Le système ZFC

(1) Les axiomes élémentaires

1. $x = y$ ssi $\forall z\ z \in x \Leftrightarrow z \in y$
2. Si x, y sont des ensembles, $\{x, y\}$ est un ensemble : il existe un ensemble z tel que $t \in z \Leftrightarrow t = x$ ou $t = y$.
3. Si x est un ensemble, il existe un (unique) ensemble $\mathcal{P}(x)$ tel que $y \subset x \Leftrightarrow y \in \mathcal{P}(x)$, où $y \subset x$ est une abréviation pour $\forall z\ z \in y \Rightarrow z \in x$.
4. Si x est un ensemble, il existe un (unique) ensemble $\mathrm{U}(x)$ tel que $y \in \mathrm{U}(x) \Leftrightarrow \exists z\ y \in z$ et $z \in x$.
5. Il existe un ensemble $\emptyset$, caractérisé par $\forall x\ x \notin \emptyset$.
6. Il existe un ensemble infini, analogue aux entiers naturels.

Le système ZFC

(2) Les axiomes plus délicats

1. L'axiome de séparation, ou de compréhension. Si P est une formule, et x un ensemble, $\{y \in x \mid P(y)\}$ est un ensemble.
2. L'axiome du choix : pour tout x, il existe une application $f : \mathcal{P}(x) \to Ux$ tel que $\forall y \in x\ y \neq \emptyset \Rightarrow f(y) \in y$.
3. L'axiome de remplacement. Si f est une 'application' de source x, alors $\{f(y), y \in x\}$ est un ensemble.

A partir de ces axiomes, on construit des ordinaux, puis un concept de cardinal comme plus petit ordinal non équipotents à un ordinal qui le précède, et on note $\aleph_\alpha$ le $\ll\ \alpha\ \gg$-ième cardinal.

Les cardinaux peuvent également s'interpréter comme classe d'équipotence d'ensembles (« nombre d'éléments »).
On a un ordre sur les cardinaux, et le théorème de Cantor : $\alpha < 2^\alpha$, où 2^α est le cardinal de $\mathcal{P}(X)$ pour X ensemble de cardinal α.

Le système ZFC

(3) L'axiome de fondation et la hiérarchie cumulative

L'axiome de fondation interdit $x \in x$, et a comme conséquence que tout ensemble appartient à la hiérarchie cumulative de Von Neumann, i.e. $\forall x \exists \alpha \; x \in V_\alpha$, où V_α est construit ainsi :

$$\begin{array}{lllll}
V_0 & = & \emptyset & & \\
V_1 & = & \mathcal{P}(V_0) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
V_2 & = & \mathcal{P}(V_1) & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
 & \ldots & & & \\
V_{i+1} & = & \mathcal{P}(V_i) & & \\
 & \ldots & & &
\end{array}$$

puis $V_\omega = \bigcup_i V_i$, $V_{\omega+1} = \mathcal{P}(V_\omega)$ $V_{\omega+2} = \mathcal{P}(V_{\omega+1})$,

$$V_{\omega+\omega} = V_\omega \cup \mathcal{P}(V_\omega) \cup V_{\omega+2} \cup \cdots = \bigcup_{i \in \omega} V_{\omega+i}$$

etc.

Transcendantaux

Un transcendantal T est une « échelle des degrés », qui sont des « degrés d'identité (et donc de différences) aux autres étants du même monde. ».

T est donc (partiellement) ordonné, admettant des propriétés caractéristiques des « valeurs de vérité » de la logique intuitionniste.

- un minimum μ
- un maximum M
- pour tous $a, b \in T$ un $\min(a, b) = a \cap b$ représentant la conjonction
- pour tous $a, b \in T$ un $\max(a, b) = a \cup b$ représentant la disjonction
- une négation $\urcorner a$ satisfaisant $a \cap \urcorner a = \mu$ mais $a \cup \urcorner a$ non nécessairement égal à M.
- Si $\forall i \in I \; a_i \in T$, alors on a une « disjonction infinie », $\bigcup_i a_i$, caractérisée par $(\forall i \; a_i \leq b) \Leftrightarrow \bigcup_i a_i \leq b$, telle que

$$\bigcup_i (b \cap a_i) = b \cap \bigcup_i a_i$$

Transcendantaux

T est ce que l'on appelle une algèbre de Heyting complète.

Les valeurs de vérité d'une logique intuitionniste ont une interprétation topologique comme *lieu* sur lequel une proposition P est vraie.

- il n'y a pas de lieu sur lequel P et $\neg P$ sont toutes les deux vraies.
- il peut y avoir des lieux sur lesquels ni P ni $\neg P$ ne sont vraies.

Si X est un espace topologique, la collection $Ouv(X)$ des ouverts de X forme un transcendantal.

Exemple

$X = \{*\}$ avec pour ouverts $\emptyset \subset \{*\}$ donne $T = \{\mu, M\}$, soit la logique classique.

Mondes

Un transcendantal T étant fixé, un monde est donné par une fonction « identité »,

$$\mathrm{Id} : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to T$$

satisfaisant

$$\mathrm{Id}(x, y) = \mathrm{Id}(y, x), \mathrm{Id}(x, y) \cap \mathrm{Id}(y, z) \leq \mathrm{Id}(x, z)$$

elle-même déterminant un « degré d'existence » $E(x) = \mathrm{Id}(x, x)$.

Exemple

$\mathfrak{M}$ égal à l'ensemble des propositions logiques, $T = \{\mu, M\}$, $\mathrm{Id}(P, Q) = M$ si $P \Leftrightarrow Q$, $\mathrm{Id}(P, Q) = \mu$ sinon.

Exemple

$T = Ouv(X)$, X espace discret, $\mathfrak{M}$ les fonctions $X \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Id}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

Mondes

Un transcendantal T étant fixé, un monde est donné par une fonction ≪ identité ≫,

$$\mathrm{Id} : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to T$$

elle-même déterminant un ≪ degré d'existence ≫ $E(x) = \mathrm{Id}(x, x)$.

Definition

Le *phénomène* associé à $A \in \mathfrak{M}$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{Id}(A, x)$.

LDM, p. 213. ≪ nous appellerons 'phénomène' de cet étant le système complet d'évaluation transcendantale de son identité à tous les étants qui co-apparaissent dans ce monde ≫.

Mondes

LDM, p. 217. « La fonction d'identité opère conjointement sur les formes, sur les couleurs, sur les indices représentatifs, etc. On voit aisément, par exemple, que les colonnes du temple circulaire doivent être à la fois harmonieusement semblable et cependant distinctes. Ainsi, le bleuté des colonnes du fond est destiné à porter leur recul par rapport à celles du premier plan, mais aussi leur identité, eu égard à la variation des lumières (si le temple tournait, ce sont les deux colonnes mordorées du premier plan qui deviendraient floues et bleutées). »

Mondes

Un objet de $\mathfrak{M}$ est un $A \in \mathfrak{M}$ ayant une propriété particulière.

Pour $A \in \mathfrak{M}$, les *atomes* de A sont des applications $\alpha : A \to T$ ayant des propriétés formelles particulières,

$$\alpha(x) \cap \mathrm{Id}(x, y) \leq \alpha(y), \ \alpha(x) \cap \alpha(y) \leq \mathrm{Id}(x, y)$$

Definition (« postulat du matérialisme »)

A est un *objet* si tout atome de A est de la forme $x \mapsto \mathrm{Id}(a, x)$ pour un certain $a \in A$.

Definition (≪ postulat du matérialisme ≫)

A est un *objet* si tout atome de A est de la forme $x \mapsto \mathrm{Id}(a, x)$ pour un certain $a \in A$.

LDM, p. 265-266. ≪ Que tout atome d'apparaître soit réel veut certes dire qu'il est prescrit par un élément a de A, et donc par la composition ontologique de A. Il ne s'ensuit pas que deux éléments a et b ontologiquement différents prescrivent des atomes différents. 'Atome' est un concept de l'objectivité, donc de l'apparaître, et les lois de la différence n'y sont pas celles de la différence ontologique. ≫

Mondes

Si $T = Ouv(X)$, l'interprétation topologique fait des « objets » ce que l'on appelle des *faisceaux* sur X.

Le faisceau associé à l'objet $A \in \mathfrak{M}$ est $F : T \to \mathfrak{M}$ défini par

$$F(u) = \{a \in A \mid E(a) = u\}$$

L'articulation « logique » entre les objets est effectuée par la « catégorie des faisceaux sur X », qui ne dépend que de T.

C'est le *topos associé à* T. Il est constitué de tous les objets associé à ce transcendantal et de toutes leurs relations.

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est une collection $Ob(\mathcal{C})$ d'ensembles, qui pour nous formeront toujours un ensemble, et la donnée pour tous $x, y \in Ob(\mathcal{C})$ d'un ensemble $\mathrm{Hom}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ de « flèches » de x vers y. On peut composer des flèches $x \to y$ et $y \to z$, d'où une loi de composition

$$\circ : \mathrm{Hom}(x, y) \times \mathrm{Hom}(y, z) \to \mathrm{Hom}(x, y)$$

satisfaisant un certain nombre d'axiomes.

Exemple

La catégorie formée de toutes les parties (de cardinal $\leq \alpha$) d'un ensemble donné, avec $\mathrm{Hom}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F.

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est une collection $Ob(\mathcal{C})$ d'ensembles, qui pour nous formeront toujours un ensemble, et la donnée pour tous $x, y \in Ob(\mathcal{C})$ d'un ensemble $\mathrm{Hom}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ de « flèches » de x vers y. On peut composer des flèches $x \to y$ et $y \to z$, d'où une loi de composition

$$\circ : \mathrm{Hom}(x, y) \times \mathrm{Hom}(y, z) \to \mathrm{Hom}(x, y)$$

Definition

Un *foncteur* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est composé d'une application sur les objets $Ob(\mathcal{C}_1) \to Ob(\mathcal{C}_2)$ et d'une autre sur les flèches $\mathrm{Hom}(x, y) \to \mathrm{Hom}(F(x), F(y))$ compatible avec la composition.

Catégories

Une catégorie $\mathcal{C}$ est une collection $Ob(\mathcal{C})$ d'ensembles, qui pour nous formeront toujours un ensemble, et la donnée pour tous $x, y \in Ob(\mathcal{C})$ d'un ensemble $\mathrm{Hom}(x, y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ de « flèches » de x vers y. On peut composer des flèches $x \to y$ et $y \to z$, d'où une loi de composition

$$\circ : \mathrm{Hom}(x, y) \times \mathrm{Hom}(y, z) \to \mathrm{Hom}(x, y)$$

Comme pour les structures mathématiques ordinaires, on a une relation d'isomorphisme entre catégories, disant que deux catégories sont les mêmes à renommage près ('remplacement') de leurs objets.

Definition

Un *isomorphisme* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est un foncteur tel qu'existe un foncteur $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ tel que $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$, $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$.

Il s'agit la notion adéquate au niveau ontologique.

Catégories

Mais la théorie des catégories admet une autre notion « d'équivalence de catégories », qui permet certaines pensées que ne permet pas le monde ensembliste naïf.

Definition

Un *foncteur* $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ est une « équivalence de catégories » s'il existe un foncteur $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ tel que $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$, $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$. Cela qui signifie que l'on a des $\varphi_x : F(G(x)) \to \mathrm{Id}(x) = x$ et $\psi_x : x \to F(G(x))$ inverses l'un de l'autre, tels que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(x, y)$, les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd} F(G(x)) \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "F(G(f))"'] & x \arrow[d, "f"'] \\ F(G(y)) \arrow[r, "\varphi_y"] & y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(G(x)) \arrow[d, "F(G(f))"'] & x \arrow[l, "\psi_x"'] \arrow[d, "f"'] \\ F(G(y)) & y \arrow[l, "\psi_y"'] \end{tikzcd}$$

Catégories

Deux catégories peuvent être équivalentes tout en étant de cardinalités très différentes.

Exemple

$\mathcal{C}_1$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(E, F)$ l'ensemble des applications de E vers F.
$\mathcal{C}_2$ l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(n, m)$ l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, n\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$.

$F(E)$ est le cardinal de E, $G(n) = \{1, \ldots, n\}$. On a $F \circ G(n) = n$. En revanche, $G \circ F(E) \neq E$ en général.

Mais on peut construire des isomorphismes $E \xrightarrow{\psi_E} G(F(E))$ convenables : si $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, on envoie $a_i \in E$ sur $i \in G(F(E)) = \{1, \ldots, n\}$.

La cardinalité de $Ob(\mathcal{C}_2)$ est infinie dénombrable, celle de $Ob(\mathcal{C}_1)$ est celle du continu.

Univers de Grothendieck et univers de Badiou

Univers de Badiou

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathrm{U}x \in \mathfrak{M}$

(Badiou n'indique pas (2), mais l'utilise.)

Univers de Badiou

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathrm{U}x \in \mathfrak{M}$

(Badiou n'indique pas (2), mais l'utilise.)

Univers de Grothendieck

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. Si $I \in \mathfrak{M}$ et $\forall i \in I\ x_i \in \mathfrak{M}$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{M}$.

Univers de Grothendieck

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. Si $I \in \mathfrak{M}$ et $\forall i \in I\ x_i \in \mathfrak{M}$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{M}$.

$$\bigcup_{i \in I} x_i = \mathrm{U}\{x_i; i \in I\}$$

Univers de Grothendieck

1. $\mathfrak{M}$ est transitif : $x \in y, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \in \mathfrak{M}$.
2. $x, y \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathfrak{M}$
3. $x \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathfrak{M}$
4. Si $I \in \mathfrak{M}$ et $\forall i \in I\ x_i \in \mathfrak{M}$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{M}$.

$$\bigcup_{i \in I} x_i = \mathrm{U}\{x_i ; i \in I\}$$

Or $\{x_i ; i \in I\} \subset \mathfrak{M}$, mais on n'a pas en général $\{x_i ; i \in I\} \in \mathfrak{M}$.