

Le « romantisme révolutionnaire » d'Henri Lefebvre,
à la lumière de la mathématique différentielle et intégrale

(Séminaire *mamuphi*, 5 octobre 2022)

Introduction	3
Les modernités face au défi du nihilisme postmoderne.....	3
La question renouvelée des romantismes.....	3
Le romantisme en musique ?	3
Une proposition d'Henri Lefebvre.....	4
Pourquoi ici la mathématique ?.....	4
<i>Mamuphi</i> : « à la lumière des mathématiques... ».....	4
« <i>Mathématiciens aux pieds nus</i> » ?	5
I.A – Le romantisme littéraire de Stendhal	7
Henri Beyle (1783-1842)	7
<i>Racine et Shakespeare. Études sur le romantisme</i> (1823-1825).....	7
I.B – Le romantisme révolutionnaire de Henri Lefebvre.....	8
Henri Lefebvre (1901-1991)	8
<i>Florilège</i>	8
<i>Vers un romantisme révolutionnaire</i> (1957).....	8
<i>Introduction à la modernité</i> (1962).....	9
En résumé.....	10
Le problème.....	11
II – La mathématique différentielle et intégrale	12
Trois moments.....	12
État contemporain	12
II.A - Le calcul différentiel et intégral traditionnel	14
Une équation : un problème !.....	14
<i>Équations fonctionnelles</i>	14
<i>Équations différentielles</i>	14
<i>Différents types d'équation différentielle</i>	14
<i>EDO 1</i>	15
Un problème : une solution ?	16
Un espace de solutions.....	16
Problématisation de la résolution d'une EDO 1.....	16
1 – Une surface	16
2 – Une courbe paramétrée sur cette surface.....	16
3 – Une équation différentielle.....	16
4 – CI et problème de Cauchy.....	17
5 – Solution unique ?	17
6 – G différentielle $\rightarrow H$ intégrale.....	17
7 – Condition lipschitzienne.....	18
8 – Espace fonctionnel.....	18
9 – Fonctions approchantes.....	19
10 – Suite de fonctions	19
11 – Suite de Cauchy.....	19

12 – Point fixe dans l'espace fonctionnel	19
Interprétation intellectuelle de cette méthode de résolution	19
Courage et confiance.....	20
[Trois annexes du CDI].....	21
A.a - Application lipschitzienne	21
A.b - Théorème du point fixe de Picard-Banach.....	21
A.c - Solution comme point fixe	21
II.B - La géométrie différentielle synthétique contemporaine.....	23
Analytique/synthétique	23
Références intellectuelles.....	23
Chronologie.....	24
Infinitésimaux nilpotents.....	24
Deux exemples d'adjonction d'infinitésimaux	25
Les nombres duaux.....	25
L'analyse non-standard	26
Nouveautés de la GDS	26
Modèle intuitif.....	26
1) Les décisions non délibérées de Sartre.....	26
2) Les clinamens d'Épicure-Lucrèce	28
Axiomatisation de la GDS	30
Anneau $\mathcal{R}$	30
Classe $\mathcal{D}$ des infinitésimaux différentiels.....	30
Axiome Kock-Lawvere de linéarité.....	31
Interprétation	31
Logique intuitionniste	31
Consistance ?	32
Corps.....	32
Dérivée.....	32
Calcul intégral.....	33
Axiome de préordre ($n^{\circ}2$)	33
Axiome de l'intégration ($n^{\circ}3$)	33
Principaux résultats pour nous... ..	33
Inconscient différenciant de type nouveau !	33
Interprétation synthétique.....	34
III – Le « romantisme révolutionnaire », ausculté et radiographié par cette mathématique.....	35

Introduction

Les modernités face au défi du nihilisme postmoderne

On assiste aujourd'hui au déchaînement tous azimuts des critiques de la modernité, déclarée en bloc responsable de tous les maux du monde contemporain.

L'idée générale qui enveloppe ces très nombreuses critiques tourne autour d'une nécessaire sortie « post-moderne » de l'ère moderne (entendue comme ère produite par les Lumières du XVIII^e - c'est la version de la droite extrême - ou, plus en amont, par la Renaissance du XVI^e siècle – c'est la voie des gauchistes repentis ¹) ceci aux fins d'éviter le dilemme capitalisme/communisme.

Pour ma part, je ne vois là que nihilisme, sous sa forme passive (« *la volonté de l'humanité n'est que désastre ; retournons à une animalité et une organicité vitale qui renoncent précautionneusement à tout vouloir* ») ou sous sa forme active (« *continuons jusqu'au bout de vouloir, en précipitant la fin inéluctable de l'humanité selon une forme suicidaire hyperbolique choisie par nous* »).

Défier aujourd'hui ce double nihilisme implique d'identifier les modernités (le pluriel est capital) restant aujourd'hui au travail en sorte d'en dégager les perspectives restant émancipatrices pour une humanité désorientée.

D'où la question des romantismes.

La question renouvelée des romantismes

La question des romantismes (à nouveau, le pluriel me semble ici indispensable), mise à l'ordre du jour de cette saison mamuphi, s'inscrit à mon sens dans ce cadre très général, et ce d'une double façon :

- 1) concernant leurs débuts, les romantismes du XIX^e ont-ils été l'aube des modernités (qui se sont épanouies au XX^e) ou, au contraire, le chant du cygne d'un esprit prémoderne s'enfermant dans des finitudes religieuses ?
- 2) concernant leurs actualités, les romantismes (dans les différents arts, sciences, politiques et amours) peuvent-ils constituer, depuis les années 1960, une ressource subjective émancipatrice ou sont-ils désormais l'emblème d'une subjectivation nihiliste, exaltant l'affect individuel d'une vie condamnée à mort ?

Le romantisme en musique ?

Concernant spécifiquement la musique, je tiens simultanément

- 1) qu'il faut intégrer le romantisme du XIX^e dans la modernité du XX^e (en ce point, je m'écarte explicitement des néoclassiques de l'entre-deux guerres comme de Boulez)
- 2) et qu'il y a sens à réactiver la question éminemment romantique de l'expression dans la musique contemporaine.

Boulez : *Le pays fertile* (Gallimard, 1989)

« Klee déclarait que "Mozart et Bach sont plus modernes que le XIX^e siècle", montrant bien par là que c'est avant tout le romantisme qu'il ne pouvait supporter. »

« Hindemith était un hôte régulier du Bauhaus, Stravinsky y a été joué et Klee l'a rencontré. Il a apprécié Hindemith et Stravinsky qui, l'un en Allemagne, l'autre en France, symbolisaient justement la haine du romantisme. »

Il y avait « une réaction générale, commune à la génération des années 1920 – en Allemagne comme en France. Le romantisme avait été rejeté. Les œuvres de Stravinsky, de Hindemith, voire de Schoenberg, étaient écrites dans un esprit néo-classique. On était rassasié des grandes masses orchestrales, des oscillogrammes psychologiques, et même psychopathiques ; on était bien davantage préoccupé par l'élaboration formelle dégagée des faiblesses sentimentales, on recherchait une certaine objectivité de l'expression que l'on aurait voulue sans faille. »

Mais mon propos aujourd'hui ne va guère porter sur cette dimension proprement musicale.

¹ Voir Bruno Latour, Philippe Descola and C°...

Une proposition d'Henri Lefebvre

Je voudrais aujourd'hui examiner une proposition, très originale et il me semble très ponctuelle (car sans réels voisinage et descendance intellectuelle) du philosophe-sociologue Henri Lefebvre au tournant des années 1950-1960 : celle d'un « romantisme révolutionnaire ».

Je vais donc me livrer devant vous à ce que j'appellerai une « étude de cas », une sorte de « monographie » qui, évitant les généralités surplombantes, choisit plutôt de s'enfouir dans une singularité pour mieux délivrer les ressources intriquées d'une époque.

Je vais déployer cette étude du cas « romantisme révolutionnaire d'Henri Lefebvre » dans l'esprit *mamuphi* de notre séminaire c'est-à-dire « à l'ombre de la philosophie et à la lumière des mathématiques ».

- « L'ombre de la philosophie » prendra ici une place naturelle puisque Henri Lefebvre, philosophe autant que sociologue, y recourt ici abondamment.
- Le recours par contre à « la lumière de la mathématique » est plus inattendu, en particulier parce que le texte de Lefebvre ne nous délivre aucun point d'appui du côté des mathématiques.

On connaît certes son travail antérieur sur la logique dialectique² mais rien d'équivalent en matière mathématique.

C'est donc là un choix personnel de méthode qui, je l'espère, va se justifier par ses résultats.

D'où un exposé en trois temps :

- 1) Examen du « romantisme révolutionnaire d'Henri Lefebvre », tel qu'il l'expose en deux textes :
 - un bref article de 1957
 - en 1963, un très long chapitre concluant son *Introduction à la modernité*.
- 2) Examen de la mathématique différentielle et intégrale, la plus susceptible à mon sens d'éclairer le point intellectuel inscrit à notre ordre du jour.
- 3) Effet de cette lumière mathématique sur notre « cas » : comment cette mathématique différentielle et intégrale permet, en sa version la plus contemporaine, d'ausculter et radiographier le romantisme révolutionnaire d'Henri Lefebvre.

Mais avant de rentrer dans le détail de la proposition d'HL, quelques mots pour justifier l'intrusion, si inattendue en matière romantique, de la mathématique la plus contemporaine.

Pourquoi ici la mathématique ?

Deux argumentations pour cela :

- l'une au nom de l'esprit *mamuphi* de ce séminaire ;
- l'autre au nom de ce que j'aime appeler la nécessité de *mathématiciens aux pieds nus*.

Mamuphi : « à la lumière des mathématiques... »

L'interprétation intellectuelle d'une théorie mathématique dans un modèle non mathématique de pensée est au principe du séminaire *mamuphi*.

J'entends ainsi cette démarche : s'il est vrai que *être* équivaut à *penser* (Parménide), et s'il est vrai que la mathématique est la pensée de l'être en tant qu'être (Badiou), alors

- la voie habituelle des *applications* examine les conséquences de l'équation parméniennienne « penser = être » *en aval* (par ses applications *physiques* aux formes existantes de l'être c'est-à-dire aux étants physico-naturels)
- quand la voie des *raisonances* intellectuelles examine les conséquences de la même équation parméniennienne *en amont* (par ses *raisonances psychiques* dans des formes non mathématiques de pensée).

Parménide (*Le Poème*)

Fragment 3 :

... τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστὶν τε καὶ εἶναι.
...to gar auto noeîn estin te caĩ eĩnai.

car le même, lui, est à la fois penser et être. (Jean Beaufret)

² *Logique formelle, logique dialectique* (1946, Éditions sociales)

en effet, c'est la même chose « penser "est" » et « être ». (Maurice Sachot)

Fragment 8 :

or c'est le même, penser et ce à dessein de quoi il y a pensée. (Jean Beaufret)

- Dans la voie des *applications*, la pensée mathématique de l'être s'applique à tout étant (car, a minima, tout étant a bien les propriétés d'être).
- Dans la voie des *raisonances*, l'être en pensée mathématique éclaire l'être en d'autres formes de pensée (et donc *ce que penser veut dire* en musique, en politique, en amour...).

Ma thèse est alors la suivante :

- pour mettre en œuvre la voie des applications, il faut des ingénieurs ;
- pour mettre en œuvre la voie des raisonances, il faut des mathématiciens aux pieds nus.

« Mathématiciens aux pieds nus » ?

Qu'entendre exactement par « mathématiciens aux pieds nus » ? [MPN]

Il s'agit de mathématiciens, qui font donc des mathématiques (le mathématicien se définit simplement comme celui qui fait des mathématiques tout comme le musicien est celui qui fait de la musique...) et non pas qui s'en servent (comme s'en servent les ingénieurs : un ingénieur utilise les résultats mathématiques sans à proprement parler refaire en détail les théories, en particulier leurs démonstrations) mais qui en font autrement que le *working mathematician* [WM] c'est-à-dire le mathématicien compositeur de mathématiques. En filant la métaphore avec la musique et les différents types de musiciens, on dira que les MPN interprètent les mathématiques que les WM ont composées.

Pour le MPN, les principales différences de sa pratique mathématique vont essentiellement porter sur deux choses :

- le soin extrême apporté à ne pas enfermer l'indispensable formalisation mathématique dans un formalisme aveugle et, pour cela, l'importance extrême accordée au fait de dire à chaque instant ce que l'on fait en associant une sémantique (non seulement mathématique mais également intellectuelle) à toute syntaxe ;
- en conséquence, la très grande lenteur de son travail mathématique.

Le MPN accorde donc une particulière importance au sol sur lequel poser les pieds. Il n'a pas la capacité du WM à surfer à la surface de l'eau sans s'enfoncer (telles les araignées d'eau), à franchir un tapis de braises d'un seul élan.



Et ses pieds nus le rapprochent de l'homme du commun qui ne comprend pas pourquoi s'élancer dans cette mathématique rendue apparemment insaisissable par son effort de formalisation littérale

Les deux orientations (sémantique associée à tout formalisme syntaxique et lenteur) du MPN s'opposent ainsi directement à celles du WM qui, pour sa part, s'attache à faire confiance quasi-aveugle en la formalisation algébrique qu'il met en œuvre (formalisation algébrique qui, au demeurant, marque, à partir du IX^e siècle, le grand retour des mathématiques dans la pensée créatrice de l'humanité, après leur constitution antique chez les Grecs et leur quasi-disparition dans l'ère impériale romaine).

Reprenant une remarque de Lacan, on dira que le WM ne dit pas de quoi il parle là où le MPN s'efforce à tout instant de dire ce dont il parle ce qui bien sûr ralentit considérablement ses enchaînements discursifs.

« *Un de mes amis mathématiciens m'indiquait : "Dans la mathématique, on ne dit pas de quoi on parle ; on le parle tout simplement. D'où un certain air de faire semblant."*
Ainsi, c'est comme si celui qui énonçait ce discours mathématique se trouvait toujours en posture de cacher quelque chose.
Il en résulte que les plus épais et seulement eux croient que la mathématique parle de choses qui n'existent pas ! »

Pourquoi le MPN procède-t-il ainsi ? Essentiellement car le MPN est un militant de la pensée mathématique (là où l'ingénieur est un thuriféraire de leur efficacité calculatrice) c'est-à-dire :

- 1) quelqu'un qui est convaincu, comme Lautréamont, que la pensée mathématique constitue un trésor indispensable pour une humanité luttant contre elle-même pour s'émanciper collectivement d'un destin naturellement animal ;

Lautréamont (*Les chants de Maldoror*, 1869)

« *Ô mathématiques sévères, merci pour les services innombrables que vous nous rendez.*
Merci pour les qualités dont vous enrichissez notre intelligence.
Sans vous, nous serions peut-être vaincus.
Vous nous donnez la froideur, la prudence opiniâtre, la logique.
Avec vos syllogismes, notre intelligence sent s'accroître ses forces audacieuses. »

- 2) quelqu'un qui encourage chacun à abreuver sa propre pensée à cette source.

Au total, le MPN, qui fait laborieusement des mathématiques pour la joie intellectuelle que cela lui procure, milite pour que cette joie soit partagée par tous ceux qui partagent le souci d'une émancipation collective en ces temps de déchaînements nihilistes.

Tout ceci préalablement posé, attaquons notre sujet du jour.

Comme nous allons le voir, l'exploration, à la lumière de la MDI, de cette subjectivité romantique va nous délivrer une doctrine intellectuelle beaucoup plus générale de ce que subjectivation et procès subjectif³ veulent dire aujourd'hui face au nihilisme postmoderne.

En deux mots, ceci va consolider une doctrine des points d'existence (ek-sistence) subjective, soit l'idée que, face au nihilisme postmoderne, il est possible et nécessaire de tenir et soutenir tel ou tel point décidé sur un pari.

Voyons comment HL constitue et défend son point du romantisme révolutionnaire comme point éminemment moderne.

³ Voir *Théorie du sujet* d'Alain Badiou

I.A – Le romantisme littéraire de Stendhal

Henri Beyle (1783-1842)

Il s'est d'abord voulu poète, puis s'est tourné vers le théâtre (voir sa période « romantique » autour de 1825) avant d'œuvrer, à partir de 1830, dans le roman.

1812 : Fait la campagne de Russie à la direction générale des approvisionnements de réserve (⇒ « *un Français qui fut de la retraite de Moscou !* » (74).

1813 : chute de l'Empire. Le débat romantique est engagé en France (traduction de Schlegel, *De l'Allemagne* de Mme de Staël...) avec aussitôt une résistance nationale des classiques à l'invasion des littératures étrangères.

1815 : la défaite de Waterloo l'affecte profondément.

1818 : « *Je suis un romantique furieux, pour Shakespeare contre Racine et pour lord Byron contre Boileau.* »

1820 : *De l'amour*

fin 1822-1825 : *Racine et Shakespeare*

1824 : l'Académie française admet le mot « romantique » et engage la critique des romantiques.

1830 : *Le Rouge et le Noir*. Il assiste avec enthousiasme aux « Trois Glorieuses ».

1831 : Louis-Philippe le nomme consul de France en Italie.

Racine et Shakespeare. Études sur le romantisme (1823-1825)

Son romantisme proclamé et programmé reste esthétiquement très nébuleux.

Introduction

[Sentiment que dans la Restauration après la fin de l'Empire, « *il n'est pas possible d'écrire, en 1823, les mêmes tragédies qu'en 1670* »]

[Restauration postrévolutionnaire / pré-révolution libérale ⇒ nouvelle subjectivation et nouveaux procès subjectifs]

[Le théâtre classique, comme théâtre de l'ennui]

[Le romantisme comme le protestantisme en littérature...]

[En 1824, les théories ne produisent pas d'œuvres.]

Stendhal (*Racine et Shakespeare. Études sur le romantisme*)

1823

Pour un plaisir dramatique plutôt qu'épique

Produire **l'émotion** profonde et le véritable **effet** dramatique

Pour **l'expérience** plutôt que la raison

« Ce que c'est que le romanticisme : Sophocle et Euripide furent éminemment romantiques.

Racine a été romantique. Shakespeare fut romantique ».

« Il faut du courage pour être romantique car il faut *hasarder*. »

« Le poète romantique par excellence, c'est le Dante. »

1825

« Personne en France n'a encore travaillé d'après le système romantique. »

« La véritable bataille entre les classiques et les romantiques, entre Racine et Shakespeare »

« C'est le plaisir dramatique qu'il faut aller chercher au théâtre, et non pas le plaisir épique d'entendre réciter de beaux vers bien ronflants, et que d'avance l'on sait par cœur. »

I.B – Le romantisme révolutionnaire de Henri Lefebvre

Henri Lefebvre (1901-1991)

Intellectuel marxiste plutôt que militant ⁴, sociologue plutôt que philosophe ⁵, théoricien de l'urbanisme et de « la révolution urbaine » ⁶...

Ici deux textes :

- *Vers un romantisme révolutionnaire* (article de 1957, réédition 2011 par les éditions Ligne)
- *Introduction à la modernité* (livre de 1962, Éditions de minuit). Douze préludes. Voir en particulier : *Douzième prélude : Vers un nouveau romantisme ?* (pp. 235-373)

Florilège

Vers un romantisme révolutionnaire (1957)

Présentation (Rémi Hess)

*Lien entre la problématique romantique des fragments et la problématique plus générale des moments
(comme fragments temporels)*

Il a trouvé sa *théorie des moments* chez Joachim de Flore et son *Mouvement du libre esprit* en 1250.

Le romantisme révolutionnaire, c'est de reconnaître le fragment comme permettant de penser la totalité dans la perspective d'un autre monde.

I. La conscience critique radicale

Un passé disparaît ; un horizon nouveau monte devant nous.

Cf. 1825 pour Stendhal !

Le présent texte se limite au domaine de l'art.

Son romantisme révolutionnaire concerne dont l'art plutôt que la politique. Cf. il n'est pas militant.

Le caractère problématique de l'art moderne

Le classicisme français a précédé la période révolutionnaire de la bourgeoisie, quand le grand classicisme allemand (Goethe, Schiller) l'a suivie.

Différence France-Allemagne en matière de romantisme comme de classicisme...

Le classicisme suppose de multiples accords. Plus l'accord est profond, plus le classicisme va loin.

[Néoclassicisme dans le socialisme : cf. le réalisme socialiste]

ce qui n'est pas dire pour l'orientation communiste !

Pour Lukács, il y a opposition du dramatique et de l'épique alors qu'il y a unité pour Brecht.

L'ancien romantisme

Le romantisme allemand [RA] naquit à la fin du XVIII^e et au début du XIX^e. Le romantisme français [RF] commence quelques années plus tard. Entre les deux, plus de différences que de ressemblances.

Le RA élude la Révolution, accepte la société et fuit dans l'ironie. L'ironie romantique juge l'actuel au nom du passé.

Le RF au contraire se réclame de la Révolution et aspire au dépassement, surtout à partir de 1830.

Le RA relève de l'affranchissement, le RF de l'émancipation ?

Différence dans l'interprétation du **concept de nature** : contenu anthropologique pour le RF (cf. Rousseau, bonté originelle, égalité entre les hommes) ; contenu cosmologique pour le RA (la profondeur inaccessible du « monde »). Le R. anthropologique invente des images d'êtres humains, vivants (Rolla ou Lorenzaccio, Quasimodo ou Jean Valjean), le R. cosmologique des images-symboles (la Femme nocturne, le bateau ivre...)

Le mouvement littéraire correspondant au RA ne se développe en France qu'après 1848. Cf. Baudelaire introduit Novalis et Rimbaud exprime Hoffmann.

La musique actuelle se définit de façon seulement **négative** par rapport à l'ancienne : atonale, athématique. et amétrique...

II. Le nouveau romantisme

Contre l'ancien, à la fois dans son prolongement et en renouvellement...

La première affirmation – ou son premier postulat - de l'attitude RR serait *l'homme en proie au possible* quand celle de l'ancien romantisme était *l'homme en proie au passé*

⁴ Il adhère au PCF en 1928-1929 et en sera « suspendu » en 1958...

⁵ Professeur de sociologie à Strasbourg (1962) puis à Nanterre (1965)

⁶ Voir sa théorie de « l'habiter »...

Le nouveau romantisme [NR] maintient l'imagination comme investigation du possible.

Le RR rejette l'idée d'une privation intérieure à l'individu (à la vie « privée »). il exclut l'isolement.

L'ancien R. se proposait d'estomper les contours. Le NR insiste au contraire sur la netteté des contours.

Le R. cosmologique privilégiait l'enfance, le R. anthropologique l'adolescence. Pour le RR, la jeunesse n'assume pas une signification symbolique mais elle est une école des possibles. [...] La jeunesse s'offre en proie au possible et le possible la dévore.

Dans le classicisme, l'accord est essentiel et le désaccord s'y subordonne. Tout R. se fonde au contraire sur le désaccord. La distance au présent ne se fait plus au nom du passé mais du possible. D'où la fiction plutôt que la description.

Le possible

Le possible fait partie intégrante du réel.

Le RR rejette [la réalité] au nom du possible plus réel que [la réalité].

Le RR se propose de donner une signification nouvelle à ce mot si vague et dont on a tant abusé : le moderne.

La valeur de l'avenir et sa réalisation ne peuvent résulter que d'une période d'attente et de tension lucidement supportée dans un défi tranquille et permanent à l'existant.

Introduction à la modernité (1962)

Exigence d'une théorie de la modernité, en distinguant Modernisme et Modernité

Expliciter le concept de Modernité

Ouverture du champ des possibles ⇒ rôle de l'aléatoire dans la Modernité.

Enjeu essentiel : les possibles et non plus les seuls effectifs (cf. mathématique des grandeurs complexes !)

Quelle fut la grande période créatrice de la Modernité, quand et où commença-t-elle, où finit-elle et pourquoi ?

Irons-nous vers un nouveau romantisme ?

Ce livre est construit comme une œuvre musicale ⇒ douze préludes...

Il faut aller au-delà du langage.

XII. Vers un nouveau romantisme ?

En France, le romantisme venait de l'étranger, des pays détestés (l'Allemagne, l'Angleterre). Les premiers romantiques français, sur la trace de Mme de Staël et de Chateaubriand, étaient royalistes.

« soif croissante d'émotions fortes »

Le classicisme déteste la fiction et l'imaginaire.

Jamais quelqu'un ne prit la décision de passer du romantisme au néo-classicisme.

HL contre le réalisme socialiste, néoclassique...

Parce que les hommes courent le long de l'abîme, parce que la Terre risque l'anéantissement, ne faisons pas *comme si* le néant nous engloutissait. Si nous faisons *comme si*, les chances du néant s'accroissent. *Dé-dramatisons*.

L'intéressant est une catégorie nouvelle : dans les romans de Balzac, l'intéressant l'emporte. Balzac abandonne la beauté ; il n'en a plus le style. Remarquons seulement que l'intéressant destiné à exciter une certaine jouissance dure peu et devient ennuyeux.

L'irruption massive de *l'intéressant* : la Beauté meurt, l'intéressant l'a tuée.

Le programme du romantisme est l'introduction de la musique dans la littérature.

La naissance d'une Beauté renouvelée, non dans des ouvrages mais dans des œuvres

La Beauté comme forme et instance suprême et substance dernière de l'*expression*. Le Romantisme poussa jusqu'aux derniers excès le désir d'expression.

L'imagination explore le possible et l'impossible.

Le romantisme rejette le scientisme, le positivisme.

Le classicisme distingue les genres, le romantisme les confond.

Le romantisme annonce la disparition de l'art : quand la subjectivité de l'artiste se met au-dessus de l'œuvre Comme Stendhal l'a admirablement perçu (1823), le romantisme est un phénomène à la fois postrévolutionnaire et prérévolutionnaire. Postrévolutionnaire : il accompagne le grand ébranlement de 1789, il émerge après l'échec et les défaites. Prérévolutionnaire : il prépare de nouvelles révolutions, celle de 1830 en France, celle de 1848 en Europe, et le passage à l'idée socialiste. C'est ainsi que le mouvement romantique diffère du « *Sturm und Drang* ».

Le pathos romantique, avec ses confusions inextricables mais puissamment expressives

Un des phénomènes avant-coureurs du romantisme : l'importance prise par la jeunesse, par l'enfance, par les femmes.

En fait, le romantisme n'eut rien d'antisocial. N'oublions pas qu'il fut contemporain du socialisme utopique. L'image du possible que le socialisme utopique projetait dans l'avenir, les romantiques voulurent le vivre.

Le dandysme, comme parodie de l'utopie vécue romantiquement...

L'Harmonie, comme idée centrale du romantisme

Les romantiques se disent « modernes ».

L'intensification du sentiment subjectif de l'existence

Le problème du dépassement

Pour le classicisme, l'unité est au départ ; elle est réelle [effectivement donnée par la réalité]. Pour le romantisme, l'unité est au terme ; elle est possible

De 1830 à 1848, la classe ouvrière figure dans le grand mouvement romantique. Dès que la classe ouvrière pénètre sur la scène historique et politique, beaucoup de choses changent.

L'œuvre d'art « valable » a toujours été *expressive*.

Les années 1960...

De 1930 à 1960, l'avant-garde avait presque disparu. Et voici qu'à échelle mondiale, des avant-gardes se reconstituent et parlent et se font entendre.

L'utopie revit. Nous sommes obligés aujourd'hui de lui redonner un sens. L'utopie explore les possibilités. Racine ne laisse aucune place à l'impossible, c'est le fond du classicisme. L'objet de l'ancien romantisme n'est pas le possible mais l'impossible : le possible s'y change en mélancolie. D'où le nouveau romantisme qui explore le possible à partir du présent.

La jeunesse, classe d'âge, pas classe sociale, constitue une avant-garde.

Il faut explorer le possible et ne pas se borner à enregistrer l'accompli.

Restitution de l'élan [L'élan δ romantique contre la forme Γ classique]

Klee : « Le monde dans sa forme actuelle n'est pas le seul monde possible. ». Ernst Bloch : « Ce que nous sommes vient au-devant de nous. » « L'homme moderne est en proie au possible. » « Vouloir l'impossible pour avoir tout le possible ! »

Vivre, c'est ouvrir des possibles.

Sans les enfants, l'adulte se réduit au fait accompli.

En résumé...

Le projet de ce second romantisme se dessine selon douze caractéristiques qui varient celles du premier romantisme.

- 1) *Romantisme* désigne un **projet** qui, début 1960, n'a guère plus de réalisation à son actif que le projet de Stendhal n'en avait en 1825.
- 2) Il s'agit d'un romantisme **de type artistique** (« révolutionnaire » ne concerne donc pas ici directement la pensée politique).
- 3) Ce nouveau romantisme esthétique aura plus de difficulté que le premier à se disposer à **l'école d'une musique** affirmative de son temps puisque « *la musique actuelle* [1963] *se définit de façon seulement négative par rapport à l'ancienne : atonale, athématique* ⁷ ».
- 4) Comme le premier, ce second romantisme émerge dans **l'entre-temps** d'une révolution passée (forclose par une Restauration contre-révolutionnaire) et d'un nouvel horizon d'avant-garde : « *un passé disparaît ; un horizon nouveau monte devant nous*. »
- 5) Ce nouveau projet s'oppose aux **néoclassicismes** (néoclassicisme à l'Ouest et réalisme socialiste à l'Est) tout de même que le premier s'opposait aux classicismes de son temps.
- 6) Contre l'équilibre statique classique, romantisme veut dire : primauté donnée à une **dynamique expressive** de l'effet subjectif.
- 7) Contre la problématique classique de l'unité totalisante, le romantisme met l'accent sur le **fragmentaire** ⁸.
- 8) Dans le premier romantisme, les unités de type nouveau (non classiques) se pensaient sous le signe de **l'Harmonie**. Dans les années 60, la reprise de ce point est encore incertaine.

⁷ On pourrait y ajouter : *amétrique*...

⁸ Attention : comme on le verra, cet éloge du fragment, s'il est bien un renoncement aux chatoiements imaginaires du Tout, n'est pas pour autant un renoncement au Global si l'on entend, sous ce nom de fragment, une action restreinte ayant la capacité, par franchissement des frontières entre voisinages locaux, à configurer des régions, prometteuses de futures extensions globales

- 9) Le premier romantisme corrélait « Harmonie » et « **Nature** » selon deux acceptions opposées de ce que « Nature » veut dire : une conception *cosmologique* (allemande) et une conception *anthropologique* (française). La réactivation de ce point n'est guère détaillée dans le nouveau projet d'Henri Lefebvre.
- 10) Point essentiel : cette orientation romantique se fait selon **les possibles**, non les effectivités (« *le possible fait partie intégrante du réel* » ; « *il faut explorer le possible et ne pas se borner à enregistrer l'accompli.* »). Par là, elle mobilise le *Principe espérance* (Ernst Bloch : « *ce que nous sommes vient au-devant de nous.* ») et motive en première ligne la jeunesse (« *la jeunesse est une école des possibles ; elle s'offre en proie au possible.* »).
- 11) L'opérateur cardinal dans l'exploration des possibles est **l'imagination**.
- 12) L'enjeu de ce nouveau romantisme est de relancer **les modernités**, « *de donner une signification nouvelle à ce mot si vague et dont on a tant abusé : le moderne* ». ⁹

Le problème...

Comment ressaisir l'unité de ces douze caractéristiques ?

Comment remonter de ces douze projections au noyau même du projet comme on remonte d'un problème à sa problématisation, d'une subjectivité à sa subjectivation constituante ?

Quelle Idée princeps, en amont, produit et coordonne ces douze dimensions ?

« *La philosophie différentielle sera chargée de mesurer le devenir d'une pensée.* » Gaston Bachelard ¹⁰

C'est en ce point que je propose de convoquer la mathématique de la dynamique, autrement dit la mathématique différentielle et intégrale qui remonte (par différenciation) d'une fonction à la fonction dérivée qui la soutient *en amont*, puis caractérise (par intégration) la fonction primitive qui la subsume *en aval*.

Cette mathématique va nous permettre d'ausculter l'amont des prises de position, des décisions non délibérées, des parti pris dont la constitution reste non consciente et dont la mesure n'est prise que vers l'aval : par examen de leurs conséquences.

Cette mathématique va nous permettre de radiographier la rationalité de ce que j'appellerai « une doctrine des points » apte à défier le nihilisme postmoderne.

Cette mathématique va nous mettre sur la voie des points subjectivement tenus entre deux infinis : en amont l'infiniment petit de leur constitution, et en aval l'infiniment grand de leurs conséquences ; d'un côté la différenciation infinitésimale, de l'autre l'intégration infiniment globalisante.

Cette mathématique va le faire d'une double manière :

- selon une approche locale de ces points qui explore ses voisinages : ce sera la voie traditionnelle du CDI ;
- selon cette fois une approche directement ponctuelle des mêmes points désormais entendus comme « gros points » sans qu'il soit pour cela nécessaire d'examiner topologiquement leurs voisinages : ce sera la voie contemporaine de la GDS.

Ceci va nous permettre de dégager les résultats suivants :

- l'analyse calculatrice d'une décision prise se joue en aval de cette décision : dans ses conséquences, dans la motivation pour le procès subjectif qu'elle engage. Le CDI traditionnel va dégager à quelles conditions une telle fidélité est concevable pour un problème donné ;
- par contre la constitution de cette décision émerge selon un amont non analytiquement calculable et cette émergence prend en point la forme d'une direction donnée. La GDS va dégager les coordonnées du pari établissant l'existence d'une telle émergence.

⁹ Rappelons l'actualité de ce point au milieu des années 60, au moment donc où les postmodernités nihilistes s'affirment à partir des arts qu'elles nomment « plastiques ».

¹⁰ *La philosophie du non* (p. 14)

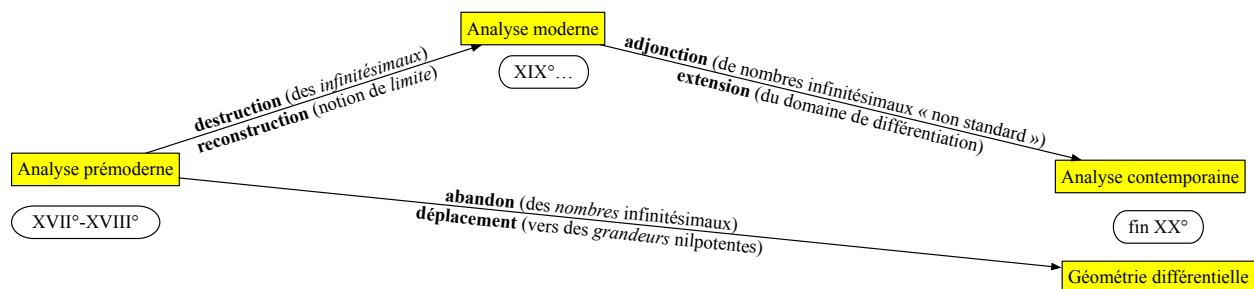
II – La mathématique différentielle et intégrale

Trois moments

La mathématique différentielle et intégrale a enchaîné trois grands moments selon trois types de révolution :

- un premier moment *prémoderne* (XVII^e : Newton-Leibniz) ;
- un deuxième moment *moderne* (XIX^e : Cauchy-Weierstrass) procédant d'une révolution par *destruction* (de la problématique des infinitésimaux) et *reconstruction* (sur les notions de convergence et de limite) ;
- un troisième moment *contemporain* (fin du XX^e : Ehresmann-Grothendieck-Robinson-Lawvere) selon une double révolution :
 - par *adjonction* (de nombres infinitésimaux : nombres duaux, hyperréels de l'analyse non-standard) et *extension* corrélatrice (du domaine de différentiation) ;
 - par *abandon* (des infinitésimaux numériques) et *déplacement* (des infinitésimaux vers des grandeurs nilpotentes : géométrie différentielle).

Où l'on retrouve ainsi les trois modalités « RED »¹¹ des révolutions...



État contemporain

Dans son état contemporain, cette mathématique prend désormais quatre formes principales :

- différentielle *locale* sans infinitésimaux (analyse traditionnelle héritée de Cauchy¹²) ;
- différentielle *locale* avec nombres infinitésimaux inversibles (analyse non standard de Robinson¹³) ;
- différentielle *locale* avec grandeurs infinitésimales nilpotentes (géométries différentielles d'Ehresmann et de Grothendieck) ;
- différentielle *ponctuelle* avec grandeurs infinitésimales nilpotentes (*géométrie différentielle synthétique* de Lawvere¹⁴).

	Sans infinitésimaux (analyse traditionnelle)	Avec infinitésimaux	
		Analyse (nombres)	Géométrie (grandeurs)
différenciation locale	Cauchy-Weierstrass	Robinson	Ehresmann-Grothendieck
différenciation ponctuelle			Lawvere

Au total, la mathématique différentielle et intégrale contemporaine entrecroise d'un côté *arithmétique* (des nombres bien ordonnés) et *algèbre* (des grandeurs nilpotentes), de l'autre *analyse* (des limites et inégalités¹⁵) et *géométrie* (des linéarités et égalités¹⁶).

	arithmétique (nombres)	algèbre (grandeurs)
analyse (inégalités)	Cauchy/Robinson	Clifford
géométrie (égalités)		Ehresmann à Lawvere

¹¹ Reconstruction-Extension-Déplacement

¹² Jean Mawhin : *Analyse* (De Boeck Université, 1992)

¹³ Abraham Robinson : *Non-standard Analysis* (1961, 1986)

¹⁴ William Lawvere : *Categorical Dynamics* (1967)

¹⁵ « Le Calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER. » Jean Dieudonné (*Calcul infinitésimal*, 1980)

¹⁶ Alors que $(dx)^2 \approx 0$, on pose ici $\delta^2 = 0$.

Ce faisant, la dialectique local/global va s'étendre pour embrasser un spectre plus étendu :

ponctuel – *local* – **régional** – *global*

Lors de notre étude de l'analyse complexe, nous avons déjà longuement parlé de l'instance régionale comme celle de l'action restreinte mallarméenne.

La nouveauté du jour va être dans l'extension de la dialectique local-global vers son amont : la dimension proprement ponctuelle qui instaure le point comme lieu, lieu extrêmement singulier car sans dimensions spatiales proprement dites (voir sa définition euclidienne : « un point est ce dont la partie est nulle » et il n'a donc ni largeur, ni longueur, ni hauteur).

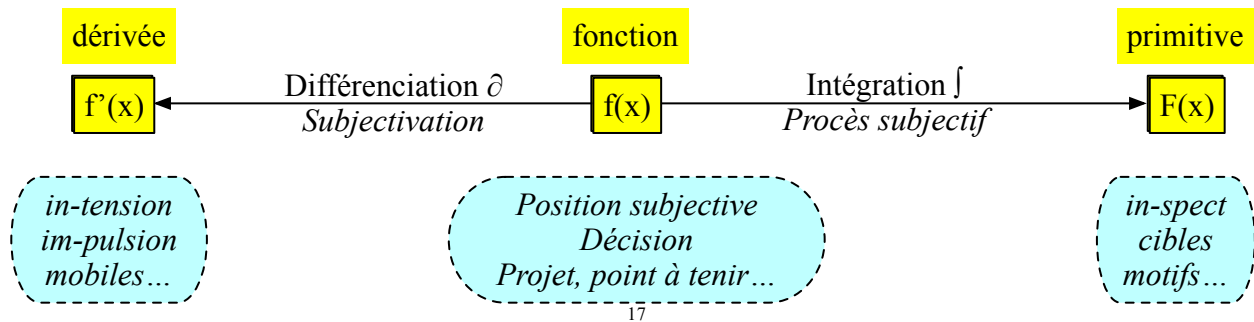
La géométrie différentielle synthétique [GDS] va mettre en avant un « gros point » sans dimensions spatiales (ce ne sera pas un micro-espace vectoriel) mais qui sera le lieu d'un infinitésimal mouvement brownien de déclinaisons différentielles.

À nos fins propres du jour (mieux comprendre la subjectivation au principe du RR de HL), je vais aujourd'hui mobiliser deux composantes de cette mathématique différentielle et intégrale :

- d'abord le calcul différentiel et intégral [CDI] traditionnel en examinant comment la résolution de certaines équations différentielles ordinaires [EDO] nous met sur la piste de ce que veut dire : remonter d'une position subjective à sa subjectivation constituante ; ce sera une approche du point que je dirai « locale » ;
- ensuite la géométrie différentielle synthétique [GDS] contemporaine qui va nous permettre d'éclairer tout autrement les fondements infinitésimaux de cette dynamique ; ce sera une approche que je dirai « ponctuelle » du point.

II.A - Le calcul différentiel et intégral traditionnel

Voyons donc comment remonter d'une position subjective à sa fonction subjectivante, à sa subjectivation selon le schéma suivant du CDI traditionnel :



Le CDI traditionnel a été déployé à partir du début du XIX^e siècle par Cauchy et Weierstrass sur la base des notions de convergence et de limite qui évitent tout recours aux quantités infinitésimales que le XVII^e siècle (Newton et Leibniz) avait introduites un peu sauvagement sans arriver ensuite à les fonder rigoureusement.

L'idée princeps est ici celle la méthode dite « epsilon-delta » qui pose que $f(x)$ converge en x_0 vers la limite $f(x_0)$ si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists \delta \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ici pas besoin d'infinitésimaux : il suffit que ε soit un nombre réel aussi petit qu'on veut !

À partir de cette notion de limite, se déploie le CDI traditionnel qu'on va maintenant explorer dans sa résolution des équations différentielles ordinaires [EDO].

Une équation : un problème !

Équations fonctionnelles

Comme toute équation, une équation différentielle [ED] formalise un problème.

C'est une équation fonctionnelle [EF] laquelle formalise donc un problème sur une fonction et non pas sur une grandeur, scalaire, complexe ou vectorielle comme par exemple les équations algébriques (c'est-à-dire polynomiales).

Équations différentielles

Une ED est une forme particulière d'EF en ce qu'elle fait intervenir des dérivées de la fonction inconnue $f : f^{(i)}$

On va l'interpréter en suivant le fil de Bachelard : *la différentielle mesure le devenir*.

Différents types d'équation différentielle

Concernant la fonction inconnue

Nombre de variables

- fonction d'une seule variable $\Rightarrow$ « ordinaire » [EDO] ou tout simplement ED
- fonction de plusieurs variables $\Rightarrow$ « partielle » ou Équation aux Dérivées Partielles [EDP].

Variable(s)

- scalaire : $\mathbb{R}$
- vectorielle : $\mathbb{R}^n$

On parle alors aussi de système différentiel...

Inconnue

- fonction à valeurs réelles : $\mathbb{R}$
- fonction à valeurs complexes : $\mathbb{C}$

On parle alors d'ED holomorphe.

¹⁷ La mobilisation se fait *sur* un problème ou sur une question. La motivation se fait *pour* une solution ou pour une réponse.

Concernant l'équation*Ordres*

- ordre 1 : ne fait intervenir que la dérivée première
- ordre n : fait intervenir les dérivées jusqu'à l'ordre n

Linéaires ou non

- linéaires
 - $G[x, f(x)] = h(x).f(x)$
 - $\sum a_i(x).f^{(i)}(x) = h(x)$
- non linéaires

Résolutions

- explicites : « par quadratures » c'est-à-dire par intégrales (comme les solutions des équations algébriques le sont par radicaux)
- implicites : par équation algébrique du type $G[x, f(x)] = 0$
- par approximations numériques

EDO explicitement résolubles

Liste non exhaustive :

- ED scalaire d'ordre 1 :
 - linéaires : $f'(t) = a(t).f(t) + b(t)$
 - à valeurs séparées : $f'(t) = h(t).g[f(t)]$
- ED vectorielle d'ordre 1 linéaire à coefficients constants : $f'(t) = A.f(t) + B$
 Pour $f' = A.f$, la solution est une exponentielle mais, comme A est ici une matrice, e^A s'exprime comme série entière¹⁸ et ne donne donc jamais de solution exacte !
- ED scalaire d'ordre >1 à coefficients constants : $\sum a_i.f^{(i)}(t) = f(t)$

EDO non résolubles

En général, les ED scalaires d'ordre ≥ 2 .

EDO 1

Travaillons ici sur le cas le plus simple : celui des équations différentielles ordinaires [EDO] du premier ordre [EDO 1] c'est-à-dire ne faisant intervenir que la dérivée première f' :

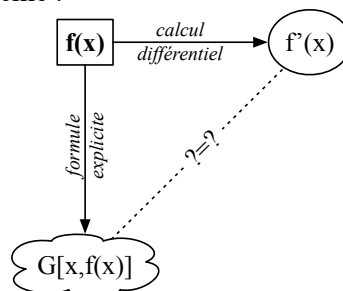
$$f'(x) = G[x, f(x)]$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x.f(x) \\ f'(x) &= x + f(x) \\ f'(x) &= f(x) \quad ^{19} \\ f'(x) &= x.\sin x.f^2(x) + [(\cos x)/x].f(x) + e^x \\ &\dots \end{aligned}$$

Le problème, ou la question, est donc : existe-t-il $f(x)$ telle que $f'(x) = G[x, f(x)]$?

On peut diagrammatiser ainsi le problème :



¹⁸ https://fr.wikipedia.org/wiki/Exponentielle_d%27une_matrice

¹⁹ $\Rightarrow f(x) = \lambda e^x$

Un problème : une solution ?

Comme pour les équations algébriques [EA] où l'on ne pourra que rarement déterminer algébriquement chaque solution individuellement (c'est-à-dire « par radicaux »), on ne pourra que rarement déterminer « par quadratures » une solution individuelle d'une ED.

D'où, comme pour les EA, deux voies :

1. remplacer la résolution « par quadratures » par une approximation numérique ;
2. s'intéresser aux relations entre solutions et non plus à leur identification individuelle : c'était la voie galoisienne des Groupes (comment les racines de l'EA sont-elles « groupées » ?) ; cela va être la voie différentielle, ouverte par Poincaré, de l'espace des solutions.

Un espace de solutions

Par contre, comme on va le voir, s'il existe une solution, il en existe en général une infinité d'autres du même type variant selon ce qu'on appelle « les conditions initiales » [CI].

D'où l'idée, comme pour les équations algébriques [EA] d'étudier l'espace des solutions c'est-à-dire la structure de ce qui relie les solutions entre elles plutôt que leur explicitation individuelle.

Le fait même que tout type de solutions engendre une infinité d'autres solutions entraîne que l'on passe d'une problématique algébrique de groupes (pour n solutions d'une EA de degré n) à une problématique différentielle des espaces différentiels.

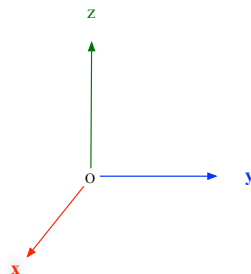
Comme on va le voir, on pourra par exemple démontrer l'existence d'une solution unique, à CI fixées, en travaillant sur un espace de solutions approchées et en montrant qu'une transformation de cet espace (correspondant à un algorithme d'approximation) admet un point fixe (qui sera la solution cherchée).

Problématisation de la résolution d'une EDO 1

Exposons la problématique en douze étapes, les trois premières pour constituer notre problème, les huit suivantes pour le résoudre.

1 – Une surface

Soit $z=G[x, y]$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$.



On a donc une surface G dans $\mathbb{R}^3$.

G n'est pas nécessairement une formule algébrique du type $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ ou $\frac{ax+by}{cx+dy}$.

G peut être « transcendant » : e^{xy} , $ax.\sin(y)+by.\sin(x)\dots$

On suppose G défini sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ (et pas forcément sur tout le plan xOy).

2 – Une courbe paramétrée sur cette surface

Posons que, pour x appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$: $[x_0, x_1]$, y va dépendre de x selon une fonction $y=f(x)$.

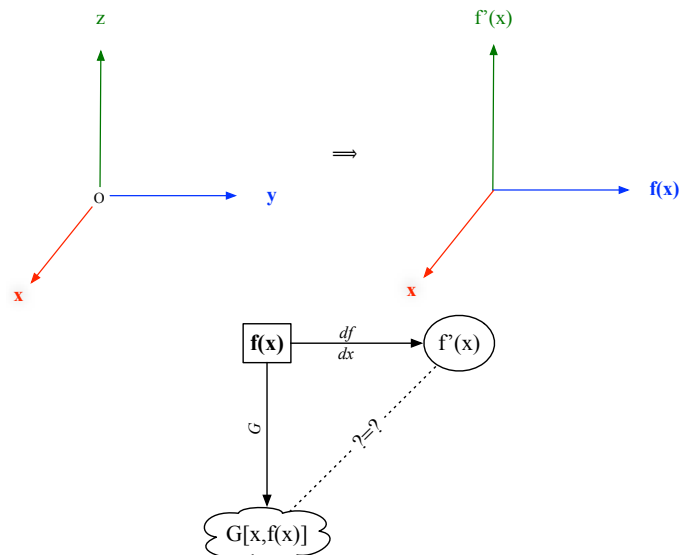
À nouveau, la fonction $f(x)$ n'est pas nécessairement algébrique (du genre $f=ax^2+bx+c$) mais peut être transcendante ($f=e^x$ ou $f=a.\cos x+b.\sin x+c/x.\log x\dots$)

$\Rightarrow z(x)=G[x, f(x)]$

$z(x)$ désigne désormais une courbe, paramétrée par x , sur la surface/variété définie par $G[x, f]$.

3 – Une équation différentielle

On se demande alors : existe-t-il $f(x)$ telle que $f'(x)=G[x, f(x)]$?



Exemples

$$f' = \frac{2f + a}{x} + b \Rightarrow f = \lambda x^2 - bx - \frac{a}{2}$$

4 – CI et problème de Cauchy

Comme la famille paramétrée de fonctions $\{f(x) + \lambda\}$ a la même dérivée $f'(x)$, l'éventuelle solution $\gamma(t)$ de l'ED sera une famille de fonctions différant à une constante près.

Autrement dit, l'ED crée une relation d'équivalence entre fonctions-solutions.

Pour dégager une seule fonction, il faut alors spécifier un point par lequel la fonction retenue passera. On y procède généralement à la manière des physiciens (pour qui le temps t est la variable paramétrant la fonction f) en fixant des conditions qu'on dira « initiales » [CI] et en imposant alors que la courbe-solution passe par le point « initial » déterminé $\{x_0, f_0\}$. Soit la CI : $f(x_0) = f_0$

Bien sûr, n'importe quel autre point conviendrait de même.

On appelle alors « problème de Cauchy » le problème formalisé par le système suivant de deux équations :

- $f'(x) = G[x, f(x)]$
- $f(x_0) = \alpha = f_0$

et qui se dit : dans $D \subset \mathbb{R}^2$, existe-t-il un $f(x)$ sur $I = [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ vérifiant les deux équations ?

5 – Solution unique ?

Résoudre ce problème de Cauchy, c'est donc répondre à la série de questions :

- 1) Existe-t-il une telle fonction $f(x)$?
- 2) Si elle existe, est-elle unique ?
- 3) Une telle unique solution est-elle analytiquement formulable « par quadratures » ?

6 – G différentielle $\rightarrow$ H intégrale

Pour travailler l'équation (1)

$$f'(x) = G[x, f(x)]$$

le pas décisif va être de la remplacer par l'équation intégrale (2) qui ne fait plus apparaître des deux côtés que $f(x)$:

$$f(x) = f_0 + \int_{x_0}^x G[s, f(s)]. ds$$

Notons cela :

$$f(x) = H[x, f(x)]$$

Si $\gamma(x)$ vérifie (1), alors elle vérifiera également (2) et vice versa.

Pourquoi cette transformation ? Car « en analyse, l'intégration est une opération beaucoup plus maniable que la dérivation »²⁰.

Pourquoi cela ? Car le théorème de la moyenne va nous permettre de contrôler l'aval de f par intégration $f' \rightarrow f$ ou $f \rightarrow F$ alors que l'amont de f (soit $F \rightarrow f$ ou $f \rightarrow f'$) n'est pas contrôlable par dérivation.

²⁰ Dieudonné, p. 44

Ce théorème de la moyenne dit ceci :

Si dans $[a,b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t).dt \leq M(b-a)$$

Autrement dit, si f est borné (sur un intervalle donné), alors f' l'est également sur le même intervalle. Ainsi, le bornage de f entraîne en aval celui de F mais nullement en amont celui de f' .

Interprétation intellectuelle pour nous très importante

L'autolimitation de la position subjective adoptée permet une autolimitation de ses conséquences mais elle n'assure aucunement une autolimitation en amont de la subjectivation associée à cette position. Autrement dit, la fermeté subjective concernant le point tenu et soutenu ne garantit aucunement une constance d'humeur en amont : cette fermeté subjective reste compatible avec d'importantes et incessantes sautes d'humeur !

Reprenons notre théorème de la moyenne.

Le point est le suivant :

$|\Delta f|$ permet de contrôler $|\Delta F|$ soit $|\Delta F|/|\Delta f| \leq M$

tout comme $|\Delta f'|$ permet de contrôler $|\Delta f|$ soit $|\Delta f|/|\Delta f'| \leq M$

Notons que le contrôle de $|\Delta f'|$ est un contrôle sur $f''(x)$ c'est-à-dire sur l'accélération de $f(x)$ - ainsi le contrôle opère aisément dans le sens *accélération* $\rightarrow$ *vitesse* $\rightarrow$ *position* - quand, à l'inverse,

$|\Delta f|$ ne permet pas de contrôler $|\Delta f'|$ tout comme $|\Delta F|$ ne permet pas de contrôler $|\Delta f|$:

une variation bornée de $f(x)$ peut être obtenue par des variations considérables de $f'(x)$ c'est-à-dire par des accélérations non bornées de $f(x)$!

Donc le contrôle opère mal aisément en amont dans le sens *position* $\rightarrow$ *vitesse* $\rightarrow$ *accélération* !

C'est en ce point qu'il va falloir imposer des conditions supplémentaires sur le rapport $f \rightarrow f'$ c'est-à-dire ici $f \rightarrow G = f'$.

7 – Condition lipschitzienne

Pour travailler correctement sur (2) et non plus sur (1), il va falloir supposer quelque condition restrictive sur $G[x, f]$, et plus spécifiquement sur G'_f c'est-à-dire sur $\partial G / \partial f$.

Il va falloir supposer que, par rapport à f , G est lipschitzienne c'est-à-dire que pour un Δf donné, ΔG reste sous contrôle : $|\Delta G| \leq M.|\Delta f|$

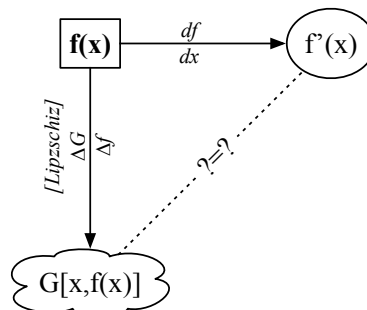
Je rappelle que ΔG correspond ici à $\Delta f'$ puisqu'on suppose que $f' = G$.

Donc le contrôle lipschitzien de l'enchaînement $\Delta f \rightarrow \Delta f'$ garantit ce qui n'est pas assuré « naturellement » par la montée en dérivation (alors que $\Delta f' \rightarrow \Delta f$ reste « naturellement » assuré – *théorème de la moyenne* - par la descente en intégration).

En un certain sens,

la condition lipschitzienne vient pallier l'inexistence d'un théorème de la moyenne vers l'amont de la fonction.

On travaille donc sur le diagramme suivant :



Voir détail en annexe A.a

8 – Espace fonctionnel

Pour avancer, on va travailler sur l'espace fonctionnel des fonctions $\Gamma_i(x)$ qui vont approximer une éventuelle unique solution $\gamma(x)$ de l'ED.

En gros, si l'équation $f'(x) = G[x, f(x)]$ admet pour solution

$$\gamma'(x) = G[x, \gamma(x)]$$

on va construire un ensemble $\{\Gamma_i(x)\}$ de fonctions telles que

$$\Gamma'_i(x) \simeq G[x, \Gamma_i(x)]$$

L'important tient ici au passage de l'égalité « = » à l'approximation « $\simeq$ ».

Pour ce faire, on va d'abord construire une norme sur l'espace fonctionnel des fonctions $f(x)$:

$$\|f(x)\| = \sup_{(x_0, x_1)} |f(x)|$$

On va en tirer une métrique :

$$\|f_i(x) - f_j(x)\| = \sup_{(x_0, x_1)} |f_i(x) - f_j(x)|$$

et on va considérer les fonctions $\Gamma_i(x)$ telles qu'il existe ε avec

$$\|\Gamma'_i(x) - G[x, \Gamma_i(x)]\| < \varepsilon$$

9 – Fonctions approchantes

En fait, pour les raisons précédemment évoquées (lipschitziennes), on va plutôt travailler cet espace fonctionnel, non par l'équation (1) de G mais par l'équation (2) c'est-à-dire

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x G[s, y(s)] \cdot ds$$

qu'on formalise ainsi :

$$f(x) = H[x, f(x)]$$

On va donc travailler sur les fonctions $\Gamma_i(x)$ telles qu'il existe ε avec

$$\|\Gamma_i(x) - H[x, \Gamma_i(x)]\| < \varepsilon$$

10 – Suite de fonctions

On va construire pour cela la suite des fonctions $\Gamma_i(x)$ dont on va avoir besoin en répétant cette opération H sur une première fonction $\Gamma_0(x)$:

$$\text{on aura } \Gamma_1(x) = H[x, \Gamma_0(x)] \Rightarrow \Gamma_n(x) = H[x, \Gamma_{n-1}(x)] = H^n[x, \Gamma_0(x)]$$

Il faut bien comprendre ici que, ce faisant, on ressaisit H comme opérateur transformant une fonction donnée $f(x)$ en une nouvelle fonction notée $H(x) = H[x, f(x)]$.

11 – Suite de Cauchy

On démontrera alors,

dans le cas où **G est à valeurs séparées** et peut donc s'écrire $G[x, f(x)] = h(x) \cdot g[f(x)]$

que la transformation $f(x) \rightarrow H[x, f(x)]$ est une *contraction*.

Dans ce cas, la suite des $\Gamma_i(x)$ est une suite de Cauchy, donc convergente vers l'unique solution $\gamma(x)$ cherchée.

12 – Point fixe dans l'espace fonctionnel

On interprétera cette convergence $\Gamma_i(x) = H^i[x, \Gamma_0(x)] \rightarrow \gamma(x)$ comme détermination d'un point fixe dans la transformation H opérée sur l'espace fonctionnel des fonctions $y(x)$:

soit $H[f(x)]$ définie par

$$y_0 + \int_{x_0}^x G[s, y(s)] \cdot ds$$

alors il existe un unique point fixe $\gamma(x)$ caractérisé par

$$\gamma(x) = H[\gamma(x)]$$

c'est-à-dire vérifiant

$$\gamma'(x) = G[x, \gamma(x)]$$

Sur le théorème du point fixe, voir l'annexe A.b et, sur la démonstration de la convergence pour cette EDO, voir l'annexe A.c.

Interprétation intellectuelle de cette méthode de résolution

L'espace des modes d'énonciation d'un énoncé donné, tout comme l'espace des subjectivations d'une position subjective donné, est très difficilement maitrisable car il est très difficilement métrisable : les modes peuvent bouger beaucoup plus vite et plus fortement que les énoncés et positions soutenues !

Ceci a été patent pendant la GRCP où les mêmes énoncés pouvaient être soutenus par des énonciations antagonistes !

La GRCP n'était pas plus lipschitzienne que ses points politiques n'étaient archimédiens (car le communisme n'est pas commensurable au socialisme) !

Par contre l'espace des conséquences d'un énoncé donné (comme l'espace des procès subjectifs d'une position subjective donnée) est plus maitrisable car plus métrisable !

D'où la loi matérialiste : il est plus sûr de mesurer un énoncé donné à ses conséquences qu'à ses possibles positions d'énonciation !

Ceci implique bien sûr qu'il s'agit ici d'énoncé de pensée et non pas d'opinion car l'énoncé d'opinion a précisément pour caractéristique essentielle qu'il ne tire à aucune conséquence – c'est là le sens même de « la liberté d'opinion » et du « droit de vote » parlementaire : étant sans conséquence, ils sont rendus irresponsables.

Lacan

« Quand nous disons quelque chose, ça tire à conséquence. » (27 mars 1968)

« Tout ce qui nous est distribué par la *Faculté des Lettres*, c'est un savoir dosé de façon telle qu'il n'ait en fait, en aucun cas, aucune espèce de conséquence. » (15 novembre 1967)

« L'enseignement de Faculté, c'est précisément que ça ne tire pas à conséquence. » (22 novembre 1967).

« La parole est libre, c'est-à-dire que rien de ce que vous dites ne peut avoir de conséquence. [...] Dans le pays de la liberté, on peut tout dire puisque ça n'entraîne à rien. » (19 juin 1968)

Courage et confiance...

On peut donc plus facilement stabiliser, contrôler les conséquences à venir, c'est-à-dire de ce à quoi conduit telle ou telle décision - cette stabilisation prend le nom de *confiance* – que stabiliser ses « raisons » ou ses « mobiles ».

D'où la loi subjective : faire confiance dans les conséquences (cependant non garanties : il s'agit d'un pari) de nos décisions plutôt que dans leurs « bonnes raisons » !

Pour maîtriser relativement une décision prise, on va délibérer sur ses conséquences sous le signe général d'une confiance plutôt que miser sur la fiabilité des mobiles, des intentions et de l'intension qui peuvent varier sans stabilité assurée : les inévitables sautes d'humeur ne raturent pas la fermeté des décisions prises sous forme de paris (la non-délibération pointe en effet la structure de pari de toute décision).

Voir la dialectique sartrienne de la mobilisation (du côté de la subjectivation et de la différenciation) et de la motivation (du côté du procès subjectif et de l'intégration).

<i>Amont subjectivé</i>		Présent	<i>Aval objectivant</i>	
dérivée	<i>différenciation</i>	Fonction	<i>intégration</i>	primitive
f	∂ ←	f	↓ →	F
<i>orientation</i>		point	<i>chemin</i>	
<i>subjectivation</i>		Position subjective	<i>procès subjectif</i>	
Mobiles	<i>mobilisation</i> ²¹	Décision	<i>motivation</i> ²²	Motifs
Instress		Chose	Inspect	
<i>énonciation</i>		Énoncé	<i>conséquences</i>	

Dans la maîtrise d'une position tenue ou d'un point subjectif affirmé, le CDI privilégie son aval c'est-à-dire la délibération sur ses conséquences, la *métrise* du procès subjectif qu'elle engage. En effet, en amont, la subjectivation n'a nulle raison d'être lipschitzienne c'est-à-dire d'être contenue dans des limites du même type que celles de la position subjective adoptée : l'affirmation d'un point, d'une position subjective peut engager en aval une autolimitation de ses conséquences et de ses effets sans que pour autant en amont la subjectivation soit de même autolimitée.

Cette mathématique nous suggère ainsi de déclarer : *prends acte de tes paris non délibérés, adresses-toi sur leur présent, sans interroger inutilement leurs origines et leur passé pour t'orienter selon la responsabilité des conséquences qu'ils engagent.*

²¹ sur une problématisation...

²² pour une intervention...

Mais de tout nouveaux développements de la MDI, sous le signe désormais de la géométrie, et singulièrement de la géométrie différentielle et synthétique [GDI], vont venir éclairer cet amont en dégagant la manière dont le pari qu'est le point subjectif émerge d'un micro-lieu non conscient de pulsions infinitésimales.

[Trois annexes du CDI]

Cf. Laudenbach

A.a - Application lipschitzienne

Soit deux espaces métriques (X, d) et (X', d') et une application $T : (X, d) \rightarrow (X', d')$.

T est k -lipschitzienne si, $\forall x_1$ et $x_2 \in X$:

$$d'[T(x_1), T(x_2)] \leq k.d(x_1, x_2)$$

$$\|\Delta T\| \leq k\|\Delta x\|$$

La constante k d'une fonction lipschitzienne peut être définie par

$$\sup \frac{d'[T(x_1), T(x_2)]}{d(x_1, x_2)}$$

On parle de contraction si $k < 1$.

A.b - Théorème du point fixe de Picard-Banach

Soit $T : (X, d) \rightarrow (X, d)$ une contraction :

$$d[T(x_1), T(x_2)] \leq k.d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2)$$

Alors il existe un point fixe c'est-à-dire une unique solution à l'équation $T(x)=x$

Démonstration

1. Unicité

$$T(x_1)=x_1 \text{ et } T(x_2)=x_2 \Rightarrow d[T(x_1), T(x_2)] = d(x_1, x_2)$$

$$\text{Or } d[T(x_1), T(x_2)] < k.d(x_1, x_2) \Rightarrow d(x_1, x_2) < k.d(x_1, x_2) \Rightarrow d(x_1, x_2)=0 \Rightarrow x_1=x_2$$

2. Suite de Cauchy convergente

$$\text{Soit la suite : } x_0, x_1=T(x_0), x_2=T(x_1)=T^2(x_0), \dots, x_n=T^n(x_0)$$

$$\Rightarrow d(x_{n+1}, x_n)=d[T(x_n), T(x_{n-1})] \leq k.d(x_n, x_{n-1})$$

Mais on a l'inégalité triangulaire pour la métrique d .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \\ d(x_p, x_0) &\leq d(x_1, x_0) + \dots + d(x_p, x_{p-1}) \\ &\leq d(x_1, x_0)(1+k+\dots+k^{p-1}) \\ &\leq \frac{d(x_1, x_0)}{1-k} \end{aligned}$$

Alors la contraction T^n de constante $\leq k^n$ donne :

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq k^n d(x_p, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Donc la suite x^n est une suite uniformément convergente c'est-à-dire une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon \exists N \text{ tels que } m, p \geq N \Rightarrow d(x_m, x_p) \leq \varepsilon$$

Donc elle converge (dans notre espace complet) vers une limite l .

3. La limite est bien un point fixe.

$$l = \lim_n \{x_n\} = \lim_n \{T^n(x_0)\} \text{ est bien tel que } T(l)=l \text{ car } T(l)=T\{\lim_n [T^n(x_0)]\} = \lim_n \{T^{n+1}(x_0)\} = l !$$

A.c - Solution comme point fixe

On va montrer que $\gamma(x)$ est un point fixe, non pas directement pour la transformation $G[f(x)]$ mais pour la transformation $T[f(x)]$ suivante :

$$T[f(x)] = \int_{x_0}^x G[s, f(s)].ds + f(x_0)$$

obtenue par intégration de G :

$$\begin{aligned} f'(x) &= G[x, f(x)] \Rightarrow \\ \int_{x_0}^x f'(s).ds &= \int_{x_0}^x G[s, f(s)].ds \\ f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x G[s, f(s)].ds \end{aligned}$$

$$f(x) = \int_{x_0}^x G[s, f(s)]. ds + f(x_0) = T[f(x)]$$

Démonstration pour les ED linéaires

Soit $G[x, f(x)]$ linéaire c'est-à-dire de la forme $H(x).f(x)$.

On aura donc l'ED suivante :

$$f'(x) = H(x).f(x)$$

Rappel : fonctions linéaires/affines

On distingue fonctions *linéaires* ($y=a.x$) et *affines* ($y=a.x+b$)...

Il s'agit donc de trouver la solution $\gamma(x)$ au système suivant :

- [ED] $f'(x) = H(x).f(x)$ sur $I = [x_0, x_1]$
- [CI] $f(x_0) = y_0$

On introduit une norme sur l'espace fonctionnel des fonctions $f(x)$:

$$\|f(x)\| = \sup_{(x_0, x_1)} |f(x)|$$

Rappel

T sera une contraction si

$$\begin{aligned} |T(f_1) - T(f_2)| &< k(f_1 - f_2) \text{ avec } k < 1 \\ \text{ou si } \exists m \text{ avec } |T^m(f_1) - T^m(f_2)| &< k'(f_1 - f_2) \text{ avec } k' < 1 \end{aligned}$$

Comme $T[f(x)] = \int_{x_0}^x G[s, f(s)]. ds + f(x_0)$, on a ici

$$T[f_1(x)] - T[f_2(x)] = \int_{x_0}^x H(s)[f_1(s) - f_2(s)]. ds$$

Comme $H(x)$ est continue sur $[x_0, x_1]$ compact, on a

$$\sup_{(x_0, x_1)} |H(x)| = K < +\infty$$

Comme la norme d'une intégrale est majorée par l'intégrale de la norme, il vient :

$$\|T[f_1(x)] - T[f_2(x)]\| \leq K \cdot \int_{x_0}^x \|f_1(s) - f_2(s)\|. ds$$

$\Rightarrow$

$$\|T[f_1(x)] - T[f_2(x)]\| \leq K \cdot x \cdot \|f_1(s) - f_2(s)\|$$

Par récurrence, on obtient (pp. 14-15) :

$$\|T^m[f_1] - T^m[f_2]\| \leq \frac{K^m}{m!} \|f_1 - f_2\|$$

Pour m assez grand, $\frac{K^m}{m!} < 1$ et T^m est alors une contraction.

Donc il existe un unique point fixe dans cet espace fonctionnel : notre $\gamma(x)$ cherché !

II.B - La géométrie différentielle synthétique contemporaine

Analytique/synthétique

Que veut dire ici « synthétique » ?

Synthétiser = *mettre ensemble* – voir la notion catégorielle de *limite projective* (on met ensemble en subsumant sous un concept commun à partir duquel déduire).

Analyser = *démêler* – cf. la *colimite injective* (on démêle en détaillant et listant les propriétés requises que l'on a induites).

Géométrie différentielle analytique = GD classique

Géométrie différentielle synthétique = GD axiomatisée.

La GDS procède à partir de concepts premiers, posés en axiomes, dont on déduit théorèmes et propriétés.

La GDA procède par induction sur les conditions de possibilité pour qu'une fonction soit différentiable ou intégrable.

Références intellectuelles

Voir ici de nombreuses références intellectuelles, à commencer par celle explicite que fait Lawvere en 1967 au Marx des *Grundrisse*.

Karl Marx : *Grundrisse* (1857)

III. – La méthode de l'économie politique

« Il semble que ce soit la bonne méthode de commencer par le réel et le concret, qui constituent la condition préalable effective. »

« Cependant, à y regarder de plus près, on s'aperçoit que c'est là une erreur. »

« Si on commençait ainsi, on aurait une représentation chaotique du tout et, par une détermination plus précise, **par l'analyse**, on aboutirait à des concepts de plus en plus simples ; du concret figuré on passerait à des abstractions de plus en plus minces, jusqu'à ce que l'on soit arrivé aux déterminations les plus simples. Partant de là, il faudrait refaire le chemin à rebours jusqu'à ce qu'enfin on arrive de nouveau à la population, mais celle-ci ne serait pas, cette fois, la représentation chaotique d'un tout, mais une riche totalité de déterminations et de rapports nombreux. »

« Les systèmes économiques pour leur part sont partis de notions simples telles que travail, division du travail, besoin, valeur d'échange, pour s'élever jusqu'à l'État, les échanges entre nations et le marché mondial. Cette dernière méthode est manifestement la méthode scientifique correcte. Le concret est concret parce qu'il est la synthèse de multiples déterminations, donc unité de la diversité. C'est pourquoi il apparaît dans la pensée comme procès de **synthèse**, comme résultat, non comme point de départ, bien qu'il soit le véritable point de départ et par suite également le point de départ de la vue immédiate et de la représentation. La première démarche a réduit la plénitude de la représentation à une détermination abstraite ; avec la seconde, les déterminations abstraites conduisent à la reproduction du concret par la voie de la pensée. C'est pourquoi Hegel est tombé dans l'illusion de concevoir le réel comme le résultat de la pensée, qui se concentre en elle-même, s'approfondit en elle-même, se meut par elle-même, alors que la méthode qui consiste à **s'élever** de l'abstrait au concret n'est pour la pensée que la manière de s'appropriier le concret, de le reproduire sous la forme d'un concret pensé. Mais ce n'est nullement là le procès de la genèse du concret lui-même. »

Sophus Lie (1876)

« La raison pour laquelle j'ai reporté si longtemps ces recherches, qui sont fondamentales pour mes autres travaux dans ce domaine, est essentiellement la suivante. J'ai trouvé ces théories à l'origine par des considérations synthétiques. Mais je me suis vite aperçu que, si la méthode synthétique est commode pour la découverte, il est aussi difficile de donner un exposé clair sur les recherches synthétiques, qui portent sur des objets qui, jusqu'à présent, ont été presque exclusivement considérés analytiquement. Après de longues hésitations, je me suis

décidé à utiliser une forme mi-synthétique, mi-analytique. J'espère que mon travail servira à apporter une justification à la méthode synthétique à côté de la méthode analytique. »

William Lawvere : *Toward the description in a smooth topos of the dynamically possible motions and deformations of a continuous body* (1980)

« Il n'est possible de reconstruire la géométrie différentielle concrète à dimension infinie comme un concept que sur la base d'une détermination précise de la relation générale abstraite décisive (RGAD) du sujet, et pour réussir cette dernière détermination, il est obligatoire de développer la théorie des catégories. Maintenant que la théorie des catégories a effectivement été avancée dans une très large mesure, nous pouvons montrer notre appréciation de ce que nous avons appris de Charles Ehresmann et d'autres grands géomètres français de notre temps, en reprenant la physique des corps et des champs continus, qui était après tout la source primaire de la géométrie développée par leurs professeurs tels que E. Cartan. La reconnaissance de cette source, tout autant que les axiomes internes que nous nous efforçons de perfectionner, est une RGAD du sujet (voir Karl Marx, Contribution à la critique de l'économie politique, Section 3 "La méthode de l'économie politique", pour l'explication du rôle de la RGAD dans la reconstruction du concret comme un concept).

Selon Lénine, l'image scientifique du monde est une image de la matière qui bouge et de la matière qui pense, et de plus, le rôle spécial de la matière qui pense est de refléter les relations décisives dans le monde afin de fournir la théorie comme guide pour l'action. »

Anders Kock

« Le raisonnement synthétique traite des formes spatiales en fonction de leur structure, c'est-à-dire des constructions géométriques et conceptuelles de base qui peuvent être réalisées sur elles. »

John L. Bell

« Alors que la méthode analytique est basée sur l'introduction de coordonnées numériques, et donc sur la théorie des nombres réels, l'idée derrière l'approche synthétique est de doter la géométrie d'une base purement géométrique dans laquelle les théorèmes sont ensuite déduits par des moyens purement logiques à partir d'un corps initial de postulats.

Les exemples les plus familiers de la géométrie synthétique sont la géométrie euclidienne classique et la géométrie projective synthétique introduite par Desargues au XVII^e siècle.

La puissance de la géométrie analytique tient très largement au fait qu'elle permet d'introduire en géométrie les méthodes du calcul et, plus généralement, de l'analyse mathématique, conduisant notamment à la géométrie différentielle (terme d'ailleurs introduit en 1894 par le géomètre italien Luigi Bianchi). »

Chronologie

- 1967 : William [Bill] Lawvere – *Categorical Dynamics* [1978 : cf. notes de MacLane]
- 1977 : Anders Kock – *A simple axiomatic for differentiation*
- 1987 : René Lavendhomme – *Leçons de géométrie différentielle synthétique naïve* [1996 : traduit en anglais]

Infinitésimaux nilpotents

La GDS va fonder la différenciation et l'intégration des fonctions sur une classe $\mathcal{D}$ d'infinitésimaux nilpotents c'est-à-dire tel que $d^2=0$ (autrement dit $\exists d \neq 0$!).

Mais, attention !: il ne faut pas concevoir cette classe $\mathcal{D}$ comme une extension de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels obtenue par adjonction d'éléments numériques infinitésimaux non seulement car les différentielles d ne sont pas des nombres mais des grandeurs (ce qui en un sens était déjà le cas pour $d=$) mais surtout parce que la dynamique intrinsèque de ces différentielles d ne s'inscrit pas dans le cadre strict de la théorie des ensembles (ces différentielles d ne sont pas des éléments et leur sommation $\mathcal{D}$ n'est pas un ensemble).

Rappelons pour cela ce qu'extension de $\mathbb{R}$ par adjonction veut dire.

Deux exemples d'adjonction d'infinitésimaux

Les nombres duaux

Les « nombres » duaux sont inventés en 1873 par Clifford.

Ils sont obtenus par adjonction d'une grandeur infinitésimale $\varepsilon \neq 0$ qui étend l'ensemble des réels comme on étend les réels aux grandeurs complexes en leur adjoignant la grandeur $i =$

$\Rightarrow$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2 = 0$ (et donc $\varepsilon \neq 0$) comme l'on avait $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ avec $i^2 = -1$ (et donc $i \neq 0$).

$\mathbb{D} = \{x + \varepsilon y\}$ avec x et $y \in \mathbb{R}$ comme l'on avait $\mathbb{C} = \{x + iy\}$ avec x et $y \in \mathbb{R}$.

Tout de même que *complexe* = *réel* + *imaginaire*, on a *dual* = *réel* + *infinitésimal*.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}[X]/(X^2)$ tout de même qu'on avait $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$

On quotiente en effet l'anneau $\mathbb{R}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{R}$ par (X^2) : $P(x) = x^2.Q(x) + ax + b$

$\Rightarrow P(\varepsilon) = ax + b$ comme on avait $P(x) = (x^2 + 1).Q(x) + ax + b \Rightarrow P(i) = ax + b$

Un nombre dual est ainsi isomorphe à une classe d'équivalence sur l'anneau des polynômes quotienté par (x^2) .

On a la multiplication duale :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

$$\text{en effet } (x + \varepsilon.y) * (x' + \varepsilon.y') = xx' + \varepsilon.(xy' + x'y)$$

qui diffère de la multiplication complexe où $(x, y) * (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$

Certains duaux sont inversibles :

Pour $x \neq 0$

$$\frac{1}{x + \varepsilon.y} = \frac{x - \varepsilon.y}{x^2}$$

Par contre les duaux « purs » $(0, y) = \varepsilon.y$ ne sont pas inversibles.

Les nombres duaux ne forment donc pas un corps.

Représentation matricielle

$$x + \varepsilon.y = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}; 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le plan dual $\mathbb{D}$

Par sa multiplication propre $\varepsilon * \varepsilon = 0$, ce plan diffère du plan réel $\mathbb{R}^2$ comme du plan complexe $\mathbb{C}$.

D'où les applications et interprétations qui suivent.

Applications

Physique

En mécanique quantique, x formalise la dimension bosonique et ε la dimension fermionique²³.

Un système de deux particules quantiques est représenté par une fonction d'onde (à valeur complexe des deux variables de position de chacune des particules) à interprétation probabiliste :

$$\psi(x_1, x_2)$$

Pour deux fermions :

$$\psi_F(x_1, x_2) = -\psi_F(x_2, x_1) \Rightarrow \psi_F(x, x) = 0$$

Pour deux bosons :

$$\psi_B(x_1, x_2) = \psi_B(x_2, x_1) \Rightarrow \psi_B(x, x) \neq 0$$

Donc, par l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, la probabilité pour que deux fermions soient à la même place est nulle (principe d'exclusion de Pauli), alors que deux bosons peuvent avoir une chance non nulle d'être au même endroit.

Les fermions sont les constituants infinitésimaux de la matière comme les différentielles (les clinamens) le sont des fonctions.

Géométrie

Les nombres duaux formalisent dans $\mathbb{R}^3$ les angles duaux entre deux lignes obliques (c'est-à-dire qui ne se coupent pas sans être parallèles) :

$$\theta + \varepsilon.d$$

où θ est l'angle et d la distance entre les deux lignes.

²³ Voir Thierry Paul : <https://www.influxus.eu/article494.html>

Cf. les nombres de Gassmann qui sont la généralisation des nombres duaux...

L'analyse non-standard

Elle adjoint cette fois aux réels une infinité duale de nombres « hyperréels » (infiniment grands et infiniment petits ou infinitésimaux).

D'où l'ensemble ${}^*\mathbb{R}$ des nombres « hyperréels » : ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}[\text{infinitésimaux}]$.

On pose alors :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+d) - f(x)}{d}$$

pour tous les infinitésimaux d (où « $\approx$ » signifie : « diffère d'un infinitésimal »).

On va voir la différence avec la GDS qui remplace les inégalités et approximations de l'analyse classique ²⁴ par de strictes égalités

Nouveautés de la GDS

La GDS opère selon quatre nouveautés.

- 1) Les infinitésimaux d sont des grandeurs qui ne sont pas à proprement parler des nombres (pas plus, au demeurant que ne l'était $i = \sqrt{-1}$). Il n'y a pas de sens, en effet, pour un nombre x différent de 0, de poser $x^2 = 0$. Si x est un nombre infinitésimal, alors x^2 sera presque égal à 0 ($x^2 \approx 0$) mais pas rigoureusement égal !
- 2) L'infinité $\mathcal{D}$ des infinitésimaux d tels que $d^2 = 0$ ne forme pas un ensemble proprement dit mais ce regroupement vague dont la langue s'autorise l'existence qu'on appelle une classe.
- 3) Cette formalisation ne va plus respecter le principe du tiers-exclu (et donc de la double négation) pour s'inscrire dans une logique intuitionniste et non plus classique.
Ceci va faire que la GDS n'aura pas de modèle stricto sensu dans la théorie des ensembles mais seulement dans un topos bien spécifique (voir ici le travail de Dubuc).
- 4) La classe $\mathcal{D}$ des infinitésimaux d s'insère dans un anneau $\mathcal{R}$ dont la nature exacte des objets n'est plus numérique ce qui correspond au fait que $\mathcal{R}$ ne sera pas totalement ordonnable.

Avant de revenir à tout cela en partant de son axiomatisation formelle, entreprenons de nous mobiliser intellectuellement pour cette épreuve mathématique en nous dotant d'un modèle intuitif initial qui sera susceptible d'interpréter notre future théorie formelle.

Modèle intuitif

Prolongeant le fil général de ce travail, je propose une sémantique de la GDS qui s'ancre dans les processus subjectifs de la conscience.

Autrement dit, conformément à mon orientation mamuphi qui privilégie comment l'être en pensée mathématique éclaire l'être en intellectualité, je propose un modèle intuitif qui relève du psychique humain et non pas du physique naturel.

Vous pressentez les raisons idéologico-politiques de ce point avec le partage actuel des consciences sur la catastrophe mondiale qui vient.

En ce point, je tiens, avec bien d'autres de tradition marxiste, deux choses :

- 1) le rapport perverti de l'humanité à la nature s'origine dans un rapport perverti de l'humanité à elle-même ;
- 2) et ce rapport est intérieurement perverti en ce qu'une partie de l'humanité veut en dominer une autre. Au total, c'est l'orientation qui légitime qu'une petite partie de l'humanité domine, exploite, subordonne et oppresse le travail d'une grande partie d'elle-même qui constitue la subjectivation légitimant le désastre actuel.

D'où que ce désastre relève d'un capitalocène et nullement d'un anthropocène (en effet cette humanité se divise féroce sur l'axiome capitaliste de l'exploitation de l'homme par l'homme ; et à partir du moment où le principe même d'une telle exploitation de l'homme par l'homme n'est même plus discutable, l'exploitation des ressources naturelles ne saurait connaître d'autolimitation).

1) Les décisions non délibérées de Sartre

Partons pour cela des décisions sans délibération préalable que Sartre théorise philosophiquement dans *L'être et le néant*.

²⁴ « Le Calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER. » Jean Dieudonné (*Calcul infinitésimal*, 1980)

« La délibération volontaire est toujours truquée. [...] Motifs et mobiles n'ont que le poids que mon projet leur confère. Quand je délibère, les jeux sont faits. Et si je dois en venir à délibérer, c'est simplement parce qu'il entre dans mon projet originel de me rendre compte des mobiles par la délibération plutôt que par telle ou telle autre forme de découverte. Il y a donc un choix de la délibération comme procédé. [...] Quand la volonté intervient, la décision est prise et elle n'a d'autre valeur que celle d'une annonciatrice. » (527)

« Si la volonté est par essence réflexive, son but n'est pas tant de décider quelle fin est à atteindre puisque de toutes façons les jeux sont faits, l'intention profonde de la volonté porte plutôt sur la manière d'atteindre cette fin déjà posée. » (528)

« La raison de nos actes est en nous-mêmes : nous agissons comme nous sommes et nos actes contribuent à nous faire. » (529)

« Certes chacun de mes actes est entièrement libre ; mais cela ne signifie pas qu'il puisse être quelconque, ni même qu'il soit imprévisible. » (530)

« Il faut se défendre de l'illusion qui ferait de la liberté originelle une position de motifs et de mobiles comme objets, puis une décision à partir de ces motifs et de ces mobiles. Bien au contraire, dès qu'il y a motif et mobile, il y a déjà position des fins et, par conséquent, choix. » (539)²⁵

On pose qu'une décision non délibérée est une direction consciemment adoptée sans que sa constitution ne soit consciemment élaborée. Autrement dit, on a ici à faire à la constitution non consciente d'une décision consciente.

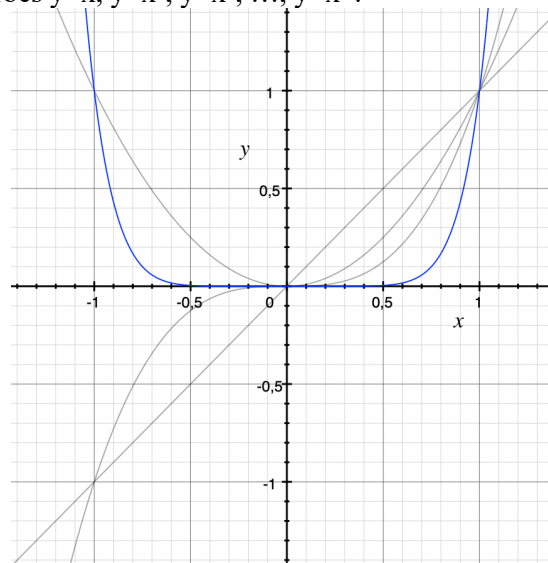
On pourrait en voir l'analogue avec le désir inconscient chez Lacan qui analyse une orientation prise sans que soit pour autant connue et distinguée sa constitution inconsciente.

Mais il est vrai que « inconscient » signifie alors bien plus que « non conscient ». Et je ne veux pas ici m'enfermer dans cette problématique lacanienne de l'inconscient...

Posons donc ici qu'on a à faire à un point subjectif qui s'avère manifestement avoir été décidé puisqu'il s'avère être soutenu par quelque sujet mais dont pour autant la constitution est opaque : d'où vient-il ?, d'où émerge-t-il comme point ?, pourquoi ce point et pas un autre ?, pourquoi ce point plutôt qu'aucun point ?

Il va donc s'agir d'explorer une rationalité possible de ce qui se situe en amont de ce point, une rationalité qui va alors éclairer ce point comme étant en fait un « gros point » c'est-à-dire un point disposant de dimensions infinitésimales qui le rendent apte à synthétiser (on verra comment) une dynamique infinitésimale de micro-pulsions.

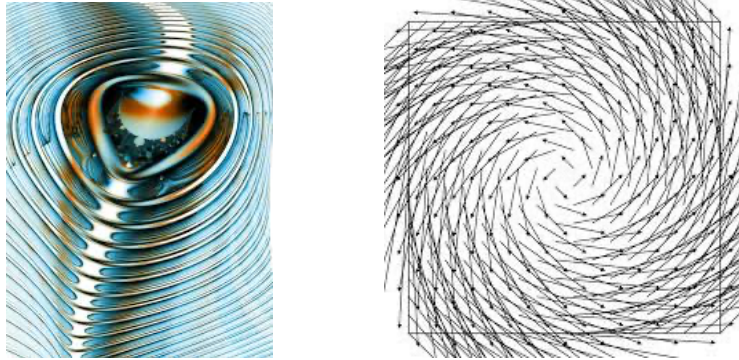
L'image la plus simple d'un tel gros point est celle du point ($x=0$; $y=0$) qui « grossit » progressivement pour les courbes $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, ..., $y=x^n$:



²⁵ J'entends ainsi la différence sartrienne entre mobiles-mobilisation et motifs-motivation : la mobilisation se fait en amont *sur* un problème (elle est la subjectivation de la problématisation en jeu) quand la motivation opère en aval *pour* un projet de solution, pour *une* résolution...

Ainsi le point va s'avérer être un gros point en ce qu'il émerge comme colimite (injective) d'un mouvement brownien infinitésimal dont on discerne mal le détail mais dont on saisit synthétiquement l'existence. L'idée va être que toute direction ponctuelle explicitement retenue et consciemment discernée va s'avérer résulter synthétiquement d'une activité non consciente mettant en jeu une myriade infinie de micro-pulsions infinitésimales et évanescentes.

Ainsi les constituants primitifs de notre « gros point » ne seront pas des éléments atomiques mais des grandeurs dynamiques, de pures variations d'énergies et de lignes de force comme celles qui courbent et déforment un champ vectoriel (telles par exemple les lignes d'un champ magnétique).



Au total, il faut donc qu'on ait

- une myriade de micro-pulsions et non un seul infinitésimal ;
- des grandeurs infinitésimales qui soient des dynamiques et des variations, non des éléments statiques tels des atomes ;
- des micro-dynamiques d'autant moins distinguables entre elles qu'elles sont évanescentes ($d^2=0$).

Si l'on devait ici recourir aux images physiques plutôt que psychiques, on pourrait convoquer les particules subatomiques de la mécanique quantique qui sont des singularités fusionnant les deux contraires que sont le corpuscule et l'onde.

On posera donc que l'activité non consciente de l'esprit, au principe des décisions conscientes non délibérées, a pour base le mouvement brownien d'un nuage infinitésimal qui, en chaque point, constitue ce qu'on appellera son « voisinage » infinitésimal et nilpotent, autant dire son bord extrême au-dessus du néant subjectif.

C'est en se tenant au bord de cet anéantissement subjectif que la pensée va déployer cette extraordinaire puissance d'affirmation dont la mathématique contemporaine nous fait grâce, grâce d'autant plus inattendue qu'elle renoue (sans le dire) avec l'antique tradition matérialiste des clinamens.

2) Les clinamens d'Épicure-Lucrèce

« Le clinamen est une différentielle, et proprement, une fluxion. [...] C'est l'angle minimum de formation d'un tourbillon. [...] C'est l'angle minimal de tangence comme "source antique du calcul différentiel" (Bourbaki). » Michel Serres (*La naissance de la physique dans le texte de Lucrèce* ; pp. 11, 14, 26)

Lucrèce (*De la nature des choses*, environ 70 av. J.-C.)

Livre II

*La matière, assurément, n'est pas un bloc compact.
Le monde se renouvelle toujours.
L'espace est sans fin ni mesure.*

*Dans le vide infini, aucun repos n'est jamais accordé aux atomes.
Les plus nombreux atomes errent dans le grand vide.
Tu verras parmi le vide maints corps minuscules. C'est ainsi que tu peux saisir par conjecture
l'éternelle agitation des atomes dans le grand vide.
Au-dessous, la matière est agitée de mouvements obscurs.
Cette errance est due aux principes des choses.*

Depuis les atomes, le mouvement s'élève, peu à peu il parvient à nos sens mais les chocs originels demeurent invisibles.

Les corpuscules qui forment la vapeur ne se déplacent pas seuls mais en groupes complexes.

Les atomes simples et solides [...], unités autonomes sans parties distinctes...

Dans la chute qui les emporte, en vertu de leur poids, tout droit dans le vide, en un temps indécis [en un moment indéterminé], en des lieux indécis [indéterminés], les atomes dévient [depellere] un peu ; juste de quoi dire que le mouvement est modifié. Cette déclinaison [declinare]...

Il faut que les atomes dévient [inclinare] un peu, d'un minimum, pas davantage [nec plus quam minimum : pas plus que le minimum].

D'où vient aux êtres vivants cette volonté d'infléchir [declinamus] nous aussi nos mouvements suivant l'intention de notre seul esprit ?

Si l'esprit n'est pas régi en tous ses actes par la nécessité interne, s'il n'est pas, tel un vaincu, réduit à la passivité, c'est l'effet de la légère déviation [clinamen ou déclinaison] des atomes en un lieu, en un temps que rien ne détermine.

Les atomes sont bien au-delà de la portée de nos sens : invisibles en eux-mêmes, ils doivent nous dérober aussi leur mobilité.

Les atomes de forme semblable sont en nombre infini.

Quant aux corps sensibles, il te faut reconnaître qu'ils sont tous composés d'atomes insensibles.

Le sensible naît de l'insensible.

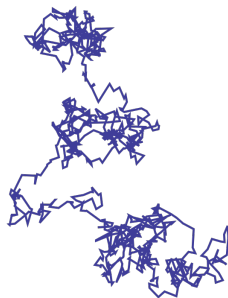
L'univers s'étend à l'infini hors des remparts du monde.

Dans l'univers, il n'est de limite.

Il existe ailleurs d'autres terres, diverses races d'hommes et de bêtes sauvages.

Le ciel, la terre, le soleil, la lune, la mer et tout ce qui existe, loin d'être uniques, forment un nombre infini.

L'intuition est la suivante : en amont de chaque point subjectif (noter que Lucrèce fait également le parallèle entre physique des particules et psychique des pulsions) opère un micro-voisinage entendu comme mouvement brownien de déclinaisons indémêlables et qu'on suppose toutes si infinitésimalement élémentaires qu'elles sont toute en ligne droite : le clinamen, la déviation élémentaire minimale, l'atome de déclinaison est l'angle infinitésimal qu'une droite vient imprimer aux micro-pulsions non conscientes.



L'idée directrice est la suivante : les déclinaisons ou déviations en question (les « clinamens » donc) sont minimales ; elles sont microscopiques et non décomposables. Elles désignent donc des atomes de déclinaisons. Autrement dit, on passe des déclinaison d'atomes à des atomes de déclinaisons !

Ce point va entraîner que ces déclinaisons sont en ligne droite, sont linéaires – toute déclinaison courbe présupposerait en effet qu'une première inflexion serait affectée d'une inflexion seconde ; autrement dit, toute inflexion courbe présupposerait l'inflexion d'une inflexion.

Ceci permet d'intuitionner pourquoi ces inflexions seront nilpotentes dans la GDS.

En effet, en termes différentiels classiques, une inflexion courbe (et non pas droite) supposerait que la fonction $f(t)$ ait une dérivée première $f'(t)$ non nulle (inflexion première) et une dérivée seconde $f''(t)$ également non nulle (pour infléchir la dérivée).

S'il n'y a pas d'inflexion de l'inflexion, c'est donc que $f'(t) \neq 0$ et $f''(t) = 0$

Si l'on traduit cela en écriture différentielle classique, on aura donc :

$$df = f' \cdot dt \neq 0 \text{ et } d^2f = f'' \cdot (dt)^2 = 0$$

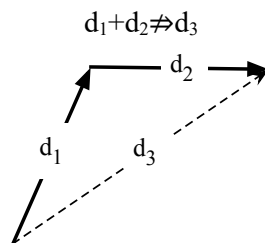
Ceci va nous mettre sur la voie de la formalisation adoptée par la GDS qui transforme df (et dt) en $d.f$ (et $d.t$) et corrélativement qui transforme d^2f en $d^2.f$

En effet, comme on va le voir, la GDS transforme l'opérateur différentiel « d » en une grandeur différentielle multiplicative : $dx \rightarrow d.x$

Il faudrait écrire systématiquement $dx \rightarrow \delta.x$ pour mieux se le rappeler...

Le fait alors d'avoir $d.f \neq 0$ et $d^2.f = 0$ va entraîner le caractère nilpotent de la quantité différentielle d : $d \neq 0$ mais $d^2 = 0$

Ceci va également permettre de comprendre pourquoi, dans la GDS, la somme de deux déclinaisons droites ne sera pas nécessairement une déclinaison droite :



Le parcours angulé $d_1 + d_2$ ne se somme pas ici (vectoriellement) en d_3 !

Autrement dit, la somme de deux clinamens n'est pas en général un clinamen mais un zig-zag !

Le point décisif, qui va être axiomatiquement posé, va être que la somme (c'est-à-dire la colimite injective) de ce *voisinage émerge* alors comme point dont on va voir qu'il est lui-même doté d'une macro-inclinaison résultante.

Je rappelle que ce concept d'*émergence* est mathématiquement formalisé dans la théorie d'Andrée Ehresmann des systèmes autonomes complexes (Systèmes Évolutifs à Mémoire - SEM).

Soit le jeu d'une double linéarité :

- infinitésimale : les déclinaisons (les micro-pulsions ou clinamens) sont linéaires car leur taille minimale interdit leur courbure (c'est-à-dire le jeu d'une taille inférieure) ;
- à échelle consciente, la colimite de tous ces clinamens infinitésimalement linéaires va émerger comme une seule linéarité tangente c'est-à-dire comme dotation, en tout point, d'une unique direction vectorielle instantanée, d'une dérivée donc purement ponctuelle (et non plus comme limite convergente sur un voisinage donné ²⁶).

Voyons comment l'axiomatique de la GDS vient formaliser tout ceci.

Axiomatisation de la GDS

Anneau $\mathcal{R}$

On part d'une structure d'anneau commutatif dont on ne va pas préciser les objets x, y, z .

La sémantique que je propose est de les interpréter comme des positions subjectives : des points subjectifs à tenir et soutenir.

La structure d'anneau indique qu'on peut additionner et multiplier entre eux ces objets avec les lois de composition usuelles (associativité, commutativité et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) et avec leurs deux éléments neutres 0 et 1.

Mais cet anneau $\mathcal{R}$ n'est pas un corps car chaque objet n'y est pas nécessairement inversible.

En effet, on va inclure dans cet anneau $\mathcal{R}$ la classe $\mathcal{D}$ des infinitésimaux différentiels qui sont nilpotents et donc non inversibles :

si $d.d=0$ avec $d \neq 0$, alors $\nexists x$ de $\mathcal{R}$ tel que $x.d=1$ car on aurait alors $x.d.d=1.d$ soit $0=d$!

Retenons ce point : on peut additionner d et multiplier par d mais on ne saurait diviser par d .

Classe $\mathcal{D}$ des infinitésimaux différentiels

Dans cet anneau, on distingue donc des infinitésimaux d dont la propriété caractéristique est que $d.d=d^2=0$ et on nomme $\mathcal{D}$ la classe de tous ces d .

²⁶ Ce qui, étonnamment, renoue avec la problématique des grandeurs (fluxions) Newton plutôt qu'avec la problématique variationnelle (différentielles) de Leibniz...

Infinitésimaux différentiels

Ces infinitésimaux sont appelés différentiels car, comme on va le voir, ils vont opérer sous la forme multiplicative $d.x$ qui vient se substituer à la forme différentielle dx !

Dans la forme différentielle classique « dx », la lettre « d » inscrit l'opérateur de différentiation et « dx » formule la différentiation du nombre x .

Dans cette nouvelle forme « $d.x$ », la même lettre « d » inscrit une grandeur « d » multipliant l'autre grandeur « x ».

On peut ainsi dire que la GDS transforme un **opérateur** d'infinitésimalisation en une **grandeur** infinitésimale susceptible d'opérer, comme toute autre grandeur, par addition et multiplication (mais pas par division).

En conséquence on s'interdit par contre de transformer une écriture différentielle classique df/dx en une écriture infinitésimale $d.f/d.x$ (que l'on pourrait alors simplifier en « divisant » numérateur et dénominateur par d pour obtenir f/x !).

On va voir plus loin qu'à certaines conditions, on peut « annuler » ce d sans jamais le faire par division.

Propriétés essentielles des grandeurs différentielles d

Si d_1 et d_2 sont tels que $d_1^2 = d_2^2 = 0$ (notons cela, par écriture simplifiée mais inexacte : d_1 et $d_2 \in \mathcal{D}$) alors :

- $d_1.d_2 \in \mathcal{D}$ car $(d_1.d_2)^2 = d_1^2.d_2^2 = 0$
- par contre, $d_1+d_2 \in \mathcal{D}$ ssi $d_1.d_2 \in \mathcal{D}$ car $(d_1+d_2)^2 = 0$ ssi $d_1.d_2 = 0$ puisque $(d_1+d_2)^2 = d_1^2 + 2d_1.d_2 + d_2^2 = 2d_1.d_2$

Axiome Kock-Lawvere de linéarité

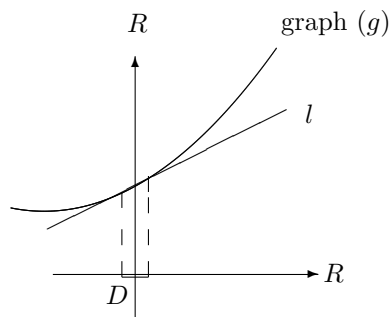
$$\forall g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}, \exists ! b \in \mathcal{R} \text{ tel que } \forall d \in \mathcal{D} : g(d) - g(0) = d.b$$

(j'abandonne désormais l'écriture $\in$ et me contente de noter cela par le signe conventionnel $\in$).

Il me semble qu'il vaudrait mieux formuler ainsi cet axiome :

si $d^2 = 0$, alors $g(d) = g(0) + d.b$ où b ne dépend pas de d .

Kock : géométriquement, l'axiome exprime que le graphe de g est une unique ligne droite l de pente b .



Interprétation

g introjecte un infinitésimal segment de droite. En tout point de $\mathcal{R}$, g fait émerger, par colimite sur $\mathcal{D}$, une direction : une droite tangente, un plan tangent, un hyperplan tangent.

Logique intuitionniste

« Les infinitésimaux se trouvent dans une sorte de "monde souterrain" autour de zéro : ils ne sont pas tous nuls, mais nous ne pouvons pas non plus en distinguer un qui soit réellement différent de zéro. Ils "collent" trop ensemble. » Michael Shulman

Attention : tout ceci n'est compatible qu'avec une logique intuitionniste.

En effet, en logique classique, $\mathcal{D}$ comme $\mathcal{R}$ se réduirait à $\{0\}$!

Démonstration

Soit $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \neq 0$

Et soit $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ telle $g(d) = f(d)$

Alors (cf. axiome) $\exists ! \beta \in \mathcal{R}$ tel que $g(d) = g(0) + \beta d$ c'est-à-dire tel que $g(d) = g(0) + \beta d$.

- Si $d \neq 0$, $1 = 0 + \beta d \Rightarrow \beta d = 1$. Mais alors $d(\beta d) = d.1$ Donc $0 = d$. Or $d \neq 0 \Rightarrow \mathcal{D} = \{0\}$.
- Mais alors, comme on a également $\exists ! \alpha, \beta \in \mathcal{R}$ tels que $g(d) = \alpha + \beta d$, et que l'on a à la fois $\beta d = 0$ (car $d = 0$) et $g(d) = f(d) = f(0) = 0$, on a $\mathcal{R} = \{0\}$!

Donc, si l'on admet $[d=0 \vee d \neq 0]$, $\mathcal{D}=\mathcal{R}=\{0\}$.

Donc on ne peut supposer que $\forall d, d=0$ ou $d \neq 0$!!!

Consistance ?

Pour démontrer la consistance de cette construction axiomatique, pas d'autre moyen que d'en construire un modèle.

Pour cela il faut passer de la catégorie à un topos où notre axiome est vrai.

Pour cela, E. Dubuc va construire un topos de faisceaux sur une catégorie étendue.

Corps

Dans $\mathcal{R}$, on ne peut diviser par un infinitésimal. Mais on peut l'annuler !

Théorème de micro-annulation universelle

Soit $a, b \in \mathcal{R}$. Si $\forall d$, on a $ad=bd$, alors $a=b$

Noter que, pour un d donné, $ad=bd \not\Rightarrow a=b$ car on ne peut pas diviser par d !

Démonstration

Soit $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ avec $f(d)=ad=bd$. Alors (cf. axiome) $\exists! \alpha, \beta \in \mathcal{R}$ tel que $\forall d$ on a $f(d)=\alpha+\beta d$

Et comme, par ailleurs, $f(d)=ad=bd$, on en déduit $\alpha=0$ et surtout que $\beta=a=b$ puisque β est unique !

Théorème

$$\mathcal{D} \neq \{0\}$$

Démonstration

Si $\mathcal{D}=\{0\}$, alors $\forall b, b' \in \mathcal{R}$ avec $b \neq b'$, on aurait $f(d)=a+bd=a$ et $g(d)=a+b'd=a \Rightarrow b=b'$!

On a donc démontré que 0 n'est pas le seul infinitésimal mais on ne peut pour autant prouver qu'un infinitésimal donné d est différent de 0 !

Soit toujours la même situation : cette poussière d'infinitésimaux « colle » à 0 !

Dérivée

$\forall f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ et $\forall x \in \mathcal{R}$, définissons $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ par $g(d)=f(x+d)$. Alors $\exists! b \in \mathcal{R}$ tel que $\forall d \in \mathcal{D}$ on a $g(d)-g(0)=d.b$ c'est-à-dire $f(x+d)-f(x)=d.b$

On appellera $b: f'(x)$ et on l'appelle *dérivée* de f en x !

Ainsi l'axiome entraîne que toute fonction $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ est différentiable et infiniment différentiable ($\mathcal{C}^\infty$) c'est-à-dire lisse !

Attention : c'est un type nouveau de dérivée, dont il faudra vérifier

- 1) qu'il a bien les propriétés usuelles d'une dérivée ;
- 2) qu'il correspond au type « analytique » des dérivées usuelles.

Ce résultat surprenant (contradictoire avec le fait que toutes les fonctions ne sont pas différentiables au sens analytique ordinaire) s'explique par la logique intuitionniste.

On démontre que la dérivée a bien les propriétés élémentaires des dérivées.

On démontre l'existence de la formule de Taylor : $f(x+d)=f(x)+d.f'(x)$

Interprétation

g introjecte dans le graphe de f un infinitésimal segment droit.

Exemples

$$1/f(x)=x^2$$

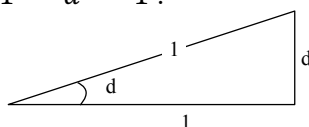
$$f(x+d)=(x+d)^2=x^2+2xd+d^2=x^2+2xd=f(x)+d.(2x) \Rightarrow f'(x)=2x$$

$$2/f(x)=x^3$$

$$f(x+d)=(x+d)^3=x^3+3x^2d+3xd^2+d^3=x^3+3x^2d=f(x)+d.(3x^2) \Rightarrow f'(x)=3x^2$$

$$3/f(x)=\sin(x)$$

$$\sin(\varepsilon) \simeq \varepsilon \Rightarrow \sin(d)=d \text{ et donc } \cos(d)=\sqrt{1^2-d^2} = 1 !$$



On a alors :

$$\sin(x+d)=\sin(x).\cos(d)+\cos(x).\sin(d)=\sin(x)+d.\cos(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(x)$$

Propriétés classiques des dérivées infinitésimales

On vérifie facilement que cette dérivation infinitésimale a bien les bonnes propriétés usuelles des dérivations :

1. $(f+g)'=f'+g'$
2. $(\lambda.f)'=\lambda.f'$
3. $(f.g)'=f'.g+f.g'$

Démonstration de la première

$$(f+g)(x+d)=(f+g)(x)+(f+g)'(x).d$$

mais également

$$(f+g)(x+d)=f(x+d)+g(x+d)=f(x)+f'(x).d+g(x)+g'(x).d=(f+g)(x)+(f'(x)+g'(x)).d$$

D'où par micro-annulation des d : $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

Calcul intégral

Axiome de préordre (n°2)

On introduit axiomatiquement un préordre sur $\mathcal{R}$.

Nouvel axiome (n°2) :

1. La relation $\leq$ est un préordre (c'est-à-dire réflexive et transitive).
2. Ce préordre est compatible avec la structure d'anneau de $\mathcal{R}$:
 - a) $\forall x, y, z \in \mathcal{R} : (x \leq y) \rightarrow (x+z) \leq (y+z)$
 - b) $\forall x, y \in \mathcal{R} : (0 \leq x) \text{ et } (0 \leq y) \rightarrow (0 \leq x.y)$
 - c) $0 \leq 1$ et non $(1 \leq 0)$
3. $\forall d \in \mathcal{D}, 0 \leq d$ et $d \leq 0$

Cf. cette relation n'est pas un ordre : elle n'est pas antisymétrique !

On définit $[a, b] = \{x \in \mathcal{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$$\Rightarrow \mathcal{D} \subseteq [0, 0] !!!$$

$$\Rightarrow \forall d, d' \in \mathcal{D}, \text{ on a } [a, b] = [a+d, b+d'] !$$

Ceci va garantir que le calcul différentiel s'étend des fonctions définies sur $\mathcal{R}$ aux fonctions définies sur $[a, b]$.

Axiome de l'intégration (n°3)

$$\forall f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}, \exists ! F : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R} \text{ telle que } F'=f \text{ et } F(0)=0 !$$

$$\text{On écrit } F = \int_0^x f$$

On démontre que cette primitive a bien les propriétés élémentaires des primitives.

Principaux résultats pour nous...

Résumons les raisons « intellectuelles » de cette problématique mathématique qui instaure une conception ponctuelle d'une dérivée infinitésimale en tout point. Celle-ci se distingue de la conception traditionnellement locale d'une dérivée qui l'identifie comme la limite en tout point d'une approximation sur un voisinage de ce point.

Retenons que travailler sur/dans/avec l'infinitésimal autorise de travailler linéairement : sur l'infinitésimal, les effets sont proportionnels aux causes, les conséquences aux actions ! Donc la composition des infinitésimaux – la composition infinitésimale – est simple car elle est linéaire.

Mais bien sûr, corrélativement, elle est quasi-indiscernable !

Inconscient différenciant de type nouveau !

Ainsi

- 1) le travail « non conscient » est linéaire et donc « simple » ;
- 2) il ignore conséquemment le tiers exclu ;
- 3) il autorise ce faisant une différentiation effective de toute action.

Mais attention : ce « non conscient » n'est pas l'inconscient freudien ou lacanien !

Appelons le nôtre « inconscient différenciant » [ID] : notre ID rend compte de l'existence, pour toute action, d'un mobile ; pour toute position subjective d'une subjectivation ; pour toute ek-sistence d'un instress et ce

même si cette existence infinitésimale n'est pas pour autant cernable, discernable, distinguable, moins encore calculable.

Interprétation synthétique

Pour formuler l'instress qui sous-tend une parole, la parole doit se différencier sur le lieu pulsionnel, génériquement évanescent, qui la sous-tend.

Et c'est la nature génériquement évanescente (dynamique infinitésimale) de ce lieu pulsionnel qui, linéarisant ses effets sur la parole, assure l'existence de cet instress par émergence.

Notons qu'ici dérivées et primitives ne sont plus soumises, comme dans le CDI, à des conditions analytiques de possibilité mais sont axiomatiquement assurées !

Cela présuppose :

- l'existence d'infinitésimaux donc l'intrication non-archimédienne de deux échelles ;
- la logique intuitionniste, donc sans tiers exclu (et ce en raison du fait qu'on est alors confronté à un double régime d'existence, à l'intrication des deux échelles : l'une pour les grandeurs infinitésimales et l'autre pour celles qui ne le sont pas).

Intellectuellement, cela veut donc dire deux choses.

1 - Dérivation - subjectivation

L'existence d'une subjectivation est une conséquence axiomatique et cette existence repose sur la mobilisation d'infinitésimaux c'est-à-dire d'une échelle (infinitésimale) de mobiles !

L'existence d'une subjectivation est assurée par le fait que toute subjectivation est infinitésimalement constituée. C'est ce qui formaliserait le fait que la mobilisation est en bonne part indiscernable car trop génériquement constituée !

On peut donc miser sur la mobilisation d'un point mais on ne peut la discerner et donc la maîtriser comme on discerne et on maîtrise la tenue du point.

2 - Intégration – procès subjectif

L'existence par contre d'un procès subjectif n'est plus déductible du fait que le point est (infinitésimalement) tenu (comme la subjectivation peut l'être). Elle se décide par un nouvel axiome !

Autrement dit, on peut ou non décider (parier) que tenir un point produit un procès subjectif, c'est-à-dire que la constitution infinitésimale de la tenue du point conduit à l'existence d'un procès effectif.

Dans la GDA, on a trois types d'intégrale (Riemann, Lebesgue, Kurzweil-Henstock) dont la pertinence doit s'évaluer cas par cas.

Dans la GDS, l'existence de l'intégrale est assurée par un axiome !

Ainsi, la constitution infinitésimale du point selon deux échelles différentes et non commensurables :

- 1) assure l'existence d'une subjectivation, mais destinée à demeurer partiellement opaque (en bonne part générique et donc indiscernable) ;
- 2) autorise de parier sur l'existence d'un procès subjectif, de même nature (aussi discernable) que le point tenu.

Autrement dit, il faut distinguer le point et sa tenue. D'où que la subjectivation exhause ces infinitésimaux alors que le procès, pariant sur ces infinitésimaux, pourra être discerné en les négligeant !

En amont, on assure une existence mal discernable ; en aval, on parie sur une existence discernable.

En gros, la GDA est « empirique » quand la GDS exhause les axiomes (les décisions et les paris) à prendre pour penser tout cela.

De plus la GDS indique qu'il faut alors décider au cœur d'une dissymétrie irréductible entre l'amont et l'aval : on peut induire en amont une dérivée mais qui sera alors en bonne part indécidable empiriquement ; par contre on doit décider et parier en aval sur l'existence d'une primitive, qui sera alors autant décidable que le point de départ. En amont, on induit la subjectivation en plongeant dans le non-conscient. En aval, on déduit qu'il est possible d'être conscient du procès.

Tout ceci amplifie la figure moderne de la dialectique subjectivation/procès subjectif selon une double confiance :

- en aval d'une décision, la confiance en une analyse calculable ;
- en amont d'une décision, la confiance en une émergence synthétique.

Examinons pour terminer cette longue recherche ses conséquences sur le point affirmé en 1957 par HL et soutenu par lui en 1961 : son projet de RR.

III – Le « romantisme révolutionnaire », ausculté et radiographié par cette mathématique

En résonance intellectuelle avec la formalisation mathématique examinée, repartons de la formulation « synthétique » suivante () : un procès subjectif consiste à tenir *localement* et soutenir *régionalement* l'affirmation, en émergence subjective, d'un *point*.

Le procès subjectif du RR se dit présente sous la forme du « fragment ».

Mais, dans le RR, ce fragment n'est plus à entendre comme obtenu par fragmentation de l'Unité préalable de quelque Totalité : ce n'est plus un fragment du Parthénon, un bout de ruine, un reste du passé ! L'amont du fragment n'est plus quelque fragmentation mais une possibilisation car le fragment se présente ici comme un fragment de possible, un fragment du futur et non plus du passé !

Ce fragment de possible s'avère ainsi correspondre ici assez directement à l'action restreinte de Mallarmé c'est-à-dire à une action régionale qui édifie le fragment d'une future globalité et légitime ce faisant l'espérance en un avenir plus grand.

Il y a donc, dans le RR, une intrication essentielle entre la problématique du fragment et l'orientation subjective consistant à imaginer des possibles puisque le RR constitue ses points subjectifs selon les possibilités d'une situation, non ses effectivités.

La subjectivation s'initie ici de l'énoncé : « il n'y a pas que ce qu'il y a ! » (car il n'y a pas que l'effectif, qui fait consensus selon des faits constatables par quiconque mais il y a aussi des possibilités qui, elles, divisent les consciences).

Les points du RR procèdent ainsi d'affirmations dissensuelles en matière de possibilités, possibilités qu'il va s'agir de tenir localement (voisinage du point) et de soutenir régionalement (corrélations entre deux voisinages de deux points séparés) en sorte de produire quelque fragment (régional) adjoignable à la situation.

D'où que le fragment romantique soit essentiellement lié à la capacité subjective de soutenir des points distincts (par exemple en deux arts différents).

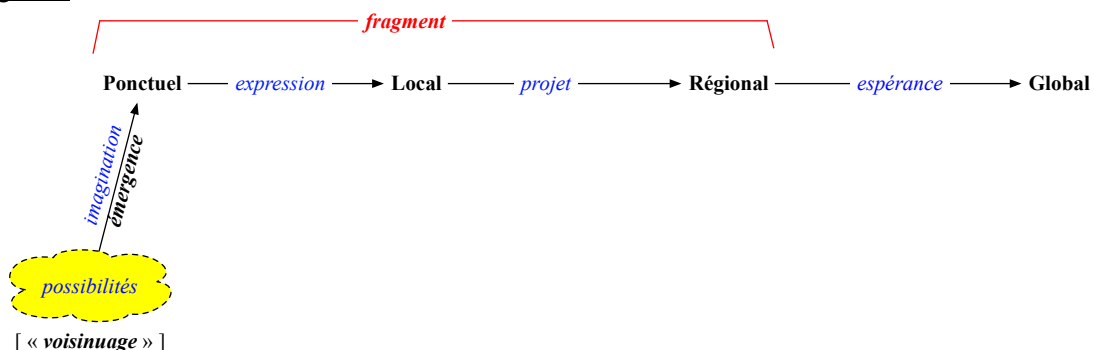
Où l'on retrouve alors l'intrication des différents points du RR d'HL.

Je rappelle les plus importants :

- 1) la dimension générale de **projet** ;
- 2) l'inscription de ce projet dans une situation d'**entre-temps** ;
- 3) l'opposition de ce projet aux **néoclassicismes** ;
- 4) la primauté donnée à une **dynamique expressive** de l'effet subjectif.
- 5) l'accent mis sur le **fragmentaire** ;
- 6) l'orientation selon **les possibles** ;
- 7) l'opérateur cardinal qu'est l'**imagination** ;
- 8) l'orientation selon l'**espérance** vers un futur fécondé par les réalisations présentes.

Dans notre formalisme différentiel, on réorganisera ainsi la dynamique subjective du RR :

- à partir d'un *voisinage* de micro-possibilités, l'imagination fait émerger, à échelle de la conscience, une orientation ponctuelle vers un possible désirable - c'est là la constitution d'un « gros point » ;
- l'expression subjective de cette affirmation ponctuelle va en explorer les conséquences immédiates en ses alentours (voir chez Sartre la délibération qui suit la décision et non pas la précède) – c'est là le passage du point au local ;
- le procès subjectif proprement dit consiste alors en la capacité de soutenir ce point au-delà de son lieu immédiat d'émergence, au-delà de son berceau natif, la capacité donc de le projeter en sorte que la subjectivation du possible ne se contente plus de se répandre aux alentours de soi par simple capillarité, mais sache franchir quelque fossé, quelque discontinuité séparatrice – c'est là le passage du local au régional.



Restent les dimensions (non rappelées précédemment) du RR d'HL :

- Il s'agit d'un romantisme **de type artistique** (« révolutionnaire » ne concerne donc pas ici directement la pensée politique).
- Ce nouveau romantisme esthétique aura plus de difficulté que le premier à se disposer à **l'école d'une musique** affirmative de son temps puisque « *la musique actuelle [1963] se définit de façon seulement négative par rapport à l'ancienne : atonale, athématique* ».
- Ce second romantisme émerge dans **l'entre-temps** d'une révolution passée (forclose par une Restauration contre-révolutionnaire) et d'un nouvel horizon d'avant-garde : « *un passé disparaît ; un horizon nouveau monte devant nous.* »
- Ce nouveau projet s'oppose aux **néoclassicismes** (néoclassicisme à l'Ouest et réalisme socialiste à l'Est) tout de même que le premier s'opposait aux classicismes de son temps.
- Dans le premier romantisme, les unités de type nouveau (non classiques) se pensaient sous le signe de **l'Harmonie**. Dans les années 60, la reprise de ce point est encore incertaine.
- Le premier romantisme corrélait « Harmonie » et « **Nature** ». La réactivation de ce point n'est guère détaillée dans le nouveau projet d'Henri Lefebvre.
- L'enjeu de ce nouveau romantisme est de relancer **les modernités**, « *de donner une signification nouvelle à ce mot si vague et dont on a tant abusé : le moderne* ».

Peut-on reprendre aujourd'hui à notre compte ces différentes dimensions ?

En ce qui me concerne,

- je ne saurais limiter la perspective révolutionnaire au seul domaine de **l'art** ;
- et, au demeurant, en ce qui concerne d'éventuelles révolutions artistiques, je ne saurais bien sûr en exclure la **musique** ;
- en matière **d'entre-temps**, formulation que j'ai en effet assumée dans les années 80 en raison des nouvelles perspectives encore à l'œuvre à cette époque, je ne suis plus convaincu qu'elle soit aujourd'hui adéquate tant un nouvel horizon d'avant-garde s'avère intempestif : notre temps est celui du déchaînement des effets contre-révolutionnaires et principalement réactionnaires, et nous avons à configurer une orientation apte à traverser subjectivement une probable longue nuit pour l'humanité ;
- l'adversaire d'aujourd'hui n'est plus les néoclassicismes mais les postmodernités ; ceci réactive l'urgence de relancer les modernités à l'heure où celles-ci ne sont plus combattues comme « aubes » menaçantes mais comme zombies « crépusculaires » ;
- difficile également de faire aujourd'hui de la Nature un emblème émancipateur quand elle est devenue le drapeau de la servitude volontaire à la biologie animale et au comportementalisme conformiste ;
- reste la question de l'harmonie qui musicalement m'importe mais que je ne saurais faire résonner/raisonner au-delà de la composition musicale que sous le signe d'une harmonie hétérophonique.

Si RR au sens d'HL ne peut donc aujourd'hui convenir, ne serait-ce que parce que « révolution » est, au moins depuis la « révolution conservatrice » allemande des années 20, devenu un mot galvaudé jusqu'à être aujourd'hui « orwellisé » par Macron and C°,



si le désastre politique dans lequel l'humanité s'enfonce aujourd'hui est finalement dû à la défaite stratégique de la révolution communiste, engagée en Chine dès 1958 par le soulèvement émancipateur et spontané des Communes populaires, peut-être nous faut-il alors – me faut-il – oser parler désormais, plutôt que de RR :

de « romantisme communiste » ?