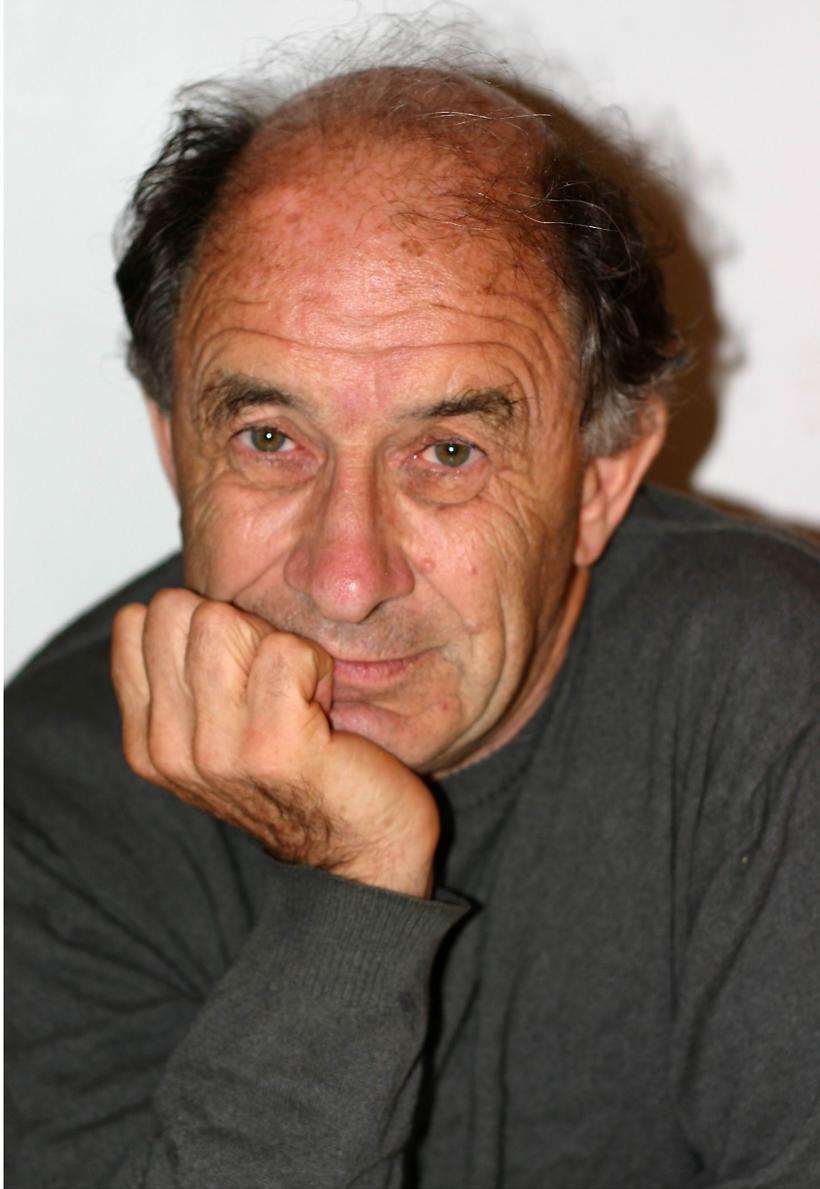


*La raison topologique (V.I.  
Arnold) du théorème  
d'impossibilité d'Abel*

Martin Gonzalez

Séminaire *mamuphi* 2023-202<sup>4</sup>



TeAM  
V.B. AlekseevYYePG  
Abel's Theorem  
in Problems and Solutions  
Based on the lectures of Professor V.I. Arnold

Digitally signed by TeAM YYePG  
DN: cn=TeAM YYePG, c=US,  
o=TeAM YYePG, ou=TeAM  
YYePG, email=yyepg@msn.com  
Reason: I attest to the accuracy  
and integrity of this document  
Date: 2005.01.23 16:28:19 +08'00'

Kluwer Academic Publishers

The cover features two geometric diagrams. The upper diagram is a 3D wireframe of a dodecahedron with some edges highlighted in orange. The lower diagram shows a stack of three white sheets of paper with dashed lines representing curves or paths across them, set against a grey background.

# Plan en Forme Sonate

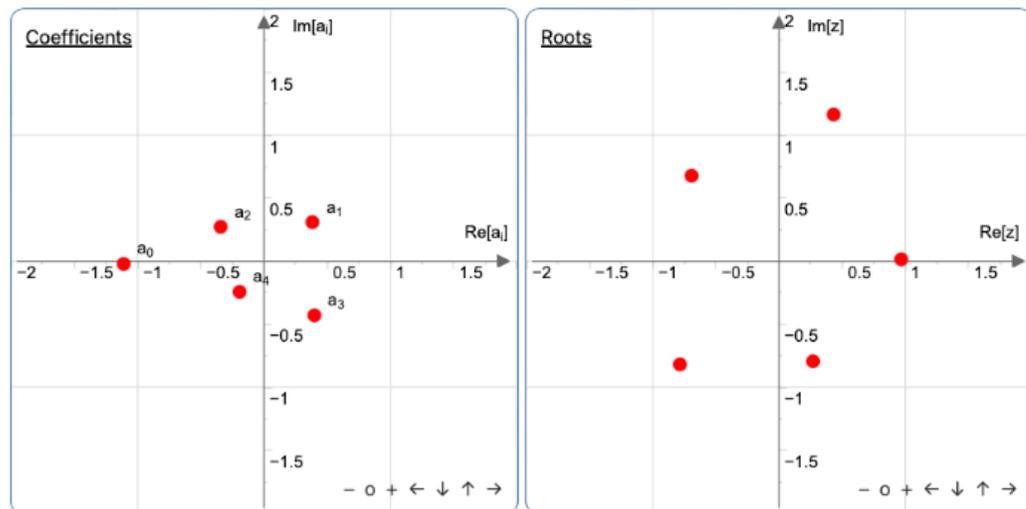
- 1. Exposition** élémentaire de l'approche d'Arnold et preuve préliminaire
  1. Boucles de coefficients et de solutions d'une équation quintique
  2. Commutateurs de chemins et racines n-ièmes
  3. Intermède topologique
  4. Obstruction *topologique* à la résolution *algébrique* de la quintique générale
- 2. Développement**
  1. Des fonctions multi-valuées aux surfaces de Riemann
  2. Propriété de Monodromie
  3. Arithmétique géométrique de surfaces et groupes de monodromie
- 3. Ré-exposition** de la preuve (+ coda polyphonique)

# Exposition

**Le problème général.** Intéressons nous à la représentation des solutions de l'équation quintique

$$P(x) := x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1)$$

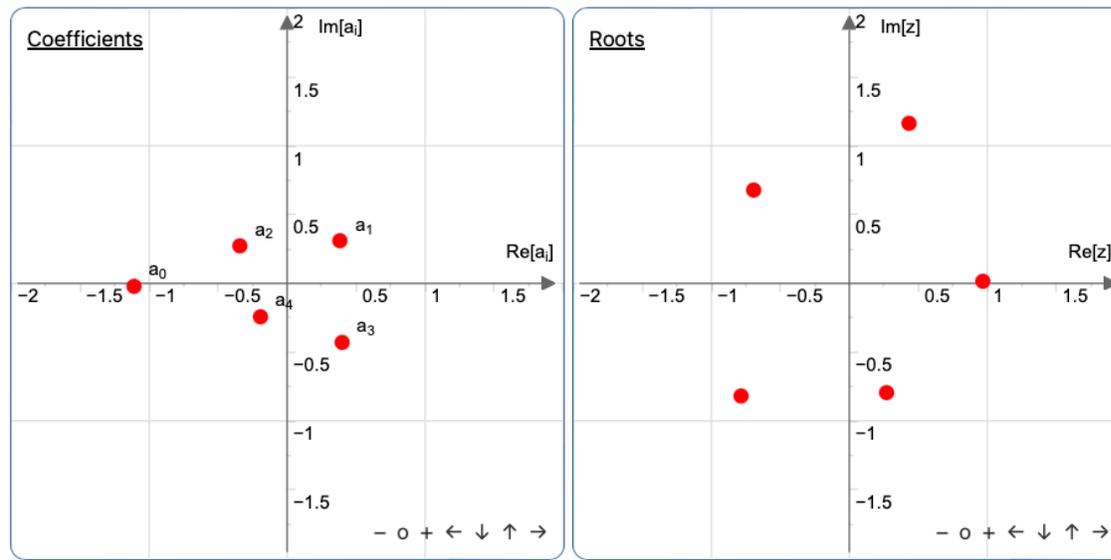
**L'approche d'Arnold (1963).** Commençons par situer les coefficients et solutions sur deux plans différents



Ensuite, bougeons continument chacun des coefficients  $a_4, \dots, a_0$  de  $P$  le long de boucles fermées et étudions ce qui arrive aux solutions de l'équation ce faisant.

- D'une part, chaque coefficient voyage sur le plan complexe pour revenir à sa place et donc, en fin de trajet, ces coefficients déterminent bien le même polynôme  $P$ .
- D'autre part, en cours de trajet, ces cheminements de coefficients entraînent à leur tour des cheminements des solutions de l'équation 1.

Le constat qui guidera notre exposition est que, si bien l'ensemble des solutions revient également à lui-même en fin de parcours, *chaque solution ne revient pas nécessairement à sa valeur d'origine.*



**Fonctionnement de l'approche d'Arnold.** Notre stratégie pour démontrer l'irrésolubilité par radicaux de la quintique sera de construire intelligemment des chemins fermés au niveau des coefficients de sorte que

1. *toute* formule candidat-solution faisant intervenir uniquement  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ , et  $\sqrt{\quad}$  fasse revenir ses valeurs à leur position initiale via ces chemins,
2. le chemin induit au niveau des solutions de l'équation par ces mêmes chemins permute *au moins* deux de ces solutions.

Au total, ce faisant, nous serions en état d'écartier ces formules comme candidats potentiels pour représenter de telles solutions en toute leur généralité.

**Permutations des solutions.** On peut facilement construire des chemins fermés au niveau des coefficients donnant lieu n'importe quelle permutation des solutions.

**Une première élimination.** Il semble « évident » sera que toute formule faisant intervenir uniquement  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  est automatiquement exclue comme candidat-solution (c'est déjà le cas pour l'équation quadratique).

- Pas si évident: cela se justifie en ce que  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  constituent toutes des fonctions d'une grandeur complexe qui sont continues et *uni-valuées*. (On y reviendra...)
- D'où que tout va se jouer sur la capacité des racines  $n$ -ièmes à possibiliser les formules exprimées par radicaux à être ou non véritablement des candidats-solutions.

Nous allons compter le nombre de racines  $n$ -ième emboîtées figurant sur les formulations des candidats. Exemple:

- racine *simple*: de la forme  $A + \sqrt[n]{B}$
- racine *2-emboîtée*: de la forme  $A + \sqrt[n]{B + \sqrt[m]{C}}$  (et ainsi de suite)

Ici  $A, B, C \dots$  sont des combinaisons des coefficients  $a_4, \dots, a_0$  uniquement faites  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ .

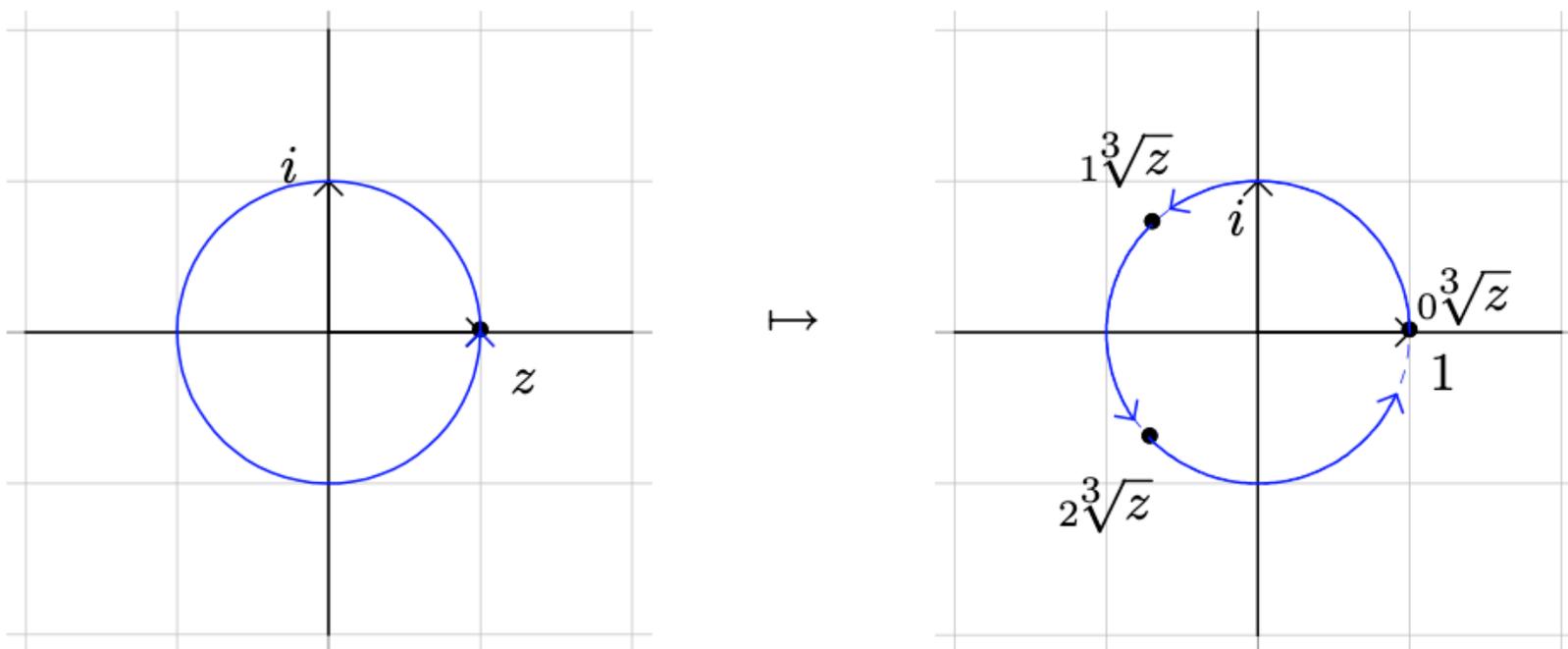
**Exclusion des racines simples comme candidats-solutions.** Prenons arbitrairement une expression

$$\hat{x} = \sqrt[3]{7a_2 - 1} + a_3 a_2.$$

Question: est-il possible que  $\hat{x}$  soit bien candidat-solution de l'équation quintique?

Soit  $z = r e^{i\theta} \neq 0$ . Alors

- $\sqrt[3]{z}$  admet trois valeurs-images différentes:  ${}_k\sqrt[3]{z} := \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\theta+2\pi k}{3}}$ , pour  $k = 0, 1, 2$ .
- L'image d'une boucle basée en  $z$  faisant un tour autour de 0, produit trois chemins



**Exclusion des racines simples comme candidats-solutions.** Prenons arbitrairement une expression

$$\hat{x} = \sqrt[3]{7a_2 - 1} + a_3 a_2.$$

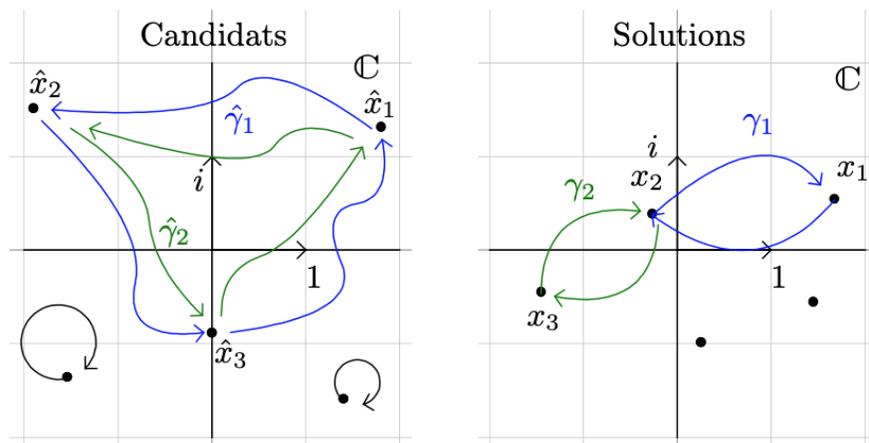
Question: est-il possible que  $\hat{x}$  soit bien candidat-solution de l'équation quintique?

Sachant que la racine cubique est 3-valuée,  $\hat{x}$  spécifie en réalité 3 candidats-solutions  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  et  $\hat{x}_3$ . Nous allons répondre négativement en

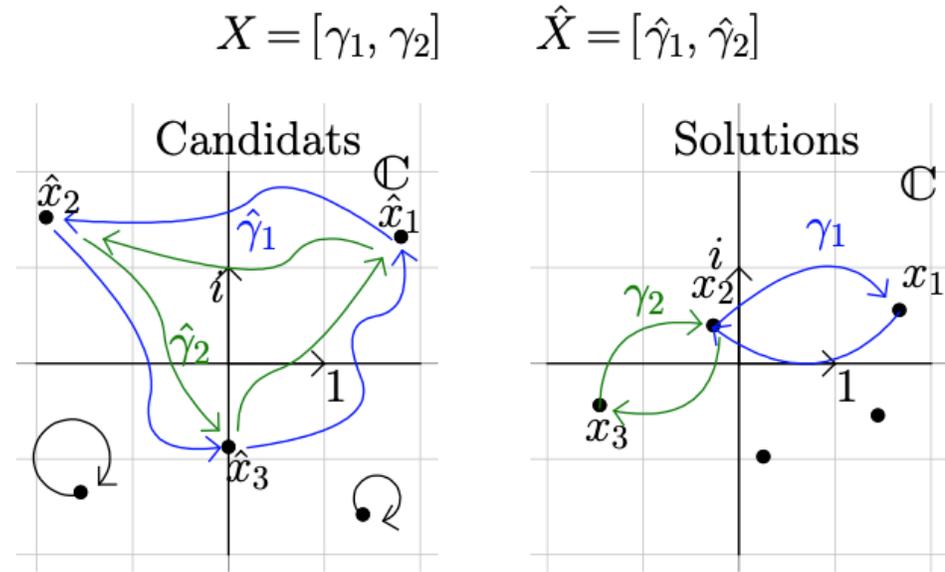
- A) montrant que les valeurs de la racine simple  $\hat{x}$  reviennent à leur place par toute action de *commutateurs de chemins*

$$[\gamma_1, \gamma_2] := \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2^{-1}$$

- B) exhibant un exemple où cette même action permute les solutions de l'équation donnée.



**Exclusion des racines simples.** Un exemple numérique (dû à Boaz Katz) exhibe des commutateurs des chemins



Or: le chemin  $X$  ne fait pas revenir les solutions à leur place initiale mais en crée une nouvelle permutation, donnée par  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, x_1)$  alors que le chemin  $\hat{X}$  fait revenir chaque candidat-solution à sa place initiale!

**Remarque 1. (Assomption provisoire)** On soutiendra que, vu que les permutations induites par  $X(t)$  et  $\hat{X}(t)$  sont différentes, notre formule  $\hat{x}$  (en réalité les trois déterminations  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  et  $\hat{x}_3$  que cette formule convoque) est ainsi exclue de l'ensemble de candidat-solutions.

**Commutateurs emboîtés.** Candidats s'écrivant en termes de racines 2-emboîtés.

- nous montreront que les *racines 2-emboîtés sont quant à elles invariantes sous l'action de commutateurs 2-emboîtés*, c'est à dire des commutateurs de chemins qui sont à leur tour des commutateurs.

La procédure se déduit du cas précédent:

- Donnons nous une expression de la forme  $\sqrt[3]{B + \sqrt{C}}$
- Vu que  $B + \sqrt{C}$  est multi-valuée, choisir un commutateur de chemins comme avant ne suffit pas car  $\sqrt{C}$  peut bien avoir changé de valeur entretemps
- L'idée: déterminer quatre chemins  $\gamma_1, \dots, \gamma_4$  de sorte que la racine simple  $\sqrt{C}$  est invariante sous l'action des deux commutateurs  $C_1 = [\gamma_1, \gamma_2]$  et  $C_2 = [\gamma_3, \gamma_4]$
- Ainsi,  $B + \sqrt{C}$  est invariant par  $C_1$  et  $C_2$  et donc, par le même argument que dans le cas simple, le commutateur 2-emboîté  $[C_1, C_2]$  fera retourner  $\sqrt[3]{B + \sqrt{C}}$  à sa position initiale.

Pour des expressions avec des racines 3-emboîtées, nous aurons besoin d'un commutateur 3-emboîté pour construire un chemin faisant retourner notre candidat à sa position initiale et ainsi de suite.

**Fin de la preuve.** Au total:

- toute formulation par radicaux d'un candidat-solution est invariante sous l'action d'un commutateur suffisamment emboîté
- Remarque 3  $\Rightarrow$  on peut caractériser les chemins du point des permutations des extrémités

Un calcul exhaustif nous permet alors de déduire que

1. des 120 permutations possibles des 5 solutions, il y a 60 différentes qui sont le résultat d'un commutateur de permutations;
2. des 60 différents commutateurs de permutations, la totalité (60 donc) sont à leur tour le résultat de commutateurs 2-emboîtés;
3. Par induction, on voit qu'il y a toujours 60 permutations qui sont le résultat de commutateurs 3-emboîtés et ainsi de suite.

Conclusion:

- les solutions de l'équation quintique générale ne sauraient être invariantes sous l'action d'aucun emboitement fini de commutateurs.
- Or toute formulation par radicaux de candidats solutions est invariante par l'action de commutateurs suffisamment emboîtés, les excluant donc d'être candidats.

**Analyse rétro-active sur la structure des solutions algébriques.** Cette preuve permet

- d'une part aussi d'expliquer *pourquoi* les équations de degré  $<5$  sont résolubles par radicaux
- d'autre part, de caractériser avant même de connaître les formulations générales, lesquelles ont une chance ou n'en ont aucune, d'être des candidats-solutions.

Cela se voit sur un tableau de comptage du nombre de commutateurs degré par degré.

Degré de l'équation générale	Nombre de Permutations	Commutateurs					
		simples	2-emboités.	3-emb.	4-emb.	5-emb.	...
1	1	1	...				
2	2	1	...				
3	6	3	1	...			
4	24	12	4	1	...		
5	120	60	60	60	60	60	...

On retrouve ici déjà l'esprit de pensée d'Abel. Celui-ci nous explique qu'« au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible ».

Points laissés en suspens:

- les différences de possibilités de construction de chemins continus entre candidats-solutions et solutions effectives entraînent des impossibilités pour de tels candidats à formuler effectivement de telles solutions;
- nous avons raisonné sur des fonctions multi-valuées comme s'il s'agissait de fonctions univaluées ordinaires mais rien ne nous garantit de pouvoir faire ainsi à priori.
- nous avons raisonné sur les commutateurs de chemins uniquement du point de leurs extrémités et du nombre de fois qu'on tourne autour d'un point, mais rien ne nous permet à priori de caractériser de tels chemins uniquement sur de telles données.

# Développement

Que faire des fonctions multi-valuées ? Opérations arithmétiques élémentaires ?

**La surface de Riemann associée à la racine carrée  $f(z) = \sqrt{z}$ .**

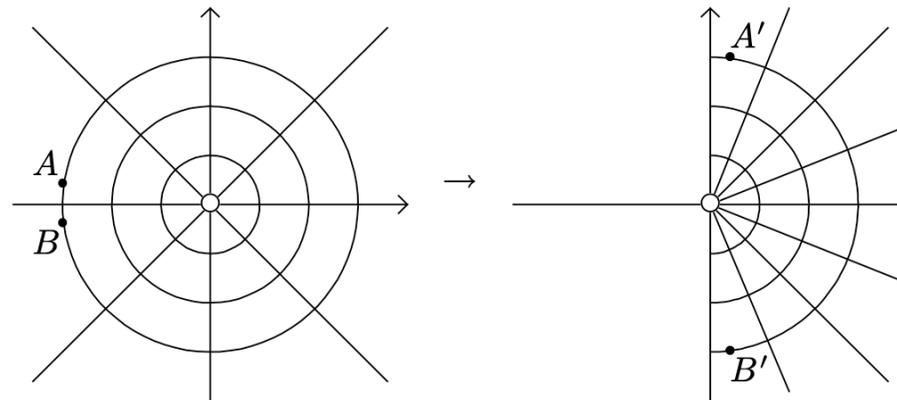
Surface de Riemann ici: collection de différentes copies du plan  $z$  (appelées feuilles) convenablement recollées le long de certaines *coupures*, de telle manière que la fonction  $f$ , définie sur chacune de ces feuilles, devient alors une fonction continue *univaluée*. Concrètement:

- $f(z) = \sqrt{z}$  est 2-valuée sur  $\mathbb{C}^*$  et univaluée en 0
- Décider d'une coupure  $\mathcal{C} = ]-\infty, 0]$  le long de la droite réelle.
- Cette décision permet de différencier deux *choix* possibles de fonction univaluée racine carrée

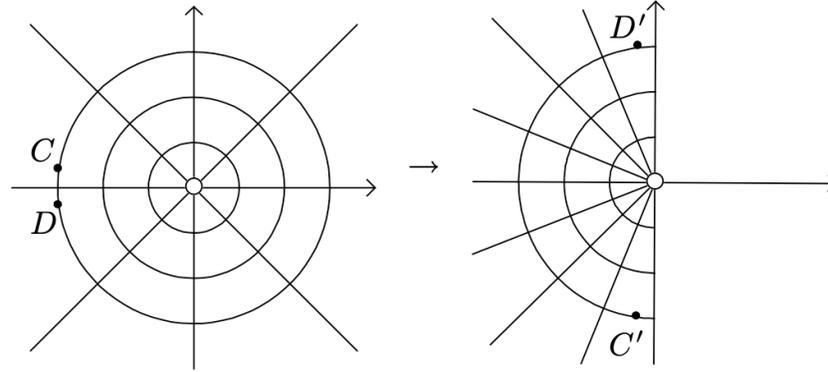
1. Le choix  ${}_1\sqrt{z}$  de la valeur qui se situe dans la partie droite du plan-image  $w$ :

$\forall z \in \mathbb{C} - \mathcal{C}$  (plan de départ), on a  $\arg {}_1\sqrt{z} = \frac{1}{2}\arg z$ . (ici  ${}_1\sqrt{1} = 1$ )

Géométriquement,  $z \mapsto {}_1\sqrt{z}$  rétrécit  $\mathbb{C} - \mathcal{C}$  en un « demi-plan image  $w$  » comme un éventail



2. On notera  ${}_2\sqrt{z}$  le choix de la valeur qui se situe dans la partie gauche du plan  $w$ . ( ${}_2\sqrt{1} = -1$ )

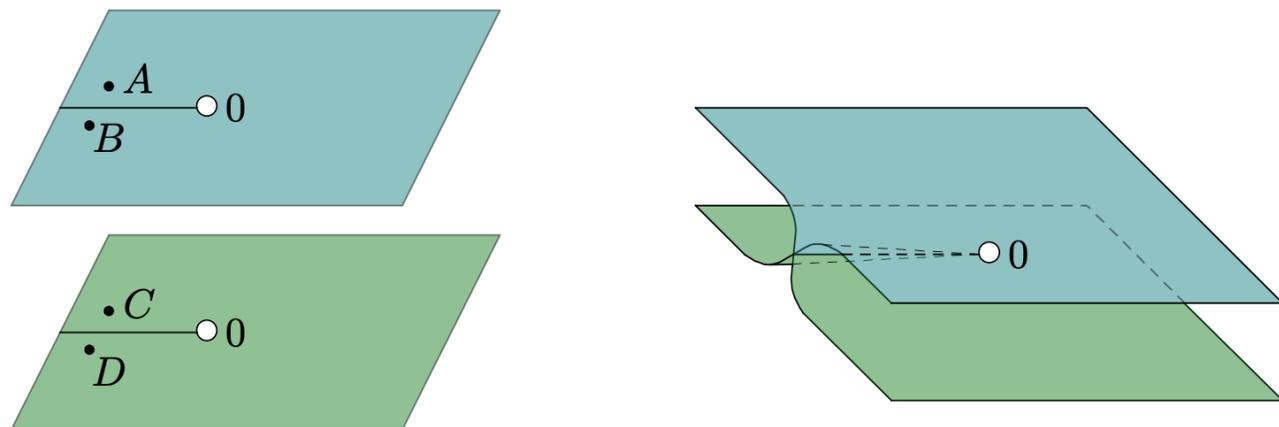


- ${}_1\sqrt{z}$  et  ${}_2\sqrt{z} =$  fonctions univaluées sur  $\mathbb{C} - \mathcal{C}$  et  ${}_1\sqrt{z} = -{}_2\sqrt{z}$   
On les appellera *branches continues univaluées* de  $f(z) = \sqrt{z}$  pour la coupure  $\mathcal{C}$ .

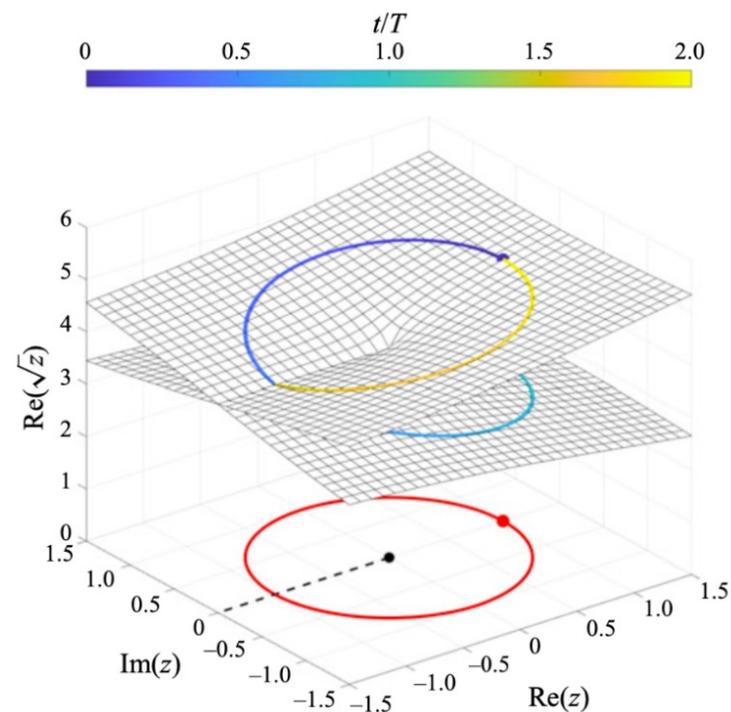
Nous sommes en mesure de construire la surface de Riemann associée à  $\sqrt{z}$ :

- Considérons deux copies  $F_1$  et  $F_2$  de  $\mathbb{C} - \mathcal{C}$  correspondant à  ${}_1\sqrt{z}$  et  ${}_2\sqrt{z}$  respectivement.
- ${}_1\sqrt{z}$  et  ${}_2\sqrt{z}$  sont discontinues en  $\mathcal{C}$ , or:
  - $A, B$  (resp.  $C, D$ ) sont proches l'un de l'autre en traversant  $\mathcal{C}$  mais leurs images  $A', B'$  (resp.  $C', D'$ ) restent distantes sur le plan  $w$
  - $A' = {}_1\sqrt{A}$  est proche de  $D' = {}_2\sqrt{D}$
- L'idée: recoller  $F_1$  et  $F_2$  le long de leur coupure commune  $\mathcal{C}$  de sorte à définir une surface  $\mathcal{S}$  sur laquelle on peut tracer:
  - un chemin  $\gamma_1$  qui relie  $A$  et  $D$  en traversant la coupure  $\mathcal{C}$ , dont l'image image est un chemin continu reliant les points  $A'$  et  $D'$ .
  - un chemin  $\gamma_2$  qui relie  $B$  et  $C$  en traversant la coupure  $\mathcal{C}$ , dont l'image image est un chemin continu reliant les points  $B'$  et  $C'$ .

Dessiner une telle surface n'est pas possible, tout de même voici une manière de la représenter (en prenant acte que l'auto-intersection illustrée n'est qu'apparente)



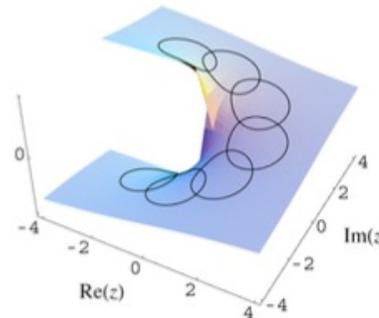
Alternative: dessiner la surface selon le graphe de la partie réelle de la valeur image.



Reprenons:

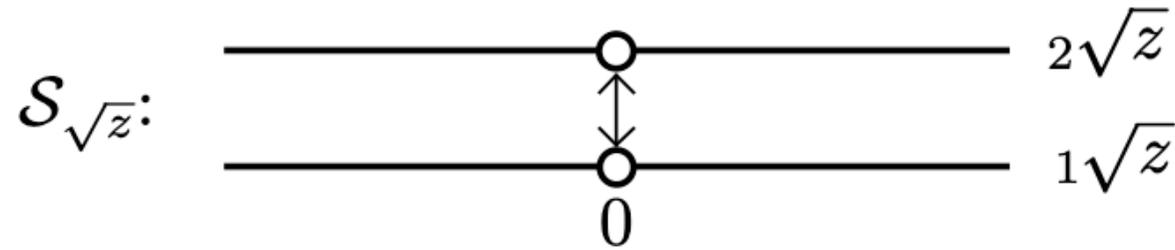
- Nous avons précisé que la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est bi-valuée sur  $\mathbb{C}^*$  et univaluée sur  $0$
- Nous avons décidé d'une coupure  $\mathcal{C}$  au point d'univalueation  $0$  vers l'infini
- Cette décision nous emmène a distinguer deux fonctions  ${}_1\sqrt{z}$  et  ${}_2\sqrt{z}$  continues et univaluées sur  $\mathbb{C} - \mathcal{C}$ .
- Nous recollons les deux branches associées à ces fonctions selon les images de chemins continus de sorte qu'on obtienne une fonction continue et univaluée sur la surface entière
- le prix à payer pour définir de manière unique la surface  $\mathcal{S}$  est d'interdire tout chemin de passer par l'origine
- tout chemin fermé sur  $\mathbb{C}$  qui fait un nombre pair de tours autour de  $0$  se relève sur  $\mathcal{S}$  en un chemin qui est maintenant *fermé* également

Conséquence géométrique: il suffit de ces deux tours pour étendre par continuité la racine carrée de façon maximale



Au total, la racine carrée se prolonge par continuité sur sa surface de Riemann associée  $\mathcal{S}$ .

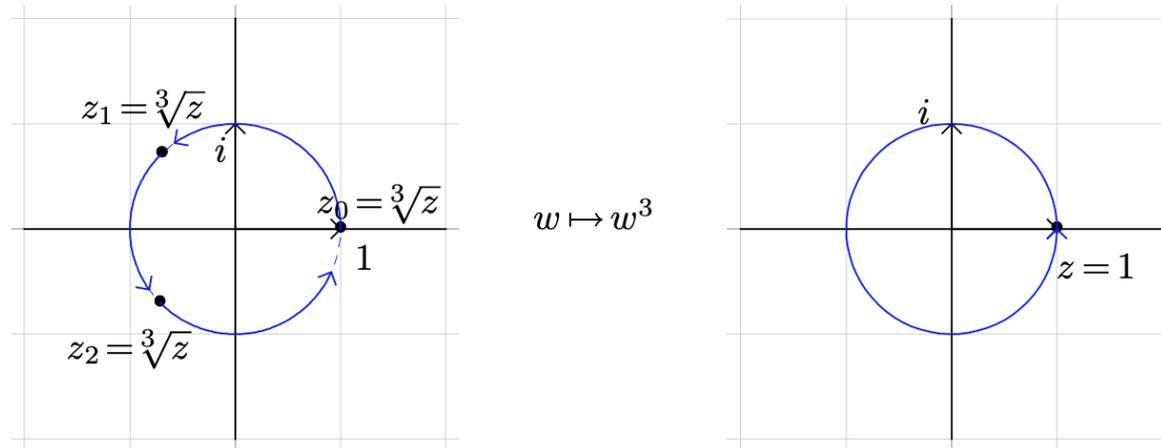
- $\mathcal{S}$  est un revêtement à deux feuillets de  $\mathbb{C}$  et ramifié au dessus de 0
- La structure de  $\mathcal{S}$  peut être représentée schématiquement comme suit



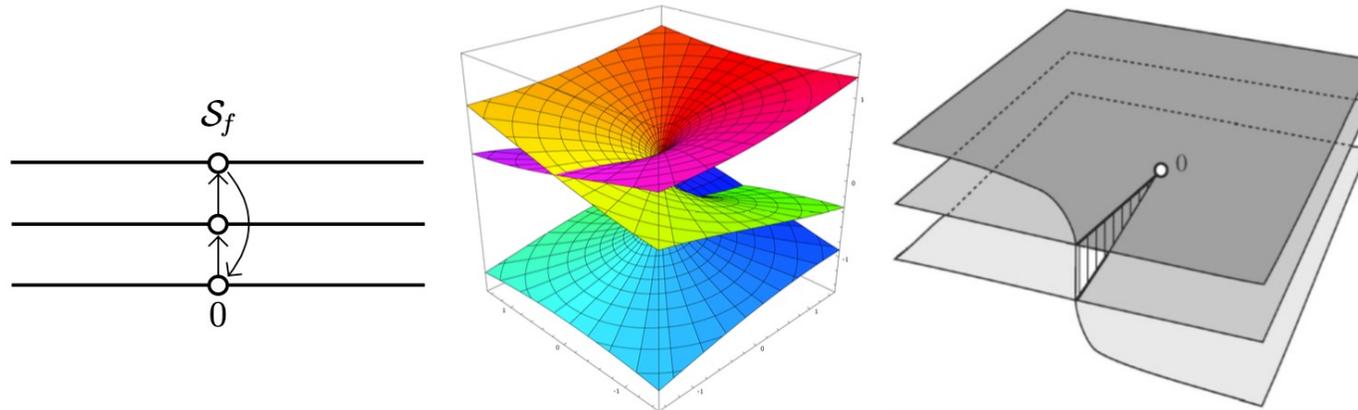
Description:  $\mathcal{S}$  consiste en deux feuillets (les lignes horizontales), un point de branchement en 0 et les flèches indiquent le passage d'une feuille à une autre non seulement par un tour autour de 0 mais aussi par intersection avec la coupure  $\mathcal{C}$ .

La surface de Riemann  $\mathcal{S}_f$  de la racine cubique  $f(z) = \sqrt[3]{z}$

- est 3-valuée sauf en 0 où elle est univaluée
- décider d'une coupure  $\mathcal{C} = ]-\infty, 0]$  détermine trois branches continues univaluées de  $f$  et donc  $\mathcal{S}_f$  a trois feuilles et un point de branchement en 0
- est un revêtement donné par la projection  $w \mapsto w^3$  et les préimages de  $z = 1$  selon cette projection sont les racines cubiques  $z_k = e^{\frac{2\pi i}{3}k}$ , pour  $k = 0, 1, 2$

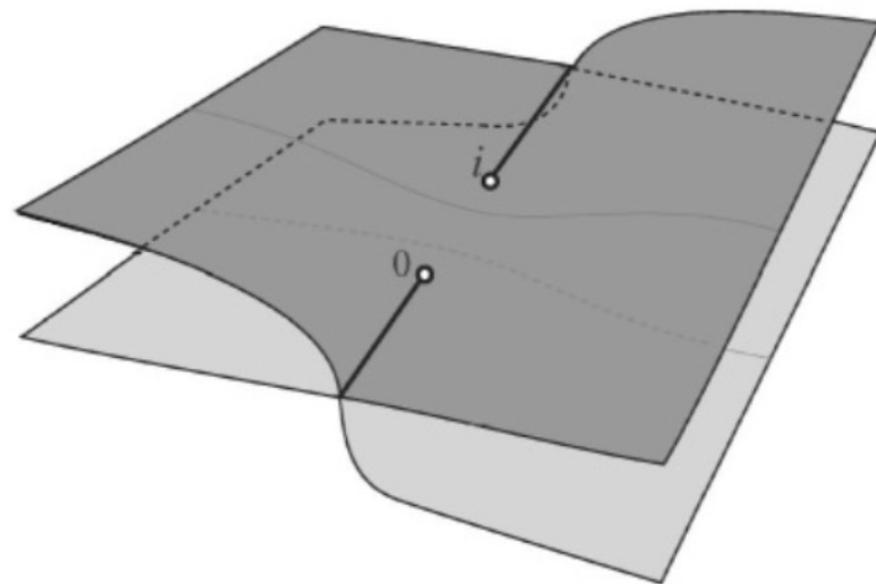
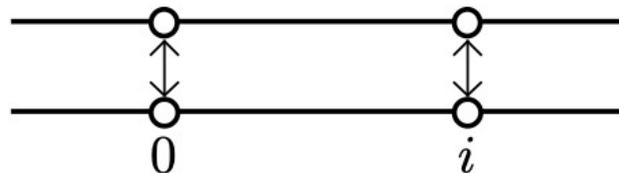


- un chemin fermé basé en  $z = 1$  a besoin de faire 3 tours autour de 0 pour se relever en un chemin fermé sur  $\mathcal{S}_f$

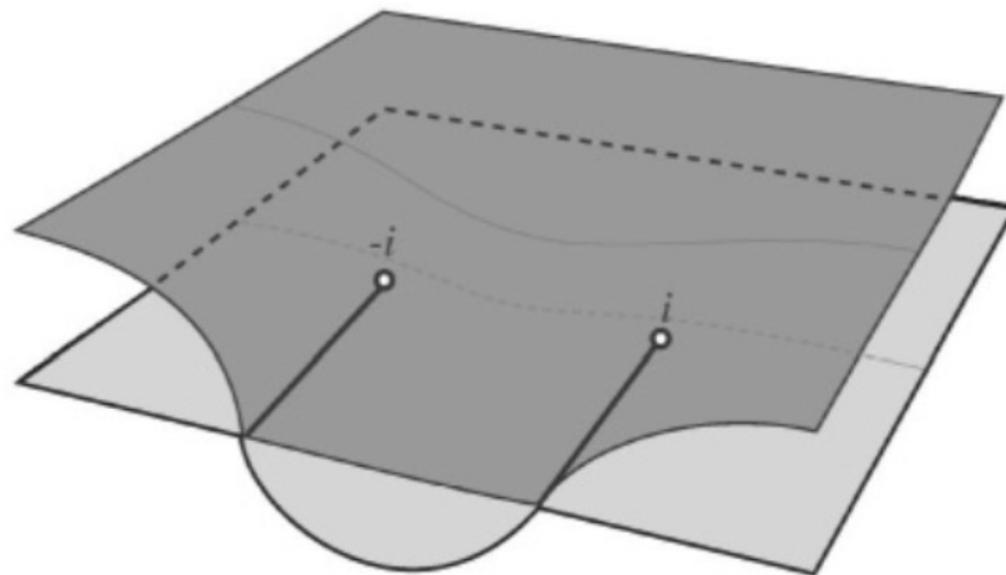
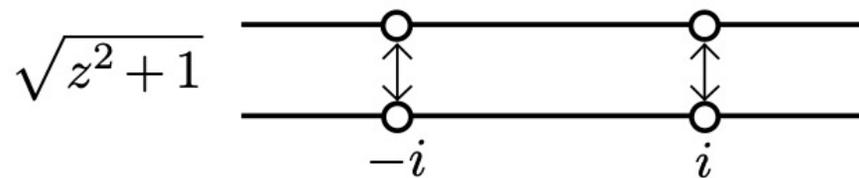


**Opérations  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  à l'intérieur d'une racine.** Lorsqu'une fonction à valeurs multiples a plusieurs points de branchement, pour bien séparer les branches continues univaluées, nous décidons les coupures à partir de chaque point de branchement de sorte qu'elles ne se recoupent pas.

$$\sqrt{z(z-i)}$$

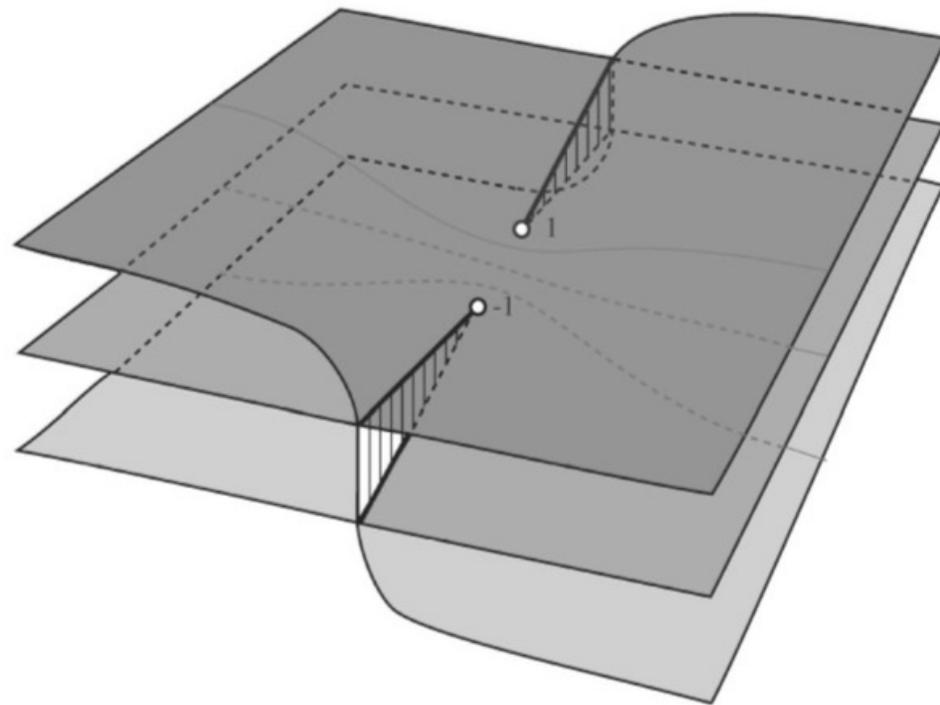
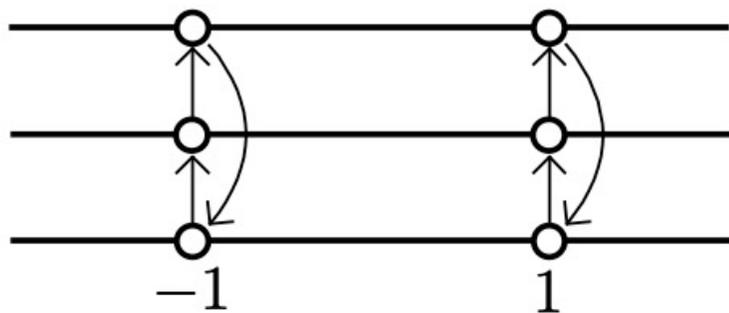


**Opérations  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  à l'intérieur d'une racine.** Lorsqu'une fonction à valeurs multiples a plusieurs points de branchement, pour bien séparer les branches continues univaluées, nous décidons les coupures à partir de chaque point de branchement de sorte qu'elles ne se recoupent pas.



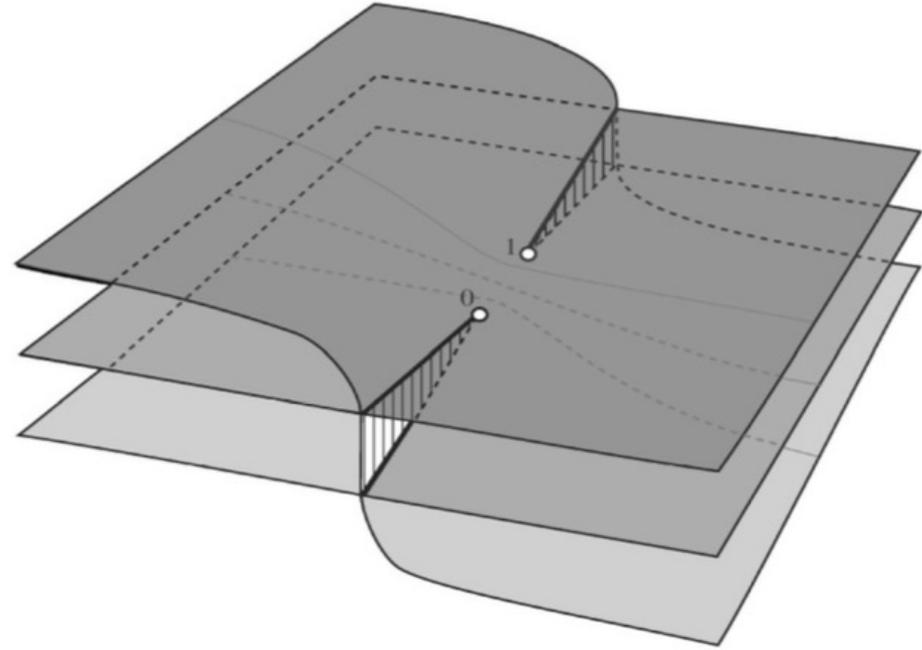
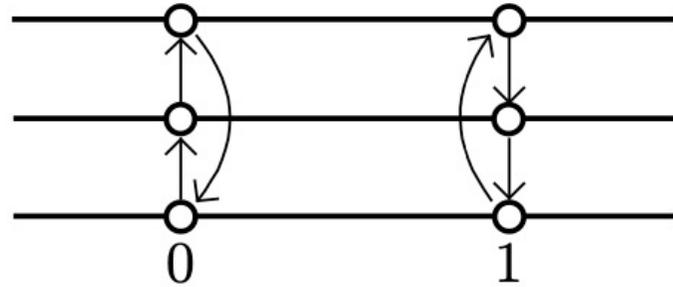
**Opérations  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  à l'intérieur d'une racine.** Lorsqu'une fonction à valeurs multiples a plusieurs points de branchement, pour bien séparer les branches continues univaluées, nous décidons les coupures à partir de chaque point de branchement de sorte qu'elles ne se recoupent pas.

$$\sqrt[3]{z^2 - 1}$$



**Opérations  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  à l'intérieur d'une racine.** Lorsqu'une fonction à valeurs multiples a plusieurs points de branchement, pour bien séparer les branches continues univaluées, nous décidons les coupures à partir de chaque point de branchement de sorte qu'elles ne se recoupent pas.

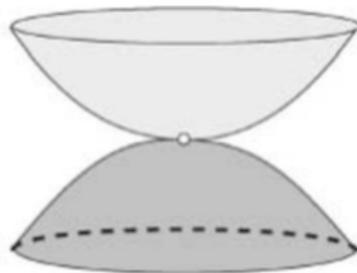
$$\sqrt[3]{z(z-1)^2}$$



### Distinction entre points de branchement et de non-unicité.

La surface de Riemann  $\mathcal{S}_f$  de  $f(z) = \sqrt{z^2}$  consiste en deux feuilletés disjoints.

- deux branches continues univaluées obtenues sont continues sur  $\mathbb{C}^*$  et aucun chemin fermé autour de l'origine n'induit un changement de feuilletés.



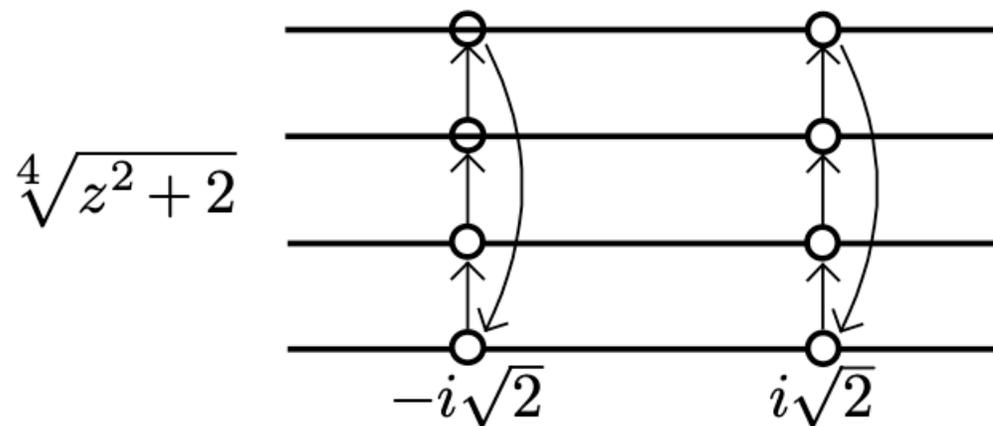
- Le point 0, si bien qu'il reste un point interdit (pour assurer l'unicité des relèvement des chemins), n'est pas pour autant un point de branchement.  
0 est ici un *point de non-unicité* et il faut donc que les coupures évitent de tels points
- La structure de  $\mathcal{S}_f$  est décrite par



**Traversées de coupures et permutations de feuilles.** Soit  $f(z) = \sqrt[4]{z^2 + 2}$ .

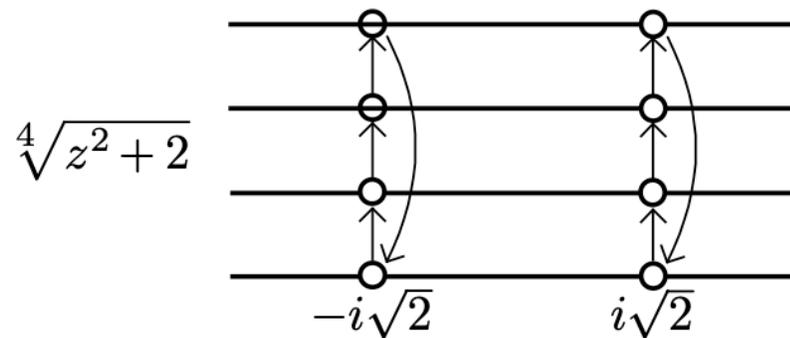
On a

- $f(z) = \sqrt[4]{z^2 + 2} = \sqrt[4]{(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2})}$
- $f(z)$  est 4-valuée avec  $\pm i\sqrt{2}$  points de branchement
- Des tours autour des points de branchement permutent cycliquement les feuilles de  $\mathcal{S}_f$
- $\mathcal{S}_f$  est donc structurée comme suit



Prenons provisoirement comme garanti que cette description ne dépend ni de la coupure initiale décidée ni du choix des chemins permutant ces feuilles (pour peu qu'ils soient homotopes et évitent points de branchement et de non unicité). Nous pouvons alors associer à chaque point de branchement une permutation des feuilles qu'on appellera action de monodromie en ces points.

Traversées de coupures et permutations de feuilles. Soit  $f(z) = \sqrt[4]{z^2 + 2}$ .



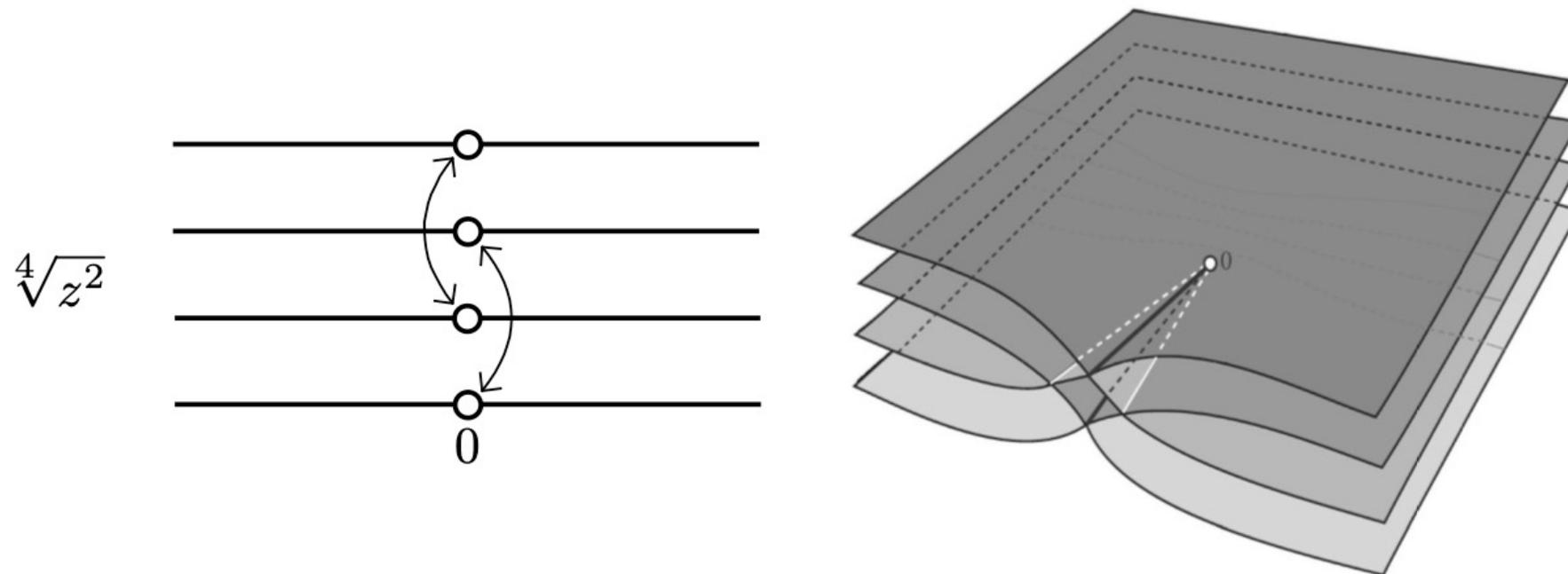
- l'action de monodromie en  $i\sqrt{2}$  correspond à la permutation  $g_{i\sqrt{2}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1234)$
- l'action de monodromie en  $-i\sqrt{2}$  correspond à la même permutation  $g_{-i\sqrt{2}} := (1234)$

Si on voit  $g_{i\sqrt{2}}$  et  $g_{-i\sqrt{2}}$  comme générateurs d'un sous-groupe du groupe symétrique  $\Sigma_4$ , on obtient

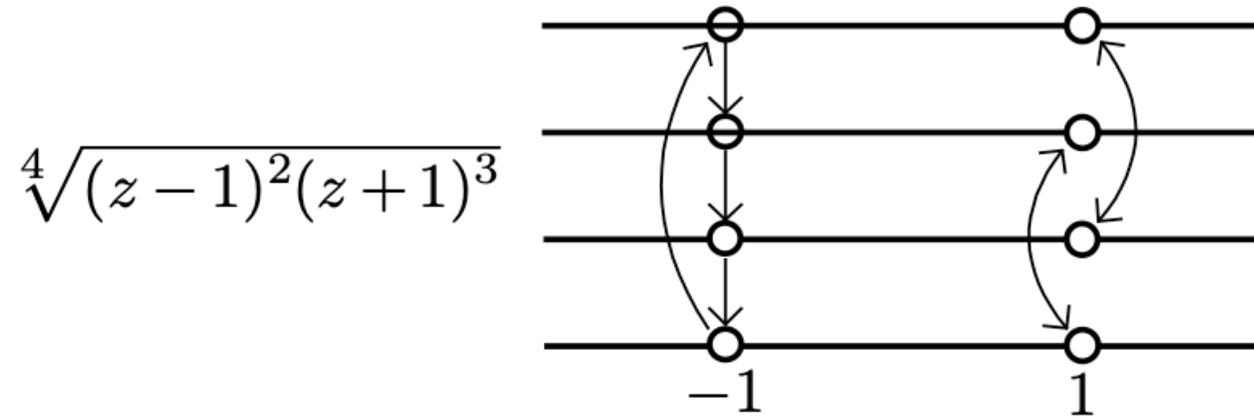
$$\begin{aligned} \langle g_{i\sqrt{2}}, g_{-i\sqrt{2}} \rangle &= \langle (1234), (1234) \rangle = \langle (1234) \rangle \\ (1234)^2 &= (13)(24) \\ (1234)^3 &= (1432) \\ (1234)^4 &= \text{id} \end{aligned}$$

On conclut qu'un tel sous-groupe n'est autre que le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_4$  !

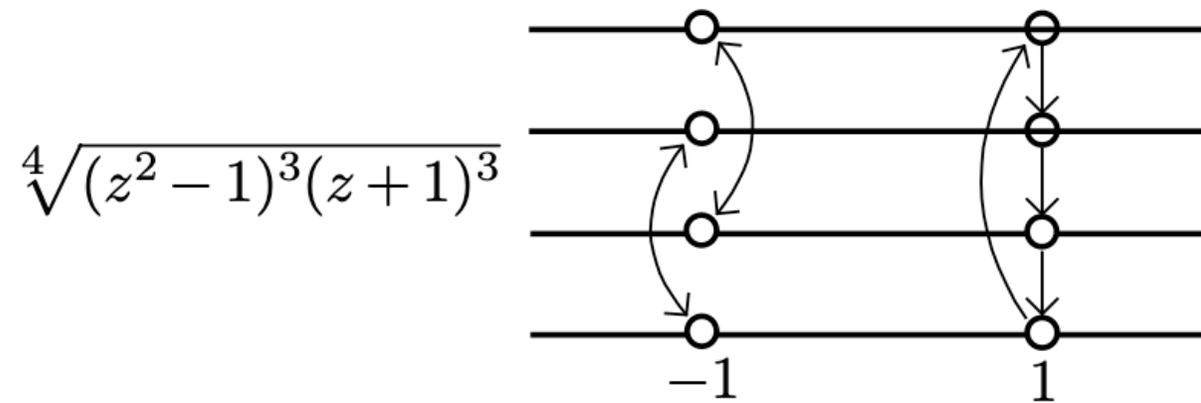
Nous appellerons *groupe de monodromie de  $f$*  un tel sous-groupe et nous le noterons  $\mathcal{M}_f$ .



Les droites blanches ne sont pas des coupures sur le dessin.  
 Action de monodromie en 0:  $g_0 := (13)(24) \rightsquigarrow \mathcal{M}_f = \mathbb{Z}_2$

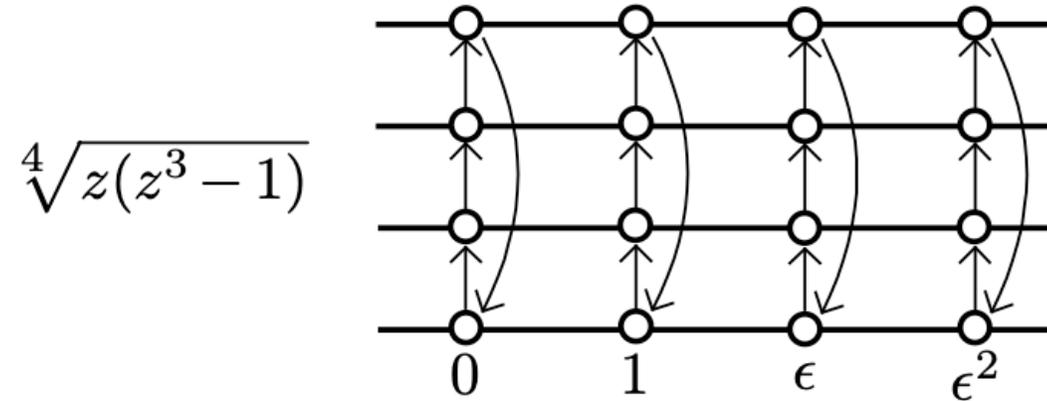


$$\mathcal{M}_f = \langle g_{-1}, g_1 \rangle = \langle (1432), (13)(24) \rangle = \langle (1432) \rangle \cong \mathbb{Z}_4 \quad (\text{car } g_{-1}^2 = g_1)$$



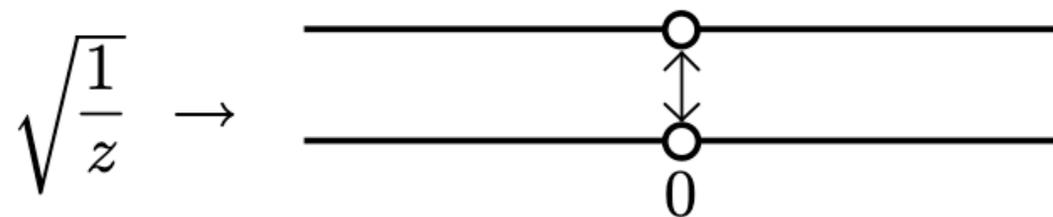
Action de monodromie en  $-1$ :  $(13)(24)$  et en  $1$ :  $(1432)$

---

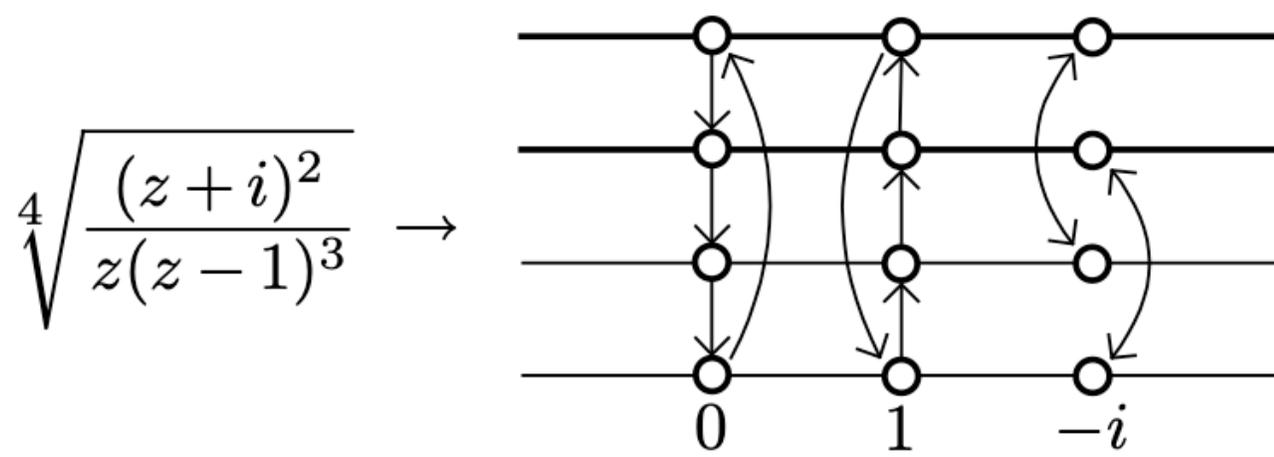
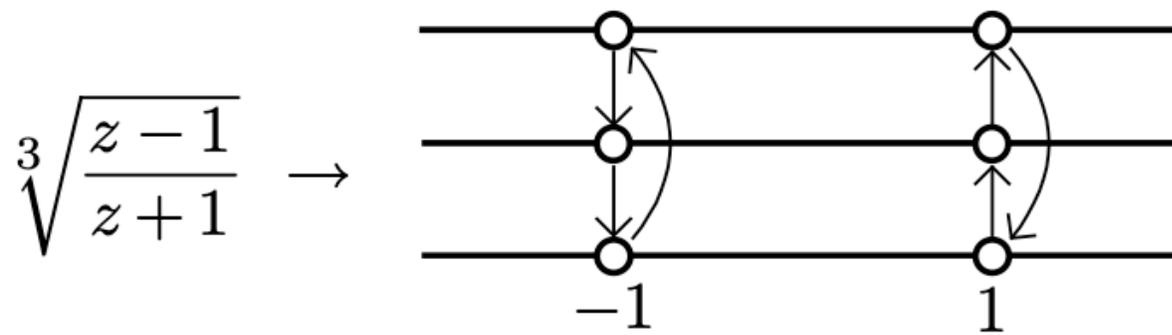
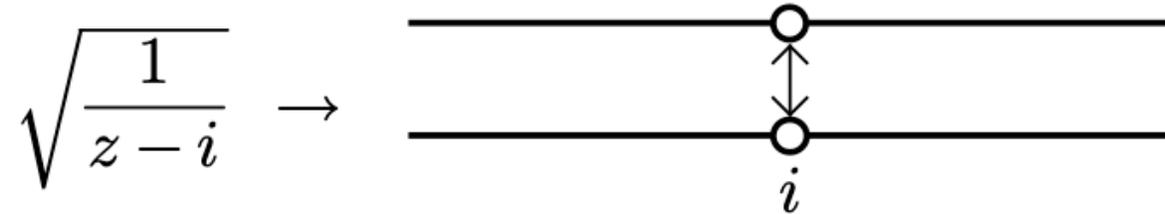


Action de monodromie partout:  $(1234)$

**Divisions.** Soit  $f(z) = \sqrt{1/z}$ . Quand un point  $z = e^{i\theta}$  fait un tour autour de  $z_0 = 0$ , son argument  $\arg(z)$  varie de  $2\pi$ , donc  $\arg(1/z)$  varie de  $-2\pi$ , donc  $\arg(\sqrt{1/z})$  varie de  $-\pi$  donc la valeur de  $\sqrt{1/z}$  est multipliée par  $-1$ . La surface de Riemann de  $f$  est donc structurée comme suit:

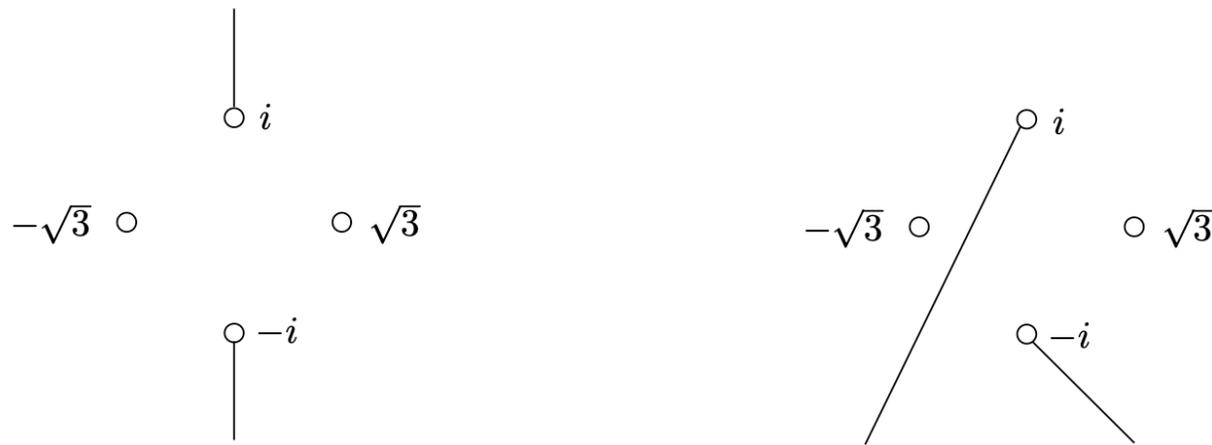


Si bien  $f(z)$  n'est pas définie en 0, ce point reste néanmoins un point de branchement. Cet exemple illustre la distinction entre singularités et points de branchement: à elle seule, la singularité  $z = 0$  ne saurait rendre compte de la surface qui revêt le plan complexe. A celle-ci doit s'ajouter donc une *coupure* décidée, permettant l'étude global de sa surface de Riemann.

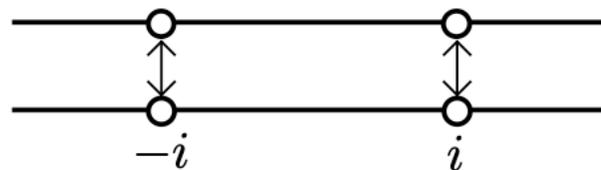


## Opérations algébriques à l'extérieur d'une racine.

**Sommes.** Soit  $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} - 2$ . Comme  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$  et que  $\pm\sqrt{3}$  sont les deux zéros de  $f$ , nous avons 4 points interdits dont uniquement  $\pm i$  sont des points de branchement de  $f$ . On vérifie que deux différents choix de coupure



induisent la même surface de Riemann associée à  $f$  et représentée par le schéma

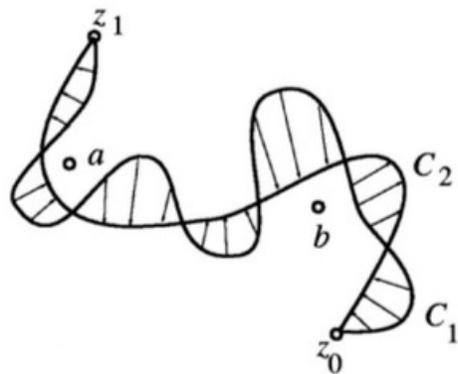


En particulier, on peut montrer géométriquement que les zéros de  $f$  se trouvent sur le même feuillet pour ces deux choix de coupures: il suffit de tracer un chemin continu entre ces zéros en évitant les coupures. Qui plus est, de tels chemins peuvent tourner autour des points  $\pm\sqrt{3}$  sans changement de feuillet.

**Monodromie.** On l'aura compris: après avoir effectué les coupures de tous les points de branchement, la fonction considérée s'est révélée décomposée en branches continues et univaluées qui se joignent les unes aux autres d'une manière définie uniquement par les coupures. Ceci est assuré par:

*Propriété de monodromie.* Si  $a, b$  sont des points interdits, si on fixe  $z_0$  et deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  homotopes reliant  $z_0$  à un point  $z_1$ , comme illustré ci-dessous, alors la valeur de  $f(z_1)$ , définie par continuité le long de  $C_1$  ou de  $C_2$ , est garantie d'être unique.

On dit alors que la fonction  $f(z)$  possède la propriété de *monodromie*.



Cette unicité étant indépendante des directions des coupures décidées, garantit

- l'univocité des constructions des surfaces de Riemann que nous avons fait !
- que le groupe de monodromie défini auparavant est unique (à isomorphisme près...)!

**Monodromie.** On l'aura compris: après avoir effectué les coupures de tous les points de branchement, la fonction considérée s'est révélée décomposée en branches continues et univaluées qui se joignent les unes aux autres d'une manière définie uniquement par les coupures. Ceci est assuré par:

*Propriété de monodromie.* Si  $a, b$  sont des points interdits, si on fixe  $z_0$  et deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  homotopes reliant  $z_0$  à un point  $z_1$ , comme illustré ci-dessous, alors la valeur de  $f(z_1)$ , définie par continuité le long de  $C_1$  ou de  $C_2$ , est garantie d'être unique.

On dit alors que la fonction  $f(z)$  possède la propriété de *monodromie*.

Rappelons qu'une fonction multivaluée  $f(z)$  est

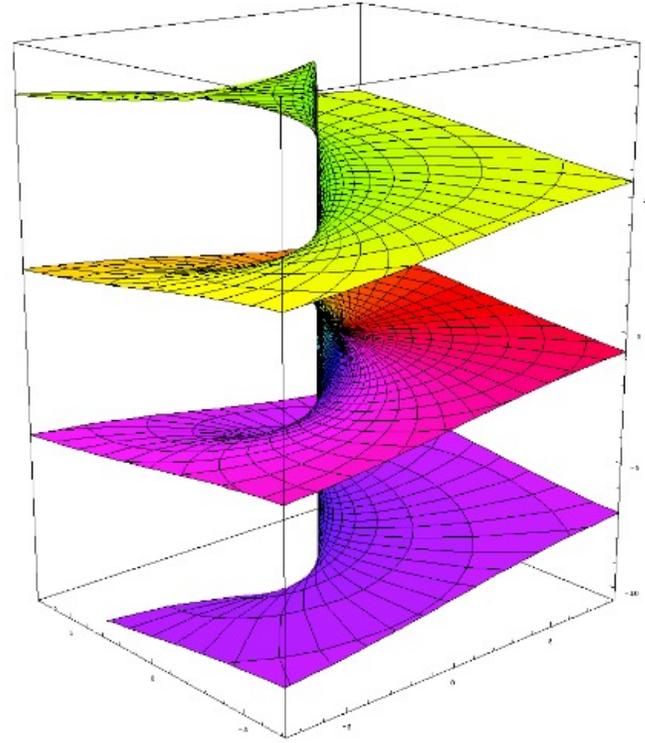
- *représentable par radicaux* si sa formulation est une intrication finie des opérations  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  et  $\sqrt[n]{\cdot}$ .
- *algébrique* si elle exprime en termes du paramètre  $z$  toutes les racines d'une équation de la forme

$$a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$$

où tous les coefficients  $a_i(z)$  sont des polynômes en  $z$ .

Un théorème remarquable nous dira que la propriété de monodromie est satisfaite par les fonctions représentables par radicaux, les fonctions algébriques *mais pas que*.

Exemple:  $\log(z)$  possède une surface de Riemann ramifiée en 0, sous forme d'hélice et son groupe de monodromie est le groupe abélien (infini) engendré par un élément.



**Problème:** au delà de cette garantie, comment construire géométriquement des surfaces de Riemann pour des opérations à l'extérieur des racines simples ? Pour des racines emboîtées ?

→ Données deux fonctions  $f$  et  $g$  avec propriété de monodromie, Arnold nous dit comment faire.

**La méthode formelle d'Arnold** Construction de  $\mathcal{S}_{f+g}$  à partir de  $\mathcal{S}_f$  et de  $\mathcal{S}_g$ . On note:

- $h(z) = f(z) + g(z)$  et on élimine les points de non-unicité de  $h$
- $f_0(z), \dots, f_{n-1}(z)$  et  $g_0(z), \dots, g_{m-1}(z)$  les branches univaluées continues de  $f(z)$  et  $g(z)$  respectivement

Nous créons des coupures pour  $h$  partant de tous les points de branchement de  $f$  et de  $g$  de sorte qu'elles ne s'intersectent pas.

Nous avons  $nm$  branches univaluées continues de  $h$ , données par

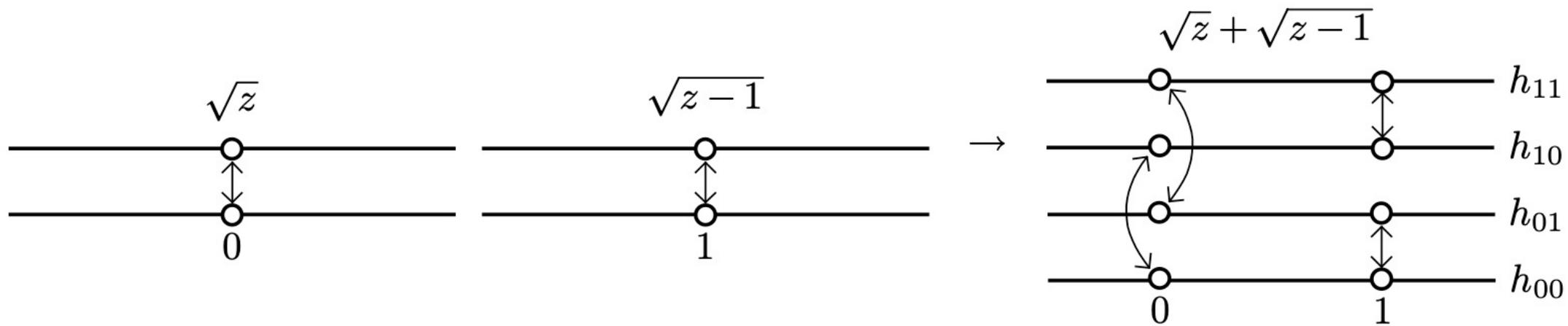
$$h_{ij}(z) = f_i(z) + g_j(z).$$

Remarque: si en tournant autour d'un point  $z_0$ , on bouge de la branche  $f_{i_1}$  à la branche  $f_{i_2}$  et de la branche  $g_{j_1}$  à la branche  $g_{j_2}$ , il est alors évident qu'en faisant ainsi, on bouge de la branche  $h_{i_1j_1}$  à la branche  $h_{i_2j_2}$ .

La propriété de monodromie nous permet de réaliser donc d'indiquer directement sur le schéma de  $\mathcal{S}_h$  les permutations de branches correspondant à ces tours autour des points de branchement:

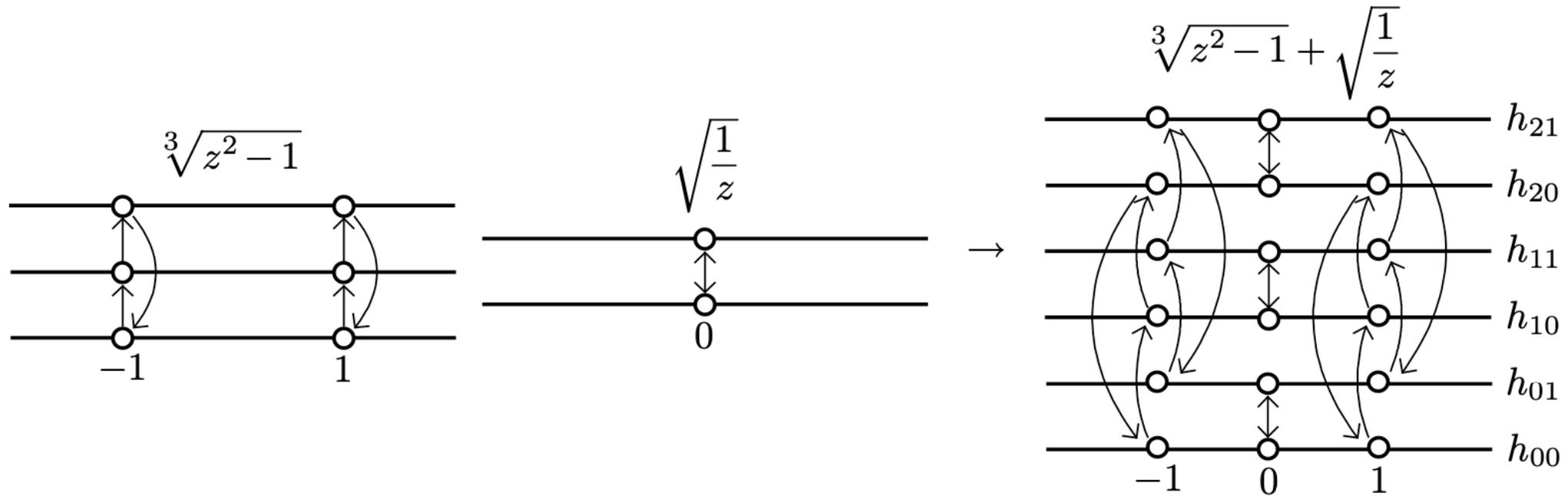
- I. Si dans les schémas de  $\mathcal{S}_f$  et  $\mathcal{S}_g$ , nous avons des flèches indiquant un passage de la feuille  $f_{i_1}$  à la feuille  $f_{i_2}$  et de la feuille  $g_{j_1}$  à la feuille  $g_{j_2}$  respectivement, alors nous inscrivons dans le schéma de  $\mathcal{S}_h$  une flèche indiquant le passage de la feuille  $h_{i_1j_1}$  à la feuille  $h_{i_2j_2}$ .
- II. Si deux branches de  $h(z)$  se trouvent coïncider (i.e.  $h_{i_1j_1} = h_{i_2j_2}$ ), alors on collapse les feuilles correspondantes sur le schéma de  $\mathcal{S}_h$ .

L'addition (sans coïncidence de branches).



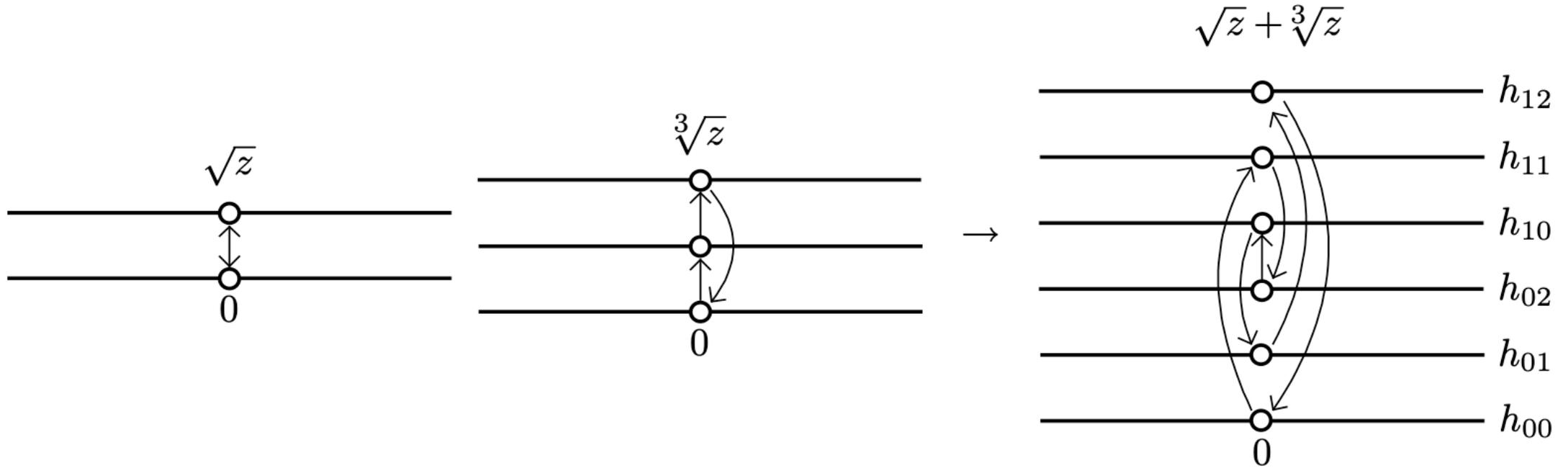
Action de monodromie en 0: (13)(24) et en 1: (12)(34)

L'addition (sans coïncidence de branches).



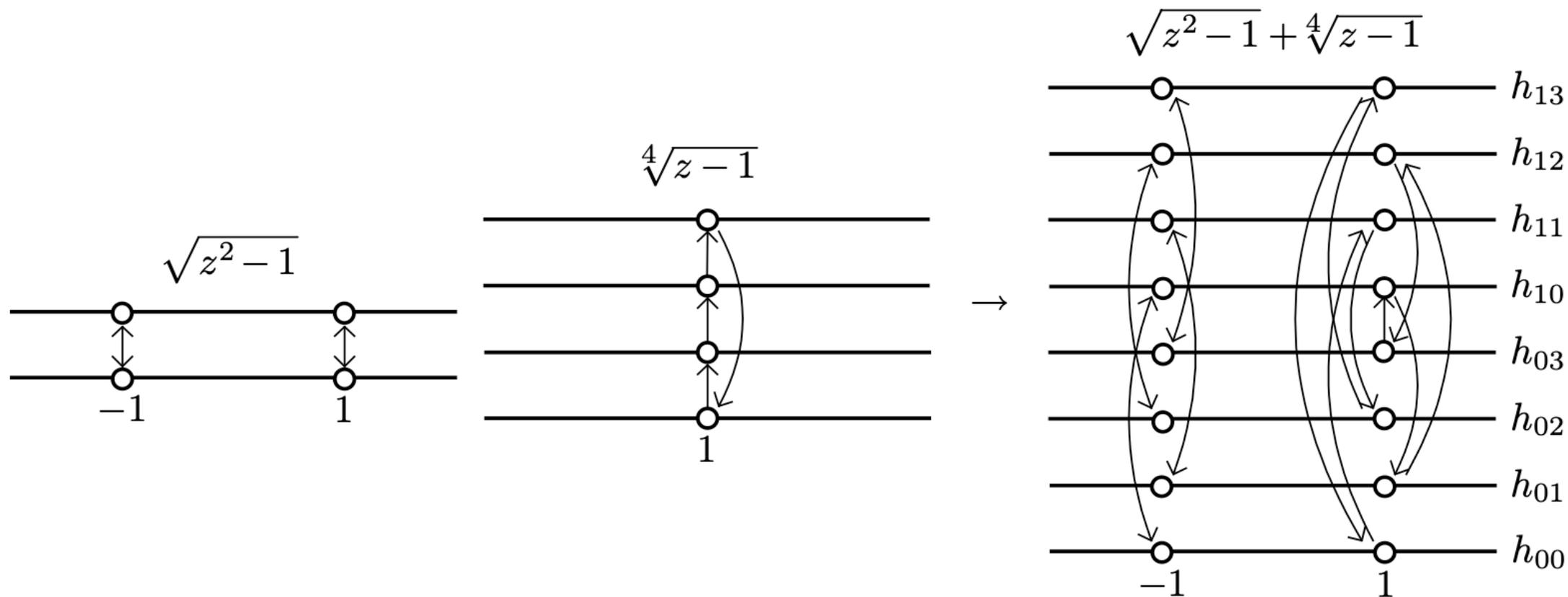
Action de monodromie en  $0$ :  $(12)(34)(56)$  et en  $\pm 1$ :  $(135)(246)$

L'addition (sans coïncidence de branches).



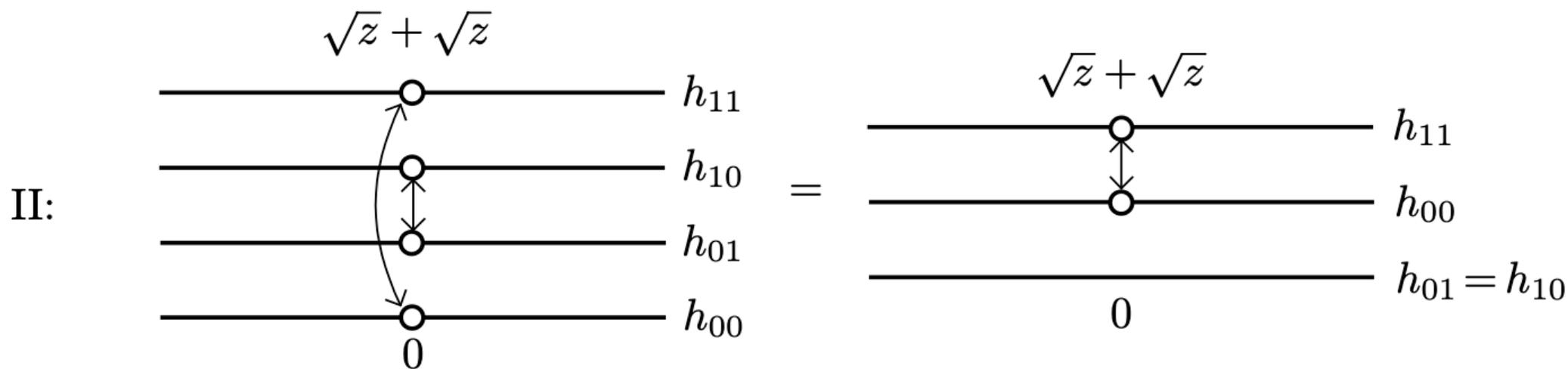
Action de monodromie en  $0$ : (153426)

L'addition (sans coïncidence de branches).



Action de monodromie en  $-1$ : (15)(26)(37)(48) et en  $1$ : (1638)(2745)

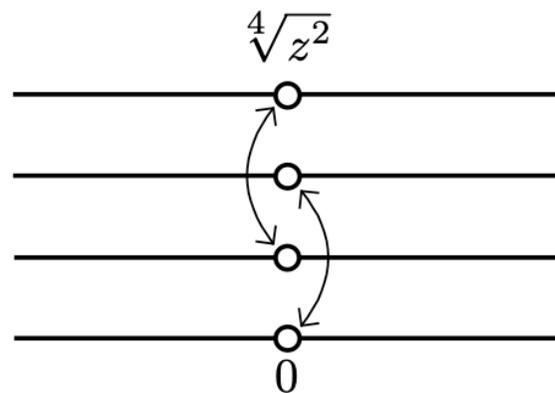
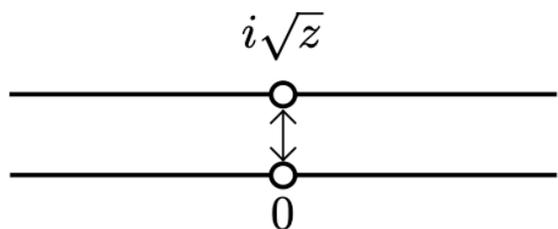
**L'addition (avec coïncidence de branches).**



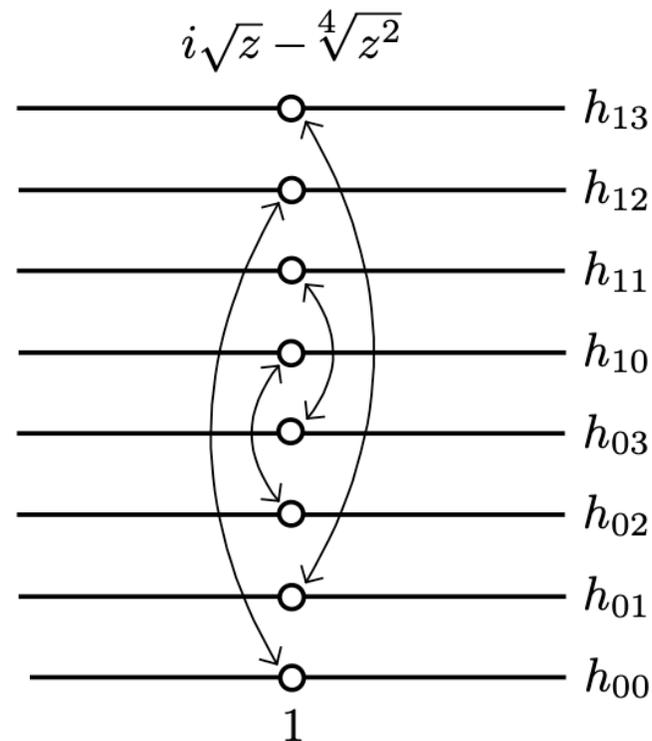
Action de monodromie en 0: (12)

**La soustraction.**  $h(z) = f(z) - g(z)$

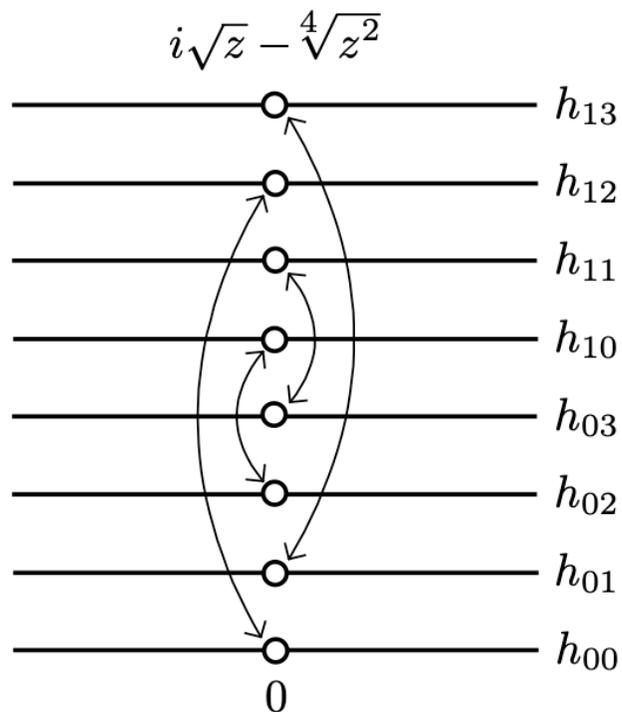
I:



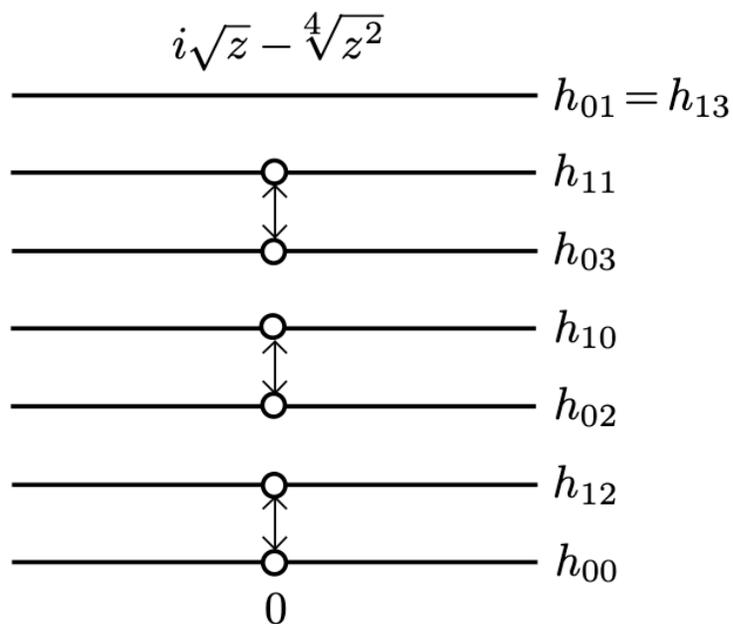
→



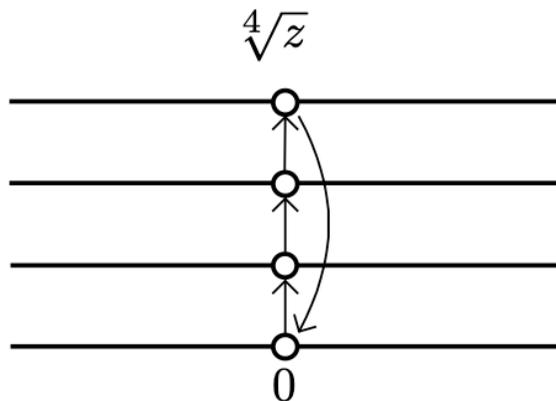
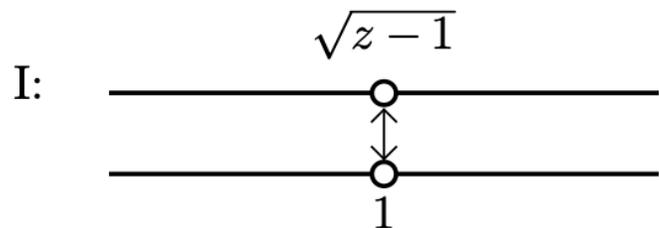
II:



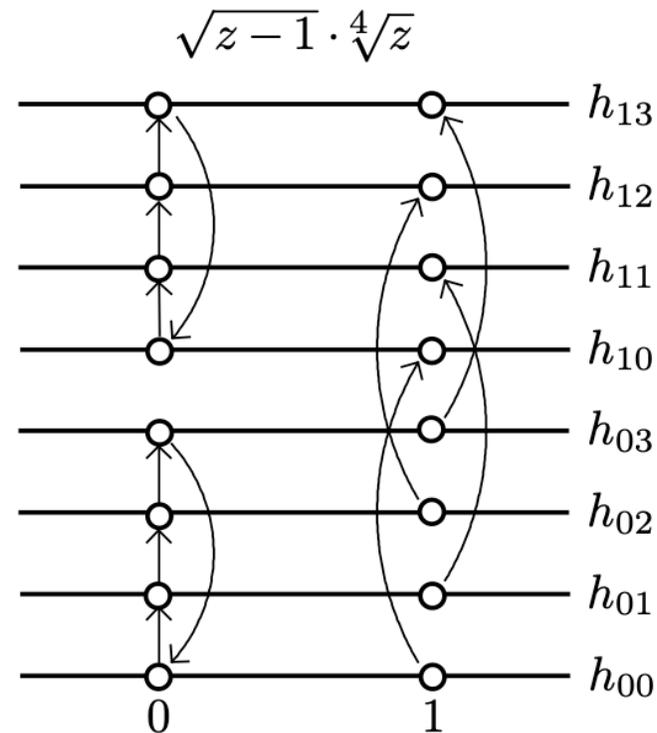
=



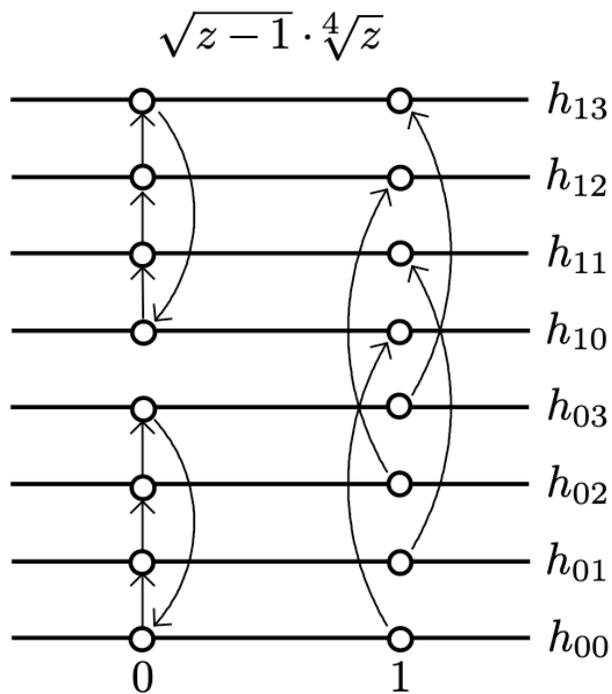
**La multiplication.**  $h(z) = f(z) \cdot g(z)$



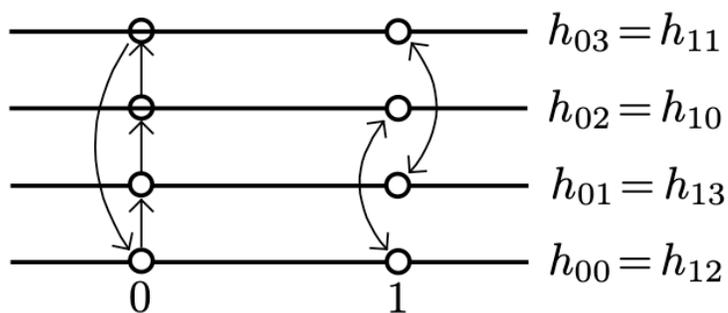
→



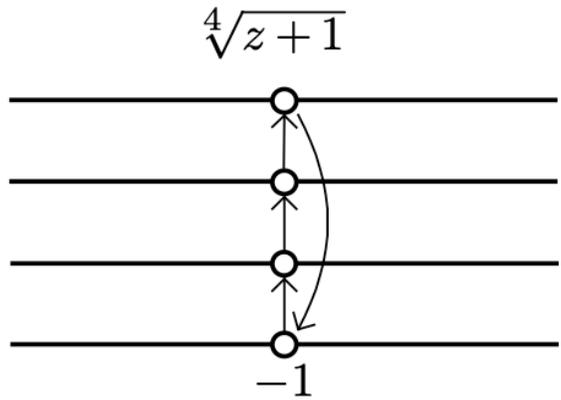
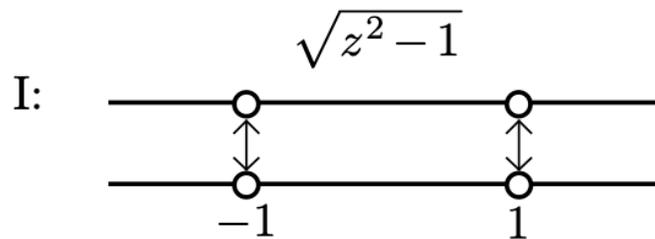
II:



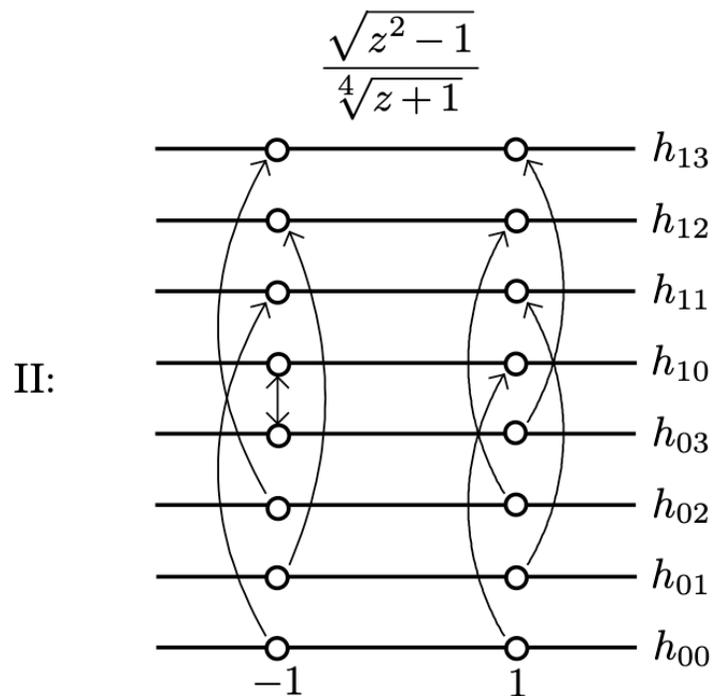
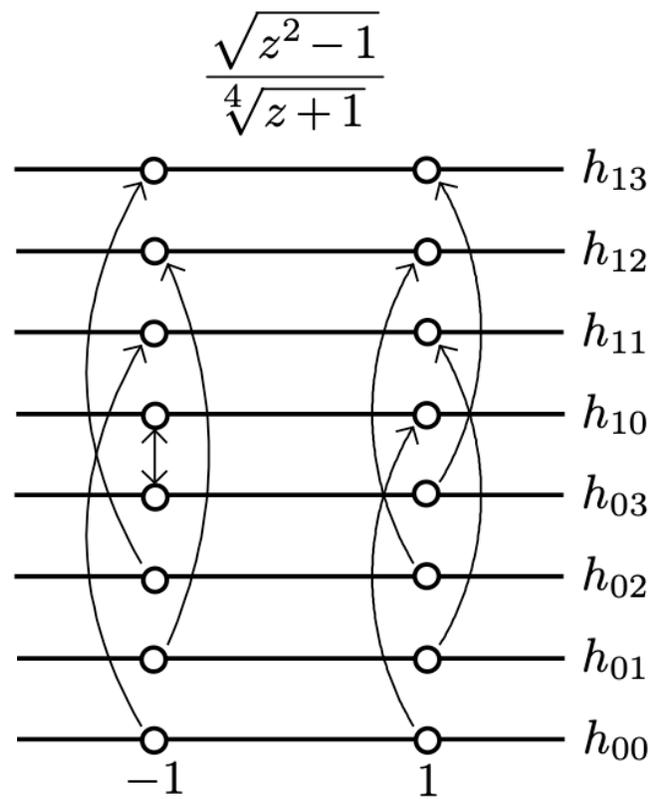
=



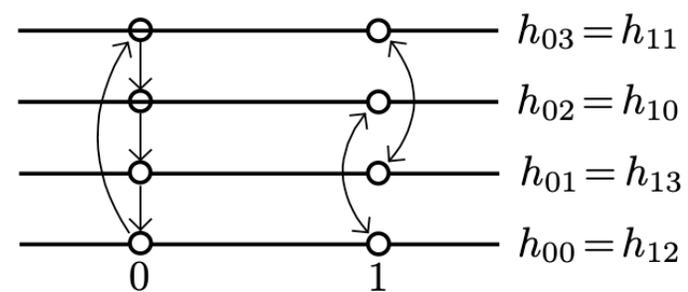
**La division.**  $h(z) = f(z) / g(z)$



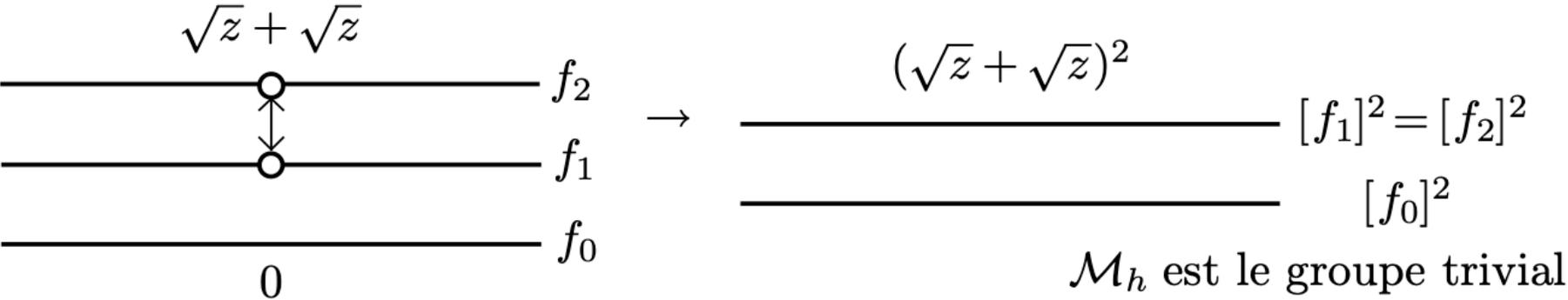
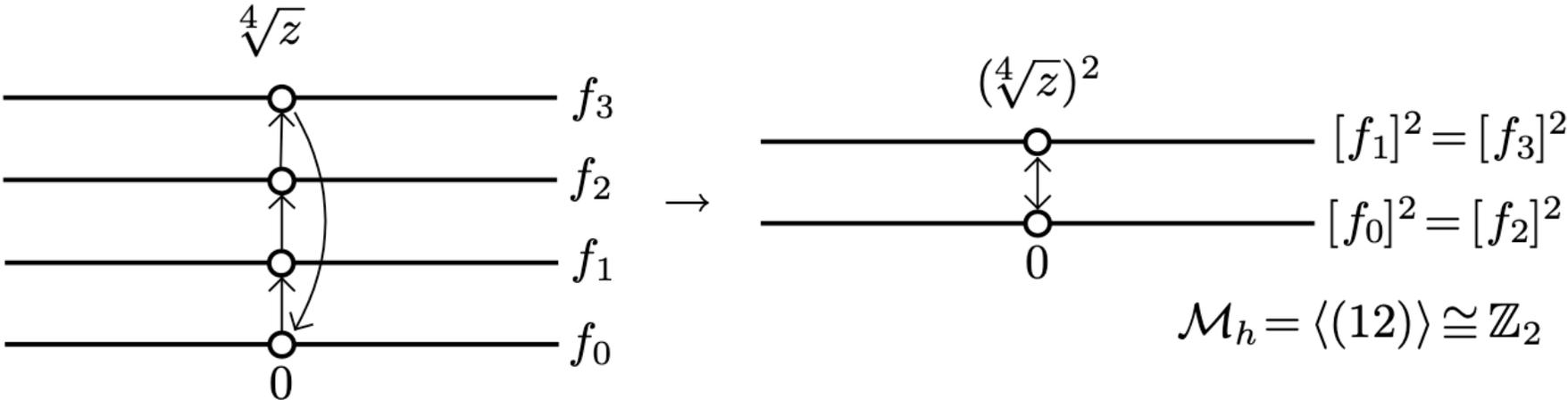
→



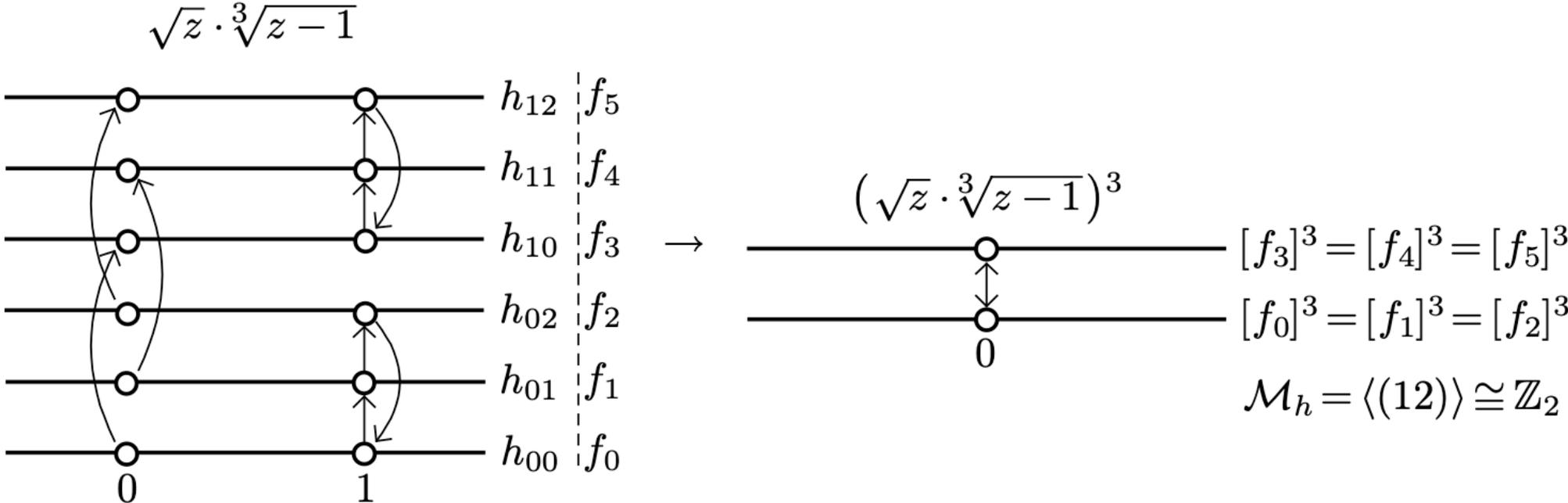
=



**Puissances.** Pour  $h(z) = f^n(z)$ : partir du schéma de  $\mathcal{S}_f$  et appliquer la partie II.



**Puissances.** Pour  $h(z) = f^n(z)$ : partir du schéma de  $\mathcal{S}_f$  et appliquer la partie II.



## Surfaces associées à des racines emboîtées

Comment obtenir la surface de Riemann de  $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$  à partir de  $\mathcal{S}_f$ ?

Point subtil:  $\sqrt[n]{\cdot}$  est elle-même multivaluée et produit des nouveaux points de branchement. Procédons pas à pas:

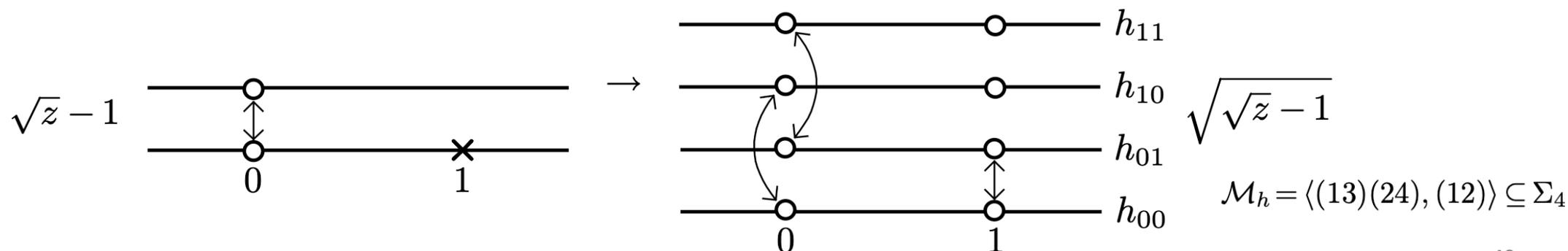
- $\sqrt[n]{\cdot}$  est  $n$ -valuée: chaque branche  $f_i$  de  $f$  va induire un *paquet* de  $n$  nouvelles branches pour  $h$ , qu'on notera  $h_{i0}, \dots, h_{i(n-1)}$  et qu'on ordonnera de sorte que pour tout  $k$  on ait

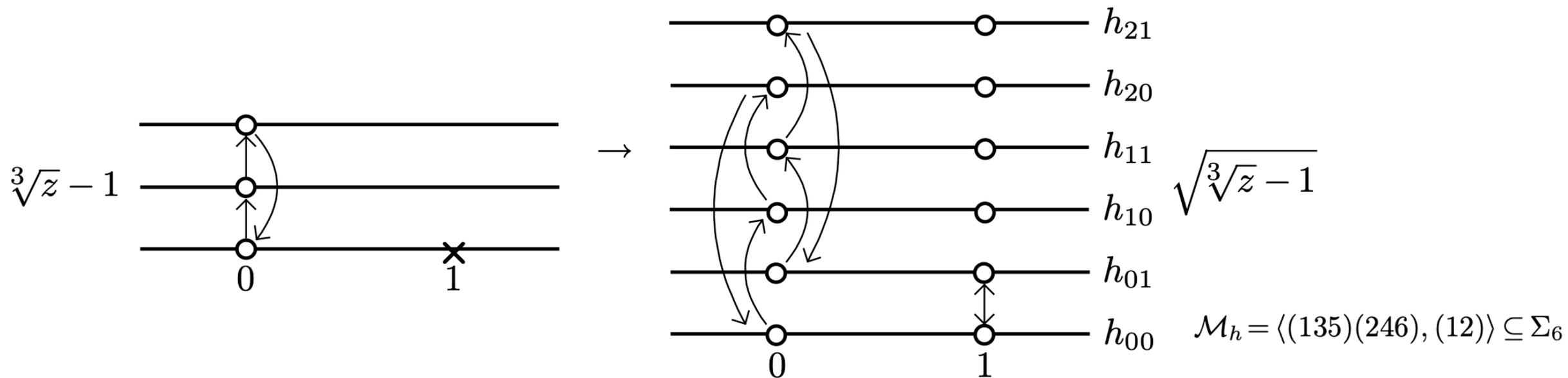
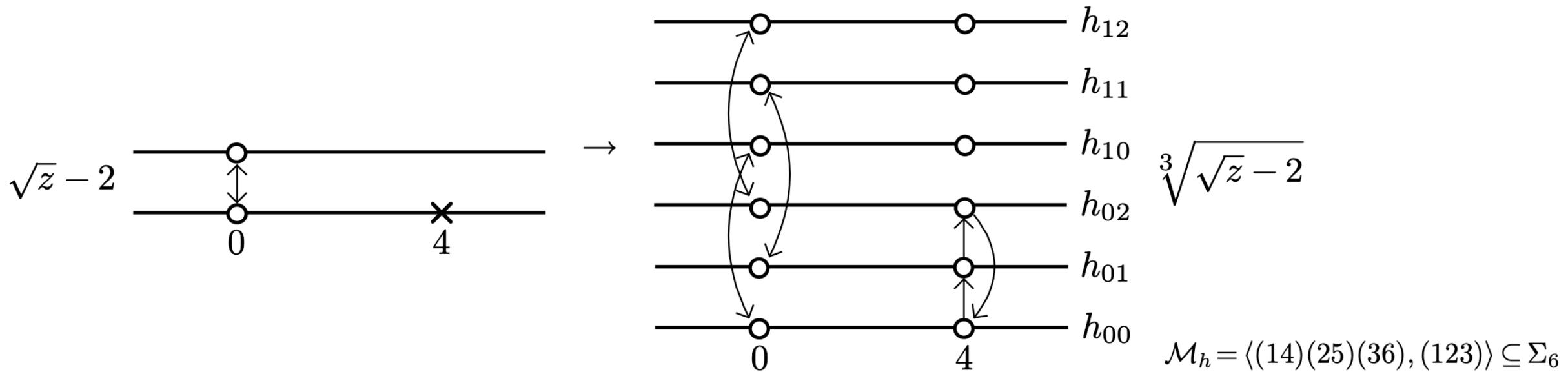
$$h_{ik}(z) = h_{i0}(z) \cdot \epsilon_n^k, \quad \epsilon_n^k := e^{2\pi i k/n}$$

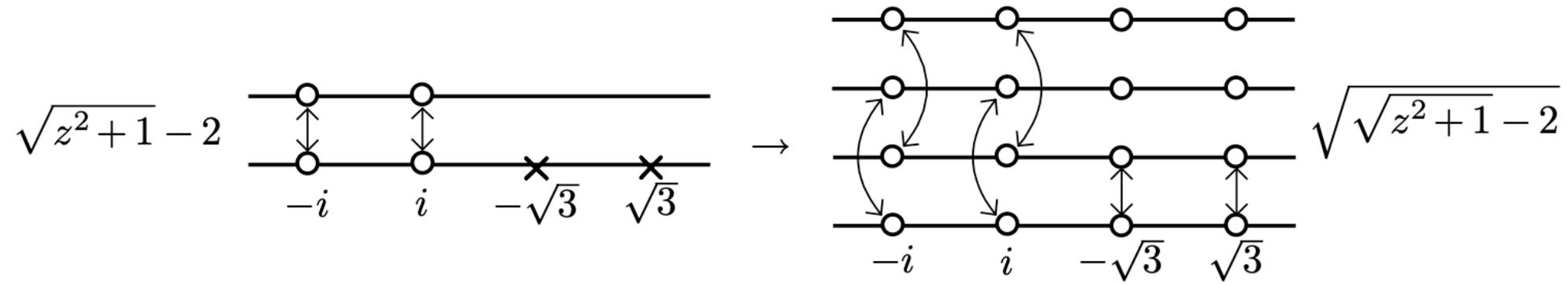
Si  $f$  a  $m$  branches,  $h$  aura  $nm$  branches.

- Points de branchement de  $\sqrt[n]{f(z)}$ : points de branchement de  $f$  mais aussi les zéros de  $f(z)$ .
  - en effet,  $\sqrt[n]{f(z)}$  a un point de branchement quand  $f(z) = 0$ .
- Les points de branchement de  $h$  provenant des zéros de  $f$  sont à leur tour relatifs à une détermination de la fonction multivaluée  $f \implies$  ils connectent des branches de  $h$  qui sont dans le même *paquet*.

Ajout accessoire: marquer d'une croix les zéros de  $f$  dans le schéma de  $\mathcal{S}_f$ .







$$\mathcal{M}_h = \langle (13)(24), (12) \rangle \subseteq \Sigma_4$$

**Au total.** Nous sommes partis avec Arnold de deux fonctions multi-valuées  $f(z)$  et  $g(z)$  auxquelles on peut associer des surfaces de Riemann  $\mathcal{S}_f$  et  $\mathcal{S}_g$  et nous avons trouvé

- des méthodes formelles pour construire  $\mathcal{S}_{f+g}$ ,  $\mathcal{S}_{f-g}$ ,  $\mathcal{S}_{f^n}$  et  $\mathcal{S}_{\sqrt[n]{f}}$
- une unique manière de leur associer des groupes de monodromie  $\mathcal{M}_{f+g}$ ,  $\mathcal{M}_{f-g}$ ,  $\mathcal{M}_{f^n}$  et  $\mathcal{M}_{\sqrt[n]{f}}$

Notre pratique nous a indiqué que si  $\mathcal{M}_f$  et  $\mathcal{M}_g$  sont résolubles alors  $\mathcal{M}_{f+g}$ ,  $\mathcal{M}_{f-g}$ ,  $\mathcal{M}_{f^n}$  et  $\mathcal{M}_{\sqrt[n]{f}}$  restent résolubles.

L'arithmétique géométrique ainsi présentée permet d'entre-voir le résultat suivant:

**Proposition 14.** *Toute fonction  $f$  représentable par radicaux*

- *possède un nombre fini de branches et de points de branchement.*
- *admet la propriété de monodromie permettant de construire formellement  $\mathcal{S}_f$*
- *induit un groupe de monodromie  $\mathcal{M}_f$  qui est résoluble.*

*Inversement, si le groupe de monodromie d'une fonction algébrique est résoluble, alors elle est représentable par radicaux.*

# Ré-exposition

**Eclaircissements sur notre preuve.** On est en mesure de lever le mystère au coeur de la preuve annoncée:

- Renversement d'étude: polynôme  $P_z(w) \rightsquigarrow$  fonction  $f_w(z)$
- fonction  $f_w(z) \rightsquigarrow$  surface de Riemann  $\mathcal{S}_f \rightsquigarrow$  groupe de monodromie  $\mathcal{M}_f$
- morphisme surjectif  $\varphi: \mathcal{M}_{\sqrt[n]{f}} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_f$
- Son noyau  $Z := \ker(\varphi)$  est abélien (engendré par des commutateurs de chemins)
- On déduit un isomorphisme de groupes

$$\mathcal{M}_f \cong \mathcal{M}_{\sqrt[n]{f}} / Z.$$

- Racines emboîtées  $\rightsquigarrow$  des quotients itérés de groupes par des sous-groupes abéliens

**Conclusion:** Existence de commutateurs emboîtés non triviaux dans  $\Sigma_5$  de profondeur arbitraire  $\Rightarrow$  toute expression faite avec des racines emboîtées (en plus des opérations algébriques classiques) ne pourrait être candidat-solution de l'équation quintique générale.

**Question:** Exemple concret d'équation qui a bien  $\Sigma_5$  comme groupe de monodromie ?

**L'exemple d'Arnold.** Notons, pour  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$P_z(w) := 3w^5 - 25w^3 + 60w - z := f_w(z)$$

où

- $P_z(w)$  polynome en  $w$  (avec  $z$  fixe)
- $f_w(z)$  fonction en  $z$

On décompose le problème en une série de postulats chacun facilement démontrable:

1. L'équation  $P_z(w) = 0$  a des racines multiples  $\iff z = \pm 38$  ou  $z = \pm 16$ , et auquel cas, ces racines ne peuvent être que doubles.

Notons  $\mathcal{B} = \{\pm 16, \pm 38\}$

2.  $f_w(z)$  est définie de manière unique par continuité le long de courbes ne rencontrant ni points de branchement ni de non unicité.
3.  $f_w(z)$  est 5-valuée et  $z \in \mathbb{C} - \mathcal{B}$  a 5 images différentes deux à deux.
4.  $f_w$ , étant algébrique, admet la propriété de monodromie:
  - on peut donc construire  $\mathcal{S}_{f_w}$  (5 feuilles)
  - $\mathcal{S}_{f_w}$  ne dépend pas du choix des coupures selon les points de  $\mathcal{B}$
  - structure de  $\mathcal{S}_{f_w}$  donnée par les points de branchement de  $f_w(z)$  et les permutations entre branches correspondant à des tours autour de ces points

# **Coda polyphonique: l'exemple d'Arnold**

**(A l'image des heptades polyphoniques de Speiser)**

**L'exemple d'Arnold.** Notons, pour  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$P_z(w) := 3w^5 - 25w^3 + 60w - z := f_w(z)$$

où

- $P_z(w)$  polynome en  $w$  (avec  $z$  fixe)
- $f_w(z)$  fonction en  $z$

On décompose le problème en une série de postulats chacun facilement démontrable:

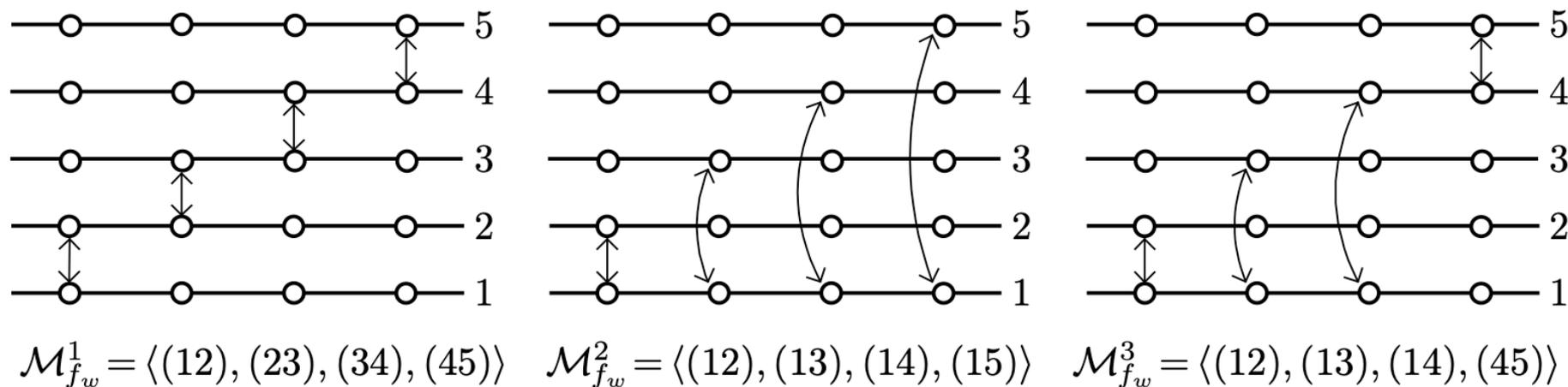
1. L'équation  $P_z(w) = 0$  a des racines multiples  $\iff z = \pm 38$  ou  $z = \pm 16$ , et auquel cas, ces racines ne peuvent être que doubles.  
Notons  $\mathcal{B} = \{\pm 16, \pm 38\}$
2.  $f_w(z)$  est définie de manière unique par continuité le long de courbes ne rencontrant ni points de branchement ni de non unicité.
3.  $f_w(z)$  est 5-valuée et  $z \in \mathbb{C} - \mathcal{B}$  a 5 images différentes deux à deux.
4.  $f_w$ , étant algébrique, admet la propriété de monodromie:
5. Les 4 éléments de  $\mathcal{B}$  sont tous points de branchement pour  $f_w$  et tout  $z \in \mathbb{C} - \mathcal{B}$  est régulier.
6. Un tour autour de tout point de branchement permute exactement 2 feuilles, les 3 restantes n'ayant pas été permutées.

**L'exemple d'Arnold.** Notons, pour  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$P_z(w) := 3w^5 - 25w^3 + 60w - z := f_w(z)$$

5. Les 4 éléments de  $\mathcal{B}$  sont tous points de branchement pour  $f_w$  et tout  $z \in \mathbb{C} - \mathcal{B}$  est régulier.
6. Un tour autour de tout point de branchement permute exactement 2 feuilles, les 3 restantes n'ayant pas été permutées.

A permutation près de l'ordre des 4 points de branchement et des 5 feuilles, il y a exactement trois schémas possibles qui puissent décrire  $\mathcal{S}_{f_w}$ :



Un simple calcul nous montre que  $\mathcal{M}_{f_w}^1 = \mathcal{M}_{f_w}^2 = \mathcal{M}_{f_w}^3 = \Sigma_5$ .

**Conclusion:**  $\Sigma_5$  non résoluble  $\implies f_w$  pas représentable par radicaux  $\implies P_z(w) = 0$  pas résoluble algébriquement.  
D'où le théorème d'impossibilité d'Abel pour l'équation quintique.

**L'exemple d'Arnold.** Notons, pour  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$P_z(w) := 3w^5 - 25w^3 + 60w - z := f_w(z)$$

5. Les 4 éléments de  $\mathcal{B}$  sont tous points de branchement pour  $f_w$  et tout  $z \in \mathbb{C} - \mathcal{B}$  est régulier.
6. Un tour autour de tout point de branchement permute exactement 2 feuilles, les 3 restantes n'ayant pas été permutées.

**Conclusion:**  $\Sigma_5$  non résoluble  $\implies f_w$  pas représentable par radicaux  $\implies P_z(w) = 0$  pas résoluble algébriquement. D'où le théorème d'impossibilité d'Abel pour l'équation quintique.

Pour  $n \geq 5$ , la surface de Riemann  $\mathcal{S}_g$  associée à

$$Q_z(w) = (3w^5 - 25w^3 + 60w - z)z^{n-5} = g_w(z)$$

contient, en plus de  $\mathcal{S}_f$ , une feuille séparée de  $\mathcal{S}_f$  et à monodromie triviale ( $z^n$  est univaluée).  
Donc  $\mathcal{M}_g \cong \Sigma_5, \forall n \geq 5$ .

**Bilan.** *Aucune* fonction dont sa surface associée a *même type de branchement topologique* que celle de  $g$  n'est résoluble algébriquement. Sont écartés *topologiquement*:

- Expressions avec  $+, -, \times, \div, \sqrt[n]{\phantom{x}}$
- Fonctions univaluées (et même  $m$ -valuées avec  $m < n$ )
- Autres fonctions analytiques:  $\cos(z), \log(z)$ .. de groupe de monodromie résoluble.

## **Heptades polyphoniques de Speiser (rappel)**

1. L'être
2. Le néant
3. Le devenir
4. Le surgissement (devenir avec accent sur l'être)
5. La disparition (devenir avec accent sur le néant)
6. Lutte et contradiction entre 4. et 5.
7. L'existence

## L'approche d'Arnold comme heptade

1. Polynôme  $P_z(w)$
2. Fonction  $f_w(z)$
3. L'équation  $P_z(w) = 0 = f_w(z)$
4. Les racines multiples de  $P_z(w) = 0$
5. Les points de branchement de  $f_w(z)$
6. Les actions de monodromie et permutations
7. La topologie de la surface de Riemann associée à l'équation