Topos Cohésifs et Figures Génériques de Lawvere : vers une Grande Logique Géométrique Hégélienne

Martin Gonzalez

Séminaire mamuphi - 11 janvier 2025

Plan

1. Rappels

- 1. Triplets d'adjoints, contradictions et Aufhebung chez Lawvere
- 2. Les graphes comme modèle d'une (petite) logique de type nouveau
- 3. Une première obstruction et sa pertinence philosophique

2. Graphes comme topos de Grothendieck (à la Lawvere)

- 1. Graphes comme préfaisceaux
- 2. Opérations Toposiques
- 3. Classifiant de sous-objets

3. Vers une axiomatique de la cohésion – Grande Logique Géométrique

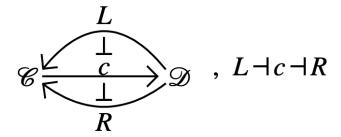
- 1. Obstruction du topos des graphes à être une catégorie d'"Être"
- 2. Vers une solution : les graphes réflexifs

Rappels

Rapports dialectiques : paires de foncteurs d'adjoints :

$$\mathscr{C} \xrightarrow{L} \mathscr{D} , L \dashv R$$

Opposition dialectisée entre deux termes au moyen d'un troisième terme - triplets d'adjoints



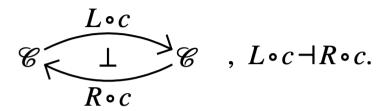
L et R incluent \mathcal{D} dans \mathscr{C} de façon à la fois identique et opposée, telle la manière dont un cercle s'inscrit dans les deux extrémités d'un cylindre¹. Ceci sera formalisé par la condition

$$c \circ L \simeq \operatorname{Id}_{\mathscr{D}} \simeq c \circ R.$$

Un tel triplet d'adjoints est nommé unité et identité d'adjoints opposés (UIAO).

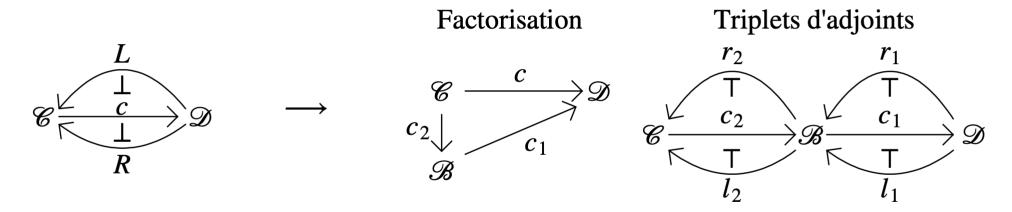
^{1.} Nous renvoyons également à l'exposé mamuphi de G. Laplante-Anfossi du 9 octobre 2021 pour une description détaillé de ceci.

Contradictions à l'oeuvre : concentrées sur les endofoncteurs $L \circ c$ et $R \circ c$ de \mathscr{C} , en position d'adjonction :



Finalement, « résolution de contradictions », Aufhebung, comme le mouvement qui transforme une situation en UIAO en une configuration ou ce UIAO se voit factorisé par une catégorie intermédiaire, le tout prenant la forme d'une suite de deux d'UIAO faisant intervenir cette nouvelle catégorie introduite.

On passe de la configuration de gauche à la configuration à droite ci-dessous



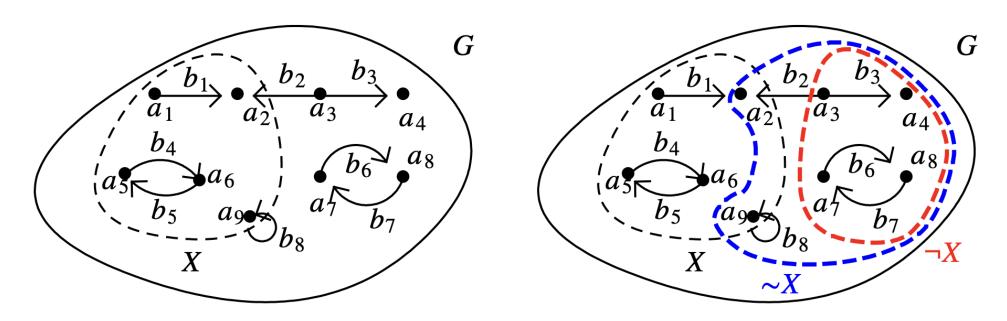
Au total : première figure d'oppositions dialectiques.

Un **multigraphe orienté** est donné par $G = (G_0, G_1)$ avec G_0 comme ensemble de sommets et G_1 comme ensemble d'arrêtes orientées.

Un sous-graphe $X = (X_0, X_1)$ de G consiste en sous ensembles de sommets et d'arrêtes tels que

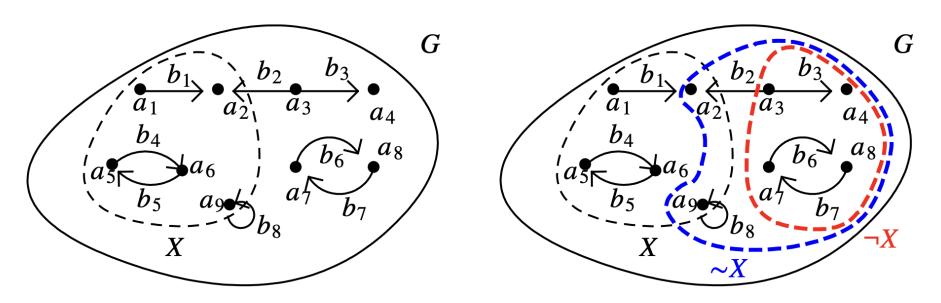
si une arrête est dans X_1 alors ses extrémités sont dans X_0 (1)

Le **bord** de X: sommets de X qui sont extrémités d'une arrête dont l'autre extrémité n'est pas dans X_0 . **Exemple**: $X = \{a_1, b_1, a_2, a_5, b_4, a_6, b_5, a_9\}$ de G comme dans la figure à gauche ci-dessous.



On voit que le complémentaire ensembliste $G - X = \{b_2, a_3, b_3, a_4, b_6, a_7, b_7, a_8\}$ de X n'est pas un graphe.

Exemple: $X = \{a_1, b_1, a_2, a_5, b_4, a_6, b_5, a_9\}$ de G comme dans la figure à gauche ci-dessous.

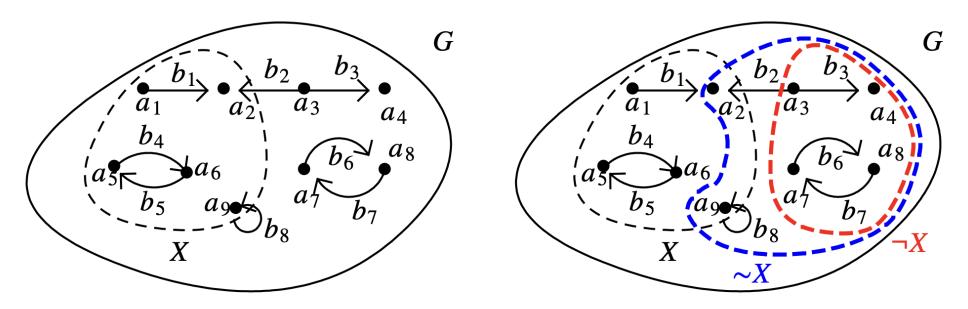


On voit que le complémentaire ensembliste $G - X = \{b_2, a_3, b_3, a_4, b_6, a_7, b_7, a_8, b_8\}$ de X n'est pas un graphe. D'où deux compléments dessinés sur la figure à droite ci-dessus:

- $\neg X$ le plus grand sous-graphe disjoint de X
- $\sim X$ le plus petit sous-graphe dont la réunion avec X donne G
- bord de $X : \partial X = X \cap \sim X = \{a_2, a_9\}$

Au total : modèle pour deux types de négations non-classiques : une négation $Heyting \neg a$ et une co-Heyting $\sim a$ de sorte que $a \land \neg a = 0$ (i.e. a et $\neg a$ ne peuvent pas être vrais en même temps) et $a \lor \sim a = 1$ (i.e. a et $\sim a$ ne peuvent pas être faux en même temps).

Exemple: $X = \{a_1, b_1, a_2, a_5, b_4, a_6, b_5, a_9\}$ de G comme dans la figure à gauche ci-dessous.



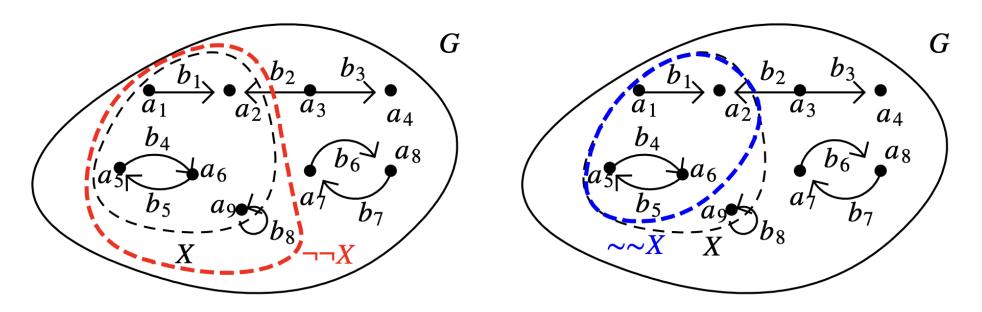
On voit que le complémentaire ensembliste $G-X=\{b_2,a_3,b_3,a_4,b_6,a_7,b_7,a_8,b_8\}$ de X n'est pas un graphe.

- La réunion $X \cup \neg X$ n'est pas égale à G donc \neg ne satisfait pas en général le principe du tiers exclu.
- L'intersection $X \cap \neg X = \emptyset$ donc \neg satisfait le principe de non contradiction
- La réunion $X \cup \sim X = G$ donc \sim satisfait le principe du tiers exclu
- L'intersection $X \cap \sim X = \partial X$ n'est pas vide donc \sim ne satisfait pas en général pas le principe de non contradiction.

Au total, ceci reflète que l'ensemble des sous-graphes de G a une structure d'algèbre de bi-Heyting. La négation Heyting est plus forte que la négation co-Heyting en ce qu'on a toujours

$$\neg X \leq \sim X$$
.

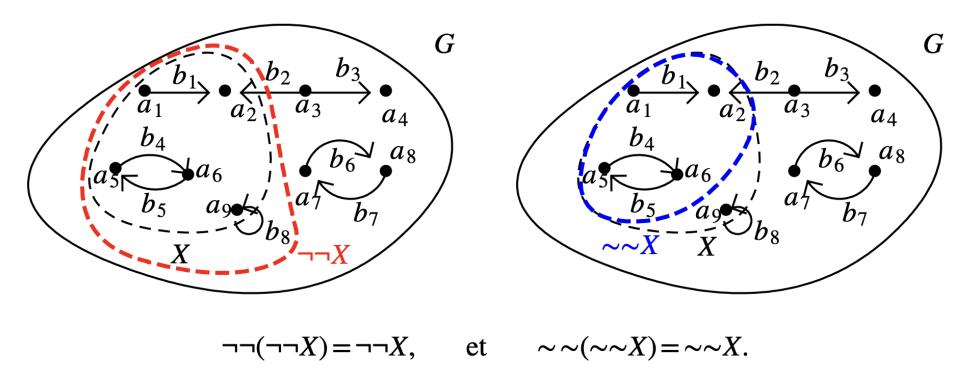
L'impasse des doubles négations. Le travail des doubles négations ¬¬ et ~~ produit :



- $\neg \neg X$ incorpore la flèche b_8 là où $\sim \sim X$ écarte le point a_9 .
- Inversion des forces : la négativité de $\sim X$ est plus forte que celle de $\neg \neg X$
- aucun des ces deux sous-graphes est bien complémenté : d'une part $(\neg \neg X) \cup \neg X$ n'est pas égal à G et, d'autre part, $(\sim \sim X) \cap \sim X$ n'est pas vide.
- Le travail du processus de renouvellement ne produit rien de nouveau:

$$\neg \neg (\neg \neg X) = \neg \neg X$$
, et $\sim \sim (\sim \sim X) = \sim \sim X$.

L'impasse des doubles négations. Le travail des doubles négations ¬¬ et ~~ produit:



Obstruction de possibilité à ce que ces opérateurs puissent affirmer en leur altérité l'essence même de ce qu'elles nient. Ceci veut dire que pour \neg , en plus du fait que non($\neg X$) n'est pas un graphe, tout objet de la forme:

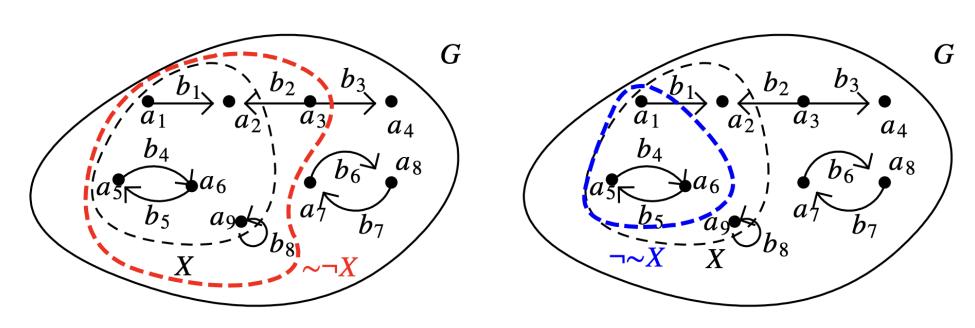
$$G - (\neg \neg (\neg \neg (\dots (\neg \neg X))))$$

n'est pas un graphe, peu importe la longueur de la chaine de double-négations.

Négations doublées. Pour avancer sur cette dialectique affirmative aux négations vers la constitution de graphes complémentaires, l'idée est de

- revenir sur notre travail *aux bords* et intriquer ces deux négations de deux manières, $\neg \sim$, et $\sim \neg$, donnant à deux nouveaux opérateurs qu'on appellera *négations mixtes*.
- Maintien du renversement de force:

$$\neg \sim X \subseteq \sim \sim X \subseteq X \subseteq \neg \neg X \subseteq \sim \neg X$$



Négations doublées. Pour avancer sur cette dialectique affirmative aux négations vers la constitution de graphes complémentaires, l'idée est de

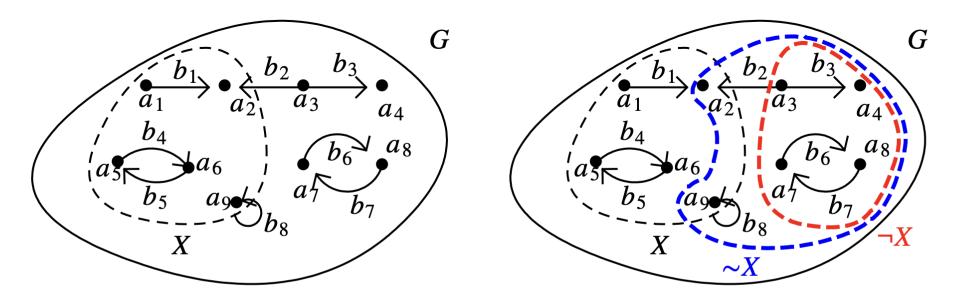
- revenir sur notre travail *aux bords* et intriquer ces deux négations de deux manières, $\neg \sim$, et $\sim \neg$, donnant à deux nouveaux opérateurs qu'on appellera *négations mixtes*.
- reprendre sur notre travail *aux répétitions* et enchainer ces négations mixtes de sorte qu'elles aboutissent à deux nouveaux opérateurs qu'on appellera *négations doublées*
 - onos opérateurs $\neg \sim$, et $\sim \neg$ vont nous permettre de définir par récurrence deux compléments d'objets structurés, tels que les graphes rencontrés, comme suit: on part de $\square_0 = \blacklozenge_0 = \text{Id}$ et tant que nos objets de base ne soient pas bien complémentés, on définit:

$$\square_n$$
: =¬ \sim \square_{n-1} , \spadesuit_n : = \sim ¬ \spadesuit_{n-1} .

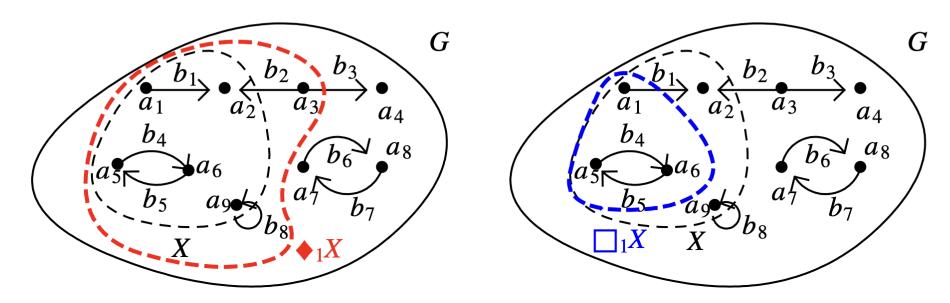
Lorsque l'on tombe sur un objet bien complémenté on s'arrête.

• Les négations doublées seront alors les répétitions « au repos » $\square := \square_n$ et $\spadesuit := \spadesuit_n$.

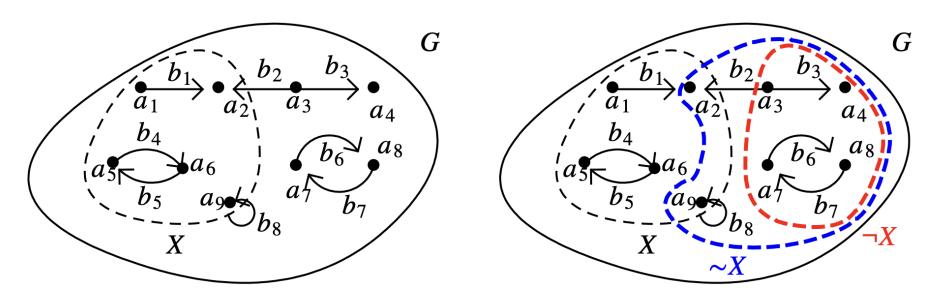
Exemple sur les graphes. Illustrons négations mixtes et négations doublées sur l'exemple rencontré



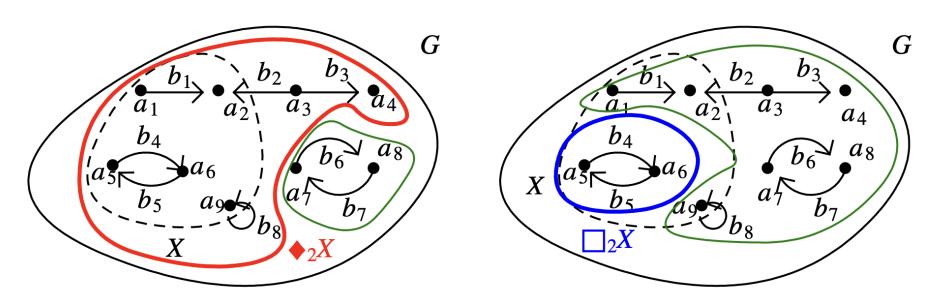
La première étape nous donnera $\Box_1 X \subset X \subset \blacklozenge_1 X$ où:



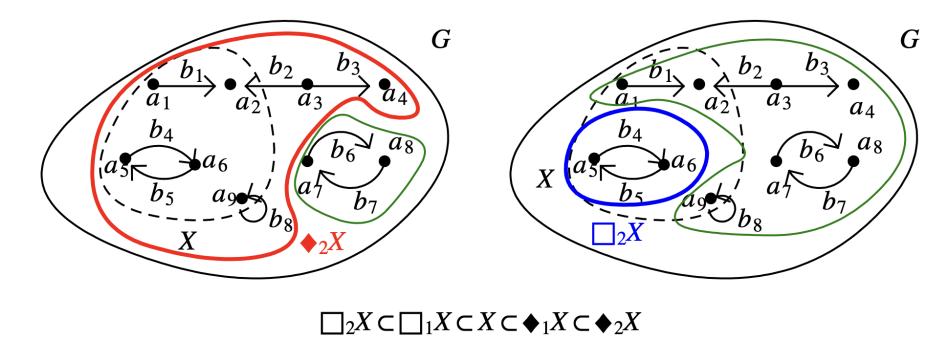
Exemple sur les graphes. Illustrons négations mixtes et négations doublées sur l'exemple rencontré



Les graphes $\square_1 X$ et $\blacklozenge_1 X$ n'étant toujours pas bien complémentés, on continue:



Exemple sur les graphes.



On remarque que $\blacklozenge_2 X$ et $\square_2 X$ n'ont plus de bord et sont donc bien complémentés (les compléments cidessus, dessinés en vert, sont à leur tour des sous-graphes de G). La récurrence s'arrête et les deux nouveaux sous-graphes (ici en l'occurrence $\square_2 X$ et $\blacklozenge_2 X$) sont obtenus:

- $\blacklozenge X$, qui est le plus petit sous-graphe complémenté tel que $X \subseteq \blacklozenge X$ (aussi appelé *possibilité* de X). Il consiste en les éléments de G qui sont accessibles par X.
- $\Box X$, qui est le plus grand sous-graphe complémenté tel que $\Box X \subseteq X$ (que Lawvere appellera nécessité de X). Il consiste en les éléments de X qui ne sont pas accessibles par l'extérieur de X.

Une première obstruction de pertinence philosophique.

Les négations doublées

et ♦ ne sont pas fonctorielles i.e. ne satisfont pas

$$f^*(\blacklozenge A) = \blacklozenge f^*(A), \qquad f^*(\square A) = \square f^*(A)$$

où f est un morphisme de graphes. Exemple, si on prends

$$f: X = \{ \bullet_a \quad \bullet_b \} \hookrightarrow Y = \{ \bullet_a \rightarrow \bullet_b \},$$

alors

- le sous-graphe $\{\bullet_a\}$ n'est pas bien complémenté et il en résulte que $\{\bullet_a\} = Y$ et donc $f^* \{\bullet_a\} = X$.
- $f^*(\{\bullet_a\}) = \{\bullet_a\}$ est bien complémenté dans X et donc $\phi f^*(\{\bullet_a\}) = \{\bullet_a\}$.

Au total, nous avons une inclusion stricte $\blacklozenge f^*(\{\bullet_a\}) \subset f^* \blacklozenge \{\bullet_a\}$.

Au fonds : c'est que la négation co-Heyting

$$\sim_X : \operatorname{Sub}_{\mathscr{E}}(X) \longrightarrow \operatorname{Sub}_{\mathscr{E}}(X)$$

ne définit pas un foncteur $X \mapsto \sim_X$.

Corollaire mathématique : dans tout topos de Grothendieck &, il n'y a pas de morphisme

$$\sim_{\mathscr{E}}: \Omega \longrightarrow \Omega$$

faisant de son classifiant de sous-objets une algèbre de bi-Heyting. Par contre $Sub_{\mathscr{C}}(X)$ l'est pour tout X!

Une première obstruction de pertinence philosophique.

Bilan: nous avons trois morphismes *non-fonctoriels* (et donc non centrables):

$$\sim_X, \blacklozenge_X, \square_X: \operatorname{Sub}_{\mathscr{C}}(X) \longrightarrow \operatorname{Sub}_{\mathscr{C}}(X)$$

"Ce qu'on doit accorder à Hegel se dit en deux points.

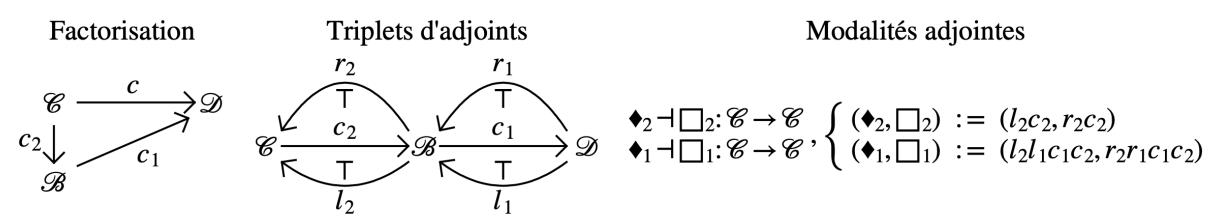
- 1) La négation d'un phénomène ne saurait être son anéantissement. Il faut que cette négation soit elle-même phénoménale, ou du phénomène. Il faut qu'elle touche à l'apparaissant de l'apparaître, à son existence, et non qu'elle s'accomplisse comme simple suppression de son être. Hegel voit dans la positivité de la loi du phénomène la négation intra-mondaine. Je propose certes un tout autre concept, celui de l'envers d'un étant-là. Ou plus exactement: l'envers d'un degré transcendantal d'apparition. Mais nous nous "accordons sur la réalité affirmative de la « négation », dès lors qu'on opère selon une logique de l'apparaître. Il y a un être-là de l'envers, comme de la loi. Loi et envers n'ont guère à voir avec le néant.
- 2) La négation phénoménale n'est pas classique. En particulier, la négation de la négation n'équivaut pas à l'affirmation. Pour Hegel, la loi est négation du phénomène, mais la négation de la loi ne redonne nullement le phénomène. Cette seconde négation, dans la Science de la logique, ouvre en fait au concept d'effectivité."

Vers une relève de cette obstruction. Nous avons deux morphismes non-fonctoriels

$$\blacklozenge$$
, \square : Sub _{\mathscr{C}} (X) \longrightarrow Sub _{\mathscr{C}} (X)

Propriétés caractéristiques :

... satisfaites par les foncteurs de modalités adjointes que Lawvere avait défini pour les Aufhebung!



Comme pour toute obstruction, nous sommes face à une décision :

- soit on abandonne la fonctorialité (et centrabilité) de nos opérateurs de négation mixte
 □ et ◆;
- soit on abandonne leur universalité, et donc faire de ☐ et ♦ des opérateurs qui se jouent toujours entre deux catégories, une jouant le rôle de *repos*, et l'autre étant un théâtre de *changement*.

Retour sur Lawvere. Pour caractériser l'entreprise hégélienne, Lawvere opte pour la deuxième voie.

Conséquences pour Lawvere : indispensable de cerner la particularité du topos des graphes !

Nous associons un treillis distributif bien défini qui est lui-même une application standard et qui peut être considéré comme constitué de « dimensions » raffinées en ce qu'il paramètre tous les rangs dans une analyse hégélienne du topos de toutes les applications ; à travers ce treillis distributif, il y a une séquence ascendante bien définie, obtenue par le processus hégélien de « résolution d'une unité d'opposés par la suivante » ; la longueur de cette séquence est la dimension géométrique de la disposition dans nos nombreux exemples.

Ce qui est particulièrement frappant, c'est que l'analyse hégélienne de <u>tout</u> topos s'avère impliquer des monoïdes <u>graphiques</u> qui sont en fait des bicatégories. [...] Bien que proposée il y a près de 200 ans, la méthode hégélienne d'analyse a été largement sous-utilisée depuis lors; des affirmations idéologiques « conflictuelles » soit selon lesquelles elle est incohérente, soit qu'elle est trop merveilleusement fluide pour être rendue mathématique ont conspiré pour empêcher son enseignement à grande échelle. Nous pensons que nous avons démontré, par des exemples modestes, qu'elle est cohérente (et non triviale) et qu'une grande partie de la méthode devrait être rendue mathématique, ce qui aiderait ceux qui veulent sérieusement l'utiliser, même la partie qui reste fluide.

Display of graphics and their applications, as exemplified by 2-categories and the Hegelian « taco » (1989)

Rapport entre Lawvere et Badiou sur Hegel. En sens inverse!

"Le compagnon « historique » du présent livre est Hegel, penseur par excellence de la corrélation dialectique entre être et être-là, entre essence et existence. C'est à sa *Science de la logique* qu'ici nous nous mesurons." (LdM p.110)

"Logiques des mondes est à L'Être et l'événement ce que la Phénoménologie de l'esprit de Hegel est à sa Science de la logique, et ce, bien que les ordres chronologiques soient inversés : une saisie immanente des données de l'être-là, un parcours local des figures du vrai et du sujet, et non une analytique déductive des formes de l'être." (LdM p.16)

La thèse est que le développement explicite et adéquat de la science de la connaissance nécessitera l'utilisation de la théorie mathématique des catégories. Même de l'intérieur l'expérience mathématique, seule cette théorie a approché un modèle *particulier* du général, suffisant comme fondement pour une explication *générale* de tous les particuliers. Née il y a 50 ans des besoins de la géométrie, la théorie des catégories a développé des notions telles que foncteur adjoint, topos, fibration, catégorie fermée, 2-catégorie, etc., afin de fournir :

(1) Un guide pour les complexes, mais très non arbitraires, constructions des concepts et de leurs interactions qui découlent de l'étude d'espace et de quantité.

Ce n'est que l'adhésion implacable aux besoins de ce sujet de base qui a rendu la théorie des catégories si bien déterminée et pourtant si puissante. Lorsque certaines écoles de théorie des catégories se sont égarées, c'est généralement parce qu'elles ont trop longtemps négligé cet objectif spécifique d'une meilleure étude [des notions] d'espace et de quantité, ou parce qu'elles ont ossifié une détermination partielle de ce qu'espace et quantité sont. Si nous remplaçons « espace et quantité » dans (1) ci-dessus par « tout objet d'étude sérieux », alors (1) devient ma définition de travail [working definition] de *logique objective*. Bien sûr, lorsqu'ils sont pris dans un sens philosophiquement approprié, l'espace et la quantité imprègnent tout domaine d'étude sérieux.

Tools for the advancement of Objective Logic: Closed Categories and Toposes (1994)

Fil conducteur de Lawvere: introduire le topos de Grothendieck Graphes comme catégorie de préfaisceaux² PSh(C) en prenant C comme la plus simple catégorie possible de sorte que :

- tout graphe puisse être pensé comme « récipient », et réalisé par recollements à partir des objets de &, objets qui viendront donc être nommés « figures génériques » ;
- les topologies de Grothendieck ne jouent pas un rôle déterminant pour la compréhension

Heuristique préalable.

• Posons que tout graphe peut-être obtenu par recollements divers de deux *figures génériques* qui sont le *point V* et la *flèche A*

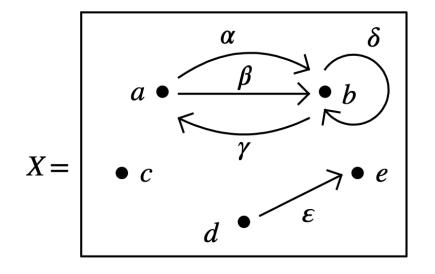
• Ainsi, dans un graphe G, les «figures de type A » sont rien d'autre que les flèches dans G

^{2.} Nous allons considérer, pour une catégorie petite \mathscr{C} , la catégorie PSh(\mathscr{C}) des foncteurs contravariants $\mathscr{C}^{op} \longrightarrow Sets$ (et des transformations naturelles entre ceux-ci).

Graphes comme topos de Grothendieck (à la Lawvere). Heuristique préalable.

• Posons que tout graphe peut-être obtenu par recollements divers de deux *figures génériques* qui sont le *point V* et la *flèche A*

Exemple: le graphe X ci-dessous consiste en 5 V-figures, notées a, b, c, d, e, et 5 A-figures, notées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$:



On va *extraire* les sources et cibles des flèches via des *actions à droite*:

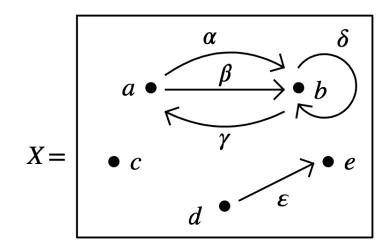
 $\alpha.s = a$ se lit « la source de α est a »

et le « plan de recollement » suivra des relations « d'incidence »

Graphes comme topos de Grothendieck (à la Lawvere). Heuristique préalable.

• Posons que tout graphe peut-être obtenu par recollements divers de deux *figures génériques* qui sont le *point V* et la *flèche A*

Exemple: le graphe X ci-dessous consiste en 5 V-figures, notées a, b, c, d, e, et 5 A-figures, notées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$:



Relations d'incidence = actions à droite par s et t:

$$(\alpha.t \text{ se lit } \ll \text{ la cible de } \alpha \gg)$$

$$\alpha.s = \beta.s = \gamma.t = a$$

$$\alpha.t = \beta.t = \gamma.s = \delta.s = \delta.t = b$$

$$\varepsilon.s = d$$

$$\varepsilon.t = e$$

Construction de *C*.

- Tout graphe consiste en un ensemble V de sommets et A de flèches
- Posons \mathscr{C} avec uniquement deux objets, V et A, un pour chaque « type » de figure
- Le graphe $G = (\alpha: a \to b)$ possède une A-figure (la flèche α) et deux V-figures (les sommets a et b)
- l'extraction s de la source a, et t de la cible b de la flèche α détermine deux fonctions $A \to V$.
- Posons \mathscr{C} avec uniquement deux flèches non triviales : $s, t: V \to A$ Le sens est inversé car on cherche à caractériser les graphes comme foncteurs *contravariants*!

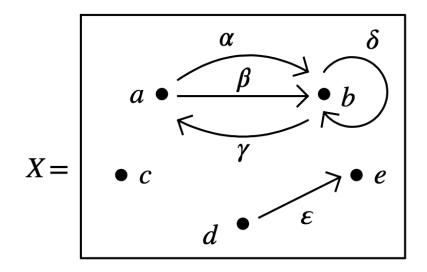
Au total la catégorie Graphes des graphes s'identifie à la catégories de préfaisceaux sur :

$$\mathscr{C} = \operatorname{id}_{V} \left(\underbrace{ V \xrightarrow{S} A \underbrace{ \operatorname{id}_{A}}_{t} \right) \operatorname{id}_{A}.$$

• Les figures génériques pour Graphes sont

Recollements et relations d'incidence. Comment formaliser catégoriquement les actions ?

• 5 V-figures, notées a, b, c, d, e, et 5 A-figures, notées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ + relations d'incidence



Relations d'incidence (actions à droite):

$$\alpha.s = \beta.s = \gamma.t = a$$

$$\alpha.t = \beta.t = \gamma.s = \delta.s = \delta.t = b$$

$$\varepsilon.s = d$$

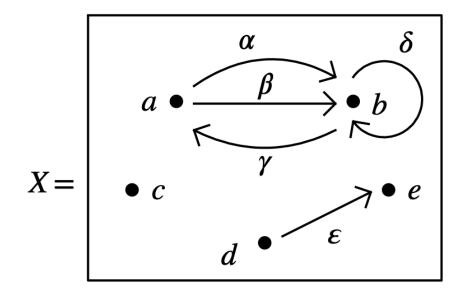
$$\varepsilon.t = e$$

• Les recollements de figures génériques se traduisent par la commutativité de diagrammes :

Notation : $\sigma: F \rightarrow X$, pour F = V, A figure générique de \mathscr{C} signifie « extraction d'une F-figure de X » ou encore « $\sigma \in_F X$ ». Pointillés car ici V, A sont des objets de \mathscr{C} alors que le « graphe » X est un objet de $PSh(\mathscr{C})$.

Exemple. X ci-dessous consiste en

- 5 V-figures, notées a, b, c, d, e, et 5 A-figures, notées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$
- les relations d'incidence suivantes (où α .s se lit « la source de α »)



Relations d'incidence (actions à droite):

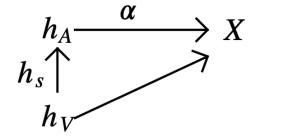
$$\alpha.s = \beta.s = \gamma.t = a$$

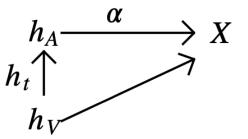
$$\alpha.t = \beta.t = \gamma.s = \delta.s = \delta.t = b$$

$$\epsilon.s = d$$

$$\epsilon.t = e$$

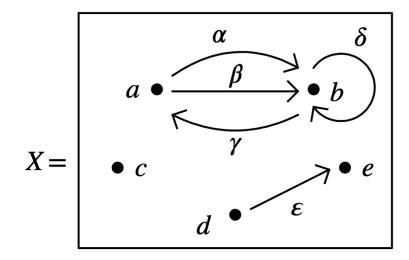
• (Yoneda) les flèches en pointillés traduisent en réalité les morphismes de préfaisceaux





Exemple. X ci-dessous consiste en

- 5 V-figures, notées a, b, c, d, e, et 5 A-figures, notées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$
- les relations d'incidence suivantes (où α .s se lit « la source de α »)



Relations d'incidence (actions à droite):

$$\alpha.s = \beta.s = \gamma.t = a$$

$$\alpha.t = \beta.t = \gamma.s = \delta.s = \delta.t = b$$

$$\varepsilon.s = d$$

$$\varepsilon.t = e$$

Intuition : σ appartient au $r\acute{e}cipient^3$ au niveau F dans le « \mathscr{C} -ensemble X »

Ainsi, le point de vue « préfaisceau » pour le graphe X consiste à le penser comme « récipient »: ici en l'occurrence, celui à deux niveaux (un pour V et un autre pour A):

$$\frac{V \rightarrow X}{a, b, c, d, e} \qquad \frac{A \rightarrow X}{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon} \qquad + \text{ diagrammes commutatifs}$$

^{3.} Un objet X de $PSh(\mathscr{C})$ peut être considéré comme une *action à droite* de \mathscr{C} sur un ensemble S qui se voit donc décomposé en une partition paramétrisée par les objets de \mathscr{C} .

Au total, le tableau suivant récapitule les trois vues présentées ci-dessus :

Graphiquement	Algébriquement	Catégoriquement	
\boldsymbol{X}	$X_1 \xrightarrow{\underline{u}} X_0$	$V \xrightarrow{S} A$	
$ \begin{array}{c} \alpha \\ $	$X_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ $X_0 = \{a, b, c, d, e\}$ + relations d'incidence : $u(\alpha) = u(\beta) = a, \dots$	V-figures A-figures $ \frac{V \rightarrow X}{a,b,c,d,e} \qquad \frac{A \rightarrow X}{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon} \\ + \text{diagrammes commutatifs} $	

Plans de recollements. Diagrammes commutatifs qui permettent de reconstruire totalement un graphe!

Graphe	Plan de Recollement	
$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	$ \begin{array}{c cccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & $	
$ \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{x} \bullet \\ \bullet \xrightarrow{y} \bullet \end{array} $	$ \begin{array}{cccc} A & & & \\ & & X \\ & X \\ & &$	
$\sum_{k=1}^{\infty} x$	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
$\begin{array}{c} x \nearrow \bullet \searrow y \\ \bullet \longrightarrow \overline{z} \longrightarrow \bullet \end{array}$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	

Questions:

- 1. Comment savoir quand une catégorie est en réalité une catégorie de préfaisceaux ?
- 2. Comment déterminer la catégorie de figures génériques d'une catégorie de préfaisceaux ?

Justification mathématique. Hautement non triviale! Objet d'articles de Lawvere depuis 1973 (complétions de Cauchy) et forte utilisation de SGA4! (pas le sujet de cet exposé)

- En particulier, faire de la boucle une figure générique donne une catégorie différente de Graphes
- Les plans de recollement sont en réalité des colimites : ni trop ni trop peu d'informations pour construire tout graphe

Poursuite de notre exposé. Nous savons désormais passer des graphes aux préfaisceaux.. et l'inverse?

Lawvere : inversement, on détermine le graphe sous-jacent à un préfaisceau X comme suit :

- Répartissons le récipient X en deux niveaux, un pour chaque figure générique V et A.
- Pour chaque niveau, nous comptons le nombre de morphismes existants dans \mathscr{C} de cible V puis A.
- Pour chaque morphisme compté, nous regardons l'action qu'il définit

Rappel : h_V est le préfaisceau image de V par le plongement de Yoneda

$$\mathscr{C} \to \mathrm{PSh}(\mathscr{C}); F \mapsto h_F = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,F)$$

Exemple de h_V :

- un seul morphisme $V \rightarrow V$ (l'identité) et aucun morphisme $A \rightarrow V$
- l'identité traduit l'action triviale

Le graphe de h_V consiste donc en une V-figure et zéro A-figures. On récapitule:

$$\frac{V \rightarrow h_V}{V \xrightarrow{\text{id}_V} V} \qquad \frac{A \rightarrow h_V}{A \rightarrow V} \\
\underline{V \rightarrow V} \qquad Das de A-figure \qquad h_V = \boxed{\bullet}$$

Lawvere : inversement, on détermine le graphe sous-jacent à un préfaisceau X comme suit :

- Répartissons le récipient X en deux niveaux, un pour chaque figure générique V et A.
- Pour chaque niveau, nous comptons le nombre de morphismes existants dans \mathscr{C} de cible V puis A.
- Pour chaque morphisme de A-figures compté, nous regardons l'action qu'il définit

Exemple de h_A :

- deux morphismes $V \rightarrow A$ (s et t) et un morphisme $A \rightarrow A$ (l'identité)
- l'identité traduit l'action $id_A.s = s$ et $id_A.t = t$

Le graphe de h_V consiste donc en deux V-figures et une A-figure les reliant. On récapitule:

$$\frac{V \rightarrow h_A}{s, t: V \Rightarrow A} \qquad \frac{A \rightarrow h_A}{A \xrightarrow{id_A} A} \qquad h_A = \boxed{\bullet \longrightarrow \bullet}$$

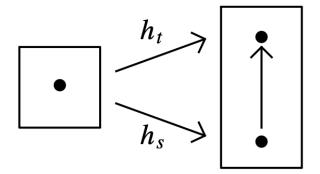
$$\frac{A \rightarrow h_A}{A \rightarrow A} \qquad h_A = \boxed{\bullet} \longrightarrow \bullet$$

$$\frac{A \rightarrow h_A}{A \rightarrow A} \qquad h_A = \boxed{\bullet} \longrightarrow \bullet$$

Lawvere : inversement, on détermine le graphe sous-jacent à un préfaisceau X comme suit :

- Répartissons le récipient X en deux niveaux, un pour chaque figure générique V et A.
- Pour chaque niveau, nous comptons le nombre de morphismes existants dans \mathscr{C} de cible V puis A.
- Pour chaque morphisme de A-figures compté, nous regardons l'action qu'il définit

Remarquons enfin qu'il y a exactement deux morphismes non triviaux : $h_s, h_t: h_V \longrightarrow h_A$ de pré-faisceaux :



Opérations toposiques.

Fil conducteur : déterminer...

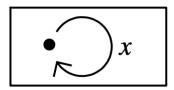
- limites : objet terminal, produit, égaliseur, image inverse, pullback ;
- colimites : objet initial, coproduit, co-égaliseur, image directe, pushout;

... directement par un décompte de figures génériques et du bon plan de recollement.

Objet Final. On définit l'objet final 1 comme le \mathscr{C} -ensemble ayant exactement une F-figure pour chaque figure générique F (ici en l'occurence F = V, A), avec l'action triviale.

Immédiatement:

- pour tout \mathscr{C} -ensemble X, un seul morphisme $X \longrightarrow \mathbf{1}$.
- le graphe final n'est autre que la boucle :



Opérations toposiques.

Produits. On définit le produit $X \times Y$ de deux \mathscr{C} -ensembles X et Y comme le \mathscr{C} -ensemble dont les F-figures sont des couples (σ, τ) , où σ (resp. τ) est une F-figure de X (resp. de Y), avec l'action,

Décompte de figures	Relations d'incidence
$\frac{(\sigma,\tau):h_F\longrightarrow X\times Y}{\sigma:h_F\to X,\qquad \tau:h_F\to Y}$	$ \begin{array}{c} F \xrightarrow{(\sigma,\tau)} X \times Y \\ f \uparrow \xrightarrow{(\sigma,\tau)} f = (\sigma \cdot \chi f, \tau \cdot \chi f) \end{array} $

Exemple : le produit $h_A \times h_A$:

Décompte de figuresRelations d'incidence
$$V \rightarrow h_A \times h_A$$

 $V \rightarrow h_A$
 $V \rightarrow h_A$ <

Si on note s et t les deux V-figures de h_A , on peut alors noter (s,s),(s,t),(t,s) et (t,t) les 4 V-figures de $h_A \times h_A$.

Opérations toposiques.

Exemple : le produit $h_A \times h_A$:

Décompte de figures		Relations d'incidence	
$\frac{V \rightarrow h_A \times h_A}{V \rightarrow h_A} \qquad V \rightarrow h_A}$ $4 V - \text{figures}$	$\frac{A \rightarrow h_A \times h_A}{A \rightarrow h_A}$ une A-figure	$ \begin{array}{c} A & \xrightarrow{(1_A, 1_A)} h_A \times h_A \\ s & \uparrow & \searrow \\ V & (s, s) \end{array} $	$ \begin{array}{c} A & \xrightarrow{(1_A, 1_A)} h_A \times h_A \\ t & \downarrow & \downarrow \\ V & \downarrow & \downarrow \\ V & \downarrow & \downarrow \\ V & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ $

Si on note s et t les deux V-figures de h_A , on peut alors noter (s,s),(s,t),(t,s) et (t,t) les 4 V-figures de $h_A \times h_A$.

Relations d'incidence : la seule flèche de $h_A \times h_A$ a pour source (s, s) et pour cible (t, t) :

$$\uparrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

Sous-graphes. Sous-préfaisceau Y du préfaisceau X: une sous-famille close pour l'action à droite de \mathscr{C} .

Ici

$$\mathscr{C} = \operatorname{id}_{V}(\underbrace{V} \underbrace{V} \underbrace{V} \underbrace{A} \underbrace{V} \operatorname{id}_{A}$$

donc être clos selon l'action à droite se lit:

- si σ est une A-figure de Y (et donc aussi de X), alors le résultat des deux actions (au sens de X) σ_{X} et σ_{X} sont des V-figures de Y (et pas seulement de X).
- Autrement dit, si σ est une flèche de Y alors ses deux sommets extrémités sont aussi dans Y.

On retrouve très naturellement notre définition de sous-graphe!

Assumons l'existence du classifiant de sous-objets Ω pour notre catégorie Graphe, vue à son tour comme catégorie $PSh(\mathscr{C})$. Cet objet classifie les sous-objets d'un objet X donné via la bijection

$$\frac{\phi: X \longrightarrow \Omega}{Y \hookrightarrow X}. \tag{2}$$

Dans le cas où le morphisme ϕ est donné, la propriété disant que Ω classifie les sous-objets de X se traduit informellement ici en disant que

- Ω possède une valeur de vérité T_F pour chaque figure générique F = V, A
- ϕ (et donc Y) est complètement déterminé par les F-figures qui sont envoyées vers les valeur de vérité T_F correspondantes.

Construisons le graphe Ω : niveaux du récipient donnés par figures génériques + relations d'incidence.

$$\begin{array}{c|c}
\sigma: V \longrightarrow \Omega \\
\hline
\bar{\sigma}: h_V \to \Omega \\
\hline
\sigma \hookrightarrow h_V
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\sigma': A \longrightarrow \Omega \\
\hline
\bar{\sigma}': h_A \to \Omega \\
\hline
\sigma' \hookrightarrow h_A
\end{array}$$

Construisons le graphe Ω : niveaux du récipient donnés par figures génériques + relations d'incidence.

$$\frac{\sigma: V \rightarrow \Omega}{\bar{\sigma}: h_V \rightarrow \Omega} \qquad \frac{\sigma': A \rightarrow \Omega}{\bar{\sigma}': h_A \rightarrow \Omega} \\
\sigma \hookrightarrow h_V \qquad \overline{\sigma' \hookrightarrow h_A}$$

Figures de Ω consistent en tous les sous-graphes de h_V et h_A . Pour h_V , nous avons :

$$\perp_V = \boxed{} < \boxed{} = \mathsf{T}_V$$

Pour h_A , nous avons :

Au total : deux sommets et cinq flèches, et la relation d'ordre partiel est donnée par le diagramme de Hasse

$$\frac{V \longrightarrow \Omega}{\bot_{V}, \top_{V}} \qquad \frac{A \longrightarrow \Omega}{\bot_{A}, \top_{s}, \top_{t}, t_{A}, \top_{A}} \qquad \qquad \downarrow_{V}^{\top_{V}} \qquad \uparrow_{s} \longrightarrow \uparrow_{t}$$

Construisons le graphe Ω : niveaux du récipient donnés par figures génériques + relations d'incidence.

$$\frac{\sigma: V \to \Omega}{\bar{\sigma}: h_V \to \Omega} \qquad \frac{\sigma': A \to \Omega}{\bar{\sigma}': h_A \to \Omega} \\
\frac{\bar{\sigma}: h_V \to \Omega}{\sigma \hookrightarrow h_V} \qquad \frac{\bar{\sigma}': h_A \to \Omega}{\sigma' \hookrightarrow h_A}$$

Relations d'incidence: sources et cibles (parmi \bot_V , \top_V) des flèches (parmi \bot_A , \top_s , \top_t , t_A , \top_A) données par actions à droite, déterminés à leur tour par «image inverse»: soit $f: X \to Y$ morphisme de graphes et A sousgraphe de Y. L'image inverse $f^*(A)$ de A suivant f est le sous graphe de X dont les F-figures sont celles de X dont les images par f sont des F-figures de A:

Exemple:

Construisons le graphe Ω : niveaux du récipient donnés par figures génériques + relations d'incidence.

$$\frac{\sigma: V \longrightarrow \Omega}{\overline{\sigma}: h_V \to \Omega} \qquad \frac{\sigma': A \longrightarrow \Omega}{\overline{\sigma}': h_A \to \Omega} \\
\overline{\sigma} \hookrightarrow h_V \qquad \overline{\sigma}' \hookrightarrow h_A$$

Relations d'incidence : sources et cibles (parmi \bot_V, \top_V) des flèches (parmi $\bot_A, \top_s, \top_t, t_A, \top_A$) données par actions à droite, déterminés à leur tour par « image inverse » : selon $h_s, h_t: h_V \longrightarrow h_A$!

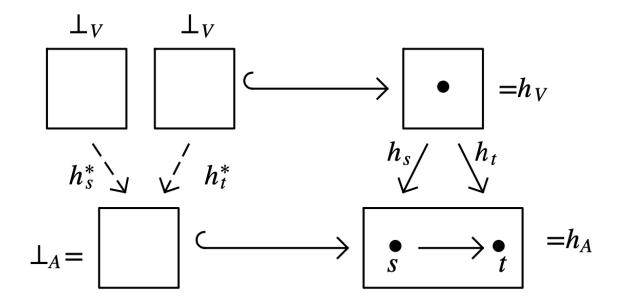
- Pas de morphisme non trivial de cible h_V , donc les relations d'incidence de \bot_V , \top_V sont triviales;
- Notons P un quelconque graphe parmi \bot_A , \top_s , \top_t , t_A , \top_A . Déterminer les relations d'incidence pour P revient à déterminer P.s et P.t, ce qui revient à déterminer les images inverses $s^*(P)$ et $t^*(P)$ dans

Construisons le graphe Ω : niveaux du récipient donnés par figures génériques + relations d'incidence.

$$\begin{array}{c|c} \sigma: V \longrightarrow \Omega & \sigma': A \longrightarrow \Omega \\ \hline \bar{\sigma}: h_V \to \Omega & \bar{\sigma}': h_A \to \Omega \\ \hline \sigma \hookrightarrow h_V & \sigma' \hookrightarrow h_A \end{array}$$

Relations d'incidence: sources et cibles (parmi \bot_V, \top_V) des flèches (parmi $\bot_A, \top_s, \top_t, t_A, \top_A$) données par actions à droite, déterminés à leur tour par « image inverse » : selon $h_s, h_t: h_V \longrightarrow h_A$!

• Pour $P = \bot_A : \bot_A$ n'a pas de sommets, donc $\bot_A . s = \bot_A . t = \bot_V :$



• Donc les relations d'incidence pour \perp_A réalisent une boucle basée en \perp_V

Construisons le graphe Ω : niveaux du récipient donnés par figures génériques + relations d'incidence.

$$\frac{\sigma: V \to \Omega}{\bar{\sigma}: h_V \to \Omega} \qquad \frac{\sigma': A \to \Omega}{\bar{\sigma}': h_A \to \Omega} \\
\sigma \hookrightarrow h_V \qquad \qquad \sigma' \hookrightarrow h_A$$

Relations d'incidence : sources et cibles (parmi \bot_V, \top_V) des flèches (parmi $\bot_A, \top_s, \top_t, t_A, \top_A$) données par actions à droite, déterminés à leur tour par « image inverse » : selon $h_s, h_t: h_V \longrightarrow h_A$!

• Pour $P = T_A$: comme $T_A = h_A$, les images inverses données par h_s, h_t , d'où que $T_A.s = T_A.t = T_V$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & T_V & T_V \\
\hline
 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\hline
 & h_s & \downarrow & h_t \\
\hline
 & h_s & \downarrow & h_t \\
\hline
 & T_A = & \bullet & \bullet \\
\hline
 & S & \bullet & t
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & T_V & T_V \\
\hline
 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\hline
 & h_s & \downarrow & h_t \\
\hline
 & h_t & \downarrow & h_t \\
\hline
 & h_t & \downarrow & h_t \\
\hline
 & \bullet & \bullet & \bullet \\
\hline
 & S & \bullet$$

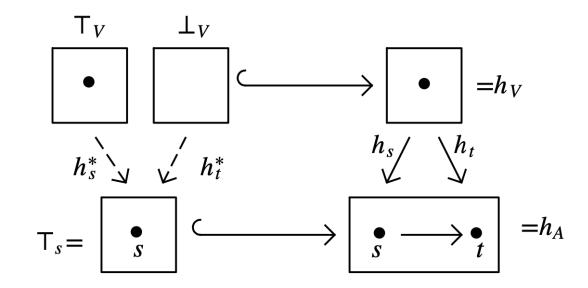
• Donc les relations d'incidence pour T_A réalisent une boucle basée en T_V .

Construisons le graphe Ω : niveaux du récipient donnés par figures génériques + relations d'incidence.

$$\frac{\sigma: V \rightarrow \Omega}{\bar{\sigma}: h_V \rightarrow \Omega} \qquad \frac{\sigma': A \rightarrow \Omega}{\bar{\sigma}': h_A \rightarrow \Omega} \\
\bar{\sigma} \hookrightarrow h_V \qquad \bar{\sigma}' \hookrightarrow h_A$$

Relations d'incidence :

• Pour $P = T_s$: T_s a un seul sommet, envoyé par h_s vers le seul sommet de T_s , on conclut que $s^*(T_s) = h_V$ i.e. $T_s.s = T_V$. Il est envoyé par h_t vers T_t et non pas vers T_s . Donc $T_s.t = \bot_V$.



• Donc les relations d'incidence pour T_s réalisent une flèche de \bot_V vers T_V .

Construisons le graphe Ω : niveaux du récipient donnés par figures génériques + relations d'incidence.

$$\begin{array}{c|c} \sigma: V \longrightarrow \Omega & \sigma': A \longrightarrow \Omega \\ \hline \bar{\sigma}: h_V \to \Omega & \bar{\sigma}': h_A \to \Omega \\ \hline \sigma \hookrightarrow h_V & \sigma' \hookrightarrow h_A \end{array}$$

Relations d'incidence :

• Pour $P = T_t : T_t$ a un seul sommet, envoyé par h_t vers le seul sommet de T_t , on conclut que $t^*(T_t) = h_V$ i.e. $T_t : t = T_V$. Il est envoyé par h_s vers T_s et non pas vers T_t . Donc $T_t : s = \bot_V$.

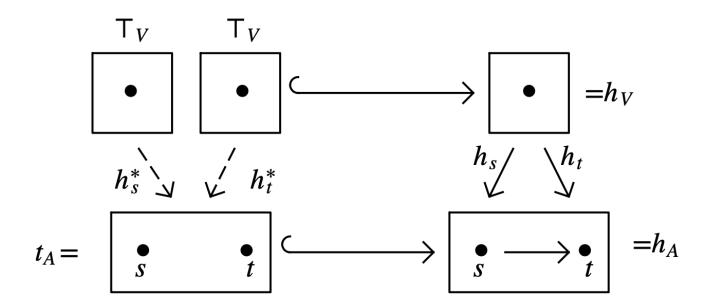
$$\begin{array}{c|c}
 & \downarrow_{V} & \uparrow_{V} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{s}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} \\
\hline
 & \downarrow_{h_{t}} &$$

• Donc les relations d'incidence pour T_s réalisent une flèche de T_V vers \bot_V .

Construisons le graphe Ω : niveaux du récipient donnés par figures génériques + relations d'incidence.

Relations d'incidence :

• Pour $P = t_A$: le sommet s de t_A est envoyé par h_s vers le seul sommet de h_V . Le sommet t de t_A n'est envoyé par h_s vers aucun sommet de h_V . D'où que $t_A.s = T_V$. Ensuite, le sommet t de t_A est envoyé par h_t vers le seul sommet de T_V , d'où que $t_A.t = T_V$. Finalement, le sommet s de t_A n'est envoyé par h_t vers aucun sommet de h_V .

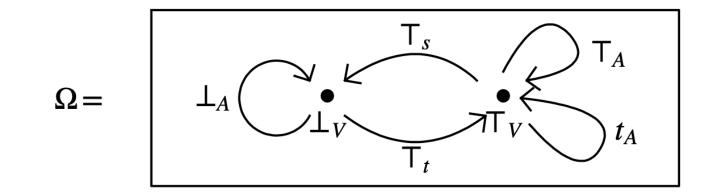


• Donc les relations d'incidence pour t_A réalisent une nouvelle boucle basée en T_V .

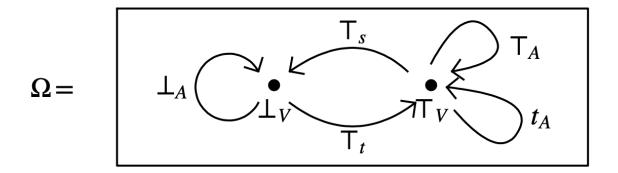
Au total, les relations d'incidence donnent :

- pour \perp_A : une boucle basée en \perp_V
- pour T_A : une boucle basée en T_V .
- pour T_s : une flèche de \bot_V vers T_V .
- pour T_s : une flèche de T_V vers \bot_V .
- pour t_A : une nouvelle boucle basée en \top_V .

Le classifiant de sous-objets de Graphes est :



Le classifiant de sous-objets de Graphes est :



On voit que Ω est connexe! Evoque un « air hégélien »...

« Quand on dit qu'on sait quelque chose faussement, cela signifie que le savoir est en non-identité avec sa substance. Mais précisément cette non-identité est l'acte de différenciation en général, qui est un moment essentiel. Certes, de cette différenciation advient leur identité, et cette identité devenue est la vérité. Mais elle n'est pas la vérité au sens où l'on se serait débarrassé de la non-identité, comme on jette les scories séparées du métal pur, ni non plus comme on rejette l'outil du récipient terminé : la non-identité au-contraire est elle-même au titre du négatif, du Soi-même, encore immédiatement présente dans le vrai. »

Phénoménologie de l'Esprit

... qui s'avère en fait trompeur!

 Ω comme classifiant de sous-graphes. Considérons le morphisme φ de graphes

Il est clair que

• $\varphi(\alpha)$ est parmi \bot_A , \top_s , \top_t , t_A , \top_A où

• $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont parmi \bot_V, \top_V

Ainsi, nous obtenons les relations suivantes:

- la flèche f est dans $\varphi(\alpha)$ si, et seulement si, $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha. \mathrm{Id}_A) = \mathsf{T}_A$
- la source s est dans $\varphi(\alpha)$ si, et seulement si, $\varphi(a) = \varphi(\alpha.s) = T_V$
- la cible t est dans $\varphi(\alpha)$ si, et seulement si, $\varphi(b) = \varphi(\alpha.t) = T_V$

Tout morphisme de graphes est complètement déterminé une fois qu'on sait quelles F-figures sont envoyées vers T_F pour toute figure générique F, ici en l'occurence V et A.

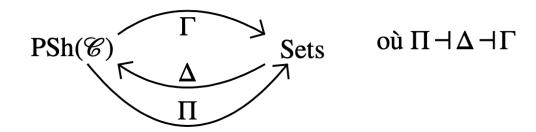
Exemple: supposons que b est le seul sommet envoyé vers \top_V . Alors $\varphi(\alpha)$ possède le sommet cible et rien d'autre : $\varphi(\alpha) = \top_t$. Donc $\varphi(a) = \bot_V$.

Vers une axiomatique de la cohésion - Grande Logique Géométrique.

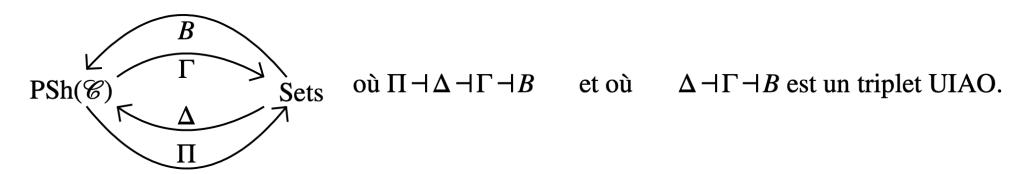
Rappel: un Aufhebung est possibilisé par des UIAO

$$\mathscr{C} \stackrel{\longleftarrow}{\longleftarrow} \mathscr{C}' \stackrel{\longleftarrow}{\longleftarrow} \mathscr{D}$$

Le topos des graphes entre dans un triplet d'adjoints avec le topos des ensembles



Problème : ceci n'est pas un UIAO! La mathématique toposique nous dira que ce qu'on cherche c'est



Obstruction : La catégorie Graphe (vue comme $PSh(\mathscr{C})$ pour $\mathscr{C} = (\bullet \Rightarrow \bullet)$) n'admet pas d'adjoint à droite B. ... l'« air hégélien » n'en est, en effet, pas un !

Vers une axiomatique de la cohésion - Grande Logique Géométrique.

Au total donc, deux obstructions:

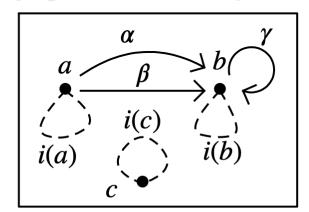
- une au niveau de l'infra-structure, nous disant que la négation co-Heyting, n'étant pas fonctorielle, ne s'internalise pas en endomorphisme du classifiant des sous-objets;
- une au niveau de la supra-structure, nous disant que l'inexistence de l'adjoint B à droite de Γ impossibilise que le topos Graphe puisse être considéré comme modèle d'une Grande Logique telle que Lawvere la conçoit.

Relève par Lawvere de la deuxième obstruction.

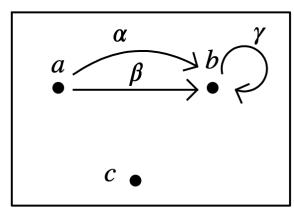
Considérer les graphes réflexifs (c'est à dire, avec des boucles distinguées pour tous les points)!

• Tout graphe irréflexif admet un graphe réflexif sous-jacent :

graphe réflexif sous-jacent



graphe irréflexif



Fil de Lawvere : on a bien existence du foncteur B pour RGraphe \longrightarrow Sets et donc possibilité d'Aufhebung!

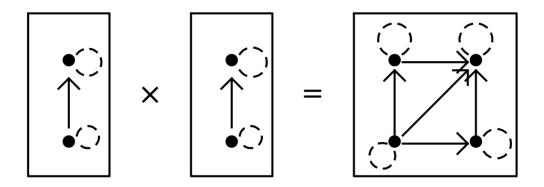
Vers une solution : les graphes réflexifs.

A quel titre comparer les topos Graphe et RGraphe?

Même classifiant de sous-objets!

$$\Omega_{\text{RGraphe}} = \begin{bmatrix} \bot_{A} & \top_{S} & \top_{V} & \top_{T} \\ & & \top_{t} & \top_{V} & \top_{T} \\ & & \top_{t} & \end{bmatrix}$$

• Produit $h_A \times h_A$ déjà très différent dans RGraphe :



Lawvere : les distinctions entre Graphe et RGraphe sont surtout qualitatives!

Vers une Grande Logique Géométrique.

Dans le remarquable article [QDC] (Quotients of Decidable Objects, Cambridge) il est fait mention d'une certaine différence epsilonesque entre les classes de topos. Cet epsilon est en quelque sorte la victoire de la géométrie sur le logicisme étroit et c'est ce que [QDB] (Qualitative Distinctions, Boulder) s'efforce de clarifier.

Lawvere, Some thoughts on the future of category theory, 1991

- la référence [QDB] que Lawvere avance n'est rien d'autre que son papier de 1989 Qualitative distinctions between some toposes of generalized graphs, lui même développant les idées de son article de 1986 Categories of spaces may not be generalized spaces as exemplified by directed graphs.
- Déjà en 1986 : tentative d'une axiomatique de la cohésion
- Pas tout à fait au point : elle articule que la différence entre une catégorie d'espaces et un espace généralisé tient en ce que son classifiant de sous-objets est « contractile »
- Problème : Ω est connexe et contractile pour RGraphe mais aussi pour Graphe ! Il faut donc plus.

..mais il est manifeste que ce que Lawvere cherche dans son programme est bien une Grande Logique Géométrique.

Vers une Grande Logique Géométrique. D'où une esquisse de programme

- 1. Dialectique aux morphismes géométriques et logiques entre topos
 - nature géométrique des catégories d'« Être »
 - nécessité des morphismes *logiques* pour exprimer le *forcing* de Cohen
 - Unité dialectique entre morphismes logiques et géométriques
- 2. Graphes réflexifs (au dessus des ensembles) comme modèle de topos d'« Être »
 - Corrélation avec triplets d'adjoints en situation UIAO et avec points de Lawvere (i.e. points des figures génériques)
 - Description des opérations toposiques restantes (i.e. pullback, objets puissance,..) qui ont une signification philosophique (c.f. *Logiques des Mondes*) éclaircissements sur *Topos*.
 - Différences entre « gros » topos, vus comme « catégories d'espaces », et « petit » topos, vus comme « espaces généralisés »
- 3. Graphes réflexifs comme modèle de topos de cohésion
 - Des catégories d'Être aux catégories de cohésion; connexité de Ω et Nullstellensatz
 - Exprimer Hegel: Qualité, Quantité, Extensivité, Intensivité
 - Nécessité des topos non-classiques (i.e. non Booléens)

...Quelles conséquences pour

- une intellectualité mathématique contemporaine?
- une philosophie conditionnée (c.f. Badiou) sur la mathématique de Lawvere?