

Topos Cohésifs et Figures Génériques de Lawvere : vers une Grande Logique Géométrique Hégélienne

PAR MARTIN GONZALEZ

Séminaire *mamuphi* - 11 janvier 2025

Résumé

Cette séance est la deuxième (voir *mamuphi* le 9 octobre 2021) d'une série consacrée à l'héritage intellectuel de William Lawvere et à son ambitieux programme de développement géométrique de ce qu'il appela "Logique Objective".

Inspiré par le cadre dialectique de Hegel (sans adhérer à l'hégélianisme), Lawvere a consacré près de 45 ans à cette vision. Ses contributions, allant des topos élémentaires et des foncteurs adjoints aux topos cohésifs, ont profondément clarifié les distinctions qualitatives - et de nature géométrique - des topos en tant que « catégories d'espaces » par rapport aux « espaces généralisés ».

En s'appuyant sur des discussions précédentes des opérateurs de négation tels qu'ils apparaissent dans les graphes, cette intervention se concentrera sur la description concrète du topos des graphes, en l'analysant à la fois comme un topos élémentaire et comme un topos de préfaisceaux de Grothendieck sur une simple catégorie de « figures génériques ».

Nous clarifierons ensuite les obstructions de la théorie topos classique pour internaliser la négation co-Heyting en dégageant ce qu'elle a de philosophiquement pertinent (quoique sortant de ce que *Logiques des Mondes* de Badiou partage avec l'entreprise de Hegel). Puis nous clarifierons les obstructions du topos des graphes pour exprimer fidèlement l'idée d'*Aufhebung* que Lawvere construit pour les besoins de son programme. Nous donnerons enfin un aperçu du prochain exposé de cette série, visant à expliquer comment Lawvere a su dépasser de telles obstructions au moyen d'un topos très similaire, celui des graphes réflexifs. Cette exploration, amenant les premiers axiomes pour des topos cohésifs, éclairera la manière dont cet ajustement fait progresser son programme global.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels	3
1.1 Triplets d'adjoints, contradictions et <i>Aufhebung</i> chez Lawvere	3
1.2 Les graphes comme modèle d'une (petite) logique de type nouveau	4
1.3 Une première obstruction et sa pertinence philosophique	8
2 Graphes comme topos de Grothendieck (à la Lawvere)	12
2.1 Graphes comme préfaisceaux	12
2.2 Opérations Toposiques	16
2.3 Classifiant de sous-objets	17
3 Vers une axiomatique de la cohésion - Grande Logique Géométrique	20
3.1 Obstruction du topos des graphes à être une catégorie d'« Être »	20
3.2 Vers une solution : les graphes réflexifs	21
Annexe A Rappels sur la non-internalisabilité de la négation co-Heyting	24

Introduction

Cette deuxième séance d'une série consacrée à l'œuvre de William Lawvere poursuit l'analyse de son ambitieux programme de développement géométrique, qu'il a appelé "Logique Objective" dont la première mention explicite provient de son introduction à l'ouvrage collectif *Toposes, Algebraic Geometry and Logic* :

« Le programme d'investigation des liens entre la géométrie algébrique et la logique « intuitionniste » sous la direction de la forme de dialectique objective connue sous le nom de théorie des catégories a été discuté et avancé lors d'une conférence en janvier 1971 à Halifax, en Nouvelle-Écosse, à laquelle ont participé soixante-dix mathématiciens représentant plusieurs domaines. »

Le travail de ce programme couvre une période de 45 ans, entre 1971 et son dernier article répertorié (2017). Pour donner un ordre de grandeur, dans cette période, Lawvere compte environ 70 publications (sans compter ses revues de livres, entretiens, transcrits d'interventions), desquelles environ 53 concernent directement ce programme. Cela est sans compter ses articles de 1969 *Adjointness and Foundations* et 1970 *Quantifiers and Sheaves* que nous avons étudié de façon intensive lors de la première séance de cette série, et qui en quelque sorte pose les bases réelles sur lesquelles Lawvere propulse son programme et dont nous allons faire quelques rappels dans la suite.

L'objet de cette deuxième séance est de présenter les premiers éléments de contribution à ce programme, et qui se présentent sous la forme d'une intellectualité mathématique cherchant à clarifier la distinction entre « gros » topos et « petit » topos, distinction que Grothendieck avait thématized dans SGA4 sous la forme d'un exercice adressé au lecteur, et dont la résolution lui mériterait une « médaille de chocolat ». Je dis bien intellectualité mathématique en ce que Lawvere interprète, dans une telle distinction, ce qui différencie *qualitativement* un topos comme « espace généralisé » et un topos comme « catégorie d'espaces », acceptions dont la communauté mathématique de l'époque utilisait de façon interchangeable. Mais rapidement Lawvere ira plus loin et développera une interprétation extra-mathématique de cette distinction qui lui fera tenter de cerner mathématiquement le cadre dialectique de Hegel, sans pour autant adhérer à l'hégélianisme.

D'une part, ce qui est remarquable, est que Lawvere cherche à simultanément un cadre interprétatif simple et concret qui modélise ces distinctions (là où l'exercice de Grothendieck restait dans une abstraction bien plus forte), et il trouvera précisément que les topos *graphiques*, c'est à dire ceux dont les objets sont des graphes de différents types (orientés ou pas, consistant uniquement en des boucles sur des points, etc...), sont un cadre à la fois suffisamment riche et simple pour donner ce cadre.

D'autre part, dans notre exposé précédent, on avait aussi beaucoup parlé des graphes, et en particulier de la manière dont les sous-graphes d'un graphe donné modélisaient très naturellement trois types de négations logiques qu'on avait dit *simples* - reliées à la logique classique, intuitionniste et paraconsistante respectivement - et des différentes intrications et itérations de négations que l'on peut définir à partir de ces trois types simples, le tout en essayant de clarifier l'importance intellectuelle qui se joue dans tout cela.

Nous avons ainsi, concernant les graphes, deux directions générales d'interprétation, une de petite échelle concernant cette *petite* logique aux négations intriquées, et une de plus grande échelle reliant le topos des graphes à la lecture de Hegel par Lawvere.

Notre exposé aujourd'hui va donc consister en deux parties, une pour chacune de ces deux directions. Concernant la première, il s'agira de rappeler le fonctionnement logique des négations sur les graphes avec d'avantage de développements des retentissements intellectuels que cela produit.

Concernant cette deuxième direction, Lawvere décrit le topos des graphes en l'analysant à la fois comme un topos élémentaire et comme un topos de préfaisceaux de Grothendieck sur une catégorie de ce qu'il appelle « figures génériques ». On le verra, ceci simplifie énormément la description structurelle de ce topos, avançant ainsi un aspect pédagogique pour un plus grand public que celui consistant les mathématiciens au travail. Mais cette simplification d'exposition va aussi rendre intelligible la manière dont Lawvere cerne la particularité de ce topos parmi d'autres topos graphiques, et en particulier le rapport entre ce topos et un topos de graphes dits « réflexifs », rendra compte de ce cadre interprétatif que Lawvere cherche pour avoir déjà sa « médaille au chocolat » mais aussi pour avancer dans son programme de logique objective vers la compréhension de l'entreprise hégélienne sous une nouvelle lumière, et qui constitue le premier pilier d'une Grande Logique Géométrique.

Au total, les propos dans mon exposé tiennent en les cinq points suivants, dont les trois premiers seront traités en détail cette séance et les deux derniers seront esquissés en guise d'introduction pour la séance prochaine :

1. Les négations doubles, telle qu'exemplifiées sur les graphes, sont philosophiquement (et politiquement) intéressants.

2. Ces graphes forment un topos de Grothendieck Graphe où on peut dessiner très explicitement les opérations toposiques (dont Ω) qui le structurent.
3. Les négations sont des opérations logiques sur les $\text{Sub}(X)$ mais ne s'internalisent pas toutes sur Ω . En un certain sens, les elles sortent du cadre de LdM tout en restant intellectuellement pertinentes pour la philosophie (en particulier celle de Hegel).
4. Pour autant, ce topos Graphe se distingue qualitativement d'autres graphes et s'avère inapte à rendre compte de l'idée hégélienne d'Aufhebung, telle qu'elle s'incarne dans les mathématiques pour Lawvere.
5. Il y a bien des topos de graphes à la fois très similaires à notre topos Graphe et qualitativement distincts. Outre le fait de rendre ainsi compte de la distinction en intellectualité intra-mathématique, entre « espaces généralisés » et « catégories d'espaces », ces graphes sont quant à eux aptes à rendre compte de l'Aufhebung de Lawvere tout en spécifiant, aussi clairement que notre topos de départ, les négations logiques que nous avons trouvé philosophiquement pertinentes

Au total, notre objectif n'est pas de substituer des enjeux mathématiques à des enjeux philosophiques (ou vice-versa) mais de marcher de l'avant dans cette ligne de crête que constitue la proximité discursive entre mathématiques et philosophie. Nous y reviendrons sur ce point en toute fin d'exposé.

1 Rappels

1.1 Triplets d'adjoints, contradictions et Aufhebung chez Lawvere

Reprenons une citation de Lawvere dans *Quantifiers and Sheaves* (1970) :

L'unité des contraires dans le titre est essentiellement celle entre la logique et la géométrie, et il y a des raisons convaincantes de maintenir que la géométrie est l'aspect principal.

Le propos général que nous avons soutenu dans la première séance de cette série se résume en une explication extensive de la citation ci-dessus, tournant autour des points suivants :

- Constituer affirmativement l'autonomie relative d'une intellectualité mathématique au point même ou elle se dote d'une écriture propre - l'écriture catégorielle.
- Constituer une méthode de dialectique affirmative dans cet espace d'intellectualités à la lumière de la notion de paires d'adjoints.
- Fonder un espace possible pour une telle intellectualité mathématique, en créant un concept propre à cette intellectualité: celui de topos élémentaire.

Pour donner forme à cela, nous avons d'abord survolé comment les rapports dialectiques entre notions mathématiques prennent pour beaucoup la forme de paires de foncteurs d'adjoints :

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ \mathcal{E} & \perp & \mathcal{D} \\ \curvearrowleft & & \curvearrowright \\ & R & \end{array} , L \dashv R$$

ce que Lawvere s'est efforcé d'éclaircir tout le long de son activité de recherche. Ensuite, pour refléter une opposition dialectisée entre deux termes - dialectisée au moyen d'un troisième terme - Lawvere tournera son attention vers des configurations spécifiques de triplets d'adjoints

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \curvearrowright & \perp & \curvearrowleft \\ \mathcal{E} & c & \mathcal{D} \\ \curvearrowleft & \perp & \curvearrowright \\ & R & \end{array} , L \dashv c \dashv R$$

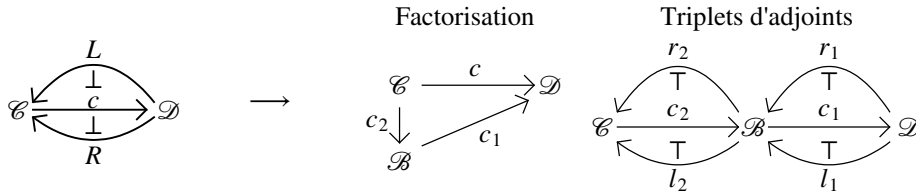
selon que L et R incluent la catégorie \mathcal{D} dans la catégorie \mathcal{C} de façon à la fois identique (les catégories « image » étant isomorphes) et opposée, au vu de leur position dissymétrique dans le triplet d'adjoints telle la manière dont un cercle s'inscrit dans les deux extrémités d'un cylindre¹. Ceci sera formalisé par la condition

$$c \circ L \simeq \text{Id}_{\mathcal{D}} \simeq c \circ R.$$

Un tel triplet d'adjoints est nommé *unité et identité d'adjoints opposés* (UIAO). Ensuite, de la condition ci-dessus, Lawvere tirera que les « contradictions » à l'oeuvre forcément se concentrent sur les endofoncteurs $L \circ c$ et $R \circ c$ de \mathcal{C} , qui se trouvent être à leur tour en position d'adjonction :

$$\begin{array}{c} L \circ c \\ \curvearrowright \\ \mathcal{C} \xrightarrow{\quad} \mathcal{C} \\ \curvearrowleft \\ R \circ c \end{array}, \quad L \circ c \dashv R \circ c.$$

Finalement, Lawvere traduit l'idée de « résolution de contradictions », aussitôt aiguillée au concept hégélien d'Aufhebung, comme le mouvement qui transforme une situation en UIAO en une configuration où ce UIAO se voit factorisé² par une catégorie intermédiaire, le tout prenant la forme d'une suite de deux d'UIAO faisant intervenir cette nouvelle catégorie introduite. Schématiquement : on passe de la configuration de gauche à la configuration à droite ci-dessous



Nous avons ainsi obtenu une première figure d'oppositions dialectiques ainsi que du travail qui s'effectue lors de leur éventuelle résolution. Mais nous avons aussi avancé une deuxième figure d'oppositions, cette fois-ci bien plus élémentaire qui fut introduite par la notion d'algèbre bi-Heyting et de l'exemple des graphes qui illustrent différents types de négations qui s'y trouvent naturellement.

Au total, nous avons donné pour ces deux figures des interprétations intra-mathématiques et extra-mathématiques de façon assez indifférentes l'une pour l'autre dont nous allons revenir pour certains dans cet exposé. Mais éclaircir le lien entre ces deux figures est absolument central pour comprendre l'entreprise de Lawvere : si Lawvere introduit les UIAO et son idée d'Aufhebung d'une façon aussi compliquée, cela provient de façon surprenante comme réponse face à une obstruction fondamentale située sur les négations dans les graphes que nous allons rappeler en détail.

1.2 Les graphes comme modèle d'une (petite) logique de type nouveau

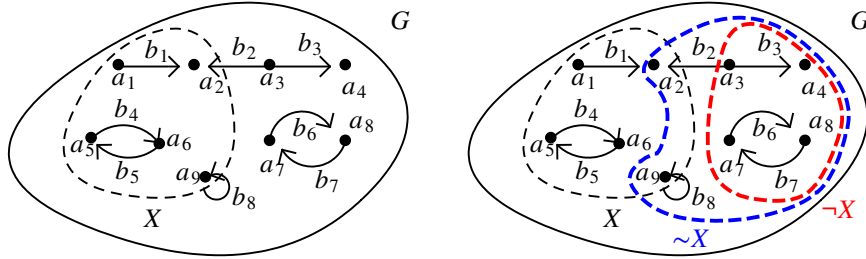
Dans l'exposé du 9 Octobre 2021, nous avons présenté, à partir d'un treillis $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$, deux types de négations non-classiques : une négation *Heyting* $\neg a$ et une co-Heyting $\sim a$ de sorte que $a \wedge \neg a = 0$ (i.e. a et $\neg a$ ne peuvent pas être vrais en même temps) et $a \vee \sim a = 1$ (i.e. a et $\sim a$ ne peuvent pas être faux en même temps).

Reprenons donc l'exemple des graphes en gardant en tête que la question qui va d'abord nous intéresser (avant de revenir sur les questions toposiques) sera celle d'évaluer si le travail aux *doubles négations* $\neg\neg$ et $\sim\sim$ déjà rencontrées est susceptible d'incorporer ce qu'elles *affirment* de l'intérieur même de ce qu'elles nient. Autrement dit, il s'agira d'évaluer si, et dans quelle mesure, ces doubles négations touchent au coeur hégélien de la loi de la « négation de la négation » ou si alors restent-elles, en tant qu'affirmativement productrices, des opérateurs d'entendement, de déterminations non contradictoires. Nous tenterons de clarifier comment elles n'y parviennent pas à s'élever au premier statut à partir du second, et montrerons que le travail d'un nouveau type de *négations doublées* $\neg\sim$ et $\sim\neg$, où se jouent des intrications de négations, y accède bien.

1. Nous renvoyons également à l'exposé *mamuphi* de G. Laplante-Anfossi du 9 octobre 2021 pour une description détaillée de ceci.

2. Cette factorisation doit vérifier une condition technique supplémentaire. Voir Gonzalez, *Lawvere ou l'inauguration d'une intellectualité mathématique de type nouveau*, (2024) article du volume *Romantismes*, à paraître chez Spartacus IDH.

Soit $G = (G_0, G_1)$ un multigraphe orienté avec G_0 comme ensemble de sommets et G_1 comme ensemble d'arrêtes orientées. Un sous-graphe $X = (X_0, X_1)$ de G consiste en sous ensembles de sommets et d'arrêtes tels que si une arrête est X_1 alors ses extrémités sont des sommets dans X_0 . Le bord de X consiste en tous les sommets de X qui sont extrémités d'une arrête dont l'autre extrémité n'est pas dans X_0 . Prenons par exemple le sous graphe $X = \{a_1, b_1, a_2, a_5, b_4, a_6, b_5, a_9\}$ de G comme dans la figure à gauche ci-dessous.



On voit que le complémentaire ensembliste $G - X = \{b_2, a_3, b_3, a_4, b_6, a_7, b_7, a_8, b_8\}$ de X n'est pas un graphe. D'où deux compléments dessinés sur la figure à droite ci-dessus:

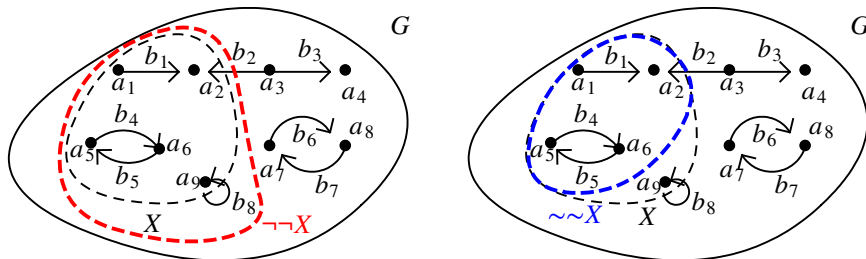
- $\neg X$ le plus grand sous-graphe disjoint de X
- $\sim X$ le plus petit sous-graphe dont la réunion avec X donne G

Ainsi, le bord du graphe est donc $\partial X = X \cap \sim X = \{a_2, a_9\}$, qui est l'ensemble des sommets de X qui sont extrémités d'une arrête dont son autre extrémité n'est pas dans X . La négation Heyting est plus forte que la négation co-Heyting en ce qu'on a toujours $\neg X \leq \sim X$. Remarquons alors que cette notion de bord est bien intrinsèque à X en ce qu'elle s'opère comme une confrontation, au point a_2 , entre la flèche b_1 constitutive de X et la flèche b_2 , qui peut se voir alors comme constituante de $\sim X$. Autrement dit, X et $\sim X$ s'opposent sur deux « fronts » $\{a_2, a_9\}$ là où X et $\neg X$, étant disjoints, ne se confrontent pas.

- La réunion $X \cup \neg X < G$ (ne contient ni b_2 ni b_8) donc \neg ne satisfait pas en général le principe du tiers exclu ;
- L'intersection $X \cap \neg X = \emptyset$ donc \neg satisfait le principe de non contradiction ;
- La réunion $X \cup \sim X = G$ donc \sim satisfait le principe du tiers exclu ;
- L'intersection $X \cap \sim X = \partial X$ définit le bord d'un sous-graphe de manière intrinsèque et, ce bord n'étant pas vide, on en tire que \sim ne satisfait en général pas le principe de non contradiction.

Au total, chacune de ces négations va munir l'ensemble des sous-graphes de G d'une structure d'algèbre de bi-Heyting et les négations $\neg X$ et $\sim X$ ont toujours une frontière non vide pour chacune. Cela est à mettre en rapport avec les algèbres de Boole, où le bord de tout élément est vide. D'ailleurs cette propriété caractérise les algèbres booléennes parmi toutes les algèbres de bi-Heyting.

L'impasse des doubles négations. Le travail des doubles négations $\neg\neg$ et $\sim\sim$ est bien *productif* en ce qu'il a la capacité de déterminer des nouveaux sous-graphes que voici :



Il se passe donc un retournement : là où la mesure de « négativité » des opérateurs simples nous disait que la négation \neg est plus forte que la négation \sim , la mesure affirmative de productivité de toutes les négations intriquées inverse cette force : la négativité de $\sim\sim X$ est plus forte que celle de $\neg\neg X$. En ce sens, le travail des double-négations $\neg\neg X$ et $\sim\sim X$ se fait sur ce qui ne ne saurait se jouer sur leurs bords.

Le sous-graphe $\neg\neg X$ incorpore la flèche b_8 là où le sous-graphe $\sim\sim X$ écarte le point a_9 . Or, aucun des ces deux sous-graphes est bien complémenté: d'une part $(\neg\neg X) \cup \neg X$ n'est pas égal à G et, d'autre part, $(\sim\sim X) \cap \sim X$ n'est pas vide. Ceci appelle donc à renouveler le processus : double-nier $\neg\neg X$ et $\sim\sim X$, en espérant

qu'éventuellement des suites de double-négations produiront des sous-graphes bien complémentés. Mais il n'en est rien. Le travail du processus de renouvellement ne produit rien de nouveau vu que

$$\neg\neg(\neg\neg X) = \neg\neg X, \quad \text{et} \quad \sim\sim(\sim\sim X) = \sim\sim X.$$

Cette entrave relève donc d'une véritable obstruction³ de possibilité à ce que ces opérateurs puissent affirmer en leur altérité l'essence même de ce qu'elles nient. En termes mathématiques, ceci veut dire, pour \neg , que, en plus du fait que $\text{non}\neg X$ n'est pas un graphe, tout objet de la forme :

$$\text{non}(\neg\neg(\neg\neg(\dots(\neg\neg X))))$$

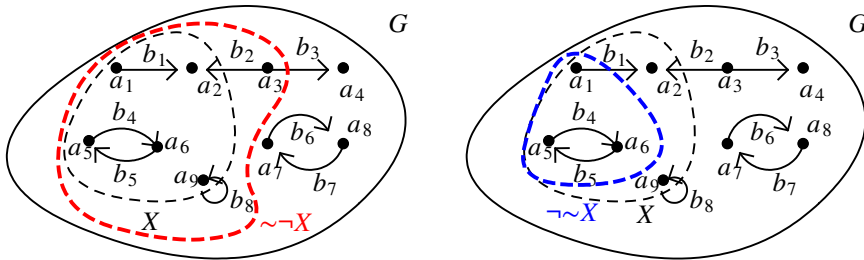
n'est pas un graphe, peu importe la longueur de la chaîne de double-négations. Les doubles négations sont incapables ici de constituer des ensembles complémentaires qui soient bien des *graphes*. Plus spécifiquement, le « front » $\{a_2\}$ n'a aucune évolution - alors que le front $\{a_9\}$ a subi une évolution permettant d'être tranché avec la seule considération des doubles négations.

Négations doublées. Pour avancer sur cette dialectique affirmative aux négations vers la constitution de graphes complémentaires, l'idée est de revenir sur notre travail aux bords et intriquer ces deux négations de deux manières, $\neg\sim$, et $\sim\neg$, donnant à deux nouveaux opérateurs qu'on appellera *négations doublées*. On peut comprendre ces opérateurs comme de « nécessité » et de « possibilité ». Par exemple, la phrase

- « Il est faux que non p » évoque la nécessité de p à partir d'une négation Heyting;
- « Il n'est pas faux que p » évoque la possibilité de p à partir d'une négation co-Heyting. En particulier, un énoncé comme « il n'y a pas que ce qu'il y a », traduisant la possibilité d'un « il arrive », a cette structure.

En visualisant cela sur notre exemple de graphes, on a alors 4 inclusions

$$\neg\sim X \subseteq \sim\sim X \subseteq X \subseteq \neg\neg X \subseteq \sim\neg X$$

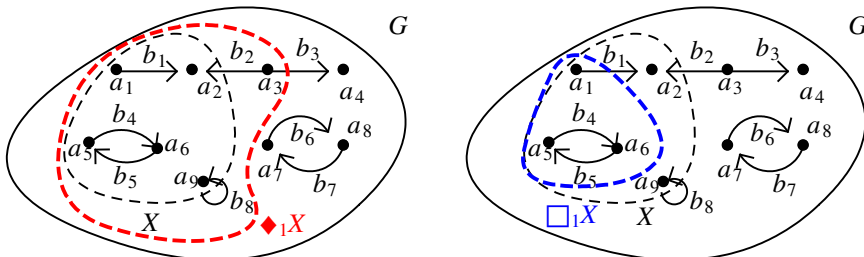


Le point remarquable est que le retournement de négativité, à la base effectué par les double-négations est non seulement *maintenu* mais accentué par les négations doubles. Et plus fondamentalement, les bords commencent à bouger !

Ainsi, nos opérateurs $\neg\sim$, et $\sim\neg$ vont nous permettre de définir par récurrence deux compléments d'objets structurés, tels que les graphes rencontrés, comme suit: on part de $\square_0 = \blacklozenge_0 = \text{Id}$ et tant que nos objets de base ne soient pas bien complémentés, on définit:

$$\square_{n+1} := \neg\sim\square_n \quad \blacklozenge_{n+1} := \sim\neg\blacklozenge_n.$$

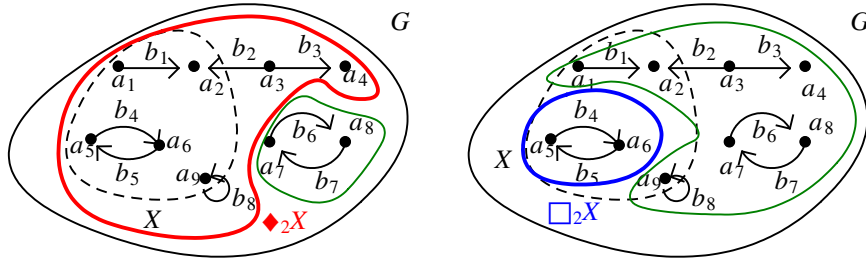
Lorsque l'on tombe sur un objet bien complémenté on s'arrête. Revenons sur notre exemple: le graphe G et son sous-graphe X . La première étape est ensuite celle que nous avons déjà déterminé, $\square_1 X \subset X \subset \blacklozenge_1 X$ où:



3. On entend ici obstruction en ce qu'elle reflète l'idée que ce n'est pas avec des répétitions mécaniques de doubles négations, de critiques de la critique, etc.. qu'on réussit à parvenir à une véritable relève.

Les graphes $\square_1 X$ et $\blacklozenge_1 X$ n'étant toujours pas bien complétés, on continue:

$$\square_2 X \subset \square_1 X \subset X \subset \blacklozenge_1 X \subset \blacklozenge_2 X$$



On remarque que $\blacklozenge_2 X$ et $\square_2 X$ n'ont plus de bord et sont donc bien complétés (les compléments ci-dessus, dessinés en vert, sont à leur tour des sous-graphes de G). La récurrence s'arrête et les deux nouveaux sous-graphes (ici en l'occurrence $\square_2 X$ et $\blacklozenge_2 X$) sont obtenus:

- $\blacklozenge X$, qui est le plus petit sous-graphe complété tel que $X \subseteq \blacklozenge X$ (aussi appelé *possibilité* de X). Il consiste en les éléments de G qui sont accessibles par X .
- $\square X$, qui est le plus grand sous-graphe complété tel que $\square X \subseteq X$ (que Lawvere appellera *nécessité* de X). Il consiste en les éléments de X qui ne sont pas accessibles par l'extérieur de X .

En somme, le travail des négations ici présenté éclaire la nature profonde de la « négation de la négation » chez Hegel, s'il est vrai que « toute négation immanente est, dans son essence, négation de la négation qu'elle est »⁴. La négation de la négation est, en tant que processus, mené à terme précisément quand il s'incorpore à l'opposé. C'est précisément ce qui est gagné au bout de la progression de \square_n et \blacklozenge_n : que le complémentaire finisse par se constituer selon les mêmes bases que celles de ce qu'il complète: qu'il se constitue en graphe. C'est peut-être ça le vrai sens des opérateurs \square et \blacklozenge : il ne s'agit ni d'opter aveuglément pour un camps tenu pour *bon*, ni d'en faire une synthèse naïve pour défendre l'équilibre obtenu entre $\blacklozenge X$ et $\square X$, mais bien d'y voir le surgissement de la graphicalité elle-même dans leurs complémentaires $G - \blacklozenge X$ et $G - \square X$, là où elle était absente dans le complémentaire $G - X$ et même aussi les complémentaires $G - (\neg\neg X)$ et $G - (\sim\sim X)$, aucun n'étant constitué comme graphe. Le travail aux négations doublées est ainsi fondamentalement de type nouveau et se réduplique dans le but de son processus. Il s'agit d'une victoire au lieu même du camps défait, non pas simplement en ce qu'il se voit réduit, circonscrit et contenu, mais en ce qu'il voit surgir en son intérieur l'essence même de ce à quoi il s'opposait⁵.

En quoi alors ce processus d'ensemble est-il dialectique au sens où Lawvere l'entends ? Partant du fait qu'on peut toujours construire les opérateurs \square et \blacklozenge sur une algèbre de bi-Heyting⁶ L . Outre le fait que nos opérateurs ne désignent pas des processus disjoints - il se trouve en effet que \blacklozenge est définissable par \square selon $\blacklozenge = \neg \square \neg$, le fait remarquable est que la progression de ces opérateurs désigne une adjonction - et donc une dialectique - à chaque pas: pour tout entier n , on a une adjonction

$$\blacklozenge_n \dashv \square_n.$$

Au total, nos opérateurs ont comme propriétés⁷ caractéristiques :

$$\begin{aligned} \square &\leq \text{Id} \leq \blacklozenge \\ \square^2 &= \square, & \blacklozenge^2 &= \blacklozenge \\ \blacklozenge &\dashv \square \end{aligned}$$

4. c.f. Lettre d'Alain Badiou à Zlavoj Zizek concernant l'oeuvre de Mao Tsé-Tung.

5. Comment ne pas penser aux propos de Lénine « La dialectique de l'histoire est telle que la victoire du marxisme en matière de théorie oblige ses ennemis à se *déguiser* en marxistes. » (*Les destinées historiques de la doctrine de Karl Marx*, dans *Oeuvres*, 1er mars 1913). Et comment ne pas penser à la politique engagée par Mao aux prémices de la GRCP, s'il est vrai que Mao ait été le créateur d'une politique de la négation de la négation :

- sous sa forme communément connue d'identifier la bourgeoisie dans le Parti, et donc de promouvoir une négation (disparition) dans ce que ce parti se constituait initialement comme négation contre la vieille bourgeoisie ;
- sous une forme plus récemment éclaircie par F. Nicolas, qui a à voir avec la façon spécifique dont les communes populaires chinoises peuvent être pensées comme *négations* des coopératives.

6. En se restreignant à celles dites σ -complètes, propriété dont on ne parlera pas ici.

7. Nous les énonçons ici car elles reviendront sous une forme tout à fait surprenante avec les UIAO.

Cependant, la question capitale qui s'ouvre est celle de déterminer comment ces négations sont normées dans leur apparaître, comment elles se voient disposées dans un cadre logique général ? En ce point, il est remarquable que tant Lawvere comme Badiou font appel à la notion de topos comme espace de possibles auquel une telle logique, jusqu'à maintenant indéterminée dans son réel, doit se subordonner. Pour Lawvere, il s'agira de suivre le réel de la pratique mathématique et pour Badiou il s'agira de rendre compte d'une *géométrie des vérités*. Et le point surprenant que nous allons développer est que la structuration toposique de telles situations se voit rapidement obstruée par le fait que la négation co-Heyting n'est pas fonctorielle sans simultanément être triviale (c'est à dire sans que l'algèbre $\text{Sub}(G)$ des sous-graphes de tout graphe G soit simultanément une algèbre de Boole).

1.3 Une première obstruction et sa pertinence philosophique

Il se trouve que l'exemple des graphes constitue un topos de Grothendieck qui en plus est bi-Heyting : l'algèbre $\text{Sub}(G)$ des sous-graphes de tout graphe G , qui est déjà de Heyting, est aussi co-Heyting (et donc bi-Heyting⁸). On serait alors tentés de prendre cette occasion pour donner un premier cadre interprétatif à ces trois négations en les reliant sous différentes⁹ formes à trois formes de contradictions *politiques* : celles au sein du peuple, celles entre adversaires et enfin celles entre ennemis.

Je ne développerai pas à ce stade *aucune* de ces interprétations car il s'avère que le programme d'ensemble est mis en péril par un problème de fonds le remettant plus profondément en question : la négation de co-Heyting n'étant pas fonctorielle, fait obstruction à la possibilité de l'intégrer activement dans le vaste programme toposique Badiouien et par conséquent aussi les négations mixtes. Par exemple, si on prends le morphisme de graphes

$$f: X = \{\bullet_a \quad \bullet_b\} \hookrightarrow Y = \{\bullet_a \rightarrow \bullet_b\},$$

alors le sous-graphe $\{\bullet_a\}$ n'est pas bien complété et il en résulte que $\blacklozenge\{\bullet_a\} = Y$ et donc $f^*\blacklozenge\{\bullet_a\} = X$. D'autre part, $f^*(\{\bullet_a\}) = \{\bullet_a\}$ est bien complété dans X et donc $\blacklozenge f^*(\{\bullet_a\}) = \{\bullet_a\}$.

Rappelons que, donné un topos \mathcal{E} avec Ω classifiant de sous-objets, pour tout objet X du topos, les opérations

$$\wedge_X, \vee_X, \rightarrow_X: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \times \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \longrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \quad \neg_X: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \longrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$$

déterminent $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ comme algèbre de Heyting. Si \mathcal{E} est un topos de bi-Heyting, le treillis des sous-objets $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ pour tout objet X de \mathcal{E} est une algèbre de bi-Heyting dont la négation est déterminée par

$$\sim_X: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \longrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X).$$

Le point à retenir est que cette structure est *externe* à \mathcal{E} en ce qu'elle dépend de ce qu'*ensemble* $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ veut dire. L'*internalisation* de ces opérateurs sera possibilisé exactement par le caractère fonctoriel de ces derniers: les associations $X \mapsto \wedge_X, \vee_X, \rightarrow_X, \neg_X$ sont toutes fonctorielles. Prenons par exemple $X \mapsto \neg_X$, ceci veut dire que pour toute flèche $f: X \rightarrow Y$ de \mathcal{E} , et tout sous-objet $B \in \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ on a, en notant la flèche *pullback* induite $f^*: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(Y) \longrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$, la relation

$$\neg_Y f^*(B) = f^*(\neg_X B).$$

8. Cette notion sera introduite en 1991. Dans de tels topos : les sous-objets représentent des propositions locales; l'inconsistance d'un paradoxe est locale et peut être circonscrite tout en gardant le réseau rationnel d'inférences.

9. Les modèles des graphes et des ouverts et fermés d'un espace topologique engendrent des topos fondamentalement différents quoique tous deux bi-Heyting, et une interprétation générale portant sur « tous les topos bi-Heyting » peut rapidement induire à l'équivoque dépendant de si on prends comme modèle d'interprétation l'exemple topologique ou l'exemple des graphes.

Pour donner un exemple concret, interpréter ici différents types de contradictions (au sein du peuple, entre adversaires et antagoniques) :

- en prenant comme modèle interprétatif celui des graphes, ce qui fait « frontière » entre X et $\sim X$ est précisément une flèche connectant ces deux graphes (et non pas la totalité d'une patatoïde déterminant le graphe X). A la lumière de ce que nous avons exposé, il semblerait alors naturel d'interpréter cela en disant que la négation co-Heyting traite des contradictions antagoniques (et par conséquent la négation Heyting celle des contradictions au sein du peuple) ;
- en contrepartie, en prenant comme modèle interprétatif celui des ouverts et fermés, l'assignation d'une « frontière » est immédiatement interprétée à l'image de frontières entre pays. Il s'en suivra que selon ce cadre, les contradictions au sein du peuple se verront représentées par la négation co-Heyting, celles entre adversaires par la négation Heyting et celles qui sont antagoniques par les négations classiques. Cela suit d'ailleurs la force de « négativité » de chaque négation.

Un résultat général montre qu'il y a une correspondance bi-univoque entre morphismes *internes* $\varphi: \Omega^n \rightarrow \Omega$ et foncteurs *externes* $\phi: \text{Sub}_{\mathcal{G}}(X)^n \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{G}}(X)$ selon lequel les opérations $\wedge_X, \vee_X, \rightarrow_X, \neg_X$ vont se voir internalisées en des morphismes non assujettis à quelque formalisme ensembliste préalable

$$\wedge_{\mathcal{G}}, \vee_{\mathcal{G}}, \rightarrow_{\mathcal{G}}: \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega \quad \neg_{\mathcal{G}}: \Omega \longrightarrow \Omega.$$

Concrètement, la non functorialité de la négation co-Heyting nous dit qu'il n'y a pas et ne saurait y avoir un morphisme

$$\sim_{\mathcal{G}}: \Omega \longrightarrow \Omega$$

structurant à son tour le classifiant de sous-objets comme algèbre de bi-Heyting (non triviale). Immédiatement alors, il en va de même que les opérateurs

$$\blacklozenge_X, \square_X: \text{Sub}_{\mathcal{G}}(X) \longrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{G}}(X)$$

ne sauraient se traduire en endomorphismes de Ω .

Il en résulte que cette théorie des topos bi-Heyting, bien que philosophiquement pertinente s'il est vrai qu'elle éclaire le vrai sens de la loi hégélienne évoquée, a des conséquences intellectuelles majeures, et précisément sur ce que *Logiques des Mondes* (LdM) de Badiou partage avec l'entreprise de Hegel telle que lue par Lawvere. Revenons en premier lieu sur la façon dont Badiou présente ce partage dans LdM :

“Ce qu'on doit accorder à Hegel se dit en deux points.

- 1) La négation d'un phénomène ne saurait être son anéantissement. Il faut que cette négation soit elle-même phénoménale, ou du phénomène. Il faut qu'elle touche à l'apparaissant de l'apparaître, à son existence, et non qu'elle s'accomplisse comme simple suppression de son être. Hegel voit dans la positivité de la loi du phénomène la négation intra-mondaine. Je propose certes un tout autre concept, celui de l'envers d'un étant-là. Ou plus exactement: l'envers d'un degré transcendantal d'apparition. Mais nous nous “accordons sur la réalité affirmative de la « négation », dès lors qu'on opère selon une logique de l'apparaître. Il y a un être-là de l'envers, comme de la loi. Loi et envers n'ont guère à voir avec le néant.
- 2) La négation phénoménale n'est pas classique. En particulier, la négation de la négation n'équivaut pas à l'affirmation. Pour Hegel, la loi est négation du phénomène, mais la négation de la loi ne redonne nullement le phénomène. Cette seconde négation, dans la Science de la logique, ouvre en fait au concept d'effectivité.”

Retenons des propos de Badiou que c'est sur la base des considérations sur les négations que leurs philosophies sont mises en partage. Cela nous permet de faire un autre rapprochement, concernant le retour de philosophie de Badiou sur l'une de ses conditions - en l'occurrence ici la politique. Autrement dit, à interpréter politiquement nos négations co-Heyting (peu importe sous quelle fonction assignée), le seul bilan possible à en tirer ici est qu'une politique mobilisant activement ces trois types de contradictions *déborde*¹⁰ en immanence tout monde au sens de Badiou : il n'y a pas, et il ne saurait y avoir, un « revers co-Heyting », dual à ce que Badiou appelle *revers d'un élément*, i.e. *d'un degré, de l'objet central* (i.e. *du classifiant de sous-objets*) *T d'un topos*. Pour le dire autrement dans le langage de Badiou, la négation co-Heyting, et les négations mixtes \square et \blacklozenge , ne sont pas *centrables*¹¹.

Et le point subtil ici est que ce bilan est fait non pas sous le signe d'une incompatibilité mais celui d'un dépassement immanent : les topos de bi-Heyting ici exemplifiés *restent* topos de Grothendieck mais introduisent cette nouveauté que l'opérateur \sim existe bien pour chaque « espace » $\text{Sub}(G)$ des sous-graphes d'un graphe *donné*, mais ne s'internalise pas en un endomorphisme $T \rightarrow T$ du transcendantal d'un monde. Par conséquent, les mouvements en eux-mêmes produisant ces existants particuliers que sont les négations co-Heyting et mixtes sont en quelque sorte « transcendentale^{ment} inindexables ».

Cependant, pris dans leur détermination finale, à la fois \square et \blacklozenge donnent des sous-objets bien complétés et donc transcendentale^{ment} inindexés là où aucune étape de leur « processus d'advenue à l'existence » ne semble l'être ! Pour revenir à la philosophie de Badiou, c'est bien ceci qui se joue si l'on suit ses propos:

10. La mathématique (voir l'Appendice) nous dira même que corrélativement, nos opérateurs modaux sont functoriels exactement quand ils se réduisent à la négation classique, et donc que tout monde au sens de Badiou trivialise la politique telle que thématisée ici.

11. On reprends ici le vocabulaire de Badiou, *Topos* (2024): « centrabilité » étant interchangeable avec notre notion d'internalisabilité.

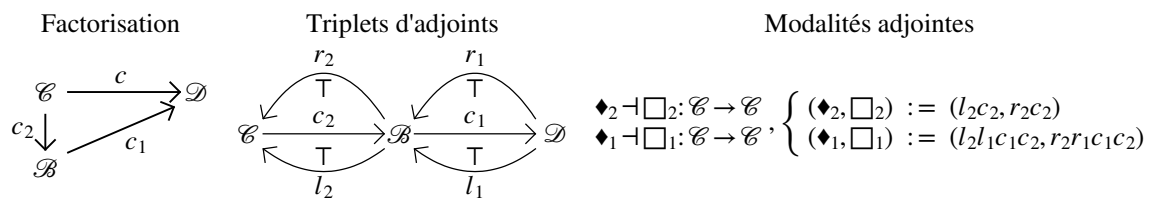
L'élan matérialiste de ma propre pensée (mais aussi bien, paradoxalement, de celle de Hegel, comme le remarquait Lénine dans ses Cahiers) provient de ce que le sujet y est une construction tardive et problématique, et nullement le lieu de la solution d'un problème de possibilité ou d'unité (possibilité de la certitude intuitive pour Descartes, des jugements synthétiques a priori pour Kant).

Le transcendantal dont il s'agit dans ce livre est de loin antérieur à toute constitution subjective, car il est une donnée immanente des situations quelconques. Il est, comme on le verra, ce qui impose à toute multiplicité située la contrainte d'une logique, qui est aussi la loi de son apparaître, ou la règle par quoi le « là » de l'être-là fait advenir le multiple comme essentiellement lié. Que tout monde possède une organisation transcendantale singulière revient à ceci que la pensée de l'être ne pouvant, à elle seule, rendre raison de sa manifestation, il faut que l'intelligibilité de cette manifestation soit rendue possible par des opérations immanentes. « Transcendantal » est le nom de ces opérations. La maxime finale se dira : au regard de l'inconsistance de l'être, « logique » et « apparaître » sont une seule et même chose.

Et c'est précisément au titre de l'écart microscopique et évanescent mais non nul entre logique et apparaître, que semble indiquer l'obstruction que nous avons signalé, qu'il convient d'éviter une interprétation intellectuelle extra-mathématique prématurée de ce que nous venons d'exprimer, pour se prémunir de l'égarement qui peut se produire en conséquence - du moins pour celui qui cherche à faire opérer ces négations à l'ombre philosophique d'une logique de l'apparaître en contraste avec Hegel.

Vers une relève de cette obstruction.

En revenant au problème des opérateurs \square et \blacklozenge , il s'avère qu'une *relève* de cette obstruction par le haut est déjà disponible, car il s'avère qu'à être définis non pas comme des morphismes d'objets d'un topos mais comme des foncteurs *entre topos*, la fonctorialité de ces opérateurs réapparaîtra bel et bien et, plus surprenant, sous une forme qu'on connaît déjà : il ne s'agit de rien d'autre que de nos modalités adjointes, construites à partir d'une suite de triplets d'adjoints réalisant un *Aufhebung*¹² !



Ainsi, si nos catégories ci-dessus sont des topos de préfaisceaux, selon un développement mathématique qu'on développera dans la prochaine séance, les opérateurs modaux ainsi obtenus s'internalisent bien en des morphismes de classifiant de sous-objets.

On retiendra ainsi comme pour toute obstruction, que nous sommes face à une décision :

- soit on abandonne l'attente que nos opérateurs de négation mixte \square et \blacklozenge soient fonctoriels (et on abandonne donc l'idée qu'ils s'internalisent en endofoncteurs du classifiant de sous-objets) pour mieux préserver l'inéquivoque de leur logique ;
- soit on abandonne leur universalité, et donc faire de \square et \blacklozenge des opérateurs qui se jouent toujours entre deux catégories, une jouant le rôle de repos, et l'autre étant un théâtre de changement. On pourrait caractériser cette voir comme étant Aristotélicienne : elle affirme que le changement est toujours relatif à un standard de repos. Dans ce cas, les opérateurs \square et \blacklozenge s'internalisent sous une forme plus technique, qui sera présentée dans le suivant exposé. On peut tout de même avancer que leurs propriétés caractéristiques

$$\begin{array}{c} \square \leq \text{Id} \leq \blacklozenge \\ \square^2 = \square, \quad \blacklozenge^2 = \blacklozenge \\ \blacklozenge \dashv \square \end{array}$$

¹². Il est curieux que Lawvere ne semble pas explicitement relier une telle relève à une telle obstruction, alors qu'il le fera (dans son vocabulaire) pour la deuxième obstruction que nous présenterons dans la suite.

s'identifient à celles satisfaites par les opérateurs de négation mixte.

Il devient alors indispensable de voir comment ce dilemme se joue sur l'exemple des graphes pour mieux le comprendre, et donc de déterminer le plus soigneusement possible le fonctionnement de ce topos.

Reste alors à déterminer comment Lawvere s'approprie de l'exemple du topos des graphes (indépendamment de la question des négations ci-dessus). Lawvere écrit, pour sa part, dans son article de 1989 *Display of graphics and their applications, as exemplified by 2-categories and the Hegelian «taco»* :

Nous associons un treillis distributif bien défini qui est lui-même une application standard et qui peut être considéré comme constitué de « dimensions » raffinées en ce qu'il paramètre tous les rangs dans une analyse hégélienne du topos de toutes les applications ; à travers ce treillis distributif, il y a une séquence ascendante bien définie, obtenue par le processus hégélien de « résolution d'une unité d'opposés par la suivante » ; la longueur de cette séquence est la dimension géométrique de la disposition dans nos nombreux exemples.

Ce qui est particulièrement frappant, c'est que l'analyse hégélienne de tout topos s'avère impliquer des monoïdes graphiques qui sont en fait des bicatégories. [...] Bien que proposée il y a près de 200 ans, la méthode hégélienne d'analyse a été largement sous-utilisée depuis lors ; des affirmations idéologiques « conflictuelles » soit selon lesquelles elle est incohérente, soit qu'elle est trop merveilleusement fluide pour être rendue mathématique ont conspiré pour empêcher son enseignement à grande échelle. Nous pensons que nous avons démontré, par des exemples modestes, qu'elle est cohérente (et non triviale) et qu'une grande partie de la méthode devrait être rendue mathématique, ce qui aiderait ceux qui veulent sérieusement l'utiliser, même la partie qui reste fluide.

Nous développerons dans la deuxième partie de cet exposé ce que Lawvere appelle ici « monoïdes graphiques », et qui revient à la considération d'une catégorie finie de « figures génériques » et ce qu'il appelle « application » et qui correspond à la notion mathématique de pré-faisceau.

Il est remarquable que Lawvere propose de saisir l'entreprise de hégélienne de son intérieur en oeuvrant avec le langage propre à Hegel. Dans notre exposé de 2021 nous avons clarifié comment Lawvere saisit le « processus de résolution d'unité d'opposés par la suivante » à partir des suites de triplets d'adjoints en position d'UIAO. Ce que Lawvere requiert pour un tel topos c'est d'être le terrain pour déployer des *Aufhebung* : d'être porteur d'une chaîne ascendante de sous-topos où un sous-topos d'étape donnée résout les contradictions à l'oeuvre dans celui de l'étape précédente. Et ces résolutions de contradictions vont précisément être déterminées par des opérateurs *modaux*, à leur tour donnés par des UIAO successifs, et dont les sous-topos concernés sont donnés par des faisceaux selon une topologie de Grothendieck donnée, à l'intérieur d'une catégorie de préfaisceaux. Il s'en suit un énorme parcours intellectuel reliant cette « négation de la négation » repérée dans les graphes¹³ et le concept d'*Aufhebung*.

D'autres éléments de langage qui ne passent pas inaperçus :

- il s'agit dans cet article de saisir les spécificités des topos de graphes de différents types dans leur ensemble par rapport à leur lien extérieur entre eux et celui avec le topos des ensembles - d'où qu'il convoque la notion de « disposition », qui marque le rapport d'une chose à son extériorité et qui constitue sa qualité globale ou déterminité ;
- il s'agit aussi de regarder la structure interne de ces topos - d'où qu'il convoque la notion d'analyse, qui pose les différences au sein de l'universel ;

L'article en question avancera d'avantage de notions « hégéliennes » que nous ne présenterons pas ici en détail. De cette citation on prendra acte qu'il est de l'avis de Lawvere que si nous allons prendre le topos des graphes comme modèle interprétatif, il faut absolument déjà l'explorer dans ses moindres détails et de la façon la plus claire possible¹⁴. Et ce faisant, nous allons rencontrer une deuxième obstruction (qui s'avérera être en fait un obstacle), nous disant que ce topos de graphes particuliers que nous avons considérés est *incompatible* avec le processus dialectique d'ensemble tel que Lawvere le détermine avec sa formalisation mathématique du concept d'*Aufhebung*.

13. Non réclamée par Lawvere directement mais interprétée comme telle dans Gonzalez, *Lawvere ou l'inauguration d'une intellectualité mathématique de type nouveau*, (2024) article du volume *Romantismes*, à paraître chez Spartacus IDH.

14. Ce travail étant souvent bien plus connu et développé dans l'exemple topologique, nous n'allons pas le présenter ici.

Avant de passer à la présentation du topos des graphes, soulignons que Lawvere et Badiou se mesurent à Hegel en convoquant tous deux les topos. Concernant Badiou ceci se lit dans LdM :

“Le compagnon « historique » du présent livre est Hegel, penseur par excellence de la corrélation dialectique entre être et être-là, entre essence et existence. C'est à sa *Science de la logique* qu'ici nous nous mesurons.” (LdM p.110)

Cependant, ils approchent Hegel dans un parcours en quelque sorte inversé. Là où Lawvere se prête à l'exercice de saisir mathématiquement Hegel de son intérieur, Badiou va en sens inverse comme il l'explique :

“*Logiques des mondes* est à *L'Être et l'événement* ce que la *Phénoménologie de l'esprit* de Hegel est à sa *Science de la logique*, et ce, bien que les ordres chronologiques soient inversés : une saisie immanente des données de l'être-là, un parcours local des figures du vrai et du sujet, et non une analytique déductive des formes de l'être.” (LdM p.16)

Dans la suite de cet exposé nous poursuivrons le parcours original de Lawvere tout en gardant comme perspective de développer plus attentivement cette étude des liens entre Lawvere et Badiou concernant Hegel dans un futur exposé.

2 Graphes comme topos de Grothendieck (à la Lawvere)

Pour Lawvere, ce qui se joue dans la particularité du topos des graphes est fondamentalement la question de la possibilité d'un modèle concret reflétant ce qu'il appelle *logique objective*. Il est ainsi écrit dans l'introduction de son article *Tools for the advancement of Objective Logic: Closed Categories and Toposes* :

La thèse est que le développement explicite et adéquat de la science de la connaissance nécessitera l'utilisation de la théorie mathématique des catégories. Même de l'intérieur l'expérience mathématique, seule cette théorie a approché un modèle *particulier* du général, suffisant comme fondement pour une explication *générale* de tous les particuliers. Née il y a 50 ans des besoins de la géométrie, la théorie des catégories a développé des notions telles que foncteur adjoint, topos, fibration, catégorie fermée, 2-catégorie, etc., afin de fournir :

(1) Un guide pour les complexes, mais très non arbitraires, constructions des concepts et de leurs interactions qui découlent de l'étude d'espace et de quantité.

Ce n'est que l'adhésion implacable aux besoins de ce sujet de base qui a rendu la théorie des catégories si bien déterminée et pourtant si puissante. Lorsque certaines écoles de théorie des catégories se sont égarées, c'est généralement parce qu'elles ont trop longtemps négligé cet objectif spécifique d'une meilleure étude [des notions] d'espace et de quantité, ou parce qu'elles ont ossifié une détermination partielle de ce qu'espace et quantité sont. Si nous remplaçons « espace et quantité » dans (1) ci-dessus par « tout objet d'étude sérieux », alors (1) devient ma définition de travail [working definition] de *logique objective*. Bien sûr, lorsqu'ils sont pris dans un sens philosophiquement approprié, l'espace et la quantité imprègnent tout domaine d'étude sérieux.

Retenons de cette citation très marquante que Lawvere étudie les notions d'espace et de quantité en *intellectualité mathématique* : il le fait en situant cet étude dans un contexte historique où il cherche à se prémunir contre le danger d'un égarement intellectuel qu'il caractérise sous deux formes, selon que l'on nie l'objet d'étude ou alors on fige une conception de ce qu'il cherche à étudier. Voyons maintenant comment il travaille ces notions au moyen du topos des graphes.

2.1 Graphes comme préfaisceaux

Le but de cette section sera d'exhiber la catégorie Graphes des graphes comme topos de Grothendieck. Pour y arriver on pourrait d'abord vérifier un à un les axiomes de Giraud pour cette catégorie, ce qui ne saurait avoir un rôle clarificateur que pour un mathématicien professionnel. Une autre alternative serait de l'exhiber comme topos élémentaire pour ensuite déduire des propriétés supplémentaires, mais le manque d'exemples concrets et l'axiomatisation des topos élémentaires ne saurait immédiatement clarifier d'avantage.

Lawvere¹⁵ nous proposa à partir de 1989 une sortie de cette impasse en proposant un *fil conducteur* consistant à introduire le topos de Grothendieck Graphes comme catégorie de préfaisceaux¹⁶ $\text{PSh}(\mathcal{C})$ en prenant \mathcal{C} comme la plus simple catégorie possible de sorte que :

- tout graphe puisse être pensé comme « récipier », et réalisé par recollements à partir des objets de \mathcal{C} , objets qui viendront donc être nommés « figures génériques » ;
- les topologies de Grothendieck ne jouent pas un rôle déterminant pour la compréhension de cet exposé.

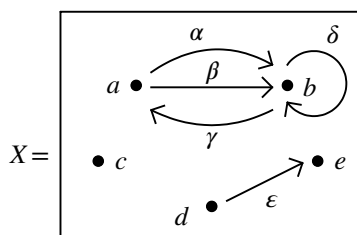
Les avantages de cette approche se manifesteront assez vite par la simplicité des catégories en jeu et la richesse des théories qu'elles engendrent¹⁷.

Si bien l'exploration mathématique menant à découvrir cette catégorie \mathcal{C} de figures génériques étant passionnante, nous allons dans cet exposé la donner d'emblée, avec une rapide heuristique préalable.

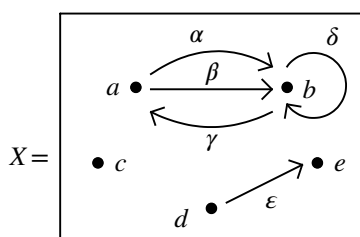
Posons que tout graphe peut-être obtenu par recollements divers de deux *figures génériques* qui sont le *point* V et la *flèche* A



Par exemple, le graphe X ci-dessous consiste en 5 V -figures, notées a, b, c, d, e , et 5 A -figures, notées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$:



Bien entendu, cela est insuffisant pour décrire complètement ce graphe. Pour ce faire, on va *extraire* les sources et cibles des flèches pour en produire un plan de recollement reflétant les relations d'incidence du graphe, et qui vont se formaliser comme des *actions à droite* où $\alpha.s = a$ se lit « la source de α est a »



Relations d'incidence = actions à droite par s et t :

($\alpha.t$ se lit « la cible de α »)

$$\begin{aligned} \alpha.s &= \beta.s = \gamma.t = a \\ \alpha.t &= \beta.t = \gamma.s = \delta.s = \delta.t = b \\ \epsilon.s &= d \\ \epsilon.t &= e \end{aligned}$$

Nous construisons la catégorie \mathcal{C} des figures génériques pour les graphes comme suit. Tout graphe consiste en un ensemble V de sommets et A de flèches (vertex et arrow en anglais respectivement). Nous allons interpréter cela en disant que dans notre catégorie \mathcal{C} il y a deux objets, V et A , un pour chaque type de forme. Si on regarde une flèche $\alpha: a \rightarrow b$ comme graphe G , alors nous dirons que G possède exactement une A -figure (la flèche α) et deux V -figures (les sommets a et b). Ensuite, l'extraction s de la source a , et t de la cible b nous donne deux morphismes $A \rightarrow V$. Rappelons que la catégorie des ensembles Sets est identique à la catégorie des faisceaux sur un point. Or le point subtil est que nous cherchons à caractériser les graphes comme foncteurs $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$, donc dans \mathcal{C} nous allons définir les morphismes « extraction de la source et de la cible » comme des morphismes $s, t: V \rightarrow A$. Enfin, un sommet pouvant être considéré comme

15. c.f. Lawvere, *Qualitative Distinctions Between Some Toposes of Generalised Graphs*, Contemporary Mathematics n.92 (1989).

16. Nous allons considérer, pour une catégorie petite \mathcal{C} , la catégorie $\text{PSh}(\mathcal{C})$ des foncteurs contravariants $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$ (et des transformations naturelles entre ceux-ci).

17. Une fois le topos Graphes ayant été présenté, nous allons le mettre en rapport avec un autre topos RGraphes, des graphes dits *réflexifs*, qui sera à son tour rapidement appréhendable à partir du premier et selon le même fil conducteur.

un graphe avec aucune A -figure et une V -figure, nous constatons que A et V peuvent être interprétés à leur tour comme « graphes ». En ajoutant les morphismes identité pour chaque « figure générique » V et A (dont la dénomination sera expliquée dans la suite), notre catégorie est complètement décrite :

$$\mathcal{C} = \text{id}_V \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \dashrightarrow \\ \curvearrowleft \end{array} V \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} A \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \text{id}_A .$$

Les objets V et A de \mathcal{C} seront appelées « figures génériques » pour Graphes au sens où tout graphe peut être reconstruite à partir des figures V et A et de *relations d'incidence*¹⁸ qui peuvent être transcrites comme une *action à droite* de \mathcal{C} sur un ensemble S qui se voit donc décomposé en une partition paramétrisée par les objets de \mathcal{C} .

Ainsi, le graphe X peut être construit par *recolléments* de figures génériques dont la logique suit ces relations. De façon plus suggestive, ces actions peuvent être vues de façon diagrammatique. Par exemple,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ s \uparrow & \dashrightarrow & \nearrow \\ V & & \end{array} \quad \alpha.s = a \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ t \uparrow & \dashrightarrow & \nearrow \\ V & & \end{array} \quad \alpha.t = b$$

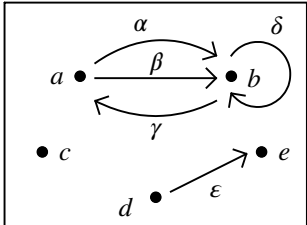
Les flèches en pointillées expriment ici la différence entre X , vu ici comme pré-faisceau, et A et V comme objets de \mathcal{C} . Le Lemme de Yoneda¹⁹ nous permettra d'assurer que ces flèches traduisent en réalité les morphismes de préfaisceaux (dont le Lemme assure la correspondance bi-univoque):

$$\begin{array}{ccc} h_A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ h_s \uparrow & & \nearrow \\ h_V & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} h_A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ h_t \uparrow & & \nearrow \\ h_V & & \end{array}$$

Tout de même, nous garderons la notation $\sigma: F \dashrightarrow X$, pour F figure générique de \mathcal{C} , pour souligner l'aspect « extraction d'une F -figure de X », ou encore « $\sigma \in_F X$ » favorisant l'intuition que σ appartient au *réceptif*²⁰ au niveau F dans le « \mathcal{C} -ensemble X ». Ainsi, le point de vue « préfaisceau » pour le graphe X consiste à le penser comme « réceptif »: ici en l'occurrence, celui à deux niveaux (un pour V et un autre pour A):

$$\frac{V \dashrightarrow X}{a, b, c, d, e} \quad \frac{A \dashrightarrow X}{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon} \quad + \text{ diagrammes commutatifs}$$

Au total, le tableau suivant récapitule les trois vues présentées ci-dessus :

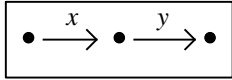
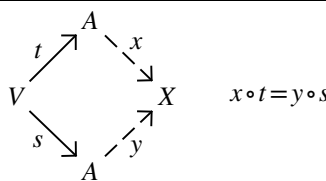
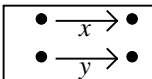
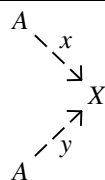
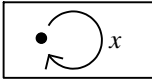
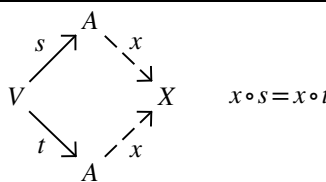
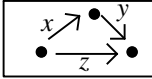
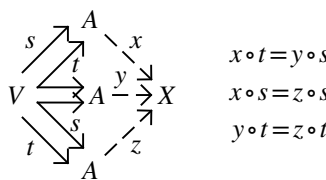
Graphiquement	Algébriquement	Catégoriquement
X	$X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{array} X_0$	$V \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} A$
	$X_1 = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \}$ $X_0 = \{ a, b, c, d, e \}$ + relations d'incidence : $u(\alpha) = u(\beta) = a, \dots$	V -figures A -figures $\frac{V \dashrightarrow X}{a, b, c, d, e}$ $\frac{A \dashrightarrow X}{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon}$ + diagrammes commutatifs

18. Le lecteur non mathématicien pourra consulter préalablement le livre de Lawvere et Schanuel *Conceptual Mathematics* pour une présentation complète du fonctionnement des graphes. Le lecteur mathématicien, non familier avec les concepts fondamentaux des catégories dont nous faisons usage, pourra consulter le livre de Reyes, Reyes et Zolfaghari, *Generic Figures and their glueings*, Polimetrica, corso Milano 26, Monza (MI), 2004.

19. En sa version covariante, réalisant un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C}); F \mapsto h_F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, F)$. Il nous permet en particulier de penser toute figure générique comme préfaisceau.

20. Un objet X de $\text{PSh}(\mathcal{C})$ peut être considéré comme une *action à droite* de \mathcal{C} sur un ensemble S qui se voit donc décomposé en une partition paramétrisée par les objets de \mathcal{C} .

Le point de vue « préfaisceau » nous dit que ces diagrammes commutatifs qui permettent de reconstruire totalement un graphe ! Donnons quelques exemples qui nous serviront dans la suite :

Graphe	Plan de Recollement
	
	
	
	

Aparté mathématique. Quelques questions formelles apparaissent déjà :

1. Comment savoir quand une catégorie est en réalité une catégorie de préfaisceaux ?
2. Comment déterminer la catégorie de figures génériques d'une catégorie de préfaisceaux ?

La justification mathématique répondant à ces questions est hautement non triviale. Elle fera l'objet de plusieurs articles de Lawvere, depuis 1973 (où il définit la notion de complétion de Cauchy d'une catégorie) et avec des fortes utilisations de SGA4. Une fois cela dégagé, on sera en mesure de montrer que la catégorie \mathcal{C} donne bien notre théorie des graphes vues jusqu'à présent, que les figures génériques V et A sont *exactement* celles nécessaires et suffisantes pour générer tout graphe en suivant un plan de recollements, et finalement que ce plan de recollements (particulièrement subtil au niveau des récipients) suit des principes garantissant qu'il donne ni plus ni moins que les informations²¹ qu'il faut pour dessiner n'importe quel graphe.

En particulier, nous avons vu que la boucle est décomposable en figures génériques selon un plan de recollement. Une des conséquences du formalisme évoqué est que si l'on avait inclut la boucle comme *figure générique* dans \mathcal{C} , nous aurions obtenu un topos tout à fait différent que celui des graphes ! Gardons seulement ici comme idée que dire qu'une figure est générique et dire qu'elle est irréductible ne sont surtout pas des synonymes : *décider* de la généricité d'une figure change de situation²² en sa globalité alors que l'irréductibilité d'une figure se *déduit* à partir des paramètres internes d'une situation.

Poursuite de notre exposé. Nous savons désormais passer des graphes aux préfaisceaux. Mais l'inverse ? Lawvere poursuivra son fil en nous disant que, inversement, on détermine le graphe sous-jacent à un préfaisceau X comme suit :

- Répartissons le récipient X en deux niveaux, un pour chaque figure générique V et A .
- Pour chaque niveau, nous comptons le nombre de morphismes existants dans \mathcal{C} de cible V puis A .

21. Mathématiquement, il faut que les plans de recollement soient en position de *colimite*.

22. Ici « situation » est pris comme nom commun et non relié à la notion de situation *mathématique* telle que donnée par une paire de foncteurs adjoints. Nous verrons plus tard que le topos des graphes se distingue d'autres topos de graphes (dits réflexifs) précisément en ce qu'il se voit mathématiquement situé dans une configuration très spécifique de foncteurs adjoints.

- Pour chaque morphisme de A -figures compté, nous regardons l'action qu'il définit

Commençons donc par les exemples les plus faciles, venus du Lemme de Yoneda qui nous donne exactement les informations nécessaires pour reconstruire le graphe associé aux pré-faisceaux h_V et h_A .

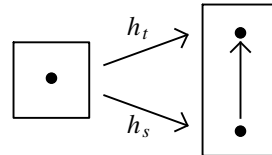
Commençons par h_V . Nous comptons un seul morphisme $V \rightarrow V$ (l'identité) et aucun morphisme $A \rightarrow V$. Enfin, nous traduisons cela en disant que le graphe de h_V consiste donc en une V -figure et zéro A -figures. On récapitule:

$$\frac{\frac{V \dashrightarrow h_V}{V \xrightarrow{\text{id}_V} V}}{\text{une } V\text{-figure}} \quad \frac{\frac{A \dashrightarrow h_V}{A \longrightarrow V}}{\text{pas de } A\text{-figure}} \quad h_V = \boxed{\bullet}$$

Pour h_A , de façon analogue, nous obtenons deux V -figures et une A -figure. Vu qu'il y a une flèche dans h_A , le calcul de ses relations d'incidence (permettant de dessiner son graphe) provient des actions $\text{id}_A \cdot s = s$ et $\text{id}_A \cdot t = t$. On récapitule:

$$\frac{\frac{V \dashrightarrow h_A}{s, t: V \rightrightarrows A}}{\text{deux } V\text{-figures}} \quad \frac{\frac{A \dashrightarrow h_A}{A \xrightarrow{\text{id}_A} A}}{\text{une } A\text{-figure}} \quad h_A = \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet}$$

Remarquons enfin qu'il y a exactement deux morphismes non triviaux : $h_s, h_t: h_V \rightarrow h_A$ de pré-faisceaux :



Ainsi, les actions à droite introduites plus haut vont à leur tour se traduire au niveau des réceptifs via Yoneda, et nous noterons $\bar{\sigma}$ le morphisme dans $\text{PSh}(\mathcal{C})$ correspondant à la F -figure σ (et l'action au niveau des pré-faisceaux) :

$$\frac{\sigma: F \dashrightarrow X}{\bar{\sigma}: h_F \longrightarrow X} \quad \bar{\sigma}(f) = \sigma \cdot f.$$

2.2 Opérations Toposiques

Nous avons jusqu'ici présenté la catégorie Graphes comme catégorie de pré-faisceaux sur une très simple catégorie \mathcal{C} à partir du fil conducteur de Lawvere, c'est à dire à partir de figures génériques et d'un plan de recollement. Ce même fil conducteur nous permet de montrer que de nombreuses opérations toposiques usuelles

- limites : objet terminal, produit, égaliseur, image inverse, pullback ;
- colimites : objet initial, coproduit, co-égaliseur, image directe, pushout ;

sont valables dans Graphes et ont des descriptions tout aussi intuitives que celles déjà présentées (figures génériques et plan de recollement). Là où la théorie des catégories définit ces objets à partir de propriétés universelles, Lawvere s'efforcera de les présenter directement dans la manière particulière dont ils mobilisent les figures génériques en question, ainsi que leur relations d'incidence²³. Nous n'en montrerons ici que trois.

Objet Final. On définit l'objet final $\mathbf{1}$ comme le \mathcal{C} -ensemble ayant exactement une F -figure pour chaque figure générique F (ici en l'occurrence $F = V, A$), avec l'action triviale. Il y a ainsi, pour tout \mathcal{C} -ensemble X , un seul morphisme $X \rightarrow \mathbf{1}$. Il va de soi que le *graphe final* n'est autre que la boucle :



23. Il découlera ensuite mathématiquement que les notions ainsi produites par Lawvere vérifient exactement les propriétés universelles adéquates pour que leur nomination soit cohérente.

Produits. On définit le produit $X \times Y$ de deux \mathcal{C} -ensembles X et Y comme le \mathcal{C} -ensemble dont les F -figures sont des couples (σ, τ) , où σ (resp. τ) est une F -figure de X (resp. de Y), avec l'action,

Décompte de figures	Relations d'incidence
$\frac{(\sigma, \tau): h_F \longrightarrow X \times Y}{\sigma: h_F \rightarrow X, \quad \tau: h_F \rightarrow Y}$	$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{(\sigma, \tau)} & X \times Y \\ f \uparrow & \nearrow & \\ F' & & (\sigma, \tau) \cdot f = (\sigma \cdot_X f, \tau \cdot_Y f) \end{array}$

Par exemple, le produit $h_A \times h_A$ est donné comme suit. Le décompte des figures se lit

$\frac{V \twoheadrightarrow h_A \times h_A}{V \twoheadrightarrow h_A \quad V \twoheadrightarrow h_A}$	$\frac{A \twoheadrightarrow h_A \times h_A}{A \twoheadrightarrow h_A \quad A \twoheadrightarrow h_A}$
4 V -figures	une A -figure

Si on note s et t les deux V -figures de h_A , on peut alors noter $(s, s), (s, t), (t, s)$ et (t, t) les 4 V -figures de $h_A \times h_A$. Les relations d'incidence découlent immédiatement. Par exemple, les actions triviales sur la source et la cible

$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(1_A, 1_A)} & h_A \times h_A \\ s \uparrow & \nearrow & \\ V & & (s, s) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(1_A, 1_A)} & h_A \times h_A \\ t \uparrow & \nearrow & \\ V & & (t, t) \end{array}$
---	---

nous indique que la source de la seule flèche de $h_A \times h_A$ est nécessairement (s, s) et que sa cible est (t, t) :

$\begin{array}{c} t \\ \bullet \\ \uparrow \\ s \\ \bullet \end{array}$	×	$\begin{array}{c} t \\ \bullet \\ \uparrow \\ s \\ \bullet \end{array}$	=	$\begin{array}{cc} (s, t) & (t, t) \\ \bullet & \bullet \\ & \nearrow \\ (s, s) & (t, s) \\ \bullet & \bullet \end{array}$
---	---	---	---	--

2.3 Classifiant de sous-objets

De façon cruciale, nous pouvons dessiner le classifiant des sous-objets de cette catégorie et montrer qu'elle est un topos de Grothendieck, résultat dont nous n'exposerons pas le détail ici. Pour dessiner cet objet, rappelons sa définition formelle et caractérisons-le à partir de figures génériques selon le fil conducteur de Lawvere.

Avant de nous y lancer, il semble convenable de rappeler à ce stade de développement que notre objectif n'est pas uniquement didactique. Le dessin concret du classifiant des sous-objets pour les graphes, ainsi que sa signification et son rôle à l'intérieur d'un topos, nous intéresse aussi parce qu'il met en lumière des propriétés qualitatives du topos Graphe qui nous mèneront à en tirer que cette dernière n'est pas en mesure de rendre compte de l'Aufhebung de Hegel, tel qu'interprété par Lawvere au moyen des triplets d'adjoints. Encore plus marquant, Lawvere nous proposera une alternative avec le pouvoir expressif qu'il faut pour rendre compte : la catégorie des graphes *réflexifs* RGraphes.

Sous-graphes. Rappelons qu'un sous-graphe d'un graphe est une collection de flèches et de sommets de telle sorte que chaque fois qu'une flèche appartient à la collection, sa source et sa cible appartiennent également à la collection. La notion de *sous-préfaisceau* devient aussi très claire en suivant ce fil conducteur : Y est un sous-préfaisceau Y d'un pré-faisceau X est une sous-famille close pour l'action à droite de \mathcal{C} . Concrètement, comme \mathcal{C} a deux morphismes non triviaux $s, t: V \rightarrow A$ être clos selon l'action à droite se lit: si σ est une A -figure de Y (et donc aussi de X), alors le résultat des deux actions (au sens de X) $\sigma \cdot_X s$ et $\sigma \cdot_X t$ sont des V -figures de Y (et pas seulement de X). On retrouve très naturellement notre définition de sous-graphe.

Assumons l'existence du classifiant de sous-objets Ω pour notre catégorie Graphe, vue à son tour comme catégorie $\text{PSh}(\mathcal{C})$. Cet objet classe les sous-objets d'un objet X donné via la bijection

$$\frac{\phi: X \longrightarrow \Omega}{Y \hookrightarrow X} \tag{1}$$

Dans le cas où le morphisme ϕ est donné, la propriété disant que Ω classe les sous-objets de X se traduit informellement ici en disant que

- Ω possède une valeur de vérité \top_F pour chaque figure générique $F = V, A$
- ϕ (et donc Y) est complètement déterminé par les F -figures qui sont envoyées vers les valeur de vérité \top_F correspondantes.

La formalisation mathématique²⁴ de ceci se traduit en disant qu'une telle bijection (1) envoie ϕ vers l'image inverse ϕ_F^* des valeurs de vérité associées à chaque figure générique, ou encore que le sous-graphe Y s'identifie à la famille donnée par les images inverses

$$(\phi_F^*(\top_F))_{F=V,A}$$

que nous allons déterminer.

Construisons d'abord la figure du graphe Ω . Pour ce faire, commençons par déterminer les niveaux du récipient donnés par figures génériques de base qui vont constituer Ω pour ensuite déterminer leurs relations d'incidence. Nous avons des bijections données par Yoneda et par définition de Ω

$$\frac{\sigma: V \rightarrow \Omega}{\bar{\sigma}: h_V \rightarrow \Omega} \quad \frac{\sigma': A \rightarrow \Omega}{\bar{\sigma}': h_A \rightarrow \Omega}$$

$$\sigma \hookrightarrow h_V \quad \sigma' \hookrightarrow h_A$$

On déduit que les figures de Ω consistent en tous les sous-graphes de h_V et h_A . Pour h_V , nous avons :

$$\perp_V = \boxed{} < \boxed{\bullet_V} = \top_V$$

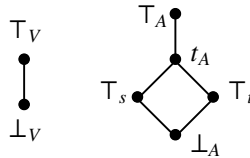
Pour h_A , nous avons :

$$\perp_A = \boxed{} \quad \top_s = \boxed{\bullet_s} \quad \top_t = \boxed{\bullet_t} \quad t_A = \boxed{\begin{matrix} \bullet_s & \bullet_t \\ \hline \end{matrix}} \quad \top_A = \boxed{\begin{matrix} \bullet_s & \xrightarrow{f} & \bullet_t \end{matrix}}$$

Au total, on énumère donc deux sommets et cinq flèches :

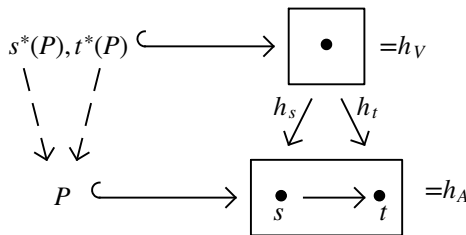
$$\frac{V \rightarrow \Omega}{\perp_V, \top_V} \quad \frac{A \rightarrow \Omega}{\perp_A, \top_s, \top_t, t_A, \top_A}$$

et la relation d'ordre partiel est donnée par le diagramme de Hasse suivant :



Calculer les relations d'incidence revient à déterminer la source et la cible associées à chacune de ces briques de base. Remarquons déjà que \mathcal{G} a exactement deux morphismes non triviaux : $h_s, h_t: h_V \rightarrow h_A$.

- Dû au fait qu'il n'y a pas de morphisme non trivial de cible h_V , les relations d'incidence de \perp_V, \top_V sont triviales ;
- Notons P un quelconque graphe parmi $\perp_A, \top_s, \top_t, t_A, \top_A$. Déterminer les relations d'incidence pour P revient à déterminer $P.s$ et $P.t$, ce qui revient à déterminer les images inverses $s^*(P)$ et $t^*(P)$ dans



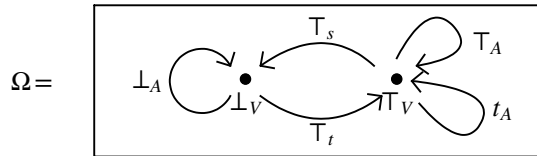
24. Qui généralise la propriété analogue dans le cas ensembliste où il n'y a qu'une valeur « vrai » \top .

Le fil de Lawvere nous dira que la notion d'image inverse se traduit en la prescription que les sommets de $s^*(P)$ (resp. $t^*(P)$) soient les sommets de h_V envoyés par h_s (resp. h_t) vers ceux de P .

Commençons par les plus faciles:

- Pour \perp_A : comme \perp_A n'a pas de sommets, $\perp_A.s = \perp_A.t = \perp_V$. En d'autres termes, les relations d'incidence pour \perp_A réalisent une boucle basée en \perp_V
- Pour \top_A : comme $\top_A = h_A$, les images inverses sont exactement déterminées par h_s, h_t , d'où que $\top_A.s = \top_A.t = \top_V$. Ainsi, les relations d'incidence pour \top_A réalisent une boucle basée en \top_V .
- Pour t_A : le premier sommet de t_A est envoyé par h_s vers le seul sommet de h_V . Le deuxième sommet de t_A n'est envoyé par h_s vers aucun sommet de h_V . D'où que $t_A.s = \top_V$. Ensuite, le deuxième sommet de t_A est envoyé par h_t vers le seul sommet de \top_V , d'où que $t_A.t = \top_V$. Ainsi, les relations d'incidence pour t_A réalisent une nouvelle boucle basée en \top_V .
- Pour \top_s : comme h_V a un seul sommet, et que ce sommet est envoyé par h_s vers le seul sommet de \top_s , on conclut que $s^*(\top_s) = h_V$ i.e. $\top_s.s = \top_V$. Par contre, le seul sommet de h_V est envoyé par h_t vers \top_t et non pas vers \top_s . Donc $\top_s.t = \perp_V$.
- Pour \top_t : un raisonnement analogue nous permet de déduire $\top_s.s = \perp_V$ et $\top_s.t = \top_V$.

Nous pouvons à présent déterminer le graphe Ω :



Il est alors assez clair que Ω est un graphe connexe. On pourra interpréter à gros traits que la particularité de la logique interne au topos des graphes est que les valeurs minimales et maximales de vérité sont continuellement connectées entre elles, et se transpercent et fonds l'une dans l'autre, donnant au topos un certain « air Hégélien » tel qu'évoqué dans l'extrait suivant de la *Phénoménologie de l'Esprit* de Hegel :

« Quand on dit qu'on sait quelque chose faussement, cela signifie que le savoir est en non-identité avec sa substance. Mais précisément cette non-identité est l'acte de différenciation en général, qui est un moment essentiel. Certes, de cette différenciation advient leur identité, et cette identité devenue est la vérité. Mais elle n'est pas la vérité au sens où l'on se serait débarrassé de la non-identité, comme on jette les scories séparées du métal pur, ni non plus comme on rejette l'outil du récipient terminé : la non-identité au-contre est elle-même au titre du négatif, du Soi-même, encore immédiatement présente dans le vrai. »

Un peu plus tard nous verrons que cet « air Hégélien » est en fait trompeur : il faudra plus qu'un Ω connexe pour que Graphe ait la capacité expressive pour représenter l'Aufhebung Hégélien.

Exemplifions comment Ω est bien un classifiant de sous-objets. Considérons le morphisme φ de graphes

$$\boxed{\begin{array}{c} \bullet \\ a \end{array} \xrightarrow{\alpha} \begin{array}{c} \bullet \\ b \end{array}} \xrightarrow{\varphi} \Omega$$

Il est clair que

- $\varphi(\alpha)$ est parmi $\perp_A, \top_s, \top_t, t_A, \top_A$ où

$$\perp_A = \boxed{} \quad \top_s = \boxed{\begin{array}{c} \bullet \\ s \end{array}} \quad \top_t = \boxed{\begin{array}{c} \bullet \\ t \end{array}} \quad t_A = \boxed{\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ s & t \end{array}} \quad \top_A = \boxed{\begin{array}{c} \bullet \\ s \end{array} \xrightarrow{f} \begin{array}{c} \bullet \\ t \end{array}}$$

- $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont parmi \perp_V, \top_V

Ainsi, nous obtenons les relations suivantes:

- la flèche f est dans $\varphi(\alpha)$ si, et seulement si, $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha.Id_A) = \top_A$
- la source s est dans $\varphi(\alpha)$ si, et seulement si, $\varphi(a) = \varphi(\alpha.s) = \top_V$

- la cible t est dans $\varphi(\alpha)$ si, et seulement si, $\varphi(b) = \varphi(\alpha.t) = \top_V$

On voit donc concrètement que tout morphisme de graphes est complètement déterminé une fois qu'on sait quelles F -figures sont envoyées vers \top_F pour toute figure générique F , ici en l'occurrence V et A . Par exemple: supposons que b est le seul sommet envoyé vers \top_V . Alors immédiatement, $\varphi(\alpha)$ possède le sommet cible et rien d'autre, c'est à dire que $\varphi(\alpha) = \top_t$ et on a $\varphi(a) = \perp_V$.

Un développement que nous ferons pas ici mais qui reste important d'indiquer est que toutes les opérations logiques (Heyting et co-Heyting²⁵, quantificateurs universel, existentiel,...) peuvent à leur tour être décrites aussi facilement à partir de ce fil, ainsi que la description complète des tables de vérité qu'elles déterminent. Le point à retenir est que ce sera bien la géométrie qui est au poste de commandement.

3 Vers une axiomatique de la cohésion - Grande Logique Géométrique

Dans les minutes qui me restent, je vais esquisser la manière dont Lawvere thématise l'insuffisance du topos Graphe - même dans toute sa splendeur et richesse - à exprimer fidèlement le concept hégélien d'Aufhebung.

Pour cela il nous conviendra de rappeler (sans le détailler) qu'un Aufhebung pour Lawvere est la création d'un topos \mathcal{E}' qui se voit comme « plus petit topos intermédiaire » entre deux topos $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ en situation d'UIAO (c'est à dire tel qu'il existe un triplet d'adjoints ou les morphismes externes $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ sont des « inclusions »²⁶) de sorte qu'il se factorise en une suite d'UIAOs :

$$\mathcal{E} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{E}' \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{D}$$

3.1 Obstruction du topos des graphes à être une catégorie d'« Être »

La situation adjoints cherchée par Lawvere consiste en un quadruplet de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \swarrow & \Gamma & \searrow \\ \text{PSh}(\mathcal{G}) & & \text{Sets} \\ \nwarrow & \Delta & \nearrow \\ & \Pi & \end{array}$$

où

$$\Pi \dashv \Delta \dashv \Gamma \dashv B \quad \text{et où} \quad \Delta \dashv \Gamma \dashv B \text{ est un triplet UIAO.}$$

La catégorie Graphe admet bien un triplet « naturel » d'adjoints²⁷ $\Pi \dashv \Delta \dashv \Gamma$ dont la description géométrique sera faite dans le prochain exposé et encore une fois se fera directement du point des figures génériques et les plans de recollement. Cependant, le point est que le foncteur Γ n'admet pas d'adjoint à droite B . La conséquence paraît désastreuse, car alors ça veut dire que, si bien le topos Graphe peut ponctuellement exprimer une « négation de la négation » de type nouveau telle qu'explicitée, il n'est pas pour autant compatible avec une Grande Logique dont le mouvement d'ensemble persévère dialectiquement selon des Aufhebung - c'est à dire selon des sous-topos de Graphe qui *résolvent les contradictions* de sous-topos de Graphe de « degré inférieur ». Nous discuterons le fonctionnement technique de cela dans un prochain exposé.

Mais, en tout cas, Lawvere viendra ainsi conclure que Graphes ne saurait pas être une *catégorie d'Être* (c'est à dire une catégorie en position d'UIAO par rapport à une autre catégorie qui norme la déterminité). Corrélativement, il semblerait que nommer ainsi une telle catégorie porterait déjà en soi un alignement avec l'idéalisme de Hegel, d'où qu'une nomination en tant que « catégorie d'apparaître » où du moins « d'Être-là » serait peut-être plus judicieux pour le matérialisme déclaré de Lawvere.

25. La négation co-Heyting ne sera décrite que dans sa version *externe* i.e. ne mobilisant pas le classifiant de sous-objets Ω .

26. Au sens catégoriel du terme, voir mon exposé *mamuphi* du 9 Octobre 2021.

27. Triplet qui existe pour une très grande classe de topos de Grothendieck.

On y trouve donc une obstruction au niveau de la supra-structure, c'est à dire au niveau du topos Graphe pris dans sa totalité, à rendre compte de fidèlement d'une Grande Logique Hégélienne (non pas au sens d'une adhésion au hégélianisme mais au sens d'être capable d'exprimer des concepts de Hegel qui sont partagés avec d'autres philosophies épousées).

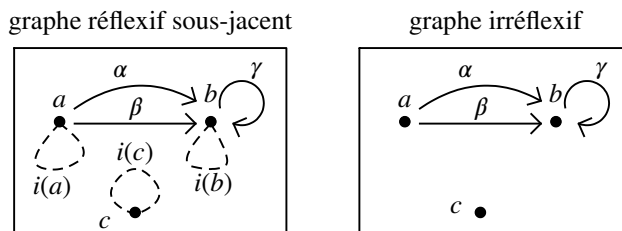
Au total donc, deux obstructions :

- une au niveau de l'infra-structure, nous disant que la négation co-Heyting, n'étant pas fonctorielle, ne s'internalise pas en endomorphisme du classifiant des sous-objets ;
- une au niveau de la supra-structure, nous disant que l'inexistence de l'adjoint B à droite de Γ impossibilise que le topos Graphe puisse être considéré comme modèle d'une Grande Logique telle que Lawvere la conçoit.

Paradoxalement, il se trouve que l'obstruction au niveau infra-structure est *générale* car s'applique à tout topos de Grothendieck alors que l'obstruction au niveau de la supra-structure est *particulière* car elle s'applique au cas du topos Graphe des graphes dits « irréflexifs » dont nous avons traité jusqu'à maintenant. Il est donc naturel de se demander en premier lieu si on ne peut dépasser la deuxième obstruction (et qui donc s'avère plutôt être un obstacle) en trouvant un topos plus approprié mais pas trop différent. C'est précisément ce que Lawvere fera en introduisant le topos des graphes dits « réflexifs ».

3.2 Vers une solution : les graphes réflexifs

Les graphes réflexifs sont comme les graphes que nous avons travaillé dans cet exposé, à la différence que chaque sommet d'un tel graphe est muni d'une boucle distinguée. Il est alors immédiat de constater que tout graphe irréflexif admet un graphe réflexif sous-jacent :



Sans entrer dans les détails, la catégorie RGraphes des graphes « réflexifs » aura toutes les vertus de la catégorie Graphe (topos de Grothendieck, réalisé à partir d'une très simple catégorie de figures génériques, etc...), sans en avoir les inconvénients (on a bien existence du foncteur B pour RGraphes \rightarrow Sets). En guise de ce qui sera présenté la fois prochaine, la conclusion de Lawvere sera que le topos des graphes réflexifs est une catégorie d'espaces alors que le topos des graphes irréflexifs n'est qu'un « espace généralisé ». Ce que ça veut dire, à très gros traits, est que graphes réflexifs forment un type de topos dont les objets peuvent véritablement être nommés « espaces » sans que l'on ait besoin de spécifier s'il s'agit d'espaces topologiques, variétés lisses, espaces métriques et autres types d'espaces. Au fonds, ce que nous découvrons est que cela se joue sur leur capacité à faire « tenir ensemble » des objets, là où les topos qui sont du type « graphes irréflexifs » ne nous disent que de la manière dont ses objets se connectent entre eux et rendent compte d'une notion de localité. Un topos cohésif en est un sur lequel il est possible de penser mathématiquement à ce « tenir ensemble ». Mais je ne développerai pas d'avantage cela aujourd'hui car la chose est vraiment subtile et fascinante et mérite un développement à part entière. Mentionnons simplement que les topos aptes²⁸ à modéliser les axiomes de la Géométrie Différentielle Synthétique doivent nécessairement être cohésifs ! La cohésion est précisément ce qui rendra mathématiquement intelligible le « tenir ensemble » d'un point « infinitésimalement épais ».

28. Exemplement le topos des « Cahiers », dont le nom provient simplement du journal de publication. Voir Dubuc, *Sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques 20 3 (1979).

En revenant aux graphes, ce qui sera frappant est que le classifiant des sous-objets se dessine exactement de la même façon pour les graphes réflexifs comme pour les graphes irréflexifs :

$$\Omega_{\text{RGraphe}} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

alors que déjà le fonctionnement des produits est déjà tout à fait différent entre ces deux topos. Nous laissons ici le dessin du produit $h_A \times h_A$ pour les graphes réflexifs, analogue à celui présenté avant :

Cependant, les conséquences conceptuelles de ce changement à première vue anodin seront immenses - car de nature fondamentalement qualitative - ce qui emmènera Lawvere, dans son papier de 1991 *Some thoughts on the future of category theory* à déclarer²⁹ :

Dans le remarquable article [QDC] (Quotients of Decidable Objects, Cambridge) il est fait mention d'**une certaine différence epsilonesque entre les classes de topos. Cet epsilon est en quelque sorte la victoire de la géométrie sur le logicisme étroit** et c'est ce que [QDB] (Qualitative Distinctions, Boulder) s'efforce de clarifier.

Ici, la référence [QDB] que Lawvere avance n'est rien d'autre que son papier de 1989 *Qualitative distinctions between some toposes of generalized graphs*, lui même développant les idées de son article de 1986 où il propose ces distinctions³⁰. Il est ainsi manifeste que ce que Lawvere cherche dans son programme est bien une Grande Logique Géométrique.

Remarques conclusives.

²⁹. En gras mon annotation personnelle.

³⁰. D'où une esquisse de programme dont les premières parties seront abordées dès la prochaine séance consacrée à ce sujet :

1. Dialectique aux morphismes *géométriques* et *logiques* entre topos
 - nature *géométrique* des catégories d'« Être »
 - nécessité des morphismes *logiques* pour exprimer le *forcing* de Cohen
 - Unité dialectique entre morphismes logiques et géométriques
2. Graphes réflexifs (au dessus des ensembles) comme modèle de topos d'« Être »
 - Corrélation avec triplets d'adjoints en situation UIAO et avec *points de Lawvere* (i.e. points des *figures génériques*)
 - Description des opérations toposiques restantes (i.e. pullback, objets puissance,...) qui ont une signification philosophique (c.f. *Logiques des Mondes*) - éclaircissements sur *Topos*.
 - Différences entre « gros » topos, vus comme « catégories d'espaces », et « petit » topos, vus comme « espaces généralisés »
3. Graphes réflexifs comme modèle de topos de cohésion
 - Des catégories d'Être aux catégories de cohésion; connexité de Ω et Nullstellensatz
 - Exprimer Hegel : Qualité, Quantité, Extensivité, Intensivité
 - Nécessité des topos non-classiques (i.e. non Booléens)

...Quelles conséquences pour

- une intellectualité mathématique *contemporaine* ?
- une philosophie conditionnée (c.f. Badiou) sur la mathématique de Lawvere ?

Au total, il y a ainsi plusieurs points de partage entre Lawvere et Badiou³¹ en ce que la théorie des topos élabore pour les deux, en quelque sorte, une *géométrie des vérités*. Ils partagent aussi une dimension matérialiste : s'en tenant aux existants chez Badiou, pour accéder³² à l'absolu via un de ses attributs ; et, pour Lawvere, en avançant sur des concepts mathématiques concrets (tels les graphes) qui actent que les théories présentées sont « non vides ». Mais ce partage pose aussi ses limites évidentes. Lawvere ressaisit les enjeux mathématiques propres non pas dans une *philosophie* : à ma connaissance, Lawvere n'a pas dégagé un système philosophique stable et explicite³³ - ce que Badiou précisément fait - au delà de ses tentatives de clarification sur Hegel, Cantor, Grassmann... ce qui déjà n'est pas une mince affaire ! Dans tous les cas, le nouveau point qui est mis à l'ordre du jour ici, concernant ce concept clé d'Aufhebung tel que déplacé ou déraciné de l'idéalisme Hégélien, est que tant un chemin de développement de *Logiques des Mondes* à la lumière de ce nouveau conditionnement mathématique commence à s'amorcer, comme un chemin de développement de *l'intellectualité* mathématique propre à Lawvere voit ses enjeux et son intérêt renouvelés. Il en vient que la question qui se pose est celle d'une décision : en fin des comptes, s'agit-il, dans ce dialogue entre mathématiques et philosophie³⁴, de parler plutôt des mathématiques (en intellectualité) ou alors de philosophie ? Ou encore : parler plutôt de la condition³⁵ et de la capacité du conditionné à véritablement saisir la condition, ou bien parler plutôt des mouvements effectifs du conditionné dans sa dynamique propre et, postérieurement aux décisions faites de son intérieur, des usages qu'il a fait sur ses conditions³⁶ pour persévérer et s'armaturer dans son mouvement ? En particulier le rapport au passé de chaque discipline change radicalement si l'on se place dans une de ces deux alternatives.

Si cet exposé est parvenu à une telle mise à l'ordre du jour, en convaincre tant soit peu de la viabilité réelle de chacune de ces deux voies comme de leur potentielle alliance, il aura alors atteint ses objectifs.

Et je terminerai cette intervention en me tournant vers la musique, en évoquant les tentatives de formalisation *en dialectique* de la catégorie musicale de *mélodie* et du concept de hauteur-note (en particulier via les notions de *degré de narrativité* musicale pour l'une, et *seuils de perception sonore* pour l'autre) dont on a eu le privilège d'entendre des exposés cette année, pour diriger mes propos aussi vers eux, sous la forme d'un encouragement et d'une invitation au dialogue avec les propos tenus ici.

Je vous remercie.

31. c.f. voir Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*.

32. c.f. voir Badiou, *Immanence des Vérités*.

33. Il précisera cependant des positions philosophiques dont il cherche à trouver des modèles mathématiques rendant compte de celles-ci. Par exemple, dans son article *Tools...* il demandera un modèle d'une position dont nous ne laissons ici que l'illustration évocatrice, et qui mériterait d'être étudiée en détail :

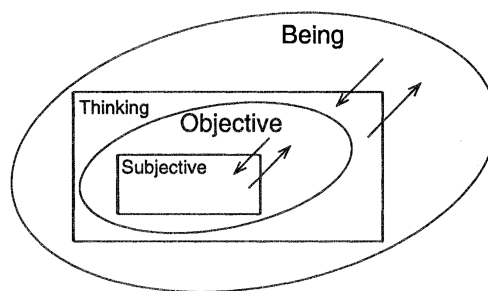


Figure 1.

34. Précisément et surtout quand il ne s'agit pas d'une philosophie *des mathématiques*.

35. En restant, du moins temporairement, de l'intérieur de la position ontologique Badiouienne à proprement parler (sans pour autant y voir une annexion des mathématiques dans la philosophie qui pourrait être comprise sous le slogan « les mathématiques sont l'ontologie »).

36. Pourvu que l'usage soit fait sur une mathématique suffisamment instruite pour être défendable et dont le système structurel des conséquences tirées de cela soit compossible, et donc à cette mesure imprévisible, au mouvement de la mathématique elle-même utilisée.

Annexe A Rappels sur la non-internalisabilité de la négation co-Heyting

Venons maintenant à la question de l'internalisation de ce processus au sein de ces lieux de l'intellectualité mathématique que constituent les topos. Il se trouve que tout topos de pré-faisceaux (sur une petite catégorie) est bi-Heyting. Comme on l'a exposé, le cas des graphes présentés entre dans ce cadre du fait que le topos des tels graphes n'est autre que $\text{Set}^{\mathcal{G}^{\text{op}}}$ pour $\mathcal{G} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$.

En premier temps, donné un topos \mathcal{E} avec Ω classifiant de sous-objets. Il se trouve que pour tout objet X du topos, les opérations

$$\wedge_X, \vee_X, \rightarrow_X: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \times \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \longrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \quad \neg_X: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \longrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$$

déterminent $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ comme algèbre de Heyting. Si \mathcal{E} est un topos de bi-Heyting, le treillis des sous-objets $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ pour tout objet X de \mathcal{E} est une algèbre de bi-Heyting dont la négation est déterminée par $\sim_X: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \longrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$. Le point à retenir est que cette structure est *externe* à \mathcal{E} en ce qu'elle dépend de ce qu'*ensemble* $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ veut dire. L'*internalisation* de ces opérateurs sera possible exactement³⁷ par le caractère fonctoriel de ces derniers: les associations $X \mapsto \wedge_X, \vee_X, \rightarrow_X, \neg_X$ sont toutes fonctorielles. Prenons par exemple $X \mapsto \neg_X$, ceci veut dire que pour toute flèche $f: X \rightarrow Y$ de \mathcal{E} , et tout sous-objet $B \in \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ on a, en notant la flèche *pullback* induite $f^*: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(Y) \longrightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$, la relation

$$\neg_Y f^*(B) = f^*(\neg_X B).$$

Un résultat général montre qu'il y a une correspondance bi-univoque entre morphismes *internes* $\varphi: \Omega^n \rightarrow \Omega$ et foncteurs $\phi: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)^n \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ selon lequel les opérations $\wedge_X, \vee_X, \rightarrow_X, \neg_X$ vont se voir internalisées en des morphismes non assujettis à quelque formalisme ensembliste

$$\wedge_{\mathcal{E}}, \vee_{\mathcal{E}}, \rightarrow_{\mathcal{E}}: \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega \quad \neg_{\mathcal{E}}: \Omega \longrightarrow \Omega.$$

Il en découlera de cela que tout objet puissance $\mathcal{P}X$ est une algèbre de Heyting interne et que le morphisme d'algèbres de Heyting $\mathcal{P}f$ associé à une flèche f du topos est lui aussi *interne*.

Le point capital est qu'il n'est rien pour la négation co-Heyting, quitte à écraser notre dialectique: dès que $\neg \neq \sim$, l'association $X \mapsto \sim_X$ n'est pas fonctorielle et en conséquence la négation co-Heyting n'est pas internalisable. Inversement, il est équivalent que $X \mapsto \sim_X$ soit fonctorielle et que $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ soit une algèbre de Boole, auquel cas \mathcal{E} ne peut être que Booléen.

Ces faits vont bien sur se répercuter sur nos opérateurs de négations doublées: on déduira une connexion galoisienne

$$\blacklozenge_X \dashv \square_X: \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \tag{2}$$

où

- $\square_X(P)$ est le plus grand sous-objet complémenté de X contenu dans P
- $\blacklozenge_X(P)$ est le plus petit sous-objet complémenté de X contenant P .

Le point surprenant³⁸ est que la mise en fonctorialité³⁹ de $\blacklozenge_X \dashv \square_X$, via les associations $X \mapsto \square_X, \blacklozenge_X$ va impacter la structure des topos de façon très différente: si \mathcal{E} est un topos de bi-Heyting alors

- l'opérateur « possibilité » \blacklozenge est fonctoriel précisément quand il s'agit de la double négation intuitionniste $\blacklozenge = \neg \neg$, où encore précisément quand la négation $\neg X$ est bien complémentée;
- l'opérateur « nécessité » \square est fonctoriel précisément quand il est trivial $\square = \text{Id}$, ou encore, précisément quand \mathcal{E} est booléen.

Ces faits nous laissent déjà entrevoir une dissymétrie en ce que l'internalisation de la progression de \blacklozenge en tant que séquence d'opérateurs internes au topos contraindra cet opérateur à être celui de la double négation *interne* alors que \square , n'étant pas fonctoriel sans être trivial, ne possibilise *aucune* progression sur \mathcal{E} . On l'a vu, au fond, c'est la non-fonctorialité de \sim qui y fait obstruction. Or, l'association $X \mapsto \sim_X$ satisfait tout de même une propriété de cohérence *quasi* fonctorielle: pour toute flèche $f: X \rightarrow Y$ de \mathcal{E} , et tout sous-objet $B \in \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$ on a $\sim_Y f^*(B) \hookrightarrow f^*(\sim_X B)$ sans égalité en général.

37. c.f. Lawvere, *Intrinsic Co-Heyting Boundaries and the Leibniz Rule Certain Toposes*, Springer Lecture Notes in Mathematics **1174**, 1986.

38. c.f. Reyes, Zolfaghari, *Bi-Heyting algebras, toposes and modalities*, Journal of Philosophical Logic, Vol. 25, **1** (1996).

39. Il y a une nuance technique pour le lecteur mathématicien: ces endofoncteurs sont *souples* sur \mathcal{E} et quand \mathcal{E} est un topos de Grothendieck, ils redeviennent *stricts* lorsqu'on se restreint aux objets dits *constants*.