène. Il faut donc supprimer le moteur endogène de saturation, le foyer intérieur d'excès, la production intrinsèque incapable de s'autolimiter.

En l'occurrence, la pure et simple suppression d'une catégorie saturante ne marche pas car le réseau des catégories n'est pas une simple somme (une colimite injective) mais un produit (une limite projective) et retirer une catégorie, c'est comme supprimer une poutre d'un édifice !

D'où que le diagnostic de saturation conduit en général à la liquidation : abandon et déplacement !

Obstacles

Extrinsèque, rencontre exogène (l'obstacle n'est pas engendré par la situation mais rencontré) : cf. un mur où « ça ne passe pas ».

Deux possibilités :

1) demi-tour ;

2) on lève l'obstacle :

- on le détruit (disloque ou dissout : cf. les deux images de Grothendieck du marteau ou de l'immersion) ;

- on le franchit : on le contourne par les côtés, par le haut ou par le bas.

Exemples mathématiques

Voir Abel (plus haut)

Obstructions

Endogène, intrinsèque.

Deux possibilités :

- 1) on déconstruit la situation pour qu'elle n'engendre plus l'obstruction ;
- 2) on étend la situation en y adjoignant un objet de type nouveau qui relève l'obstruction

Exemples mathématiques

Voir Galois (plus haut)

En résumé...

Dialectique du préfixe « ob »

Il pointe « devant » : ce qui est devant (statique), ce qu'on y met (dynamique extrinsèque), ce qui s'y met (dynamique intrinsèque).

- **oublier** : perdre de vue
- **obnubiler** : couvrir d'un nuage
- **obscurcir** : masquer devant
- **obsolescence** : perdre de sa force/valeur

obsto de l'**obstacle** : se tenir devant \Rightarrow faire obstacle (statique exogène)

obturo de l'**obturation** : boucher l'accès à ce qui est devant, fermer l'issue (dynamique exogène)

obstruo de l'**obstruction** : construire devant, murer (dynamique endogène).

Au total...

- I. **Saturation** : dynamique endogène qui porte sur la globalité de l'espace ;
- II. **Obstacle** : statique ou dynamique exogène d'une rencontre localisée d'un mur extrinsèque ;
- III. **Obstruction** : dynamique endogène qui produit un point de butée intrinsèque.

Obstacles/obstructions

Un **obstacle** (rencontre d'un objet exogène) **se lève** (extrinsèquement) ou l'on rebrousse-chemin.

Une **obstruction** (genèse endogène) **se relève** (intrinsèquement) ou l'on reste bloqué, on campe sur place.

Que veut dire « relève » ?

Cela se fait en trois temps.

- 1) C'est d'abord passer de la **négation** d'un attribut ($\sqrt{2}$ n'est pas rationnel) à l'**affirmation** d'un attribut négatif ($\sqrt{2}$ est irrationnel).
- 2) C'est ensuite passer de l'affirmation d'un **attribut** négatif ($\sqrt{2}$ est irrationnel) à l'affirmation d'une **propriété** négative (l'irrationalité de $\sqrt{2}$).
- 3) C'est enfin passer de l'affirmation d'une **propriété** négative (l'irrationalité de $\sqrt{2}$) à l'affirmation d'un **objet** de type nouveau rendant secrètement compte de la propriété en question (le corps \mathbb{R} , continu et complet des nombres réels).

On retrouve ces trois pas en matière de résolution algébrique des équations polynomiales.

- 1) On passe de « telle équation n'est pas résoluble » à « cette équation est **irrésoluble** ».
- 2) On passe ensuite de « telle équation est irrésoluble » à « il y a **irrésolubilité** de l'équation quintique générale ».
- 3) On passe enfin de « il y a irrésolubilité de l'équation quintique générale » (Abel) à « chaque équation irrésoluble engendre secrètement un **groupe** solidarissant ses racines et rendant compte de son irrésolubilité ».

Retenons – « morale par provision » dirait Descartes – ces trois temps et voyons comment tout ceci travaille les figures contemporaines d'incommensurabilités.

Incommensurabilités contemporaines

Comment aujourd'hui prendre mesure affirmative de leur existence sachant que, bien sûr, **prendre mesure de l'existence d'une incommensurabilité** n'est pas fantasmer la mesure d'un incommensurable !

Saturations et obstacles ?

Ce faisant, je me concentre ici sur les obstructions à relever en matière de butée sur des incommensurables.

Je ne vais pas, à chaque fois, examiner les deux orientations alternatives : celle de la saturation (conduisant, peu ou prou, à l'abandon du domaine tenu pour saturé pour se déplacer dans un autre type de domaine), celle de l'obstacle (consistant soit à lever l'obstacle, soit à faire demi-tour par déconstruction du chemin ayant conduit à l'impasse en question).

Je ne vise pas ici une recension systématique ce qu'il y a. Je m'intéresse à ce que nous devons faire pour rester modernes sachant que cela n'est sûrement plus continuer sur une lancée mais implique une recomposition d'ensemble dont la relève des obstructions me fournit ici le paradigme.

La difficulté bien sûr est alors que par définition l'obstruction n'est pas apparente comme l'est l'obstacle : le plus souvent, l'obstruction opère secrètement, ses effets seuls prenant alors la forme apparente de l'obstacle.

Je rappelle que le secret en question est intrinsèque – disions qu'il est de structure – et non pas le résultat d'une opération de dissimulation ou de masquage !

Mesures et commensurables

Incommensurabilité : **absence** de mesure – quelque chose manque !

Deux types d'incommensurabilités : de fait (mesure pas encore trouvée ?), de droit (mesure impossible).

Théorie mathématique de la mesure

Borel (ensemble mesurable) puis Lebesgue (notion de mesure : fonction réelle sur les ensembles) \Rightarrow intégrale de Lebesgue, probabilités...

Trois types d'intégrale

- Riemann
- Lebesgue
- Kurzweil-Henstock (jauge)

Je ne vais pas m'étendre là-dessus. Je vais utiliser la notion de « mesure », de « mesure commune » de façon intuitive.

En musique...

Ma thèse : l'audition (au sens scolaire des auditions de conservatoire) est ce qui prend mesure d'une exécution. Elle mesure intégralement l'ajustement ou l'adéquation entre perception et écriture c'est-à-dire très

exactement la part commensurable entre perception et écriture (celle qui découle mécaniquement d'une réalisation informatique du Midi).

Le rapport écriture/perception n'est pas le rapport partition/écoute.

L'audition musicienne n'est pas l'écoute musicale.

Trois types d'audition analogues aux trois types d'intégration :

- 1) une première audition **spontanée** (Riemann) ;
- 2) une deuxième audition **savante** (Lebesgue) ;
- 3) une troisième audition **ajustée** (Kurzweil-Henstock).

Au total, « la troisième audition est la bonne » (Le MM tome I, chapitre iv).

En mathématiques

« Théorie de l'obstruction »

Je ne parlerai pas ici de cette théorie mathématique qui vise, en topologie algébrique, à déterminer des invariants cohomologiques.

Je ne la connais pas.

Je vais donc mobiliser ici une acception de l'obstruction qui s'en écarte sans doute – ce point serait bien sûr à examiner dans la suite du chantier que je veux aujourd'hui ouvrir devant vous.

Disons que je m'autorise de moi-même pour penser la notion d'obstruction par moi-même.

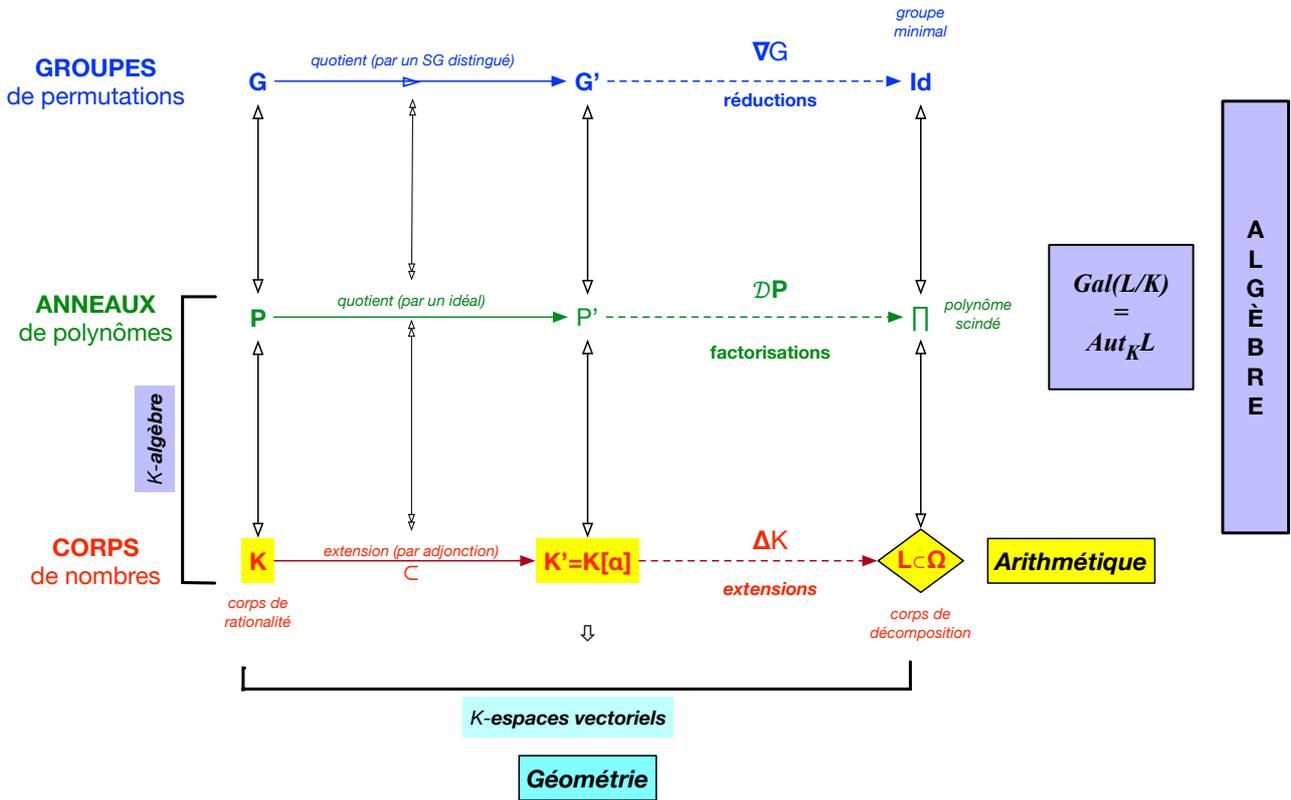
Abel-Galois

On peut relire les positions respectives d'Abel et de Galois à la lumière de ces questions.

Abel démontre que la plupart des nombres algébriques (c'est-à-dire algébriquement définis comme solutions d'équations polynomiales aux coefficients rationnels) s'avèrent être, individuellement, algébriquement indéterminables, innommables (« par radicaux ») et donc, en un certain sens, non mesurables algébriquement.

D'où les équations abéliennes dont la caractéristique est que leurs solutions étant algébriquement commensurables entre elles (par un polynôme), deviennent algébriquement déterminables, nommables mesurables.

Sur ce Galois va s'attaquer à mesurer l'irrésolubilité algébrique des équations polynomiales : le groupe de Galois de l'équation (groupe dit de symétries que j'appelle **groupe de solidarité** entre les racines du polynôme) va mesurer l'irrésolubilité de l'équation via la Correspondance de Galois.



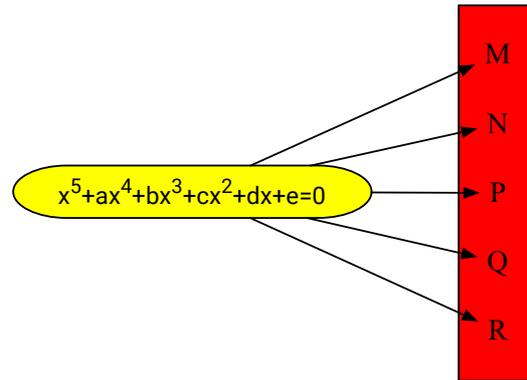
Cf. pignon et crémaillère

<https://www.youtube.com/watch?v=EjilcqmtEuo>

Si l'on appelle alors mesure algébrique d'un nombre la capacité de le définir par radicaux, on pourra dire que le groupe de Galois mesure l'incommensurabilité algébrique des racines des équations algébriques.

Retenons le principe de cette torsion de l'idée de mesure: s'il n'y a bien sûr pas de mesure d'un incommensurable, il peut y avoir **mesure de l'incommensurabilité**, c'est-à-dire mesure de ses conditions d'existence. Et la relève de l'obstruction consiste précisément en cette torsion opérée par la constitution d'un objet de type nouveau: ici le groupe.

Résumons



Soit l'équation quintique générale $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ (avec a, b, c, d, e rationnels).

Peut-on connaître algébriquement l'inconnue x c'est-à-dire la commensurer algébriquement aux coefficients (a, b, c, d, e) c'est-à-dire l'exprimer par radicaux en fonction d'eux (comme, dans l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, on peut le faire en écrivant

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ?$$

- 1) Si on appelle M, N, P, Q, R les 5 racines (a priori complexes) de l'équation, on sait déjà qu'on peut commensurer **collectivement** ces 5 racines M, N, P, Q, R aux 5 coefficients a, b, c, d, e par les relations coefficients-racines telles

$$M+N+P+Q+R=-a$$

...

$$M.N.P.Q.R=-e$$

puisque l'on a $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(x-M).(x-N).(x-P).(x-Q).(x-R)=0$

- 2) Abel démontre qu'en général, on ne peut algébriquement commensurer **individuellement** chaque racine aux coefficients.
- 3) Abel va démontrer alors que si les racines sont **deux à deux** algébriquement commensurables (c'est-à-dire polynomialement reliées), alors chaque racine sera individuellement commensurable aux coefficients.

C'est le cas, on l'a vu, avec l'équation $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$ dont les racines sont algébriquement reliées par le polynôme algébrique $Y=X^2-2$

- 4) Galois va changer radicalement de terrain en examinant comme l'équation vient secrètement **grouper** les racines en les rendant collectivement solidaires les unes des autres. D'où le groupe de Galois des racines du polynôme.

C'est ce groupe qui est alors en état de mesurer l'incommensurabilité algébrique des racines aux coefficients.

Le changement de perspective est total : le groupe n'est pas une **association constituée** à partir de chaque racine (comme dans nos précédentes relations coefficients-racines) ; le groupe est une **organisation constituante** de chacune des racines individuelles qui le compose.

Au total, l'**incommensurabilité algébrique** (ici entendue comme impossibilité de relier des objets algébriques par des relations polynomiales) prend donc différents tours qu'il faut soigneusement distinguer : **associative** (« relations coefficients-racines »), **individuelle** (« résolution par radicaux »), **bilatérale** (ou deux par deux : « équations abéliennes »).

Entre nombres rationnels et irrationnels

$\sqrt{2} \neq p/q$

Noter : démonstration par l'absurde.

Si $\sqrt{2}$ était rationnel, on aurait $\sqrt{2}=p/q$ avec p et q entiers, et l'un des deux pair, l'autre impair.

On aurait donc $2q^2=p^2$.

p^2 s'avérant ainsi pair, p doit être lui-même pair (et corrélativement q impair).

Si p est pair, on a $p=2n \Rightarrow q^2=2n^2$. Donc q serait également pair, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Donc $\sqrt{2}$ ne peut valoir p/q et donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

La logique classique (tiers exclu) autorise ici la conclusion grecque « $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel ». À ce stade, on bute sur $\sqrt{2}$ comme **obstacle**, dressé par la géométrie (diagonale du carré), à la rationalité arithmétique.

La transformation de cet obstacle extrinsèque en obstruction arithmétique intrinsèque va mobiliser trois pas successifs :

- 1) passer de « $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel » à « $\sqrt{2}$ est **irrationnel** » ;
- 2) passer de « $\sqrt{2}$ est irrationnel » à « il y a de l'**irrationalité** arithmétique » ;
- 3) passer de l'irrationalité arithmétique au nouvel « objet » arithmétique qu'est le continu numérique du corps \mathbb{R} des nombres réels (coupures de Dedekind – années 1870).

Au passage, pour relever le désespoir arithmétique des Grecs, il a fallu plus de deux millénaires !

Importance de se rappeler cette échelle temporelle dans les grandes pensées collectives de l'humanité, échelle qui n'a rien à voir avec l'échelle temporelle pour chaque individu (ici mathématicien) qui y contribue !

50 ans d'un côté, 2.000 de l'autre : l'échelle est de 1 à 40 mais il est clair que ces nombres sont incapables de commensurer le sujet mathématicien individuel et le sujet collectif à l'œuvre en arithmétique !

Tout de même qu'une vie individuelle ne se commensure pas monétairement à la valeur salariée de sa force de travail ou aux indemnités qu'il pourra obtenir en cas d'agression destructrice !

Attention donc aux ersatz de commensurabilités !

Entre arithmétique et géométrie

Incommensurabilité

L'antique incommensurabilité entre **arithmétique et géométrie**.

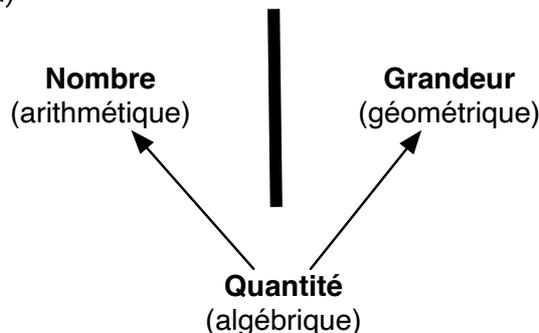
Aristote (*Seconds analytiques*¹⁰) :

« On ne peut pas, dans la démonstration, passer d'un genre à un autre : on ne peut pas, par exemple, prouver une proposition géométrique par l'Arithmétique. » (75a, 39)

Relève

Par l'algèbre !

Cf. Al-Khwarizmi (1020, Bagdad)



¹⁰ qui traitent non plus du syllogisme mais de la démonstration.

Aujourd'hui ?

⇒ Comment l'algèbre contemporaine prend-elle mesure renouvelée de l'antique incommensurabilité entre arithmétique et géométrie ?

En musique

Incommensurabilité

L'incommensurabilité millénaire entre **perception et écriture**

Double excès / double manque :

- quelque chose du son perçu ne s'écrit pas : exemplairement la dimension de fusion sonore propre au timbre – disons que l'écriture musicale « manque » la synthèse timbrale ;
- mais inversement, quelque chose de l'écriture ne se perçoit pas : exemplairement la construction sérielle – disons que la perception musicale « manque » le calcul solfégique.

D'où que la composition de l'art musical marche sur deux jambes en partie (et en partie seulement) incommensurables entre elles (un peu comme les mathématiques marchent sur deux jambes, en partie incommensurables entre elles : l'arithmétique et la géométrie).

On connaît les effets subjectifs de cette incommensurabilité intrinsèquement musicale :

- d'un côté, il y aura les thuriféraires du son qui n'auront de cesse de dénoncer la puissance mortifère du solfège (cette orientation est prédominante chez les postmodernes) ;
- de l'autre, il y aura les partisans du développement musical (composer, c'est développer) qui exalteront la puissance de l'écriture et déclareront que « la perception finira bien par suivre » (cette orientation est prédominante chez les modernistes).

L'enjeu est précisément de continuer d'être moderne sans être ni postmoderne ni moderniste.

Relève

Pour cela, l'orientation me semble de continuer de tenir coûte que coûte qu'une musique composée, c'est un discours musical composé.

Ceci passe bien sûr par le fait de séparer le discours musical des discours langagiers (grecs, Augustin d'Hippone, grégorien...), de ne pas aligner le discours musical sur une logique narrative ou descriptive : le discours musical n'est pas la mise en musique d'un discours existant par ailleurs !

Aujourd'hui ?

⇒ Comment le discours musical prend-il mesure contemporaine de l'incommensurabilité millénaire entre **perception et écriture** ?

En philosophie

Incommensurabilité

L'originelle incommensurabilité qui partage le « il y a » en **ce qui existe** et **ce qui arrive** (« *il n'y a pas que ce qu'il y a* » : « *Il n'y a pas que ce qui existe car il y a aussi ce qui arrive.* »)

Noter : il y a commensurabilité entre ce qui est et ce qui existe (cf. *Logiques des mondes*) car il n'y a pas de fantôme c'est-à-dire d'être-là ou d'étant dont l'existence objective ne soit ancré dans l'être.

Tout étant est être-là et donc commensurable à l'être.

Cf. une algèbre de Heyting est commensurable à la théorie des ensembles !

Il en va autre de l'événement, paradigme de qui arrive, et qui n'est plus commensurable à l'être tel que « mesuré » par la théorie des ensembles : l'événement contrevient à l'axiome de non-autoappartenance.

Relève

Par l'ek-sistence de sujets de vérité ! Il **ek-siste** une mesure de la dissension entre le « **il est** et **il existe** » et le « **il arrive** » ; et cette mesure est le sujet.

Aujourd'hui ?

⇒ Comment les sujets de vérités prennent-ils mesure de l'incommensurabilité du « il y a » en *ce qui existe* et *ce qui arrive* ? Comment ek-sister subjectivement au point où s'avère qu'« *il n'y a pas que ce qu'il y a* » : « *Il n'y a pas que ce qui existe car il y a aussi ce qui arrive.* » ?

Entre hommes et femmes

Amour hétérosexuel

Je vais parler de l'**amour hétérosexuel** (le seul que je pratique) comme je ne parle ici que de **science mathématique** (la seule science que je pratique), d'**art musical** (le seul art que je pratique), de **politique communiste** (la seule politique que je pratique).

Chacun est parfaitement libre d'exhausser, pour son propre compte et en son nom propre, la grandeur d'autres types d'amour, d'art, de science ou de politique ! Il ne doit pas y avoir ici concurrences mais saines émulations.

Incommensurabilité

Il y a entre les deux sexes (divisant l'humanité) une certaine incommensurabilité : tout ne l'est pas mais opère une zone d'incommensurabilité.

Lacan la formalise par incommensurabilité ek-sistentielle des deux quantificateurs \exists et \forall

alors qu'il y en a une commensurabilité formelle via la double négation classique :

$$\forall A \Leftrightarrow \neg \exists (\neg A) \text{ et } \exists A \Leftrightarrow \neg \forall (\neg A)$$

Cette incommensurabilité fait les disputes internes au couple, ces disputes d'autant plus incommensurables qu'elles portent sur des choses quotidiennes a priori insignifiantes.

Relève

Par le bonheur de l'amour !

L'existence d'une part incommensurable entre un homme et une femme donnés ne condamne pas leur relation au contrat marital, alternant, tel l'anarchosyndicalisme, éruptions de colère et négociations de marchands de tapis.

L'amour est tout au contraire ce qui peut seul prendre mesure de cette incommensurabilité (spécifique entre cet homme et cette femme) en l'inscrivant sous le signe du bonheur d'être vraiment Deux (l'écart incommensurable, mesuré au plus près, assure qu'il y a bien un homme et une femme

Amour hétérosexuel

Je parle ce faisant de l'amour hétérosexuel (le seul que je connaisse et pratique) comme je ne parle ici que de science mathématique (la seule science que je pratique), d'art musical (le seul art que je pratique vraiment c'est-à-dire créativement, de politique communiste (la seule politique que je pratique).

Chacun est parfaitement libre d'exhausser, pour son propre compte et en son nom propre, la grandeur d'autres types d'amour, d'art, de science ou de politique ! Il ne doit pas y avoir ici concurrences mais saines émulations !

Aujourd'hui ?

⇒ Comment l'amour hétérosexuel prend-il mesure d'une certaine incommensurabilité entre les deux sexes (divisant l'humanité) sous le signe d'un bonheur partagé, à rebours de la fusion romantique, de la jalousie proustienne ou de l'antique guerre matriarcat/patriarcat ?

En politique

Incommensurabilité

Pas vraiment de monde commun dans l'esclavage et le féodalisme ?

Cf. thèse (*Logiques des mondes* d'Alain Badiou) : ce qui fait monde, c'est l'existence d'une mesure commune quant à ce qu'*exister* et *inexister* y veut dire.

Par contre, le capitalisme introduit la mesure commune, non de la marchandise mais de l'argent.

Mais aujourd'hui apartheid généralisé, « deux poids, deux mesures » cher à l'Occident, disloquant ainsi toute perspective d'un monde commun à toute l'humanité pour profiler la guerre comme étant la seule mesure envisageable des antagonismes actuels ?

Relève aujourd'hui ?

Quels militants pour prendre politiquement mesure de ces incommensurabilités qui aujourd'hui prolifèrent ?
Question d'un communisme de type nouveau

Stratégies mamuphiques ?

Je vais être ici plus bref : il s'agit précisément d'engager le chantier que j'ai ouvert ci-dessus.

Résumons d'abord la proposition.

La succession de trois affirmations vient progressivement éponger le travail du négatif.

Tabulons cela pour nos exemples mathématiques, musicaux et philosophiques.

Négation d'un attribut	Affirmation d'un attribut négatif	Affirmation d'une propriété négative	Affirmation d'un « objet » de type nouveau • rendant compte de l'existence de la propriété négative • et dont l'adjonction révolutionne la situation en l'étendant
$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel	$\sqrt{2}$ est irrationnel	irrationalité de $\sqrt{2}$	le corps \mathbb{R} continu
géométrie non arithmétisable	géométrie inarithmétisable	inarithmétisabilité de la géométrie	l'algèbre
équation non résoluble	équation irrésoluble	irrésolubilité de l'équation	le groupe de solidarité de l'équation
• écriture non perceptible • perception non écrivable	• écriture imperceptible • perception inécrivable	• imperceptibilité de l'écriture	le discours musical de la partition

		• inécrivabilité de la perception	
l'événement (qui <i>arrive</i>) ne relève ni de l'ontologie (de l'être, de ce qui <i>est</i>), ni de la phénoménologie (de l'être-là ou de l'étant, de ce qui <i>apparaît</i>).	l'événement évanouissant.	est	l'éclipse de l'événement
			le sujet saisit cette éclipse comme torsion du « il y a » pour produire une vérité.

Qu'en est-il aujourd'hui ?

Je me contenterai de trois points, un par discipline

Mathématiques contemporaines

Y a-t-il des obstructions endogènes à... la **théorie de l'obstruction** ?

Musique contemporaine

Discours musical contemporain ?

Il bute sur l'obstacle d'un discours **harmonique**, d'une capacité de l'harmonie à faire discours comme pouvait le faire l'harmonie fonctionnelle tonale.

Problème du développement harmonique !

- Le sérialisme n'y pourvoit pas.
Cf. Boulez se moquant de Schonberg qui, une fois la mélodie composée, renvoie le déchet des hauteurs en harmonisation !
- Le spectralisme non plus (même s'il a pour avantage d'autoriser un déploiement harmonique).

Philosophie contemporaine

Qu'en est-il des sujets collectifs ?

Cf. césure entre Sartre et Lacan (sujets individuels) et Badiou (sujets collectifs).

Qu'en est-il du rapport décision/délibération (Sartre) dans les sujets collectifs ?

Qu'en est-il de la dimension « somme » pour un sujet collectif constituant (donc de type « produit ») mais cependant bien constitué d'individus qui auront toujours à se prononcer individuellement pour toute décision importante ?

