∞

MIRNA DŽAMONJA
IRIF (CNRS-UNIVERSITÉ PARIS- CITÉ)

UN RETOUR À L'INFINI POTENTIEL

Table de matières

Introduction

Aristote : l'infini est un concept qui désigne quelque chose « en puissance », mais il n'est jamais réalisé, ou « en acte »

Zenon : explore l'infini à travers de paradoxes. L'infini ne devrait pas exister

Calcul ininitesimal : on peut voir cela comme l'infini actuel. Un nombre infinitesimal est $1/\infty$

Cantor : il a nommé l'infini

Les philosophes du XXe siècle: Sartre, Badiou ... un rapprochement des mathématique et de la philosophie, même la physique

19-ème siècle

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque,

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements :

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse),

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse), Hilbert (la géométrie),

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse), Hilbert (la géométrie), Dedekind (la théorie des nombres),

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse), Hilbert (la géométrie), Dedekind (la théorie des nombres), Peano (l'arithmétique),

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse), Hilbert (la géométrie), Dedekind (la théorie des nombres), Peano (l'arithmétique), Frege (la logique).

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse), Hilbert (la géométrie), Dedekind (la théorie des nombres), Peano (l'arithmétique), Frege (la logique).

L'effort va se cristalliser dans le *programme d'Hilbert*

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse), Hilbert (la géométrie), Dedekind (la théorie des nombres), Peano (l'arithmétique), Frege (la logique).

L'effort va se cristalliser dans le *programme d'Hilbert* qui propose de construire un système d'axiomes qui va impliquer toutes les connaissances mathématiques, de façon claire et facile à vérifier.

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse), Hilbert (la géométrie), Dedekind (la théorie des nombres), Peano (l'arithmétique), Frege (la logique).

L'effort va se cristalliser dans le *programme d'Hilbert* qui propose de construire un système d'axiomes qui va impliquer toutes les connaissances mathématiques, de façon claire et facile à vérifier.

Hilbert met la théorie des ensembles dans le centre de ce programme.

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse), Hilbert (la géométrie), Dedekind (la théorie des nombres), Peano (l'arithmétique), Frege (la logique).

L'effort va se cristalliser dans le *programme d'Hilbert* qui propose de construire un système d'axiomes qui va impliquer toutes les connaissances mathématiques, de façon claire et facile à vérifier.

Hilbert met la théorie des ensembles dans le centre de ce programme.

Deux des cinq piliers du programme sont : chaque énoncé mathématique sera démontrable ou réfutable dans le système **(complétude)**

19-ème siècle

Un nombre de découvertes montre qu'il y a des suppositions cachées et décevantes dans les mathématiques de l'époque, un nombre de mathématiciens tranche dans les fondements : Cauchy (l'analyse), Hilbert (la géométrie), Dedekind (la théorie des nombres), Peano (l'arithmétique), Frege (la logique).

L'effort va se cristalliser dans le *programme d'Hilbert* qui propose de construire un système d'axiomes qui va impliquer toutes les connaissances mathématiques, de façon claire et facile à vérifier.

Hilbert met la théorie des ensembles dans le centre de ce programme.

Deux des cinq piliers du programme sont : chaque énoncé mathématique sera démontrable ou réfutable dans le système **(complétude)** et pour chaque proposition il existera une façon mécanique pour décider si la proposition est vraie **(décidabilité)**.

20-ème siècle jusqu'aux années 1980

20-ème siècle jusqu'aux années 1980

Dans les années 1920 Zermelo et Fraenkel développent une axiomatisation (**ZF**) de la théorie des ensembles qui est adéquate comme fondements pour la plupart des mathématiques, jusqu'à ce jour.

20-ème siècle jusqu'aux années 1980

Dans les années 1920 Zermelo et Fraenkel développent une axiomatisation (**ZF**) de la théorie des ensembles qui est adéquate comme fondements pour la plupart des mathématiques, jusqu'à ce jour. Mais dans les années 1930 Gödel montre que cette axiomatisation n'est pas complète

20-ème siècle jusqu'aux années 1980

Dans les années 1920 Zermelo et Fraenkel développent une axiomatisation (**ZF**) de la théorie des ensembles qui est adéquate comme fondements pour la plupart des mathématiques, jusqu'à ce jour. Mais dans les années 1930 Gödel montre que cette axiomatisation n'est pas complète et Turing et Church montrent que la logique utilisée en ZF n'est pas décidable.

20-ème siècle jusqu'aux années 1980

Dans les années 1920 Zermelo et Fraenkel développent une axiomatisation (**ZF**) de la théorie des ensembles qui est adéquate comme fondements pour la plupart des mathématiques, jusqu'à ce jour. Mais dans les années 1930 Gödel montre que cette axiomatisation n'est pas complète et Turing et Church montrent que la logique utilisée en ZF n'est pas décidable. De plus, Gödel montre qu'il ne peut pas y avoir une axiomatisation complète.

20-ème siècle jusqu'aux années 1980

Dans les années 1920 Zermelo et Fraenkel développent une axiomatisation (**ZF**) de la théorie des ensembles qui est adéquate comme fondements pour la plupart des mathématiques, jusqu'à ce jour. Mais dans les années 1930 Gödel montre que cette axiomatisation n'est pas complète et Turing et Church montrent que la logique utilisée en ZF n'est pas décidable. De plus, Gödel montre qu'il ne peut pas y avoir une axiomatisation complète. Une des questions emblématiques de la théorie des ensembles, l'hypothèse du continuum **HC**,

20-ème siècle jusqu’aux années 1980

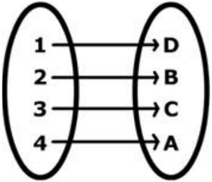
Dans les années 1920 Zermelo et Fraenkel développent une axiomatisation (**ZF**) de la théorie des ensembles qui est adéquate comme fondements pour la plupart des mathématiques, jusqu’à ce jour. Mais dans les années 1930 Gödel montre que cette axiomatisation n’est pas complète et Turing et Church montrent que la logique utilisée en ZF n’est pas décidable. De plus, Gödel montre qu’il ne peut pas y avoir une axiomatisation complète. Une des questions emblématiques de la théorie des ensembles, l’hypothèse du continuum **HC**, est démontrée indépendante des axiomes ZF en 1963 par Cohen.

20-ème siècle jusqu'aux années 1980

Dans les années 1920 Zermelo et Fraenkel développent une axiomatisation (**ZF**) de la théorie des ensembles qui est adéquate comme fondements pour la plupart des mathématiques, jusqu'à ce jour. Mais dans les années 1930 Gödel montre que cette axiomatisation n'est pas complète et Turing et Church montrent que la logique utilisée en ZF n'est pas décidable. De plus, Gödel montre qu'il ne peut pas y avoir une axiomatisation complète. Une des questions emblématiques de la théorie des ensembles, l'hypothèse du continuum **HC**, est démontrée indépendante des axiomes ZF en 1963 par Cohen. Il semble donc que la vérité mathématique est en dehors de nos compétences.

HC

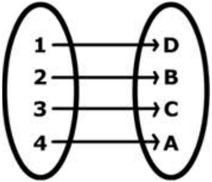
$\mathbb{R}$ = l'ensemble des réels 0, -1,23, 135, π, ..
Parmi eux on distingue les entiers non-negatifs $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$.



Les deux
sont infinis, mais
on **ne peut pas**
les mettre dans une
correspondance
bijective.

HC

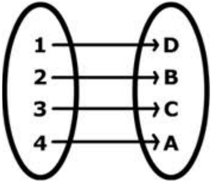
$\mathbb{R}$ = l'ensemble des réels 0, -1,23, 135, π, ..
Parmi eux on distingue les entiers non-negatifs $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$.



Les deux sont infinis, mais on **ne peut pas** les mettre dans une correspondance bijective.
Par contre, chaque sous-ensemble **défini** et infini de $\mathbb{R}$ est bijectif soit avec $\mathbb{R}$ ou soit avec $\mathbb{N}$.

HC

$\mathbb{R}$ = l'ensemble des réels 0, -1,23, 135, π, ..
Parmi eux on distingue les entiers non-negatifs $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$.



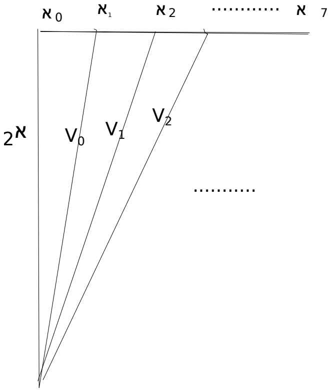
Les deux sont infinis, mais on **ne peut pas** les mettre dans une correspondance bijective.
Par contre, chaque sous-ensemble **défini** et infini de $\mathbb{R}$ est bijectif soit avec $\mathbb{R}$ ou soit avec $\mathbb{N}$.

HC Chaque sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ est bijectif soit avec $\mathbb{R}$ ou soit avec $\mathbb{N}$. **Indépendante de ZF(C) !**

Il y a une hiérarchie d'ensembles infinis, $\mathbb{N}$ correspond au premier $\aleph_0$ et $\mathbb{R}$ à son « exponentiel » $2^{\aleph_0}$.

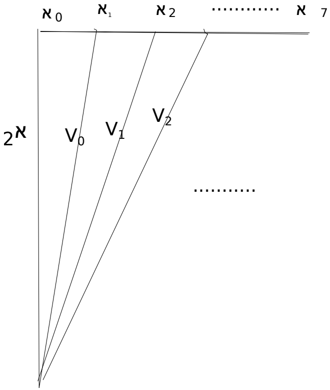
Il y a une hiérarchie d'ensembles infinis, $\mathbb{N}$ correspond au premier $\aleph_0$ et $\mathbb{R}$ à son « exponentiel » $2^{\aleph_0}$. HC dit qu'il n'y a rien entre les deux, donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, le « suivant ».

Il y a une hiérarchie d'ensembles infinis, $\mathbb{N}$ correspond au premier $\aleph_0$ et $\mathbb{R}$ à son « exponentiel » $2^{\aleph_0}$. HC dit qu'il n'y a rien entre les deux, donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, le « suivant ». Mais en fait, il est compatible avec ZF d'avoir par exemple



$2^{\aleph_0} = \aleph_{59}$.

Il y a une hiérarchie d'ensembles infinis, $\mathbb{N}$ correspond au premier $\aleph_0$ et $\mathbb{R}$ à son « exponentiel » $2^{\aleph_0}$. HC dit qu'il n'y a rien entre les deux, donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, le « suivant ». Mais en fait, il est compatible avec ZF d'avoir par exemple



$2^{\aleph_0} = \aleph_{59}$.
Tout est indépendant ?

Cardinaux singuliers

Les découvertes récentes

Les découvertes récentes

Le sentiment que tout est indépendent s'efface par les découvertes plus récentes. Soit $\aleph_\omega = \lim_{n<\infty} \aleph_n$.

Les découvertes récentes

Le sentiment que tout est indépendent s'efface par les découvertes plus récentes. Soit $\aleph_\omega = \lim_{n<\infty} \aleph_n$. Shelah a montré qu'il y a des bornes naturelles pour $2^{\aleph_\omega}$, dépendant de l'arithmétique des $2^{\aleph_n}$s. Dans une série d'articles, nous avons demontré que le combinatoire des cardinaux limites comme $\aleph_\omega$ est (dans une certaine mesure) **déterminé** par ZF.

Les découvertes récentes

Le sentiment que tout est indépendent s'efface par les découvertes plus récentes. Soit $\aleph_\omega = \lim_{n<\infty} \aleph_n$. Shelah a montré qu'il y a des bornes naturelles pour $2^{\aleph_\omega}$, dépendant de l'arithmétique des $2^{\aleph_n}$s. Dans une série d'articles, nous avons demontré que le combinatoire des cardinaux limites comme $\aleph_\omega$ est (dans une certaine mesure) **déterminé** par ZF.

Nous avons découvert une logique **très régulière** qui peut s'appliquer á ces cardinaux, appelons la *la logique de la vérité asymptotique*.

Le projet

Le projet

Le projet ici est d' étudier :

Le projet

Le projet ici est d' étudier :

- les conséquences philosophiques du phénomène de la *vérité asymptotique*.

Le projet

Le projet ici est d' étudier :

- les conséquences philosophiques du phénomène de la *vérité asymptotique*. Retrouver la confiance en nos fondements mathématiques en montrant que dans une certaine mesure ils sont complets !

Le projet

Le projet ici est d' étudier :

- les conséquences philosophiques du phénomène de la *vérité asymptotique*. Retrouver la confiance en nos fondements mathématiques en montrant que dans une certaine mesure ils sont complets !
- d'autres conséquences mathématiques

Le projet

Le projet ici est d' étudier :

- les conséquences philosophiques du phénomène de la *vérité asymptotique*. Retrouver la confiance en nos fondements mathématiques en montrant que dans une certaine mesure ils sont complets !
- d'autres conséquences mathématiques
- la logique de la vérité asymptotique, surtout sa décidabilité.

Le projet

Le projet ici est d' étudier :

- les conséquences philosophiques du phénomène de la *vérité asymptotique*. Retrouver la confiance en nos fondements mathématiques en montrant que dans une certaine mesure ils sont complets !
- d'autres conséquences mathématiques
- la logique de la vérité asymptotique, surtout sa décidabilité. Nous entrons ici dans la philosophie de l'informatique où la décidabilité a un rôle majeur

Le projet

Le projet ici est d' étudier :

- les conséquences philosophiques du phénomène de la *vérité asymptotique*. Retrouver la confiance en nos fondements mathématiques en montrant que dans une certaine mesure ils sont complets !
- d'autres conséquences mathématiques
- la logique de la vérité asymptotique, surtout sa décidabilité. Nous entrons ici dans la philosophie de l'informatique où la décidabilité a un rôle majeur
- la place de ces découvertes dans une perspective de l'histoire des mathématiques.

Les objets infinis sont étudiés en mathématiques, mais aussi en informatique : machines de Turing, automates, mots infinis, processus de terminaison, « petits » ensembles infinis. Modélisation de processus illimités. Infini potentiel.

En mathématiques, en particulier dans la théorie des ensembles et les domaines connexes, nous étudions l'infini réel. $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$

Dans un passé plus lointain, le fini et l'infini ont été étudiés principalement en essayant de refléter quelque chose connu d'un contexte à l'autre. Du réel fini au réel infini. Pas beaucoup de résultats positifs et surtout pas pour l'indénombrable !

Tenir compte de la procédure

Une approche plus récente consiste à regarder aussi comment l'objet infini a été construit à partir des objets finis. Donc, pour examiner une sorte de limite des structures finies.

Exemples : Limites de Fraïssé, graphons, graphings, FO

convergence, morasses, ultraproduits ... 'petits ensemble infinis» (automates de registre de données)

On obtient alors des limites des tailles suivantes :

$$\aleph_0, \aleph_1, 2^{\aleph_0}$$

1. Limites de Fraïssé

Fraïssé (1954): supposons que C est une classe héréditaire de structures finis, close par rapport d'isomorphismes et avec l'amalgamation. Alors il existe une unique structure dénombrable K telle que Age(K)=C et K est homogène.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dashed, "f'"] & D \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & C \arrow[u, dashed, "g'"'] \end{tikzcd}$$

Q *est la limite de Fraïssé de la classe d'ordres linéaires, le graphe R de Rado est la limite de la classe de graphes finis*

Une très bonne compréhension de la relation entre C, K, Aut(K). Par exemple, Kechris, Pestov, Todorčević (2003)

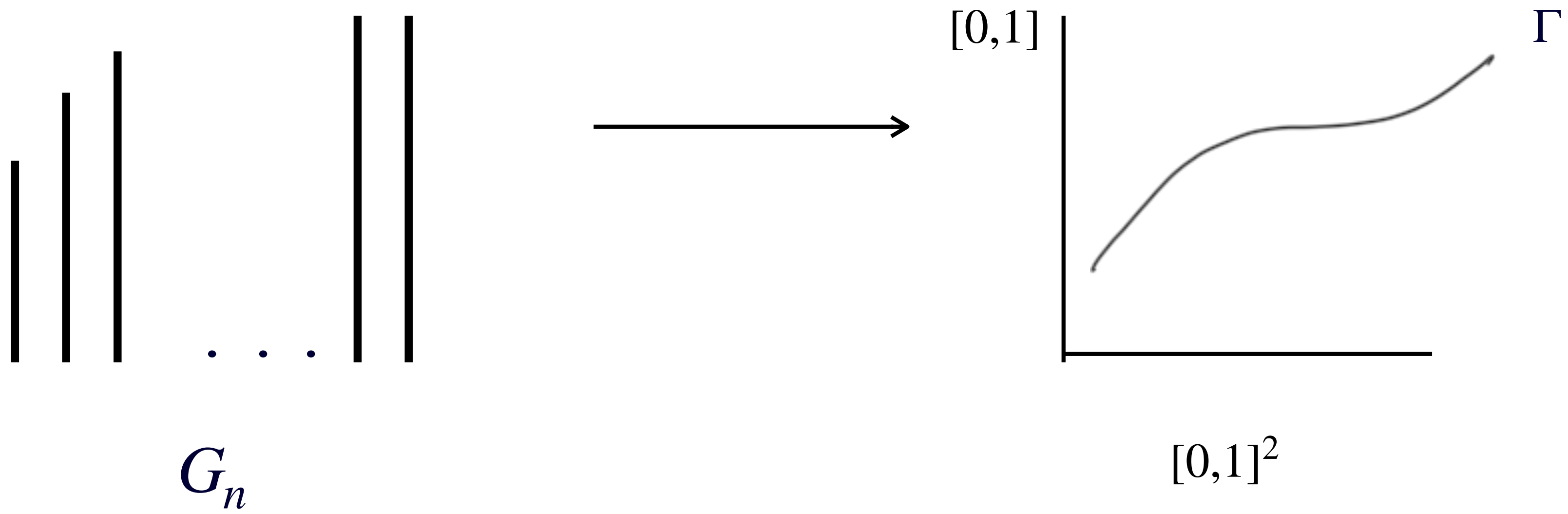
2. Limites Combinatoires

L'une des principales découvertes récentes en mathématiques discrètes a été celle d'un

GRAPHON

par Lovász et son groupe vers 2006.

Un *graphon* est une limite indénombrable d'une suite de graphes finis.



En fait, un graphon est une fonction mesurable $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *représentant* la suite $\langle G_n : n < \omega \rangle$ *dans le sense qu'il préserve certains invariants de graphe*

Par exemple, la densité d'homomorphisme de graphes*:*

$$\lim_{n\to\infty} t(F, G_n) = \int_{[0,1]^{v(F)}} \Pi_{i,j\in E(F)} \Gamma(x_i, x_j) \Pi_{i\in v(F)} dx_i \ ,$$

pour tout graphe fini F, où $t(F, G) = \dfrac{\hom(F, G)}{|G|^{|F|}}$

Il y a une notion de convergence métrique de la suite $\langle G_n : n < \omega \rangle$ *qu'on peut en associer,* la métrique de coupures.

American Mathematical Society

Colloquium Publications
Volume 60

COLLOQUIUM PUBLICATIONS

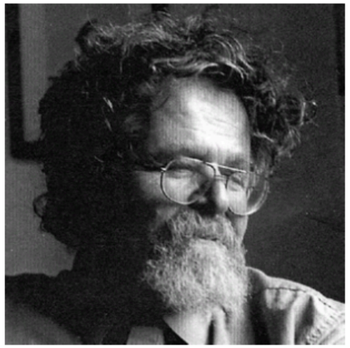
Large Networks and Graph Limits

László Lovász

De nombreuses autres notions de limites combinatoires ont été introduites depuis, de nombreuses applications trouvées et de nombreuses récompenses remportées.

ERC Synergy Grant 2018, 1e en Mathématiques

Project: Dynamics and Structure of Networks (DYNASNET)
ERC funding: 9.315 million for 6 years
Researchers and Host institutions:

		
Albert-László Barabási Central European University, Budapest	Laszlo Lovasz Hungarian Academy of Science	Jaroslav Nesetril Charles University in Prague

Un exemple de généralisation des graphons est le concept de modeling:

L'idée originale

$$\lim_{n\to\infty} t(F, G_n) = \int_{[0,1]^{v(F)}} \Pi_{i,j\in E(F)} \Gamma(x_i, x_j) \Pi_{i\in v(F)} dx_i \ ,$$

pour tout graphe fini F, où $t(F,G) = \dfrac{\hom(F,G)}{|G|^{|F|}}$

n'est pas adapté aux graphes clairsemés, car on a simplement 0 *à la limite.*

Benjamini-Schramm et Nešetřil- Ossona de Mendez ont développé une nouvelle théorie, celle de modelings. *Finalement, une théorie unifiée est donné par Nešetřil-Ossona de Mendez, qui ont introduit*

LA CONVERGENCE DU PREMIER ORDRE

MEMOIRS
of the
American Mathematical Society

ISSN 0065-9266 (print)
ISSN 1947-6221 (online)

Number 1272

A Unified Approach to Structural Limits and Limits of Graphs with Bounded Tree-Depth

Jaroslav Nešetřil
Patrice Ossona de Mendez

January 2020 • Volume 263 • Number 1272 (second of 7 numbers)

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Connexions avec la théorie des modèles

Convergence FO

Soit τ un vocabulaire relationnel fini et $\langle A_n : n < \omega \rangle$ une suite de τ -structures finies.

Si $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ est une formula de FO, on défini les couplages de Stone $\langle \varphi, A_n \rangle$, où pour à un n donné nous associons la probabilité que un sous-ensemble aléatoire de k éléments de A_n satisfait φ :

$$\langle \varphi, A_n \rangle = \frac{|\{\bar{a} \in A_n^k : A_n \vDash \varphi[\bar{a}]\}|}{|A_n^k|}$$

On dit que $\langle A_n : n < \omega \rangle$ est FO-convergente if $\lim_{n \to \infty} \langle \varphi, A_n \rangle$

existe pour tout φ.

Il y a des s situations où on peut trouver un espace standard Borelien

(alors indénombrable) A qui est une τ-structure et qui satisfait

$\langle \varphi, A \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \varphi_n, A \rangle$ pour tout φ. Alors nous avons un modeling. Un cas particulier nous donne les graphons.

Ultraproduits et la mesure de Loeb

Pour developper le hypergraphon, Elek and Szegedy (2012) ont consideré le ultraproduit $\Pi_{n\in\omega}(H_n, \mu_n)/\mathcal{U}$, où μ_n est la mesure d'énumeration sur le hypergraphe H_n, $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non-principal sur ω et le hypergraphon est alors un quotient spécifique, qui est séparable.

Il se trouve que cette construction est en fait un cas particulier de la construction classique de la mesure de Loeb's sur les ultraproduits (1975) et une substructure générée par un unsemble dénombrable d'éléments.

Donc, tout graphon est aussi un ultraproduit.

Ultraproducts $\longrightarrow$ Graphons

Une extension de cette correspondance est donnée dans Conley, Kechris et Tucker-Drob in

Ultraproducts of measure preserving actions and graph combinatorics (2012)

Les objets Pseudofinis ≡ ultraproduits d'objets finis

La théorie des modèles pour tels objets est bien développée (Hrushovski et d'autres) et elle est utilisée pour obtenir des résultats en combinatoire (Chernikov et d'autres). On regardera un résultat qui était obtenu de façons différents, dont par Dž.-Tomašić qui ont utilisé les graphons.

Fait : L'espace de graphons est compact dans la métrique de coupures.

La preuve utilise le Lemme de Régularité de Szemeredi

Tao (2012) a démontré une version algébrique :

Le Lemme de Régularité Algébrique de Tao

(le transparent suivant).

Lemma 1 (Algebraic regularity lemma) Let F be a finite field, let V, W be definable non-empty sets of complexity at most M, and let $E \subset V \times W$ also be definable with complexity at most M. Assume that the characteristic of F is sufficiently large depending on M. Then we may partition $V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$ and $W = W_1 \cup \ldots \cup W_n$ with $m, n = O_M(1)$, with the following properties:

- (Definability) Each of the $V_1, \ldots, V_m, W_1, \ldots, W_n$ are definable of complexity $O_M(1)$.
- (Size) We have $|V_i| \gg_M |V|$ and $|W_j| \gg_M |W|$ for all $i = 1, \ldots, m$ and $j = 1, \ldots, n$.
- (Regularity) We have

$$|E \cap (A \times B)| = d_{ij}|A||B| + O_M(|F|^{-1/4}|V||W|) \qquad (2)$$

for all $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $A \subset V_i$, and $B \subset W_j$, where d_{ij} is a rational number in $[0, 1]$ with numerator and denominator $O_M(1)$.

Starchenko-Pillay (pas publié) and indépendamment Hrushovski (une lettre à Tao), ont donné une preuve en utilisant la théorie de corps pseudofinis et qui n'a pas besoin de la grande caractéristique du corps.

Dž.-Tomašić (2022) ont donné une nouvelle preuve en utilisant les graphons, ont amélioré l'erreur et ont donné une extension sur les classes asymptotiques étudiées en théories de modèles :

***Théorème (Dž.-Tomašić (2022))**.* Dans l'espace de graphons, l'ensemble de points d'accumulation de la famille de réalisations des graphes bipartites définissables sure les structures dans une classe asymptotique est un ensemble fini de stepfunctions.

Une classe asymptotique

est une classe héréditaire de structures finies avec une mesure et une dimension.

Definition 3.5. Let $\mathcal{C}$ be a class of finite structures (considered a category with substructure embeddings). We say that $\mathcal{C}$ is an *asymptotic class* (in the sense of [8] and [3]), if, for every definable set $\mathbf{X}$ over $\mathbf{S}$, there exist

(1) a definable function $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} : \mathbf{S} \to \mathbb{Q}$,
(2) a definable function $\mathbf{d}_{\mathbf{X}} : \mathbf{S} \to \mathbb{N}$,

so that, for every $\epsilon > 0$ there exists a constant $N > 0$ such that for every $F \in \mathcal{C}$ with $|F| > N$ and every $s \in \mathbf{S}(F)$,

$$\left||\mathbf{X}_s(F)| - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}(s)|F|^{\mathbf{d}_{\mathbf{X}}(s)}\right| \leq \epsilon |F|^{\mathbf{d}_{\mathbf{X}}(s)}.$$

Macpherson

and Steinhorn

"Les graphons engendrés par les graphs définissables dans des belles classes de structures finies sont simple"

Connexion avec les âges et la théorie de classification

Question: Supposons que $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de graphs. Quelles conditions sur $\mathcal{C}$ vont assurer que les graphons engendres par les graphes en $\mathcal{C}$ sont "simples" ? Par exemple, ont des valuers 0 et 1.

Un exemple d'une classe héréditaire est l'âge= toutes

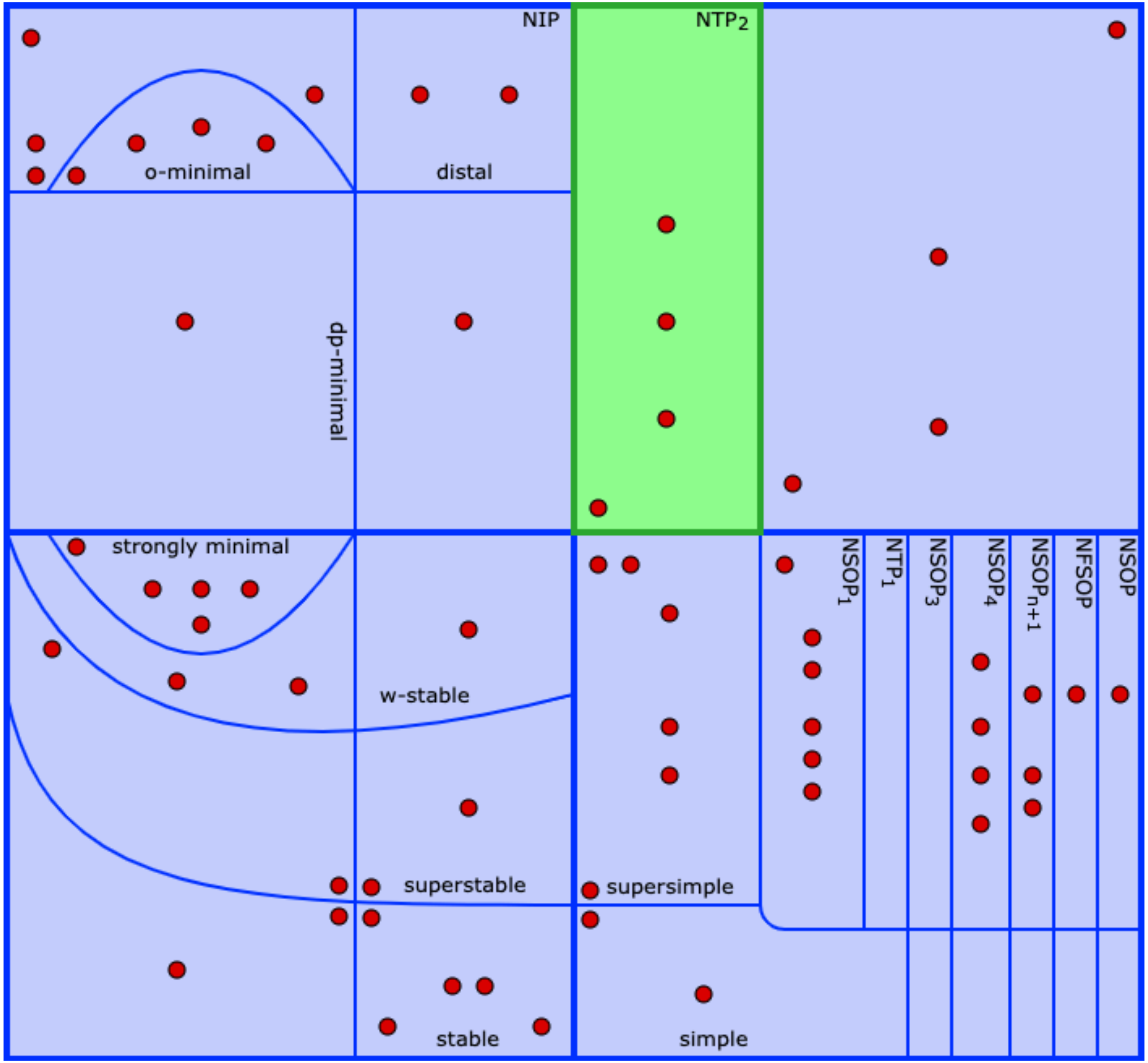
sous-structures finies Age(G) d'une structure G infinie dénombrable en logique du premier ordre.

Pour un exemple, une structure engendrée par la construction de Fraïssé.

Si nous connaissons la classification en termes de la théories des modèles de G,

qu'est que nous pouvons dire sur les graphons engendrés pas Age(G)?

La carte de Conant de la classification de Shelah



Lovász-Szegedy (2012) ont démontrés des théorèmes, qui, après une traduction dans la théorie des modèles, impliquent, par exemple :

Theorem (Lovász-Szegedy 2012) Soit G un graphe NIP. Alors tout graphon provenant d'une suite dans Age(G) a la valeur 0-1 presque par tout.

(Ils n'utilisent pas la terminologie NIP, plutôt la dimension de Vapnik-Červonenkis).

Fait. *Les graphes stables sont NIP.*