THALES

Séminaire MAMUPHI
Avril 2023, IRCAM, salle Shannon

« La Physique mathématique, en incorporant à sa base la notion de groupe, marque la suprématie rationnelle…Chaque géométrie – et sans doute plus généralement chaque organisation mathématique de l'expérience – est caractérisée par un groupe spécial de transformations…. Le groupe apporte la preuve d'une mathématique fermée sur elle-même. Sa découverte clôt l'ère des conventions, plus ou moins indépendantes, plus ou moins cohérentes » - **Gaston Bachelard, Le nouvel esprit scientifique, 1934**

MAMUPHI
mathématiques - musique – philosophie
MAMUPHI

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Esthétique des structures des feuilletages symplectiques du mouvement et de la chaleur et le romantisme de(s) Souriau : jaillissement de l'idée d'application moment de Carthage à Massilia

Frédéric BARBARESCO

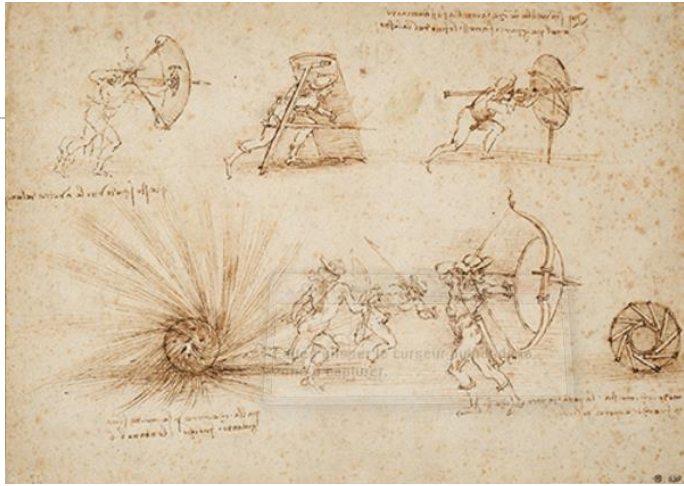
« La thermodynamique a habitué de longue date la physique mathématique [cf. DUHEM P.] à la considération de formes de Pfaff complètement intégrables : la chaleur élémentaire dQ [notation des thermodynamiciens] représentant la chaleur élémentaire cédée dans une modification infinitésimale réversible est une telle forme complètement intégrable. Ce point ne semble guère avoir été creusé depuis lors. »
Georges Henri REEB dans Structures feuilletées, 1978

Tout mathématicien sait qu'il est impossible de comprendre un cours élémentaire en thermodynamique.
Vladimir Arnold

Contribution des « Ingénieurs » au séminaire MAMUPHI

Etymologie du mot « Ingénieur »

- **INGENIEUR**: du bas-lat. ingeniatorem, de ingeniari, s'ingénier. Ingénieur est une altération de la forme ancienne et correcte engigneur.
- **INGENIER (S')**: Bas-lat. **ingeniari**, s'ingénier, de **ingenium**, au sens d'engin
- **ENGIN**: du lat. ingenium, **de ingenere**, mettre dans …de naissance, de in, en, et **genere** (voir. GÉNÉRATION).



Exposition 2019 Beaux-Arts de Paris sur Léonard de Vinci

Etymologie du « Génie militaire »

- **GENIE MILITAIRE**: Le génie militaire désigne l'art de la construction des ouvrages militaires (ponts,…), mais également la technique de maintien de l'infrastructure de communication.

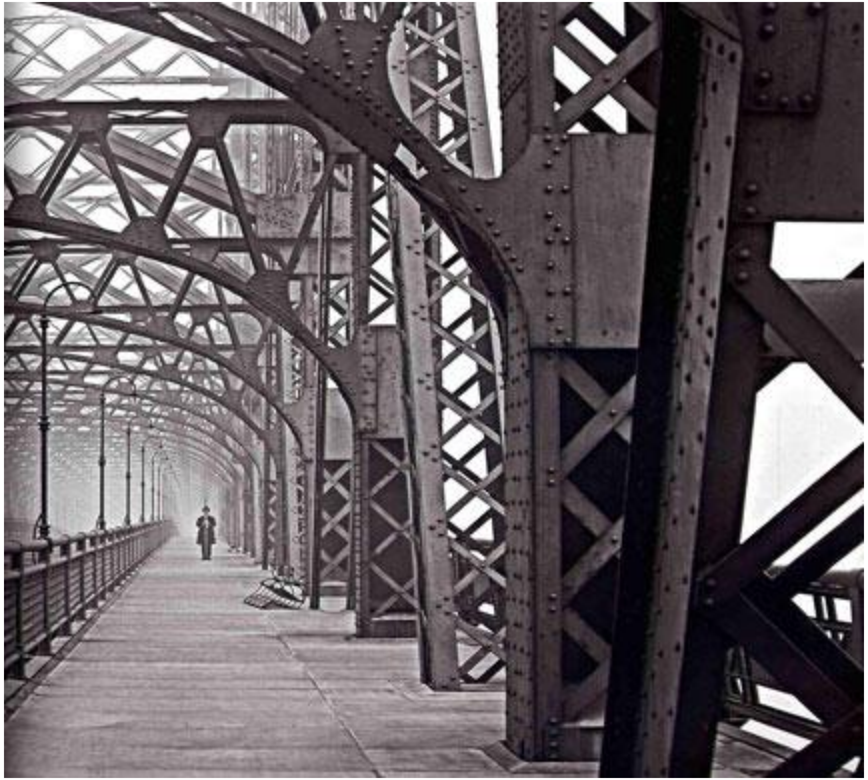
OPEN

THALES

La beauté rationnelle

L'Exposition parisienne de 1889 consacre le triomphe de la machine. A la suite d'Eiffel, les ingénieurs peuvent enfin prétendre au titre de créateurs de beauté. Identifié à l'utile, le Beau industriel devient aussi éternel et immuable que celui de Ruskin.

En 1904, **Paul Souriau publie La Beauté rationnelle : *« Toute chose est parfaite en son genre quand elle est conforme à sa fin; L'objet possède sa beauté dès lors que sa forme est l'expression manifeste de sa fonction. »***



Plan de l'exposé

- Souriau romantique, genèse Carthaginoise de la géométrie symplectique
- Les Souriau et le triptyque « esthétisme » , « mouvement » et « structure »
- Mécanique statistique et la Thermodynamique des groupes de Lie
- Métrique de Fisher-Koszul-Souriau, orbites coadjointes & application moment
- L'Entropie fonction invariante de Casimir sur les feuilles symplectiques
- Structure de feuilletages symplectiques de la chaleur et de l'information
- Feuilletages symplectiques d'Ereshmann/Reeb à Libermann et Souriau
- Feuilletage transverse, dissipation et 2^{nd} principe de la thermodynamique
- Le « mouvement » d'Aristote, à Duhem et Souriau en passant par Pascal

Bedrock of Information Geometry

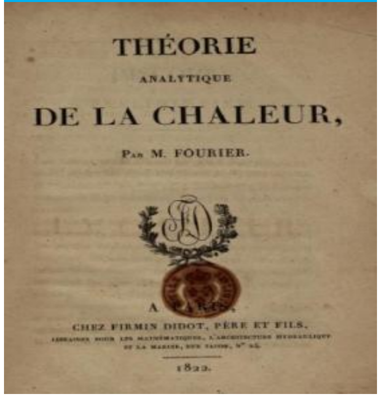
Jean-Marie Souriau (ENS 1942)

Jean-Louis Koszul (ENS 1940)

La Thermodynamique des groupes de Lie de Jean-Marie Souriau

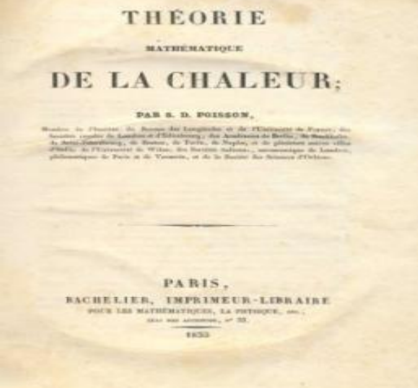
Ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique U - mais seulement le groupe G, son cocycle symplectique f et les couples Θ, Q. Peut-être cette "thermodynamique des groupes de Lie" a-t-elle un intérêt mathématique.

FOURIER
Analytical Theory of Heat

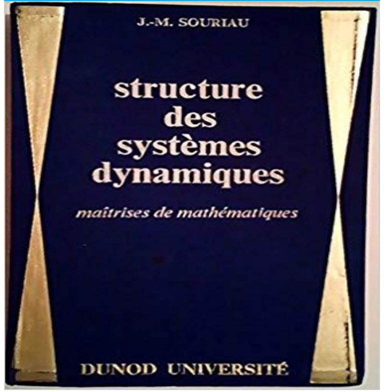


CLAUSIUS
Mechanical Theory of Heat

POISSON
Mathematical Theory of Heat

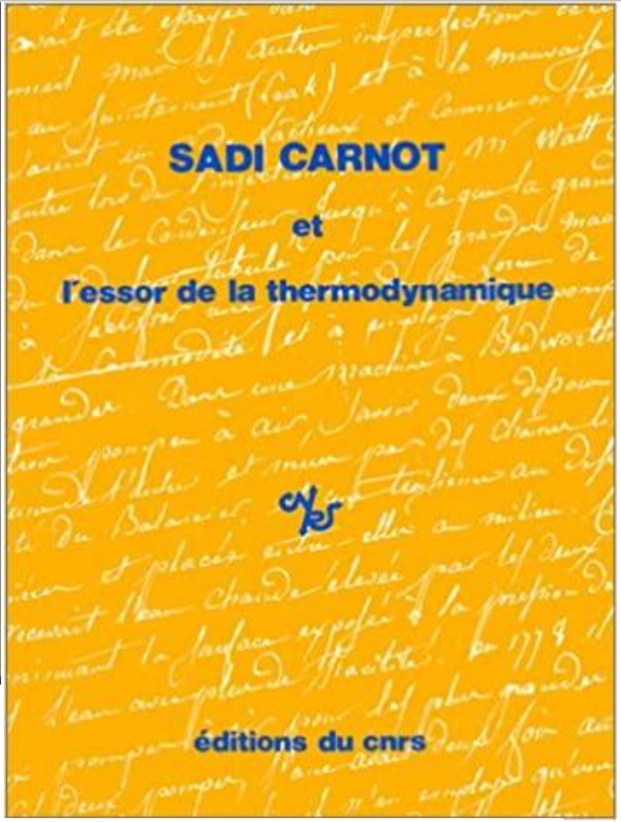


SOURIAU
Geometric Theory of Heat



THEORIE SYMPLECTIQUE DE LA CHALEUR

Sadi Carnot « Réflexions » 200ème anniversaire (1824-2024)



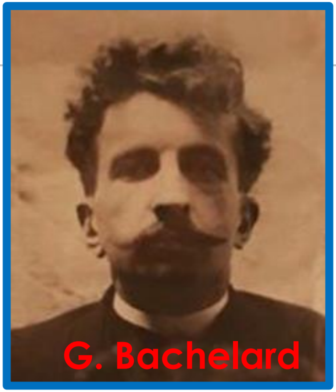

RÉFLEXIONS
SUR LA
PUISSANCE MOTRICE
DU FEU
ET
SUR LES MACHINES
PROPRES A DÉVELOPPER CETTE PUISSANCE.
PAR S. CARNOT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
BIBLIOTHÈQUE ROYALE
A PARIS,
CHEZ BACHELIER, LIBRAIRE,
QUAI DES AUGUSTINS, N°. 55.
1824.

2nd Principe de la Thermodynamique

1824-2024: 200 ans de la publication du livre de Carnot

Gaston Bachelard – Le nouvel esprit scientifique

« La Physique mathématique, en incorporant à sa base la notion de groupe, marque la suprématie rationnelle… Chaque géométrie – et sans doute plus généralement chaque organisation mathématique de l’expérience – est caractérisée par un groupe spécial de transformations…. Le groupe apporte la preuve d’une mathématique fermée sur elle-même. Sa découverte clôt l’ère des conventions, plus ou moins indépendantes, plus ou moins cohérentes » -
Gaston Bachelard, Le nouvel esprit scientifique, 1934



« Sous cette aspiration, la physique qui était d’abord une science des “agents” doit devenir une science des “milieux”. C’est en s’adressant à des milieux nouveaux que l’on peut espérer pousser la diversification et l’analyse des phénomènes jusqu’à en provoquer la géométrisation fine et complexe, vraiment intrinsèque… Sans doute, la réalité ne nous a pas encore livré tous ses modèles, mais nous savons déjà qu’elle ne peut en posséder un plus grand nombre que celui qui lui est assigné par la théorie mathématique des groupes. » –
Gaston Bachelard, Etude sur l’Evolution d’un problème de Physique
La propagation thermique dans les solides, 1928

http://www.vrin.fr/book.php?title_url=Etude_sur_l_evolution_d_un_probleme_de_physique_La_propagation_thermique_dans_les_solides_9782711600434&search_back=&editor_back=%&page=2

Jean-Marie Souriau (1922-2012): New way of thinking Physics

« Il est évident que l'on ne peut définir de valeurs moyennes que sur des objets appartenant à un espace vectoriel (ou affine); donc - si bourbakiste que puisse sembler cette affirmation - que l'on n'observera et ne mesurera de valeurs moyennes que sur des grandeurs appartenant à un ensemble possédant physiquement une structure affine. Il est clair que cette structure est nécessairement unique - sinon les valeurs moyennes ne seraient pas bien définies. » - Jean-Marie Souriau

« Il n'y a rien de plus dans les théories physiques que les groupes de symétrie si ce n'est la construction mathématique qui permet précisément de montrer qu'il n'y a rien de plus » - **Jean-Marie Souriau**

THALES

Séminaire MAMUPHI
Avril 2023, IRCAM, sale Shannon

MAMUPHI
mathématiques - musique – philosophie
MAMUPHI

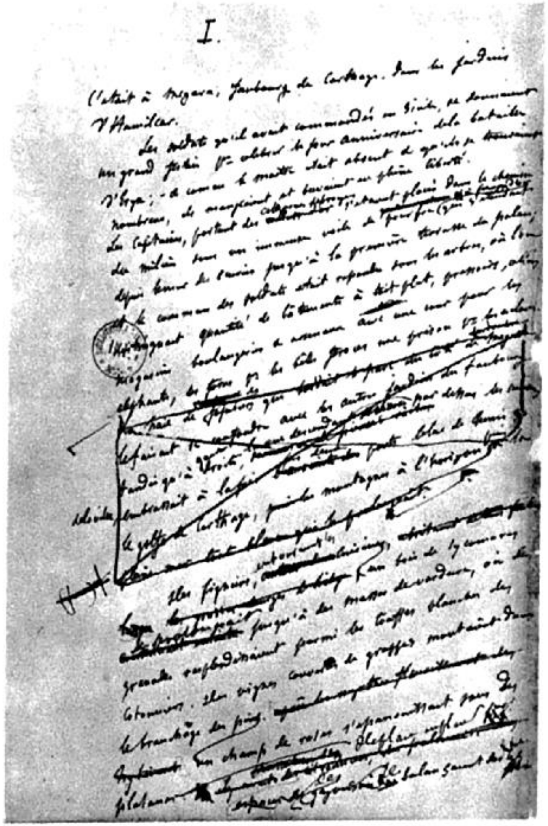
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Souriau romantique, genèse Carthaginoise de la géométrie symplectique

OPEN

Préambule

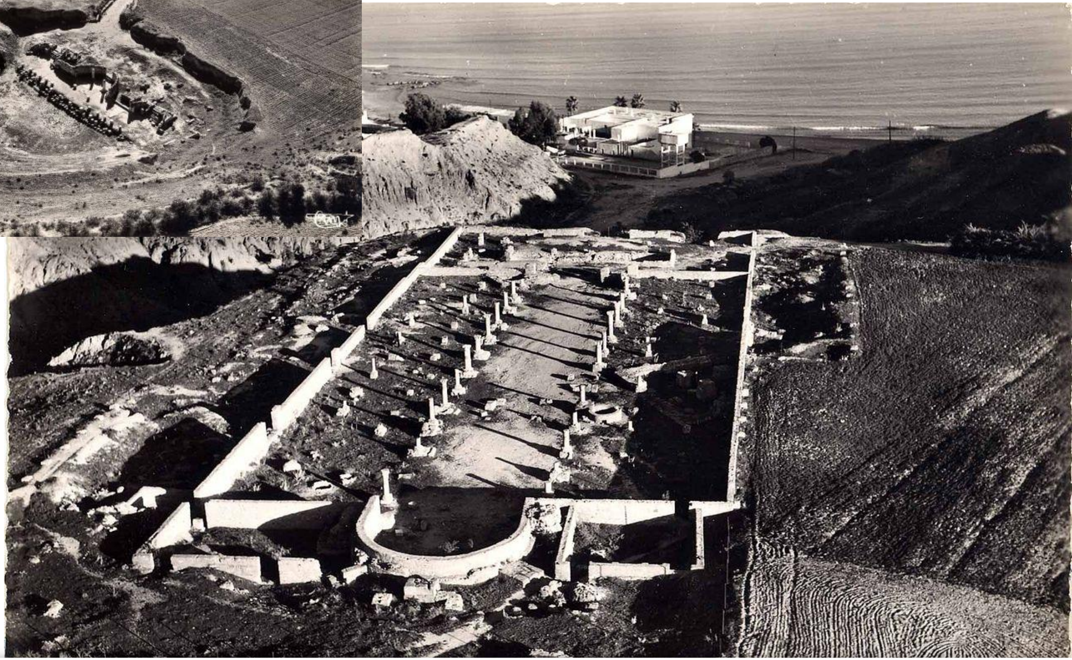
C'était à Mégara, faubourg de Carthage, dans les jardins d'Hamilcar.


I.

C'était à Mégara, faubourg de Carthage, dans les jardins d'Hamilcar.

Première page du manuscrit de Salammbô. Cl. B. N.
B. N. Département des Manuscrits.

C'était à l'IHE Tunis, faubourg de Carthage, dans les labos du CNRS



Méditant sur la mécanique et la mécanique analytique de Lagrange, Jean-Marie Souriau invente en 1953 la « géométrie symplectique » à CARTHAGE

Jean-Marie Souriau Romantique

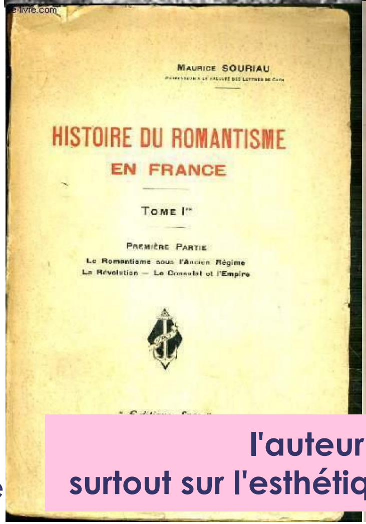
Le jeune Jean-marie Souriau isolé à Carthage

- « Je veux être Chateaubriand ou rien » Victor Hugo (Jeune)
- « Je veux être Lagrange ou rien » citation apocryphe de Souriau ?

Position romantique de Jean-Marie Souriau

- « Il n'y a rien de plus dans les théories physiques que les groupes de symétrie si ce n'est la construction mathématique qui permet précisément de montrer qu'il n'y a rien de plus ».
- Nouvelles notations et vues nouvelles symplectiques de la Physique dans « Structure des systèmes dynamiques »
- Vue esthétique de la physique en terme de feuilletage symplectique
- Thème romantique de la Nature dans « Grammaire de la Nature »
- Comme Galois, en opposition avec son temps et en réaction radicale contre le classicisme, Souriau se révolte et fuit la CASERNE Bourbakiste.
- Méditation sur les ruines de Carthage à l'Institut des Hautes Etudes de Tunis

Maurice Souriau. — Histoire du Romantisme en France. — Paris, éditions Spes, 1927-1928. 2 tomes en 3 vol. in-8°



l'auteur insiste
surtout sur l'esthétique du mouvement


MAURICE SOURIAU. — Histoire du Romantisme en France (Grand Prix Broquette-Gonin 1927, Académie Française).

Tome I. Première Partie. — Le Romantisme sous l'Ancien Régime.

Tome I. Deuxième Partie. — La Restauration.

Tome II. — La Décadence du Romantisme.

Chacun des trois volumes........ 30. »

Grammaire de la Nature

GRAMMAIRE DE LA NATURE

GRAMMAIRE

DE LA NATURE

JEAN-MARIE SOURIAU

Version du 8 juillet 2007

Comment méconnaître que la nature que nous connaissons : les champs, les prés, les bois, c'est presque entièrement l'‘oeuvre des paysans depuis quelques milliers d'années ? Leur artifice ?
Artifice : nature de l'homme.

THÉÂTRE DE LA NATURE

décor naturel

Tous, nous aimons et nous connaissons la nature : les forêts, les montagnes, les animaux sauvages.

La nature, c'est la vie.

nature morte

Sur la Lune, il y a des montagnes et des plaines. C'est encore la nature ; mais morte.
Et la mort ? c'est une loi naturelle.

Mort et vie, deux faces de la nature.

extraits naturels

Quel est le contraire de « *naturel* » ? « *artificiel* », sûrement.

Artificiel : fait par l'art.

Jean-Marie Souriau et Bourbaki: Comme Galois, Souriau fuit la CASERNE Bourbakiste

Image des mathématiques (https://images.math.cnrs.fr/Jean-Marie-Souriau-s-est-eteint.html)

- Après l'agrégation, je suis resté encore un an à l'École, où j'ai pu écouter Élie Cartan, Louis de Broglie et beaucoup d'autres. Mais l'ambiance générale ne me satisfaisait pas. On était en pleine **gloire bourbakiste**. En 1944-45, **Bourbaki** explosait. Les sujets de recherche me semblaient préfabriqués. Ce n'étaient pas des sujets inintéressants, non. Ce qui ne me plaisait pas, c'était le fait que **tout le monde semblait suivre la même direction**. J'y voyais plus de limitations que d'innovation. … Une fois, un mathématicien connu est venu visiter le laboratoire et je ne lui ai pas parlé parce qu'il représentait pour moi ce qu'était **Bourbaki, une certaine formalisation des mathématiques qui me paraissait stérilisante**. Je ne lui ai pas parlé, je peux le regretter maintenant mais...
- On se disait qu'il fallait faire **des mathématiques nouvelles** ; mais c'était tout à fait **à l'opposé de Bourbaki**, nous visions un autre pôle. Nous ne voulions pas faire des mathématiques comme ça, en l'air, mais construire un **outil qui permettrait de comprendre la nature.**
- **Ils [Bourbaki] marchaient très bien mais dans la cour de la caserne**. Bien sûr, j'ai toujours eu beaucoup d'admiration, d'estime pour les gens individuellement. Mais j'avais l'impression que collectivement **leur œuvre tournait en rond. Bourbaki, c'était une réaction contre les mathématiques d'avant. C'était un renouveau de la rigueur ; mais la rigueur pour la rigueur !?** Autrement dit, ce qui les fascinait, c'était les fondements des mathématiques, et maintenant je suis d'accord avec ceux qui disent que **les mathématiques n'ont pas de fondements**. L'existence des mathématiques, c'est le comportement des mathématiciens. Par exemple, Archimède n'avait pas besoin d'axiomatisation des nombres réels pour calculer π.
- Mais justement les fondements sont toujours postérieurs à la pratique. Je ne reproche pas à **Bourbaki d'avoir fait le ménage dans les vieilles mathématiques, mais d'avoir placé les fondements avant la pratique**. Si Archimède s'était contenté de méditer sur le nombre (il l'a fait), il n'aurait pas fait sa découverte fabuleuse, l'aire de la sphère. C'est fabuleux parce que tu ne peux pas recouvrir la sphère par des petits carrés comme le cercle par de petits segments. A mon avis, c'est le plus beau théorème des mathématiques.

Le départ pour Carthage et le début de la réflexion symplectique
Images des mathématiques (cnrs.fr)

- **Souriau:** En 1952, j'ai tout plaqué et **je suis parti à l'université de Tunis.**
- **Question:** Pour quelles raisons ?
- **Souriau:** La façon dont l'administration comprenait la recherche. Il fallait chercher tant d'heures par jour. Il y avait des petites fenêtres dans les portes pour que les gardiens puissent voir si on faisait des maths ou si on n'en faisait pas. J'ai un copain qui a été viré pour raison politique…
- **Question:** Tu as été plus heureux à Tunis ?
- **Souriau:** Oui, **cette période a joué un grand rôle dans ma vie**, pour des raisons personnelles. Du point de vue de la recherche **j'ai commencé à méditer sur la pratique de la mécanique.** Lorsque tu inverses une matrice trois x trois, tu vois apparaître un dénominateur commun à tous les termes, tu as découvert le déterminant. Ayant constaté qu'il apparaissait des choses antisymétriques bizarres dans les équations de la mécanique, je me suis dit : ça, c'est tout à fait comme les espaces euclidiens sauf que c'est tout le contraire. **J'ai ainsi eu l'idée de faire de la géométrie symplectique différentielle , titre de mon premier travail publié sur ce sujet en 1953.**
- **Question:** Mais ce point de vue n'était pas nouveau…
- **Souriau:** C'est bien plus tard que **j'ai compris qu'il était implicite dans Lagrange**. L'idée essentielle, c'est que **les solutions des équations du mouvement d'un système dynamique constituent une variété symplectique**. Et j'ai pensé que ça avait un intérêt d'étudier ce type de variété, comme ça a un intérêt d'étudier les variétés riemanniennes.
- **Question:** Uniquement par curiosité ?
- **Souriau:** Non, c'était avec le souvenir de **discussions avec des ingénieurs** qui se posaient la question suivante : qu'est-ce qui est essentiel en mécanique. Je me rappelle très bien un ingénieur qui m'avait demandé : est-ce que la mécanique c'est simplement le principe de conservation de l'énergie ? Ça va bien pour un système à un paramètre, mais dès qu'il y en a deux, ce n'est pas suffisant. J'avais appris bien sûr les équations de Lagrange et tous **les principes analytiques de la mécanique, mais tout ça, c'était un livre de recettes ; on n'y voyait pas de vrais principes.**

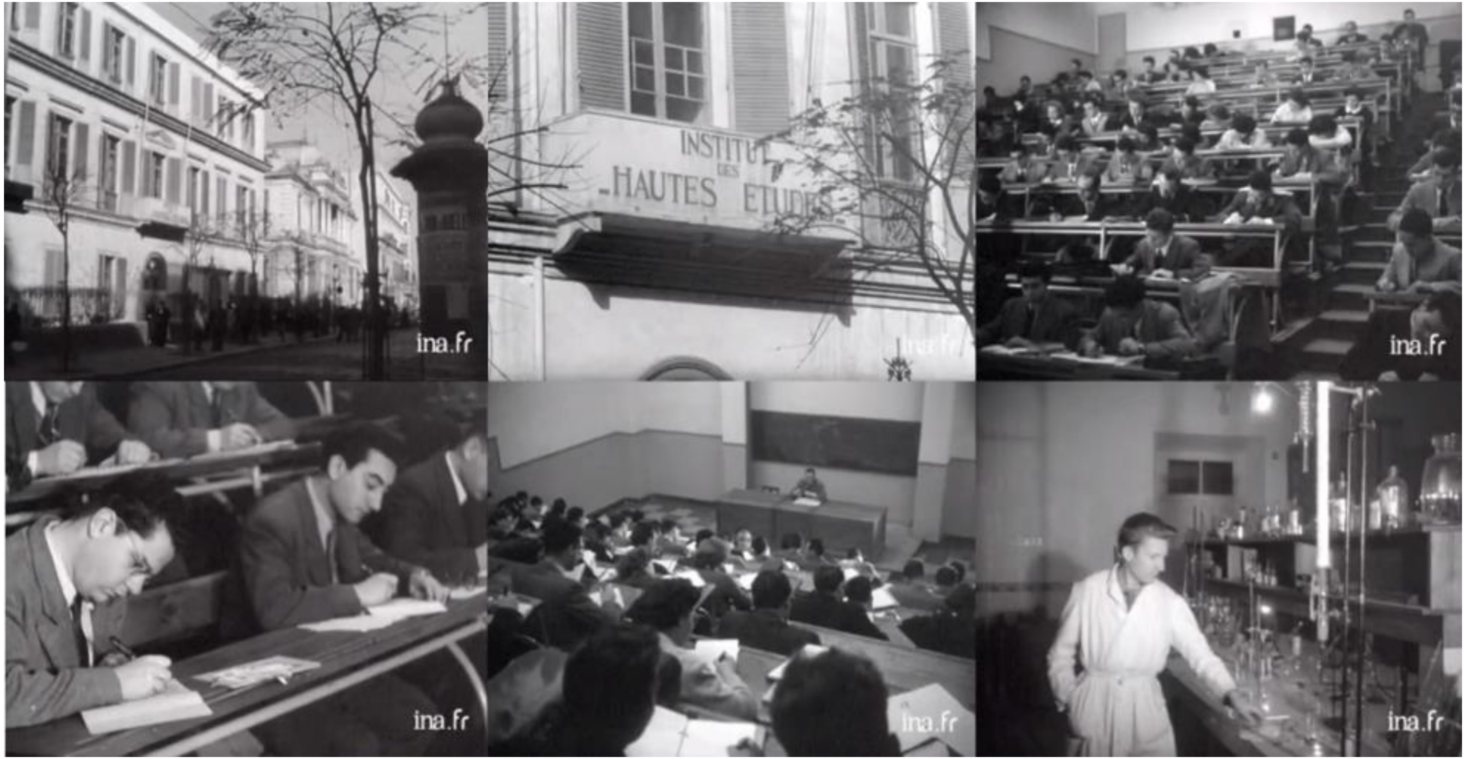
Le départ pour Carthage et le début de la réflexion symplectique
Images des mathématiques (cnrs.fr)

- **Question:** C'était donc une question de principe.
- **Souriau**: Pas seulement ; **dans ma première publication [53], il y avait aussi le mot « application »**. J'appliquais ce formalisme au calcul des perturbations, introduisant les variétés isotropes saturées (qu'on appelle aujourd'hui **variétés lagrangiennes**) qui permettent de produire tellement de **symplectomorphismes**, alors qu'il y a si peu de « riemannomorphismes ». Tout à l'heure je parlais de déterminants qui apparaissent miraculeusement quand on essaye d'inverser une matrice. Pour la **géométrie symplectique** c'est un peu la même chose. Tu essayes de résoudre les perturbations d'un système et tu vois apparaître les **coefficients de la structure symplectique**. Tu veux résoudre un problème, tu le résous à la main, tu travailles, et quand tu as bien travaillé, tu vois apparaître quelque chose qui était caché dessous. **Et ce que Lagrange a vu, que n'a pas vu Laplace, c'était la structure symplectique**. Finalement, si tu observes bien la progression des mathématiques, tu t'aperçois que c'est très souvent comme ça. **C'est l'usage qui te dit si c'est important, et ensuite tu axiomatises les choses. Mais ça vient après coup. Ce qui rend important la géométrie symplectique, c'est qu'elle s'impose d'elle-même.** Je ne suis pas platonicien, je ne dis pas que les idées mathématiques sont toutes faites et que nous n'avons qu'à les découvrir. Nous découvrons la physique. On a découvert la géométrie symplectique comme outil de la mécanique céleste. En partant d'une théorie générale des équations différentielles, on ne l'aurait probablement jamais trouvée. Le modèle particulier des équations de la mécanique céleste était plus riche que le modèle des équations différentielles « générales ».
- **Question:** Mais tout ça peut être considéré comme de l'analyse plutôt que de la géométrie
- **Souriau:** Ce qui rend la théorie globale, et donc géométrique, c'est l'action des groupes de symplectomorphismes. Pense au **théorème de Noether**, mathématicienne à l'origine d'une part importante de l'algèbre moderne, mais qui a aussi découvert ce théorème qui nous apprend que **les symétries d'un système conduisent à des grandeurs conservées**. Il cache (ou révèle) les relations entre groupe et symplectique. J'ai mis en place quelque chose que je croyais nouveau, mais qui existait depuis Sophus Lie, **une géométrisation du théorème de Noether. Je l'ai appelé « application moment »**. La formulation variationnelle initiale comporte des exceptions qui disparaissent avec la formulation symplectique.

Le départ pour Carthage et le début de la réflexion symplectique
[Images des mathématiques (cnrs.fr)]

- **En 1958, je suis revenu en France, à Marseille**. Et là je me suis trouvé confronté à des physiciens théoriciens et aux problèmes de la mécanique quantique qui m'avaient perturbé pendant mes études comme tous les étudiants, je pense. Je me suis aperçu que **la géométrie symplectique était un outil indispensable pour la mécanique quantique**. Et qu'en fait, elle était encore **plus appropriée à la mécanique quantique qu'elle ne l'était à la mécanique classique**. Quand j'ai écrit mon livre sur le sujet **je voulais écrire un livre sur la mécanique quantique et je me suis aperçu qu'il fallait que je présente toute la mécanique classique en détail, ainsi que la mécanique statistique**. Il ne s'agissait pas de théories étrangères puisqu'elles étaient reliées par la structure symplectique et par les symétries. Tu prends deux particules qui tournent l'une autour de l'autre suivant les lois de Newton, et puis tu prends un atome d'hydrogène dont tu ne vois que le spectre. Ce sont deux objets qui n'ont a priori rien à voir ; mais ils ont en commun les symétries symplectiques. Une porte est entr'ouverte.

Jean-Marie Souriau à Carthage de 1954 à 1958
(Germination de « structure des systèmes dynamiques »)



Institut des Hautes Etudes de Tunis, 8 rue de Rome

Video : http://www.ina.fr/video/AFE01000164

CARTHAGE & MASSILIA: Les racines méditerranéennes de « Structure des systèmes dynamiques » (Institut des hautes études, 8 Rue de Rome, Tunis)

1952-1958 : J.M. Souriau Maître de Conférences, puis Professeur titulaire à l'Institut des Hautes Études de Tunis

Bataille Héméroskopeion entre Carthage & Massilia, 490 AJC

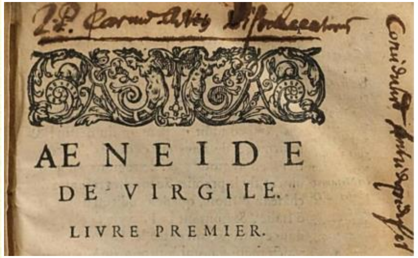
En effet, son mari est nommé en 1952 à l'Institut des Hautes Études de Tunis ; leur installation en Tunisie, plus précisément à Carthage, lui apporte la vision d'un monde nouveau

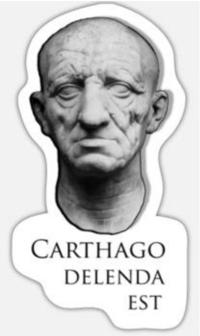
J'allais donc rue de Rome, où était situé l'Institut, et fit la connaissance du secrétaire, Smerly, frère d'un grand poète tunisien. Par la suite, je rencontrai les collègues, les historiens Frezouls, ancien membre de l'École de Rome, Ganiage, historien de l'époque moderne, les juristes Percerou, De Bernis, les scientifiques Diacono, Souriau, etc.

THALES

Berceau romantique de « Structure des systèmes dynamiques » : Souriau relit Lagrange en méditant sur les ruines de Carthage

Didon (reine de Carthage) et Enée. Énée racontant à Didon les malheurs de la ville de Troie. Pierre-Narcisse Guérin (1815)





Carthage punique. Musée national de Carthage. Dans le fond, la colline et la forteresse de Birsa. Le port militaire (en cercle), et le port de commerce (en bas à gauche).

Guerres puniques

Hannibal 2ème guerre punique

THALES

Méditation lunaire à Carthage dans « Grammaire de la Nature »

les terrasses de Carthage

Voyons maintenant comment la Lune perturbe l'espace de la Terre ; analysons le système *Terre-Lune*.

S'il était en équilibre parfait, ce système tournerait sur lui-même d'un mouvement de rotation circulaire uniforme ; non seulement les deux corps tourneraient l'un autour de l'autre sur une orbite circulaire, mais ils tourneraient sur eux-mêmes autour du même axe, avec la même vitesse de rotation, et par conséquent ils se montreraient toujours le même côté ([3]).

Que se passe-t-il réellement ?

- Le *mouvement de la Lune par rapport à la Terre* n'est circulaire et uniforme qu'en moyenne : pour décrire son mouvement réel, il faut composer ce mouvement simple avec une perturbation due à l'action du Soleil. Perturbation qui se calcule parfaitement par la mécanique céleste, et qu'on peut décomposer en plusieurs termes de périodes différentes : certains apparaissent déjà dans l'harmonie des sphères de Hipparque et de Ptolémée (p. 18).
- La Lune montre constamment *la même face à la Terre*.
- Mais pas la Terre à la Lune : l'axe de rotation de la Terre sur elle-même est proche de l'axe de rotation de la Lune autour de la Terre, mais la Terre tourne beaucoup plus vite ; à cause de cela la Lune, comme le Soleil, se lève à l'est et se couche à l'ouest. La *vitesse de rotation de la Terre* est trente fois trop grande, en gros, puisqu'il y a trente jours dans un mois ([1]).

Tous les citadins ne le savent pas. Gustave Flaubert nous a raconté comment la princesse Salammbô, de sa terrasse de Carthage, assiste au lever de la Lune dont elle est la prêtresse. Mais dans ce récit ce lever a lieu en plein sud : Flaubert n'a donc pas eu l'idée d'observer réellement le chemin de la Lune dans le ciel.

Et vous ?

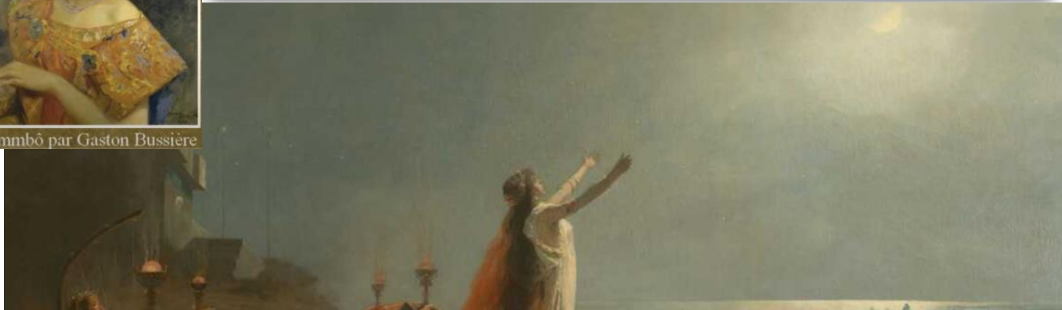
Simple question de patience : l'action des marées ralentit la rotation de la Terre. Attendons seulement que l'âge de la Terre ait doublé, la durée du jour aura approximativement doublé ; alors s'éteindront simultanément les marées lunaires et le mouvement apparent de la Lune.

Elle ne se lèvera ni ne se couchera plus. Un équilibre froid sera atteint — si le Soleil ne s'en est pas mêlé entre-temps…

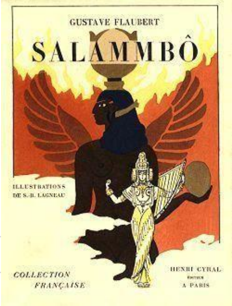
Même conclusion donc que précédemment : ce qui écarte le système Terre-Lune d'un équilibre froid, c'est d'une part le fait qu'il n'est pas isolé ; d'autre part sa relative jeunesse : processus dissipatifs en cours.

Salammbô par Gaston Bussière

Du lever de la Lune à Carthage au principe thermodynamique DISSIPATIF du couple Terre-Lune. Méditation de Souriau sur les jours qui auront une durée double du fait du ralentissement de la terre par les marées liées à l'attraction de la Lune



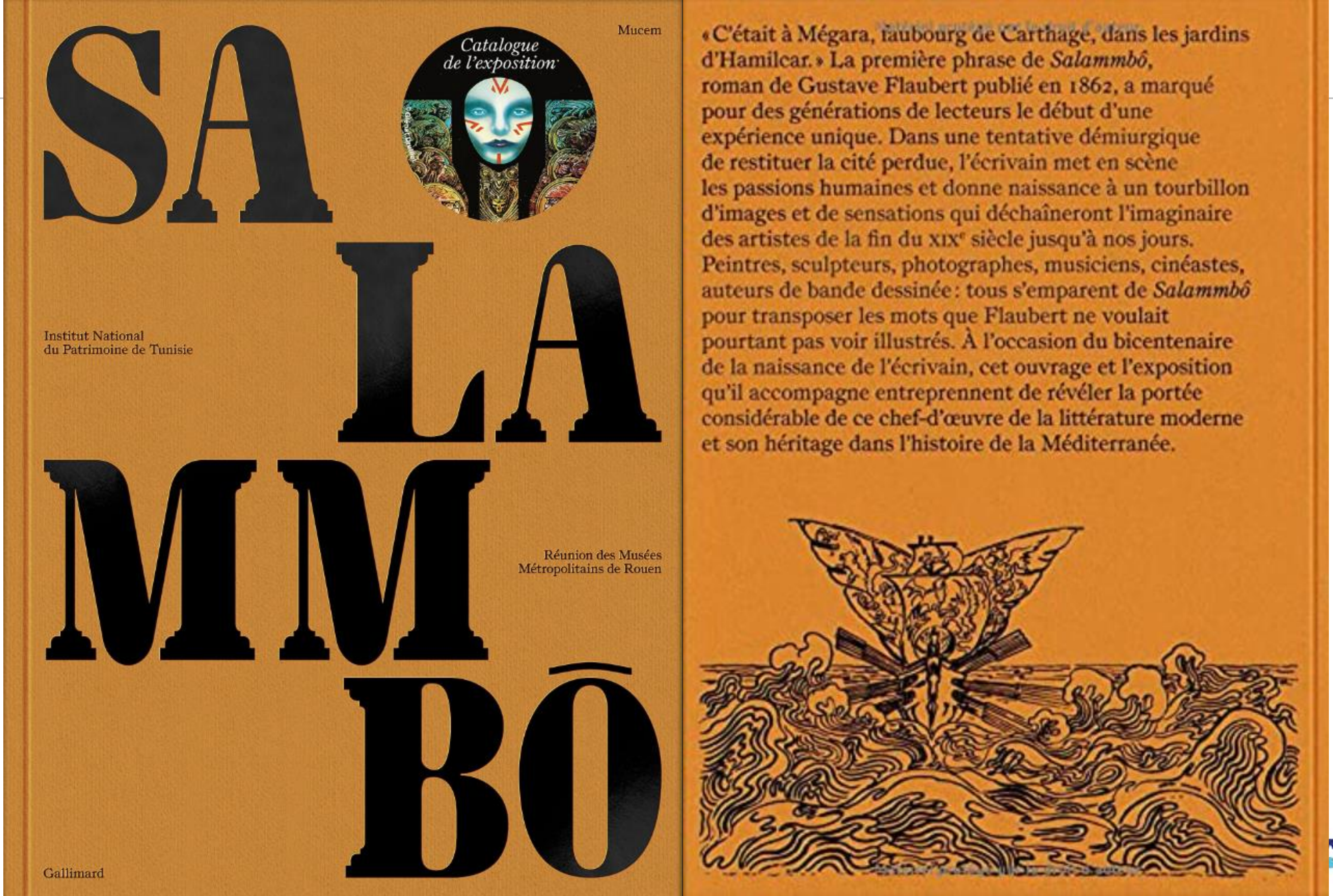
« La lune se levait au ras des flots, et, sur la ville encore couverte de ténèbres, des points lumineux, des blancheurs brillaient : le timon d'un char dans une cour, quelque haillon de toile suspendu, l'angle d'un mur, un collier d'or à la poitrine d'un dieu… Autour de Carthage les ondes immobiles resplendissaient, car la lune étalait sa lueur tout à la fois sur le golfe environné de montagnes et sur le lac de Tunis, où des phénicopteres parmi les bancs de sable formaient de longues lignes roses, tandis qu'au delà, sous les catacombes, la grande lagune salée miroitait comme un morceau d'argent. La voûte du ciel bleu s'enfonçait à l'horizon, d'un côté dans le poudroiement des plaines, de l'autre dans les brumes de la mer, et sur le sommet de l'Acropole les cyprès pyramidaux bordant le temple d'Eschmoûn se balançaient, et faisaient un murmure, comme les flots réguliers qui battaient lentement le long du môle, au bas des remparts….C'était la lune qui l'avait rendue si pâle, et quelque chose des Dieux l'enveloppait comme une vapeur subtile.»



« **Salammbô** » - Gustave Flaubert, 1862. Guerre des Mercenaires, au IIIe siècle av. J.-C., qui opposa la ville de Carthage aux mercenaires barbares qu'elle avait employés pendant la première guerre punique, et qui se révoltèrent. Flaubert décrit un Orient à l'exotisme sensuel et violent.

Livre audio : Salammbô - Section 1 : Le festin - YouTube

THALES


SA
LA
MM
BÔ
Catalogue
de l'exposition
Mucem
Institut National
du Patrimoine de Tunisie
Réunion des Musées
Métropolitains de Rouen
Gallimard
«C'était à Mégara, faubourg de Carthage, dans les jardins d'Hamilcar.» La première phrase de *Salammbô*, roman de Gustave Flaubert publié en 1862, a marqué pour des générations de lecteurs le début d'une expérience unique. Dans une tentative démiurgique de restituer la cité perdue, l'écrivain met en scène les passions humaines et donne naissance à un tourbillon d'images et de sensations qui déchaîneront l'imaginaire des artistes de la fin du XIXe siècle jusqu'à nos jours. Peintres, sculpteurs, photographes, musiciens, cinéastes, auteurs de bande dessinée : tous s'emparent de *Salammbô* pour transposer les mots que Flaubert ne voulait pourtant pas voir illustrés. À l'occasion du bicentenaire de la naissance de l'écrivain, cet ouvrage et l'exposition qu'il accompagne entreprennent de révéler la portée considérable de ce chef-d'œuvre de la littérature moderne et son héritage dans l'histoire de la Méditerranée.

« Salammbô », le romantisme de Gustave Flaubert

«Avant les Dieux, les ténèbres étaient seules, et un souffle flottait, lourd et indistinct comme la conscience d'un homme dans un rêve. Il se contracta, créant le Désir et la Nue, et du Désir et de la Nue sortit la Matière primitive. C'était une eau bourbeuse, noire, glacée, profonde. Elle enfermait des monstres insensibles, parties incohérentes des formes à naître et qui sont peintes sur la paroi des sanctuaires.

Puis la Matière se condensa. Elle devint un oeuf. Il se rompit. Une moitié forma la terre, l'autre le firmament. Le soleil, la lune, les vents, les nuages parurent ; et, au fracas de la foudre, les animaux intelligents s'éveillèrent. Alors Eschmoûn se déroula dans la sphère étoilée ; Khamon rayonna dans le soleil ; Melkarth, avec ses bras, le poussa derrière Gadès ; les Kabyrim descendirent sous les volcans, et Rabbetna, telle qu'une nourrice, se pencha sur le monde, versant sa lumière comme un lait et sa nuit comme un manteau. »

« Salammbô » - Gustave Flaubert, 1862

« Salammbô réalise le programme romantique d'une littérature totale: historique, politique, épique, romanesque, érotique,… Il est aussi celui qui écrit dans Salammbô parmi les plus belles pages écrites en français sur la mélancolie lunaire » - François Vanoosthuyse

Gustave Flaubert Enfant

Carthage, capitale punique, la Rome de l'Afrique

Site archéologique de Carthage (UNESCO):https://whc.unesco.org/fr/list/37/

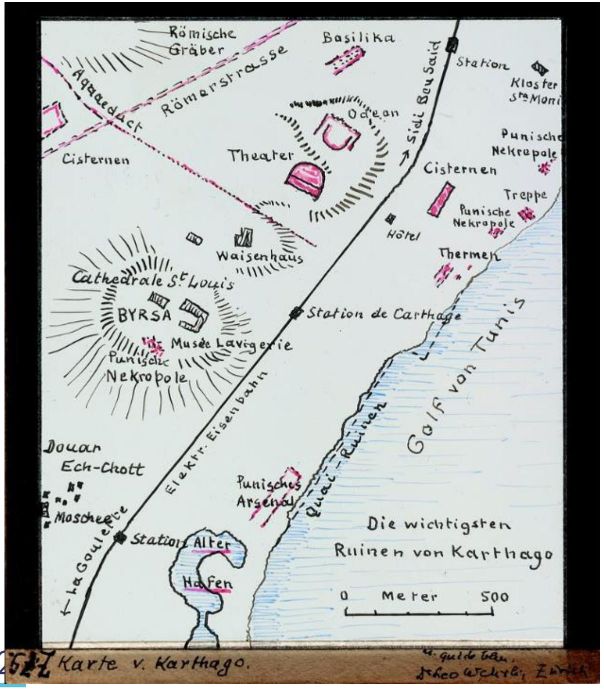
C'était à Mégara, faubourg de Carthage, dans les jar-
dins d'Hamilcar.

https://www.youtube.com/watch?v=oBw-pcUXyww

« ***… me croyez-vous assez godiche pour être convaincu que j'aie fait dans Salammbô une vraie reproduction de Carthage ? Ah non ! mais je suis sûr d'avoir exprimé l'idéal qu'on en a aujourd'hui*** » - Gustave Flaubert, Citation apud P. Adda, Introduction à Salammbô, Paris, Cluny, 1937

Le Carthage de Jean-Marie Souriau

- Carthage en 1950
- Souriau est à Carthage de 1952 à 1958



Le romantisme : méditation sur les ruines

Vue imaginaire de la grande galerie du Louvre en ruines – **Hubert Robert**

Le romantisme trouve dans la ruine une puissante image du « mal du siècle ». L'homme romantique se projette dans la ruine, il y voit comme une allégorie de sa propre existence. Empathie avec la ruine que Chateaubriand, dans le Génie du Christianisme, promeut en véritable esthétique : « Les ruines sont plus pittoresques que le monument frais et entier. Les ruines permettent d'ajourer les parois et de lancer au loin le regard vers les nues, les montagnes » (nous soulignons). Selon lui donc, grâce aux ruines, par essence édifices troués par le temps, « l'horizon recule ». En ce sens la ruine serait comme la condition de possibilité, ou plus précisément, le relais du regard sur le paysage. Avatar romantique du dispositif miroitant de Brunelleschi, de la fente de la camera obscura ou encore du motif de la fenêtre ouverte sur le monde derrière une figure humaine (qui introduit toute la peinture de paysage occidentale), la ruine apparaît dès lors comme un filtre. Le regard qui passe par le crible de la ruine découvre un paysage surdéterminé par tous les âges qu'il (et l'humanité avec lui) a traversé. Curieusement, le regard qui passe par la ruine pour regarder le paysage dans un même temps humanise puissamment celui-ci (projection) mais aussi l'autonomise, en tant que manifestation de la nature naturante (chez Diderot en particulier) et/ou naturée (marque de la divinité). D'où, dans ce second mouvement, la naissance du sentiment de sublime : c'est face à la ruine, marque de l'éphémère humain, que le paysage m'apparaît d'autant plus souverain.

http://filiation.ens-lyon.fr/default.htm

Le Carthage de Saint-Augustin

Augustin, l'ambitieux de Carthage (Claire Sotinel dans collections 70)

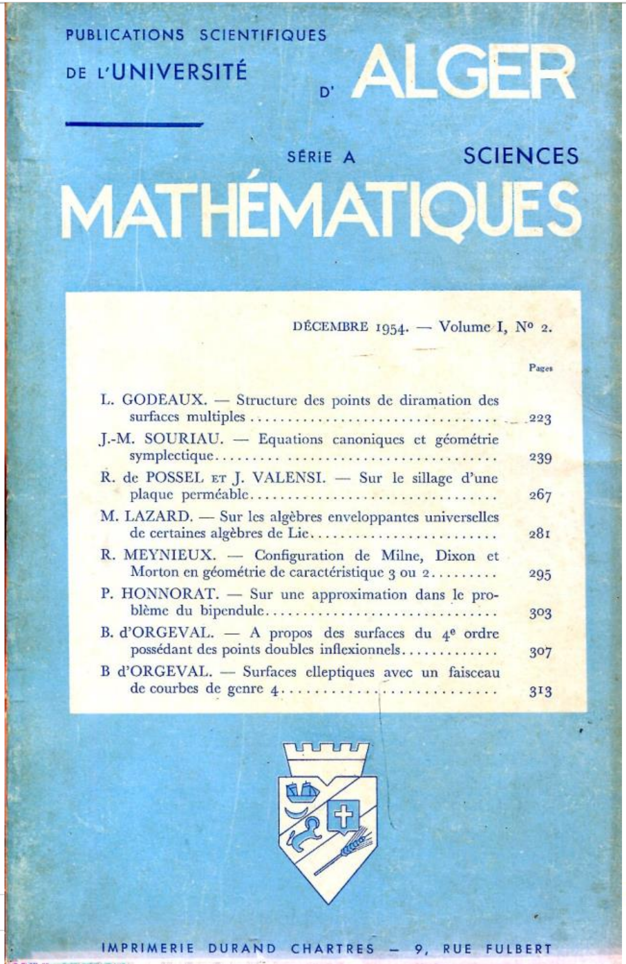
- A 17 ans, Augustin quitte sa petite patrie numide pour Carthage « où crépitait le chaudron des amours honteuses ». Il y passe une douzaine d'années.
- Nul auteur antique ne nous a fait mieux connaître Carthage qu'Augustin, qui a passé dans la capitale de la province d'Afrique plusieurs années de sa jeunesse, **entre 370 et 383**, avant de la fréquenter régulièrement **à partir de 388**.
- C'est à cet âge qu'il arrive de sa ville natale de Tagaste, à environ 250 kilomètres de Carthage, en Numidie (actuelle Souk Ahras en Algérie), pour faire des études de rhétorique, et découvre le vacarme du « chaudron des amours honteuses », la première image qu'il utilise pour évoquer Carthage dans ses Confessions (III, 1).
- C'est dans cette oeuvre majeure que l'évêque Augustin, écrivant près de trente ans après les faits, consacre le plus de lignes à la grande ville qui semblait offrir au jeune provincial talentueux qu'il était tous les possibles. Il condamne rétrospectivement son immoralité, ...

La genèse Carthaginoise: Les articles parus à Carthage 1952-1958

- Jean Marie Souriau introduit la terminologie « géométrie symplectique ». Son premier travail sur le sujet, intitulé « **Géométrie symplectique différentielle. Applications**» , est présenté au colloque du CNRS de Strasbourg en1953. En 1954, il a résumé tous les details de sa presentation donnée à Strasbourg dans l'article "**Equations canoniques et géométrie symplectique**".

- Jean-Marie Souriau. **Géométrie symplectique différentielle. Applications**. In Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, **Strasbourg, 1953**, pages 53–59. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953.
- Jean-Marie Souriau. **Equations canoniques et géométrie symplectique**. Pub. Sci. Univ. Alger. Sér. A., 1 :239–265 (1955), 1954.
- Jean-Marie Souriau. **Equations de Dirac en schéma relativiste général**. C. R. Acad. Sci. Paris, 245 :496–497, 1957.
- Jean-Marie Souriau. **Le tenseur impulsion-énergie en relativité variationnelle**. C. R. Acad. Sci. Paris, 245 :958–960, 1957.
- Jean-Marie Souriau. **Un schéma général pour la physique relativiste**. C. R. Acad. Sci. Paris, 244 :2779–2781, 1957.
- Jean-Marie Souriau. **La relativité variationnelle**. Publ. Sci. Univ. Alger. Sér. A, 5 :103–170, 1958.
- Jean-Marie Souriau. **La seconde invariance en relativité variationnelle**. C. R. Acad. Sci. Paris, 246 :3588–3590, 1958.
- Jean-Marie Souriau. **Une axiomatique relativiste pour la microphysique**. C. R. Acad. Sci. Paris, 247 :1559–1562, 1958.
- Jean-Marie Souriau. **Calcul linéaire**. "Euclide." Introduction aux Etudes Scientifiques. PUF, Paris, 1959.
- Jean-Marie Souriau. **Conséquences physiques d'une théorie unitaire**. C. R. Acad. Sci. Paris, 248 :1478–1480, 1959.

L'article fondateur de la géométrie Symplectique en 1954



PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ D' ALGER

SÉRIE A SCIENCES

MATHÉMATIQUES

DÉCEMBRE 1954. — Volume I, N° 2.

IMPRIMERIE DURAND CHARTRES — 9, RUE FULBERT

THALES

Souriau au Colloque de Strasbourg 1953

La présentation de Souriau en 1953 à Strasbourg était divisée en trois parties.

- **Dans la première partie**, Souriau a défini un espace vectoriel de forme bilinéaire symétrique et l'espace vectoriel de forme bilinéaire antisymétrique. L'accent de son travail était sur l'espace vectoriel avec une forme bilinéaire asymétrique. **Si l'espace vectoriel est équipé d'une forme bilinéaire antisymétrique, c'est un espace vectoriel symplectique**. Sur l'espace vectoriel symplectique, Souriau a classé les sous-espaces isotrope, coisotrope, symplectique et lagrangien dans lesquels le complémentaire est un espace vectoriel orthogonal.
  - « **Le cas du produit scalaire antisymétrique,[…], correspond à la géométrie SYMPLECTIQUE** »
- **Dans la deuxième partie, Souriau a présenté ce qu'il a appelé la géométrie symplectique différentielle**. Souriau a défini ici le gradient symplectique d'une fonction. Il a étudié les sous-variétés lagrangiennes contenues dans les hypersurfaces d'un espace symplectique. A la fin de la seconde partie il en déduit une nouvelle méthode de résolution des équations aux dérivées partielles du premier ordre généralisant la méthode de Jacobi.
- **Dans la troisième partie**, Souriau traite **des applications de la géométrie symplectique à la mécanique classique**. Il a appliqué la nouvelle méthode de résolution des équations aux dérivées partielles du premier ordre au calcul des variations, ce qui donne une méthode pratique pour trouver les extrêmes

La genèse Carthaginoise: Les travaux à Carthage 1952-1958

Souriau Titres et travaux

- Tous ces faits suggèrent donc que la **préquantification** correspond à une réalité physique ; mais ils ne fournissent pas encore la clef permettant de donner un cadre rigoureux à la Mécanique quantique. Un premier progrès a été accompli en **utilisant <u>la structure appelée aujourd'hui polarisation, que j'avais introduite en 1953</u> pour interpréter le théorème de Jacobi** (réf.(16)). J'ai pu, **grâce à des polarisations, construire à partir des modèles symplectiques les équations d'onde des particules élémentaires libres (Schrödinger, Pauli, Dirac, Maxwell, Yang ; réf.(50))**. Kostant a pour sa part montré que des polarisations permettent de construire les représentations unitaires irréductibles de certains groupes de Lie.

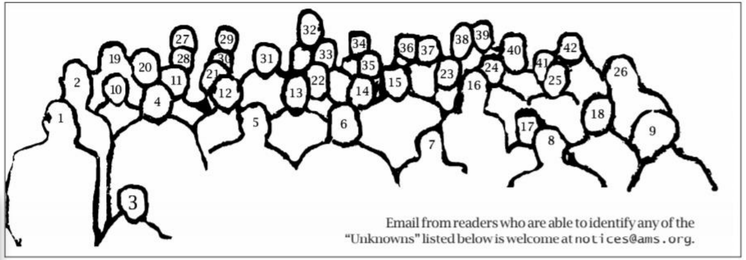
  - [réf.16] Jean-Marie Souriau. **Géométrie symplectique différentielle. Applications**. In Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953, pages 53–59. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953.
  - [réf. 50] Jean-Marie Souriau. Structure des systèmes dynamiques. Maîtrises de mathématiques. Dunod, Paris, 1970.

- En 1956, il fonde avec quelques collègues et ses étudiants le **Colloque International de Théories Variationnelles (CITV)** qui organise chaque année une rencontre informelle entre chercheurs de tous niveaux

Souriau & Koszul à la conférence du 26 mai - 1er juin 1953 « Géométrie différentielle » à Strasbourg

J.L. Koszul

J.M. Souriau



« **Nous nous sommes surtout efforcés de mettre en évidence certaines des voies nouvelles où s'engage notre science. Nous avons voulu aussi que de jeunes mathématiciens puissent mettre en pleine lumière leurs réflexions et leurs résultats** » - Ehresmann & Lichneerowicz 1953, p. 10

Key to photo on page 367.
1. Unknown
2. R. Debever
3. Ehresmann's son
4. Shiing-Shen Chern
5. André Lichnerowicz
6. Charles Ehresmann
7. Paulette Libermann
8. Mario Villa
9. Lucien Godeaux
10. Heinz Hopf
11. Wilhelm Süss
12. Laurent Schwartz
13. Georges de Rham
14. Unknown
15. H. Guggenheimer
16. Thomas Willmore
17. Simone Lemoine
18. B. H. Neumann
19. René Thiry
20. E. T. Davies
21. Unknown
22. Unknown
23. Unknown
24. Unknown
25. Nicolaas Kuiper
26. Beno Eckmann
27. Unknown
28. Jean-Louis Koszul
29. Unknown
30. André Weil
31. René Thom
32. John Milnor
33. Marcel Berger
34. Unknown
35. Bernard Malgrange
36. Daniel Bernard
37. André Aragnol
38. G. Legrand
39. Jean-Marie Souriau
40. Unknown
41. Georges Reeb
42. Unknown

Liste des participants au colloque de Strabourg de 1953

Organisateurs

- **Charles Ehresmann**, University of Strasbourg, France.
- **André Lichnerowicz**, Collège de France.

Participants

- E. Bampiani, Roma, Italy.
- S. S. Chern, Chicago, USA.
- E. T. Davies, Southampton, England.
- P. Dedecker, Brussels, Belgium.
- B. Eckmann, Zürich, Switzerland.
- E. Heinz, Göttingen, Germany.
- N. H. Kuiper, Wageningen, Netherlands.
- H. Rund, Bonn, Germany.
- M. Villa, Bologne, Italy.
- T. J. Willmore, Durham, England.
- **J. L. Koszul**, Strassbourg, France.
- **Paulette Libermann**, Strasbourg, France.
- **G. Reeb**, Grenoble, France.
- L. Schwartz, Paris, France.
- **J. M. Souriau**, Tunis, France.
- **R. Thom**, C.N.R.S., France.
- A. Weil, Chicago, USA.
- A. Aragnal, Paris, France.
- **M. Berger**, Paris, France.
- D Bernard, Paris, France.
- C. de Carvalho, Rio de Janeiro, Brazil.
- C. Chabauty, Strassbourg, France.
- G. Cerf, Strassbourg, France.
- R. Debever, Brussels, Belgium.
- M. Decuyper, Lille, France.
- J. Deny, Strasbourg, France.
- A. Frölicher, Zürich, Switzerland.
- **F. Gallissot**, Grenoble, France.
- L. Godeaux, Liège, Belgium.
- H. Guggenheimer, Bôle, Switzerland.
- R. Guy, Neuchâtel, Switzerland.
- M. Heins, Brown University, USA.
- R. Hermann, Amsterdam, Netherlands.
- H. Hopf, Zürich, Switzerland.
- M. Iss, Strasbourg, France.
- F. Jongmans, Liège, Belgium.
- G. Legrand, Paris, France.
- S. Lemoine, Paris, France.
- J. Loiseau, Paris, France.
- M. Lyra, Sao Paolo, Brazil.
- B. Malgrange, Paris, France
- J. Milnor, Zürich, Switzerland.
- R. Piedvache, Poitiers, France.
- **G. de Rham**, Lausanne, Switzerland.
- M. H. Schwartz, Paris, France.
- H. B. Shutrick, Liverpool, England.
- E. H. Spanier, Chicago, USA
- W. Süss, Freiburg, Germany.
- Y. Thiry, Tunis, France.

Huygens & Souriau

DES PARTICULES AUX ONDES: QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE

J.-M. Souriau

(1) Le formalisme initial de la Mécanique quantique - celui des années 20 - utilise d'une part les *matrices infinies* (Heisenberg) et *l'interprétation probabiliste* associée (Born); d'autre part les *équations d'onde* (Schrödinger).

(1a) Les outils mathématiques associés se généralisent simplement, grâce à l'analyse convexe fonctionelle. Ce qui produit facilement les notions associées: espaces de Hilbert, représentations unitaires des groupes; les lois de probabilités et leurs fonctions caractéristiques; mais ceci dans un cadre élargi: la fonction caractéristique n'est pas nécessairement continue, une loi de probabilité peut par exemple être équipartie sur un réseau infini.

(2) Quoi de commun avec les particules classiques, soumise aux équations de Newton? Les *symétries* d'une part; les *grandeurs conservées* de l'autre.

(2a) *Les symétries:* dans le cas d'un système libre, elles sont engendrées par les translations temporelles, les rotations et les translations spatiales; et aussi les "boosts", qui additionnent une même vitesse à celles de tous les points du système. Ces symétries s'organisent en un groupe de dimension 10, dénommé *groupe de Galilée*.

(2b) Question préable: comment ces symétries agissent-elles sur les grandeurs conservées, telles que l'*énergie*?

L'action d'un boost sur l'énergie a déjà été utilisée par HUYGENS pour l'étude des chocs élastiques *(De motu corporum ex percussione)*; il apparait un terme linéaire et un terme quadratique, qui caractérisent l'*impulsion* et la *masse*, autres grandeurs conservées. De même le boost ajoute au *moment angulaire* un terme linéaire qui caractérise le *barycentre*.

11 grandeurs conservées au total; elles sont les composantes d'un objet géometrique J, le *moment*. Ce moment vit dans le dual Γ^* de l'algèbre de Lie d'un groupe G de dimension 11; G es le *groupe de Bargmann*.

La question posée en général (variance galiléenne du moment) est résolue par l'*action coadjointe* de G sur J; ceci parce que le groupe de Galilée s'identifie au quotient G / centre (G).

Dans le cas d'un point matériel, l'ensemble des mouvements s'identifie ainsi à une *orbite coadjointe* Ω de G.

(3) *Et les ondes?* Sur une fonction d'onde Ψ, solution de l'équation de Schrödinger d'une particule libre, c'est le groupe de Bargmann G qui agit – et non le groupe de Galilée; une intégrale d'espace permet ensuite d'associer à Ψ une *matrice positive* m indexée par les éléments de G, invariante.

La composition avec l'exponentielle (normalisée par la constante $\hbar$) produit une matrice sur l'algèbre de Lie Γ; matrice qui associe à chaque *sous-algèbre abélienne* de Γ une *loi de probabilité sur l'orbite classique* Ω, au sens la ci-dessus (résultat dû à F. Ziegler, 1989; il se caractérise par des inégalités limitatives des relations d'incertitude de Heisenberg). Loi de probabilité qui fournit le *spectre* de chaque *observable*, la *mesure spectrale* de chaque *observation maximale*. Ce n'est donc pas l'onde qui est indispensable à l'interprétation de la mécanique quantique, la matrice m suffit.

(4) Il est donc naturel de généraliser de la façon suivante; un système dynamique sera alors défini par un groupe G – éventuellement de dimension infinie (extension centrale du groupe de Poincaré ou groupe de jauge, par exemple); et par une orbite coadjointe Ω, dont les points sont les "mouvements classique".

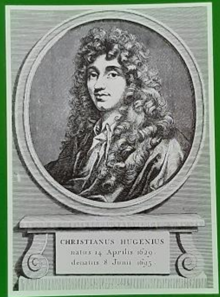
On postule l'existence d'un *"état quantique"* m – matrice positive invariante sur G ayant la propriété d'associer à chaque sous-groupe abélien connexe une loi de probabilité sur Ω. Alors il existe *beaucoup d'états quantiques* – un convexe compact, soumis à une action convexe de G, dont les points extrémaux s'organisent en some de projectifs hilbertiens.

Dans le cas d'une particule libre, on obtient, outre les états de Schrödinger, les *ondes planes*, et aussi les *états de Gibbs* qui ne sont plu décrits par une onde *(états mélangés)*.

Chaque état quantique m est associé à un vecteur d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; $\mathcal{H}$ est espace de représentation unitaire de G, et plu généralement d'un *surgroupe* de G, constitué des *automorphismes* de m – ce qui fournit en particulier un cadre convenable pour le principe de Pauli.

HUYGEN'S PRINCIPLE 1690-1990: THEORY AND APPLICATIONS

November 19 - 22, 1990
The Netherlands



Copyright Museum Boerhaave, Leiden

Complete programme,
including summaries of invited lectures,
list of poster contributions

Souriau, J.M., Jean-Marie Souriau. Des principes géométriques pour la mécanique quantique. Act. Acad. Sc. Taurin, 124 (Suppl.):296–306. Exposé au colloque du Collège de France : ”La Mécanique Analytique de Lagrange et son héritage” (1990)

Des principes géométriques pour la mécanique quantique

Jean-Marie SOURIAU

Avertissement. *Comme l'on fait remarquer Landau et Lifchitz, les rapports entre la mécanique quantique et la mécanique classique sont d'un type très particulier: elles coexistent au lieu de se succéder.*

Toute analyse de la structure quantique est nécessairement double; en particulier l'analyse géométrique.

On évitera toute ambiguité en mettant dans la première partie, «classique», *tout ce qui peut s'y mettre. En particulier l'étude des symétries; et aussi, on le verra, le rôle de la constante de Planck.*

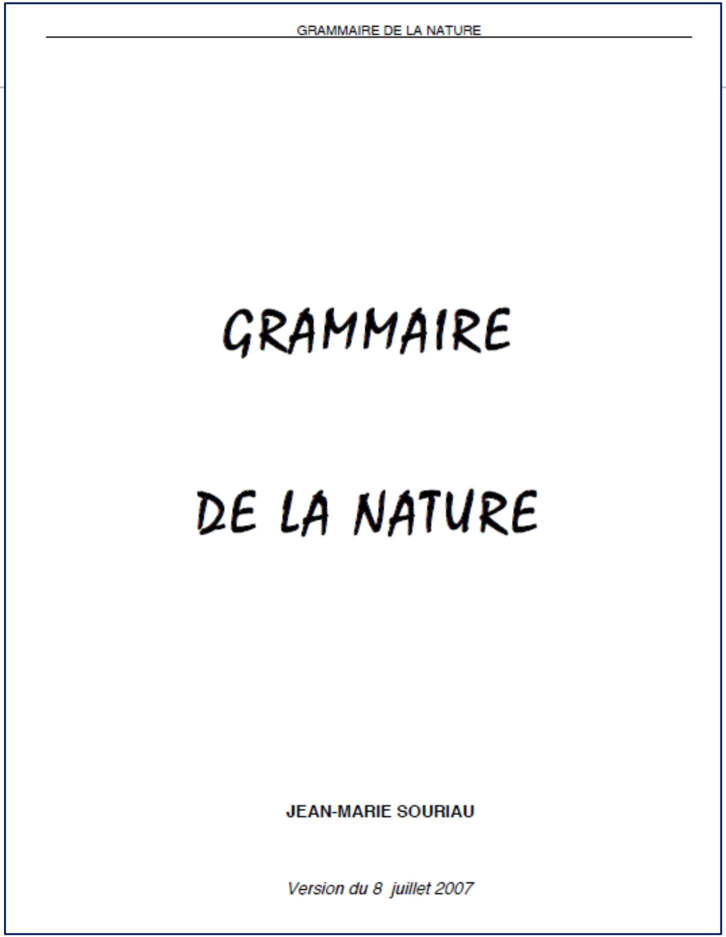
Alors deux structures géométriques définies «classiquement» (préquantification, groupe générateur) *permettent de déterminer ce que sont sont les* «états quantiques»: *les solutions d'un certain système d'inégalités.*

En ce sens donc, on réalise le programme de la quantification géométrique. *Quelques exemples montrent qu'on retrouve bien ainsi les structures quantiques habituelles* — dans tous leurs détails.

Mais le choix et l'existence même d'un groupe générateur possédant des états quantiques posent au physicien un problème nouveau pour chaque système concret; problème qui n'est résolu ici que dans quelques cas.

La Grammaire de la Nature

- Jean-Marie Souriau, "La Grammaire de la Nature", 2007, http://www.jmsouriau.com/Publications/Grammaire%20de%20la%20Nature/JMSouriau-GrammaireDeLaNature8juillet2007-complet.pdf


GRAMMAIRE DE LA NATURE

GRAMMAIRE

DE LA NATURE

JEAN-MARIE SOURIAU

Version du 8 juillet 2007

Grammaire de la Nature

GRAMMAIRE DE LA NATURE

GRAMMAIRE

DE LA NATURE

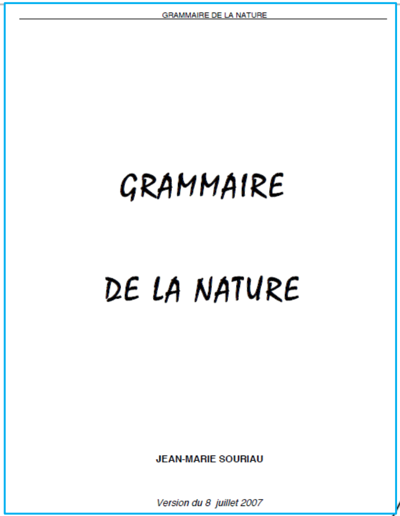
JEAN-MARIE SOURIAU

Version du 8 juillet 2007

Grammaire de la Nature

Non, la physique ne triomphe pas ; elle avance à tâtons,
voilant délibérément ses échecs et ses reniements,
Impasses, retours en arrière…
Comment progresser dans ce labyrinthe ?

…Jeunes loups de la pensée
Sur les sentiers de la science
Votre flair vous guidera !

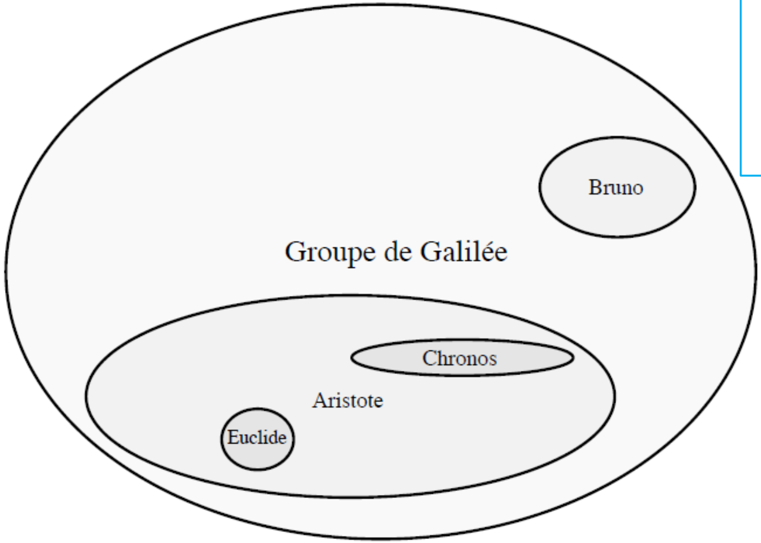

GRAMMAIRE DE LA NATURE

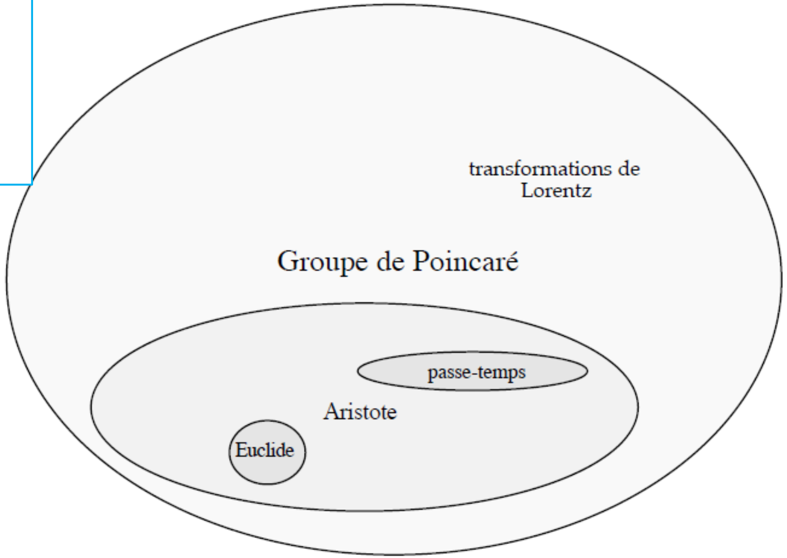
GRAMMAIRE

DE LA NATURE

JEAN-MARIE SOURIAU

Version du 8 juillet 2007





THALES

Séminaire MAMUPHI
Avril 2023, IRCAM, sale Shannon

MAMUPHI
mathématiques - musique – philosophie

MAMUPHI

CNRS CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

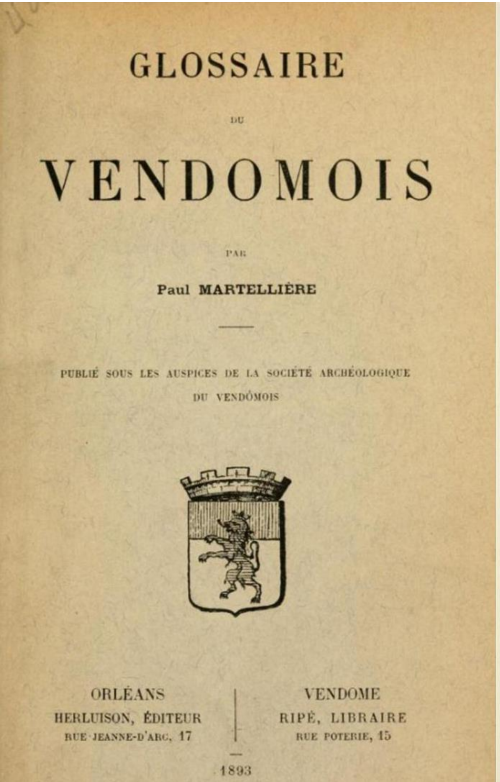
Les Souriau et le triptyque « esthétisme » , « mouvement » et « structure »

OPEN

Racine du nom SOURIAU

Racine du nom « Souriau »

- Petite souris (souriceau) dans « le Perche »



GLOSSAIRE

DU

VENDOMOIS

PAR

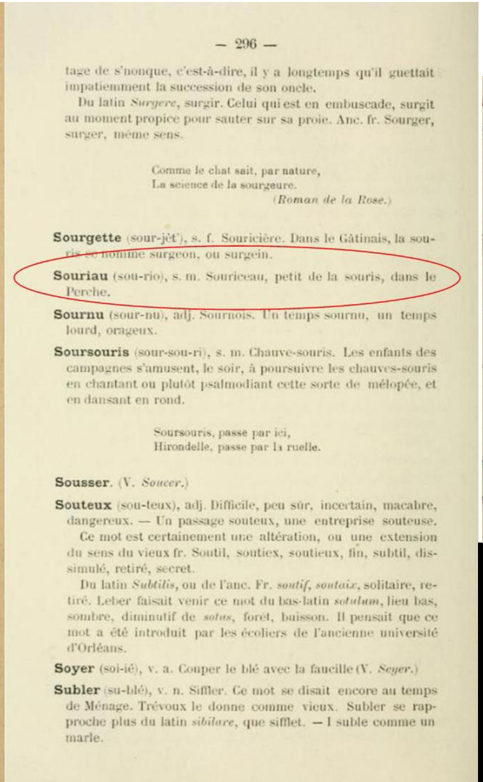
Paul MARTELLIÈRE

PUBLIÉ SOUS LES AUSPICES DE LA SOCIÉTÉ ARCHÉOLOGIQUE DU VENDÔMOIS

ORLÉANS
HERLUISON, ÉDITEUR
RUE JEANNE-D'ARC, 17

VENDOME
RIPÉ, LIBRAIRE
RUE POTERIE, 15

1893



— 296 —

tage de s'nonque, c'est-à-dire, il y a longtemps qu'il guettait impatiemment la succession de son oncle.

Du latin *Surgere*, surgir. Celui qui est en embuscade, surgit au moment propice pour sauter sur sa proie. Anc. fr. Sourger, surger, même sens.

Comme le chat sait, par nature,
La science de la sourgeure.
(*Roman de la Rose.*)

Sourgette (sour-jèt'), s. f. Souricière. Dans le Gâtinais, la souris se nomme surgeon, ou surgein.

Souriau (sou-rio), s. m. Souriceau, petit de la souris, dans le Perche.

Sournu (sour-nu), adj. Sournois. Un temps sournu, un temps lourd, orageux.

Soursouris (sour-sou-ri), s. m. Chauve-souris. Les enfants des campagnes s'amusent, le soir, à poursuivre les chauves-souris en chantant ou plutôt psalmodiant cette sorte de mélopée, et en dansant en rond.

Soursouris, passe par ici,
Hirondelle, passe par la ruelle.

Sousser. (V. *Soucer.*)

Souteux (sou-teux), adj. Difficile, peu sûr, incertain, macabre, dangereux. — Un passage souteux, une entreprise souteuse.

Ce mot est certainement une altération, ou une extension du sens du vieux fr. Soutil, soutiex, soutieux, fin, subtil, dissimulé, retiré, secret.

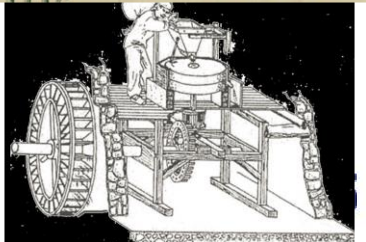
Du latin *Subtilis*, ou de l'anc. Fr. *soutif*, *soutaix*, solitaire, retiré. Leber faisait venir ce mot du bas-latin *sotulum*, lieu bas, sombre, diminutif de *sotus*, forêt, buisson. Il pensait que ce mot a été introduit par les écoliers de l'ancienne université d'Orléans.

Soyer (soi-ié), v. a. Couper le blé avec la faucille (V. *Seyer.*)

Subler (su-blé), v. n. Siffler. Ce mot se disait encore au temps de Ménage. Trévoux le donne comme vieux. Subler se rapproche plus du latin *sibilare*, que sifflet. — I suble comme un marle.

Famille SOURIAU

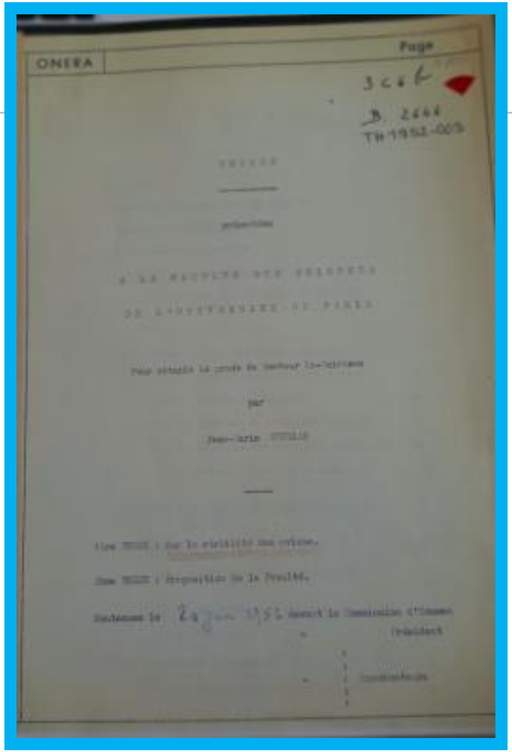
- Dans le « Vendomois », les SOURIAU de 1490 à 1819 étaient tous "Maistres" Laboureurs ou "Maistres" Meuniers



Biographie Jean-Marie Souriau

Curriculum Vitae

- 1932-1942 Lycée de Nancy, Nîmes, Grenoble, Versailles
- 1942 Elève de l'Ecole Normale Supérieure
- 1944 Volontaire de l'armée française
- 1946 Professeur agrégé de mathématiques
- 1946 Attaché de Recherche au CNRS
- 1947-1952 Ingénieur, puis chef de groupe de recherche à l'ONERA
- 1952 Docteur en Sciences (Thèse ONERA 20 juin 1952 : Sur la Stabilité des avions)
- 1952-1958 Maître de Conférences, puis Professeur à l'Institut des Hautes Études (il a vécu exactement à Carthage)
- A partir de 1958 Professeur à l'Université d'Aix-Marseille
- 1978-1985 Directeur du Centre de Physique Théorique de Marseille
- Professeur de Mathématiques à l'Université de Provence (Aix-Marseille I) ; classe exceptionnelle, 2e classe.
- Directeur au Centre de Physique Théorique de Marseille (laboratoire propre au CNRS) équipes de recherche : Mécanique théorique, Géométrie et quantification, Astronomie et cosmologie.



Jean-Marie Souriau @ ENS Ulm 1942

Jean-Marie Souriau

- Structure des systèmes dynamiques

Jacques Dixmier

- Algèbres enveloppantes

René Deheuvels

- Formes quadratiques et groupes classiques
- Tenseurs et spineurs

1937 Cours d'Elie Cartan àl'ENS Ulm au séminaire Julia:
La Structure des groupes infinis – Souriau dit avoir suivi des cours de Elie Cartan

IV.- G.

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-1937

Les TRAVAUX de M. ELIE CARTAN

La STRUCTURE des GROUPES INFINIS

Exposé fait par M. Elie CARTAN, le lundi 1er Mars 1937

Exemplaire n° 3

IV.- H.

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-1937

Les TRAVAUX de M. ELIE CARTAN

La STRUCTURE des GROUPES INFINIS
(suite)

Exposé fait par M. Elie CARTAN, le lundi 15 Mars 1937

Exemplaire n° 3

Colloque Elie Cartan 1984, Lyon

INTRODUCTION

Le séminaire conjoint NSF–CNRS "Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui" s'est tenu du 25 au 29 juin à l'Université de Lyon I. Il était centré sur la présentation de thèmes importants de la recherche actuelle en mathématiques et en physique mathématique dans des domaines où Élie CARTAN a joué un rôle de pionnier. Des discussions très animées ont eu lieu à propos de ces thèmes. La partie centrale du programme comprenait vingt-deux conférences qui ont été suivies par un public nombreux et enthousiaste de plus de deux cents mathématiciens et physiciens mathématiciens venus d'au moins dix-sept pays. Les conférences se sont tenues dans le grand amphithéâtre de mathématiques de l'Université de Lyon I, la salle Camille Jordan.

Ce volume regroupe les contributions écrites des conférenciers à l'exception de trois d'entre eux. Nous publions en annexe les résumés que ces auteurs ont bien voulu nous communiquer.

Le programme du séminaire avait été préparé par un Comité Scientifique sous la co-présidence de Shing-shen CHERN et d'Henri CARTAN. Les détails pratiques pour l'organisation du séminaire ont été réglés par un Comité mis sur pied par le Département de mathématiques de l'Université de Lyon I, sous la responsabilité d'Edmond COMBET. L'organisation a été très efficace et a créé une atmosphère dans laquelle la communication mathématique était stimulée. Le professeur GELFAND a reçu un diplôme de docteur honoris causa de l'Université de Lyon I lors de la séance de clôture du séminaire. Sa participation au séminaire, la participation simultanée de trois mathématiciens soviétiques émigrés parmi les plus éminents (Victor KAC du Massachusetts Institute of Technology de Boston, U.S.A., Ilya PIATETSKII-SHAPIRO de Tel-Aviv et Mikhail GROMOV de l'Institut des Hautes Études Scientifiques de Bures-sur-Yvette) ainsi que celle du physicien mathématicien polonais Andrzej TRAUTMAN de Varsovie ont élevé le séminaire au-delà du niveau d'une rencontre entre les écoles américaine et française à celui d'un événement mathématique réellement international.

Le séminaire n'a été rendu possible que par le soutien de la National Science Foundation, du Centre National de la Recherche Scientifique, de l'American Mathematical Society et de la Société mathématique de France, ainsi que celui de l'Université Claude-Bernard (Lyon I), des villes de Lyon et Villeurbanne et du conseil général du Rhône. Nous espérons que ces institutions trouveront dans ce volume une preuve concrète du bien-fondé de leur effort!

Special Issue in Astérisque en 1984 :

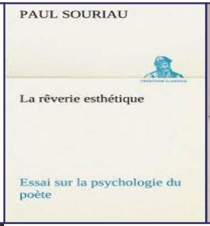
Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui

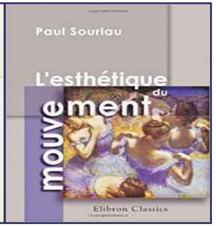
proceedings of ENS Lyon Colloquium from 25th to 29th June 1984 (200 attendees from Mathematics & Physics) .

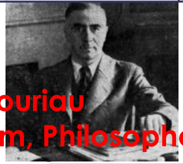
Among Speakers: **Jean-Louis Koszul et Jean-Marie Souriau**

OPEN

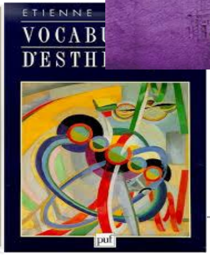
Généalogie des Souriau: « Esprits raffinés »







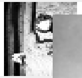
Paul Souriau
ENS Ulm, Philosophe



Pierre -Alexandre
SOURIAU
1815 – 1898

Maurice Souriau
Histoire de la littérature
4 prix de l'Académie Française

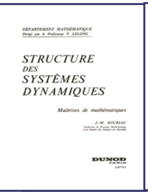
Paul
SOURIAU
1852-1926

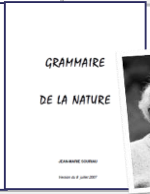


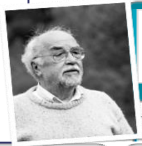
Marcelle Franço…
…51

Etienne Souriau
ENS Ulm, Philosophe,
1er à l'agrégation,
Professeur en Sorbonne

Maurice
SOURIAU
1856 – 1943







Michel
SOURIAU
1891-1986

Marthe
CHARVET
1901-1991

Etienne
SOURIAU
1892-1979

Jeanne
SOURIAU
ca 1896-

Michel Souriau
ENS Ulm, Philosophe

Jean-Marie
SOURIAU
1922-2012

François
SOURIAU
ca 1928-1969

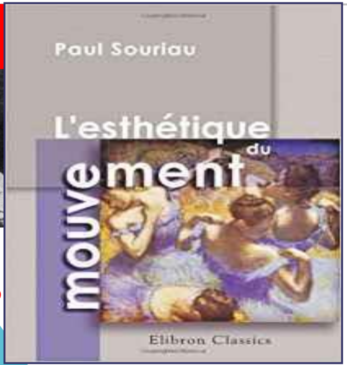
Marc
SOURIAU

Pierre
SOURIAU
†1994

ENS Ulm, 2nd à l'agrégation de physique

L’Esthétisme de la structure du mouvement
par 3 générations de normaliens

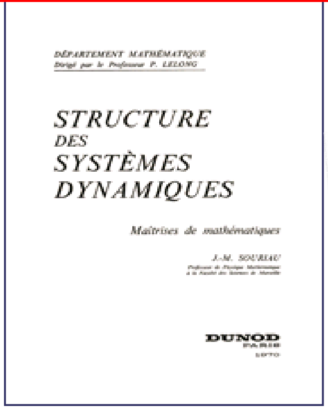
Esthétisme du mouvement

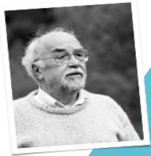


Paul Souriau
ENS Ulm 1873

L’Esthétisme de la structure du mouvement

Structure du mouvement



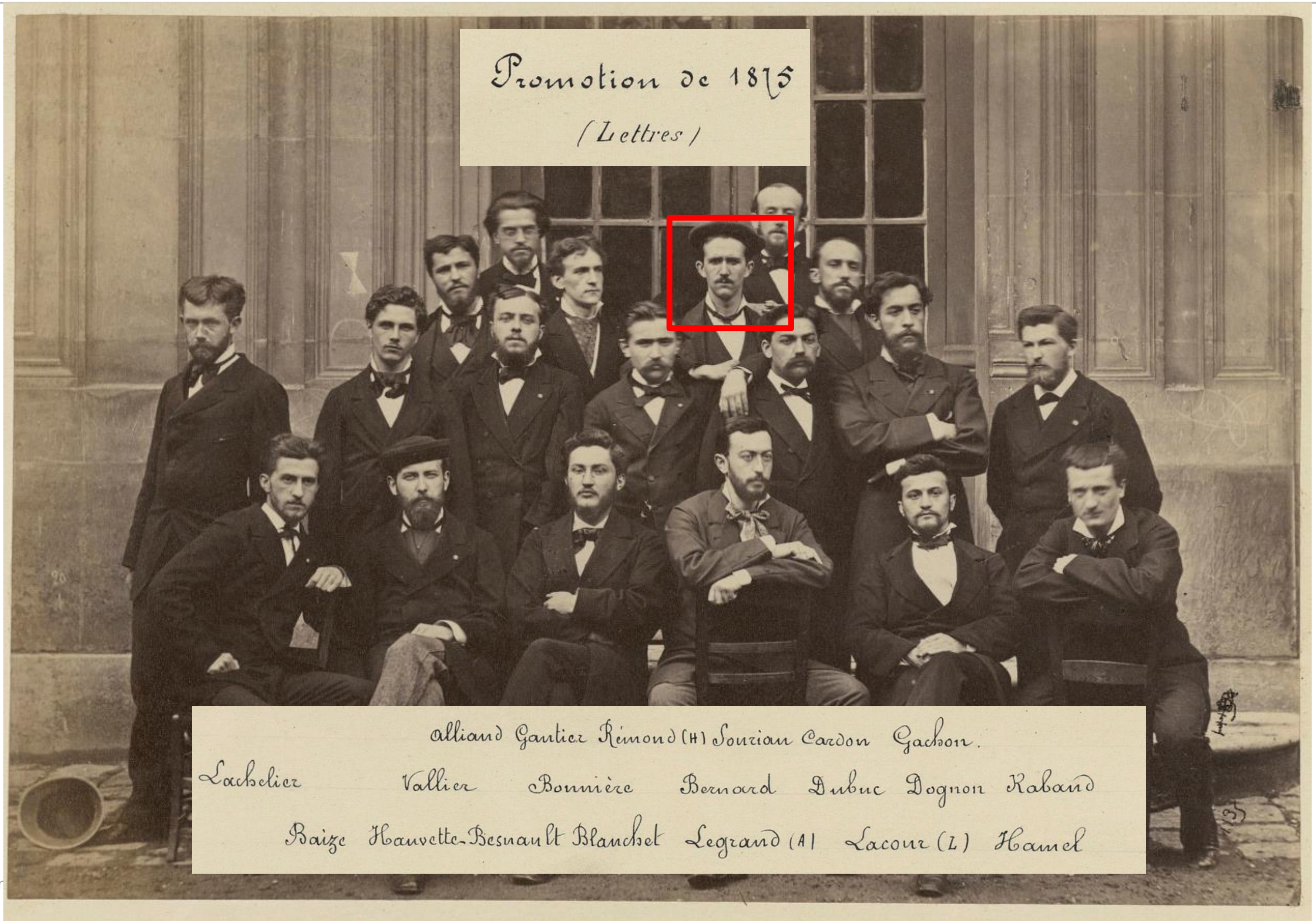


Jean-Marie Souriau
ENS Ulm 1942

Structure de l’Esthétisme

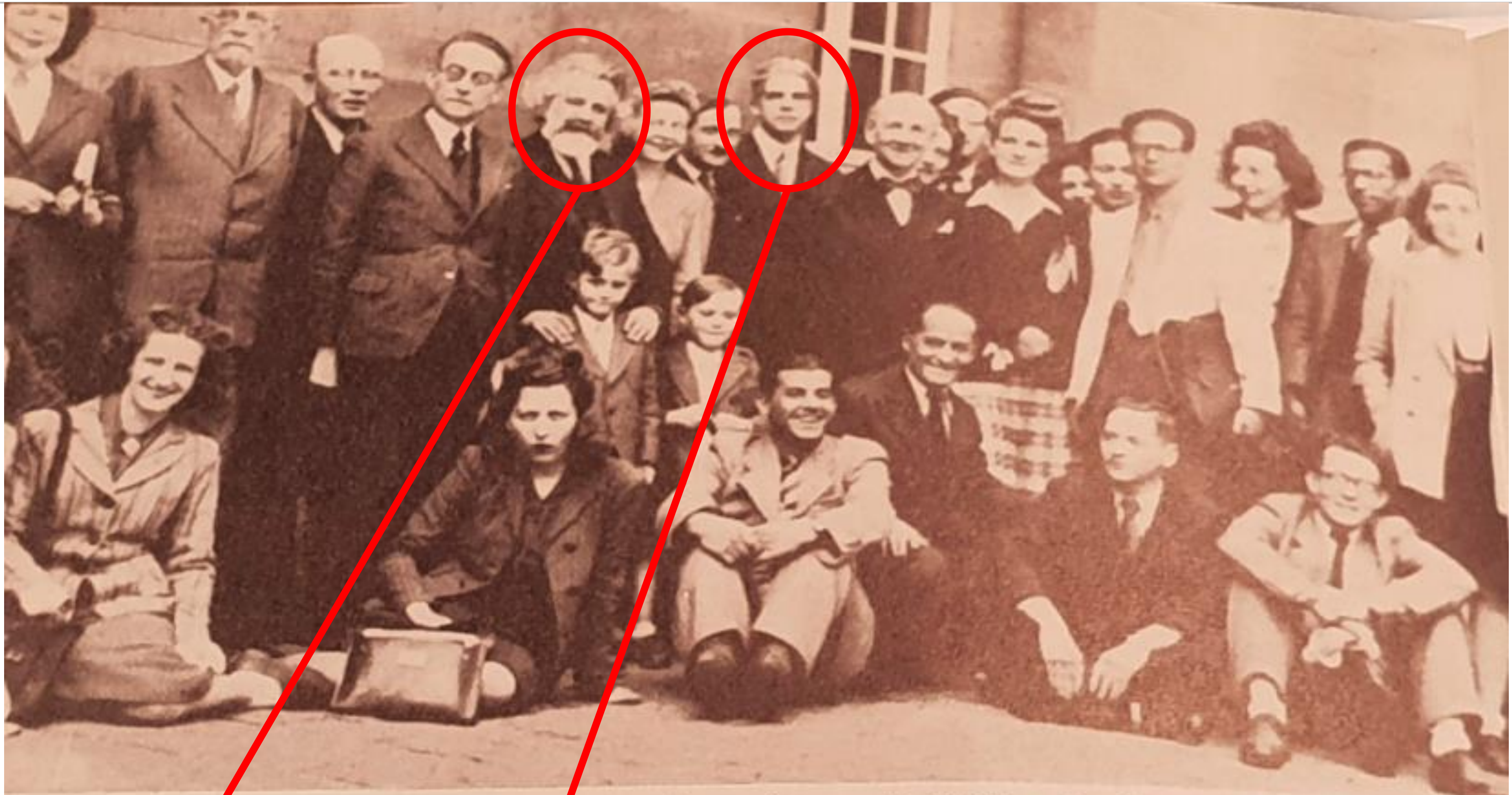
Etienne Souriau
ENS Ulm 1912

Paul Souriau (Grand père), ENS Lettres promotion 1875



Sér

Etienne Souriau (Oncle) & Gaston Bachelard en Sorbonne

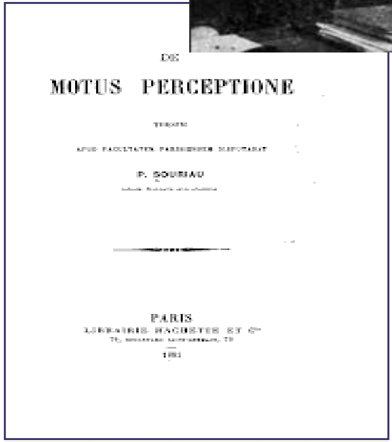


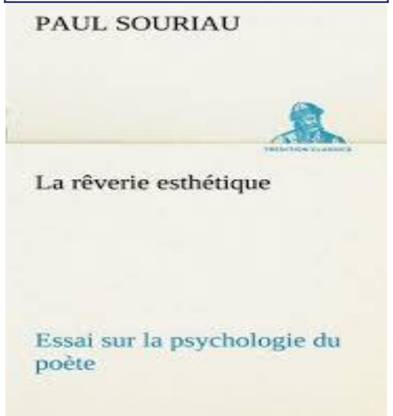
Dans la cour de la Sorbonne en 1944 : les professeurs E. Bréhier, P. Mouy, R. Bayer, G. Bachelard, H. Gouhier, E. Souriau, J. Laporte et P. Romeu, bibliothécaire (de g. à d.).

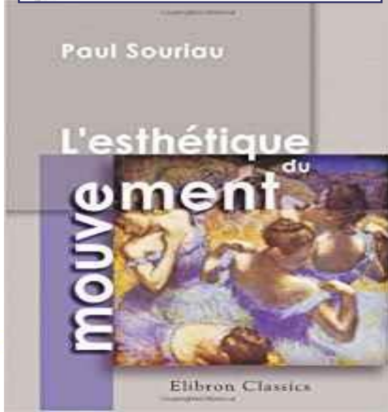
Paul Adolphe Souriau (Philosophe)

Paul Adolphe Souriau (Philosophe)

- Paul Adolphe Souriau, né le 21 octobre 1852 à Douai, et, mort le 21 juin 1926 à Nancy, est un philosophe français connu pour ses travaux sur la théorie de l'invention et l'esthétique.
- Scolarité au lycée de Douai ; baccalauréat ès lettres ; collège Sainte-Barbe à Paris et cours au lycée Louis-le-Grand
- 1873 Elève de l'Ecole Normale supérieure. - 1876 Agrégé de philosophie. - 1876-1881 Professeur de philosophie au lycée de Pau et d'Angers. - 1881 Docteur en philosophie. Première thèse qui n'est pas autorisée à être soutenue en Sorbonne : Essai sur le raisonnement (influence de Spencer, « idées entachées de matérialisme »)
- Il effectua ses études doctorales à l'École Normale Supérieure où il composa sa thèse titrée « Théorie de l'invention », publiée en 1881.
- Simultanément à sa thèse française, il écrit aussi une thèse latine titrée « De motus perceptione ». Cette thèse latine visait à déterminer l'importance de la vision pour la perception des mouvements. Le titre initial de la thèse était « De visione motus ». La thèse était un précurseur à ses futurs travaux sur la perception du mouvement.
- En 1889, il publie ses réflexions sur l'esthétique du mouvement. Le livre décrit deux niveaux d'esthétique du mouvement: la beauté mécanique (l'adaptation du mouvement à remplir son but) et l'expression du mouvement (la signification que le mouvement communique à un observateur extérieur). Ce faisant, Paul Souriau distingue le mouvement de la perception du mouvement, des concepts qui deviendront plus tard le sujet de la cognition motrice et de la psychophysique. L'Esthétique du mouvement, Paris, Félix Alcan, coll. «Bibliothèque de philosophie contemporaine» (1889)
- Paul Souriau publie ses réflexions sur l'esthétique des arts
- Principaux ouvrages : Théorie de l'invention (1882) ; L'Esthétique du mouvement (1889) ; La suggestion dans l'art (1893) ; L'imagination de l'artiste (1901) ; La beauté rationnelle (1904) ; La rêverie esthétique (1906) ; Les conditions du bonheur (1908) ; Traité de la beauté fonctionnel- le (1910) ; L'esthétique de la lumière (1913) ; L'entraînement au courage (1926). Écriture d'une douzaine de contes pour enfants (Les aventures de Mistigri ; La plume noire). Nombreux articles dans Revue de Paris, L'Année psychologique, Revue philosophique.







L'esthétique du mouvement

TABLE DES MATIÈRES

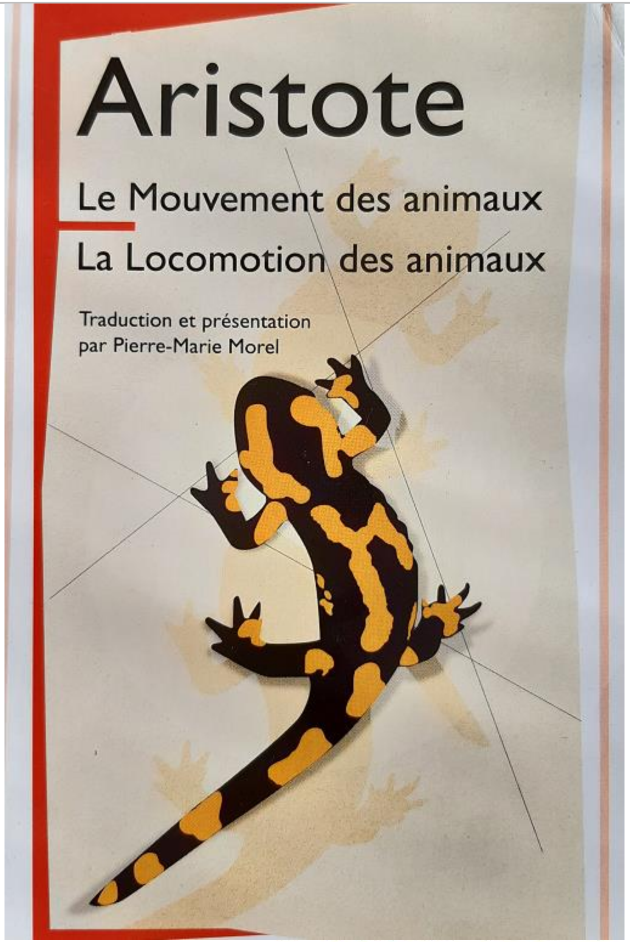
L'esthétique du mouvement

OPEN

THALES

L'esthétique du mouvement

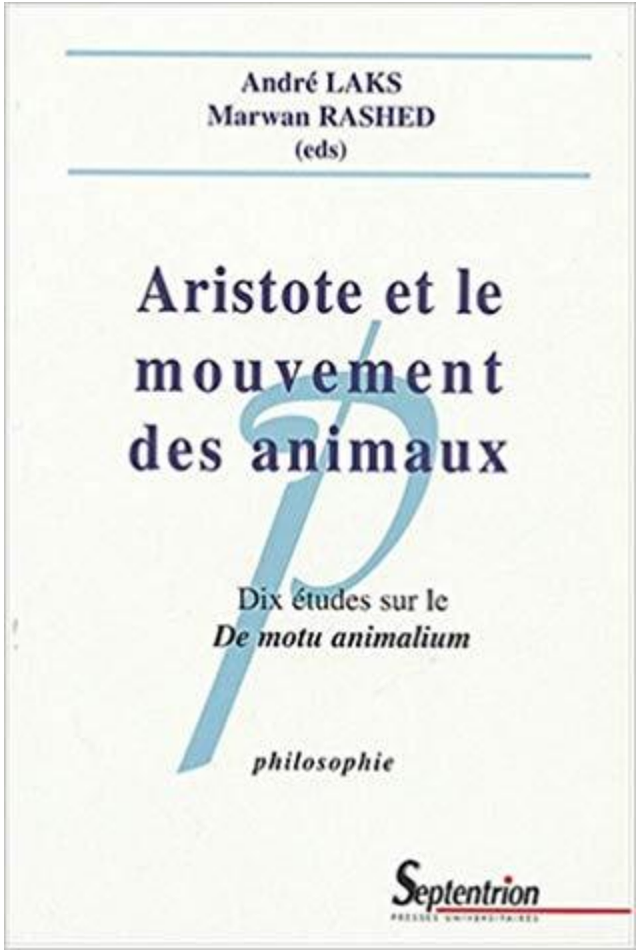
TABLE DES MATIÈRES 331



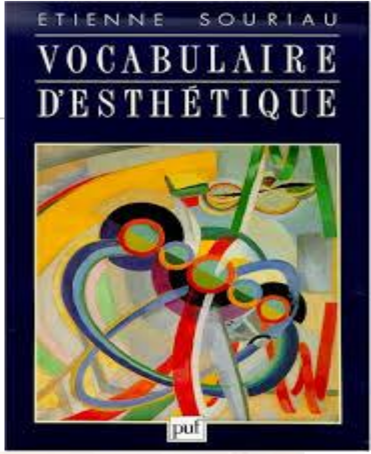
Aristote « De motu animalium »

De motu animalium: contribution à l'analyse de la théorie aristotélicienne du premier moteur

- « le mouvement de l'univers et le mouvement des animaux, en dépit de leurs différences, se trouvent rassemblés dans une seule catégorie commune», à savoir l' auto-motricité, avec le double renvoi, dans chacun des deux cas, à un **principe immobile interne et un principe immobile externe**.
- Bekker, S. F. estime qu'il ne convient pas d'envisager le **De motu** comme un traité de zoologie ou de biologie, qui ferait alors du monde un vivant d'un type particulier, mais plutôt de le considérer comme reprenant dans toute sa généralité un argument sur le **principe du mouvement** (**auto-motricité, l'immobilité ultime du moteur**), valable et pour les animaux, et pour le monde, pris comme deux espèces différentes d'étants.



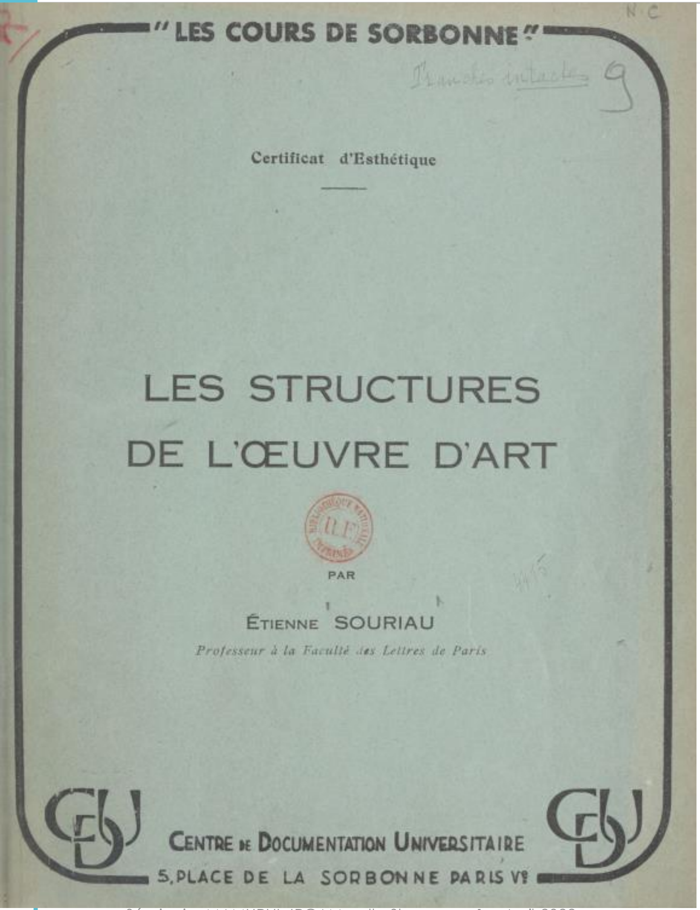
Etienne Souriau (Philosophe)



Etienne Souriau (Philosophe)

- Étienne Souriau, né le 26 avril 1892 à Lille, et, mort le 19 novembre 1979 dans le 6e arrondissement de Paris, est un philosophe français, spécialisé en esthétique. Il est le fils du philosophe Paul Souriau.
- Souriau est entré à l'École normale supérieure en 1912.
- Reçu premier à l'agrégation de philosophie en 1920, il enseigne aux lycées de Sarreguemines puis de Chartres.
- Il est reçu docteur ès-lettres en 1925 (mention Très Honorable), avec une thèse « Pensée vivante et perfection formelle » agrémentée d'une thèse complémentaire « L'Abstraction sentimentale ». I
- I devient Professeur à l'Université d'Aix-en-Provence (1925-1929) puis à Lyon (1929-1941), enfin à l'Université de Paris - la Sorbonne.
- En 1939, Souriau publie aux éditions Félix Alcan L'Instauration philosophique et pose les fondements de sa pensée instauratrice. Il y développe l'idée d'une philosophie esthétique des propositions philosophiques qu'il nomme « philosophèmes ».
- En 1947, Souriau publie chez Flammarion La Correspondance des arts, qui se propose de définir l'architectonique des lois et d'organiser le vocabulaire commun aux œuvres d'art par delà les disciplines artistiques. Dans cet ouvrage, il détaille son « Système des Beaux arts » selon les deux modes d'existence : Phénoménale et « réique » (ou « chosale »). Dans ce dernier mode d'existence, il distingue les arts présentatifs des arts représentatifs.
- il a été le président de la Société française d'esthétique, le directeur de la Revue d'esthétique, et le président du Comité international pour les Études d'esthétique
- En 1958, il est élu membre de l'Académie des sciences morales et politiques par un comité dans lequel figure Charles de Gaulle. Il sera le directeur de la thèse du cinéaste Éric Rohmer
- Vocabulaire d'esthétique, avec Anne Souriau, PUF, 1990

Etienne Souriau: Les structures de l'œuvre d'art


"LES COURS DE SORBONNE"

Tranches intactes 9

Certificat d'Esthétique

LES STRUCTURES DE L'ŒUVRE D'ART

PAR

ÉTIENNE SOURIAU

Professeur à la Faculté des Lettres de Paris

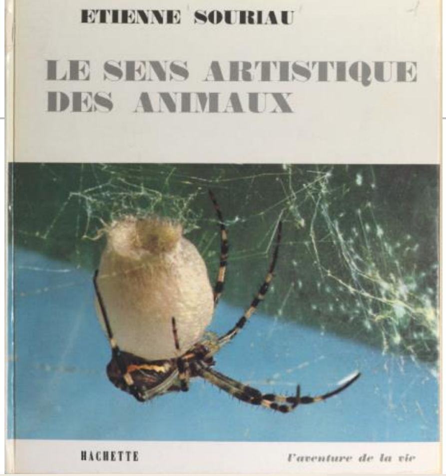
CDU

CENTRE DE DOCUMENTATION UNIVERSITAIRE

5, PLACE DE LA SORBONNE PARIS V^e

Il y a là toute une espèce de matérialité chimique de la chose qui fait par exemple que nous ne pouvons pas comprendre la céramique persane si nous ne savons pas que ces gens-là ne disposaient que d'un petit nombre de couleurs, et que la puissance du feu était en même temps une chose terrible qui n'a jamais été maitrisée complètement jusqu'à des temps très récents par les arts du feu. De même encore, pensons à toutes ces racines dans le monde physique, même pour les arts en apparence les plus spirituels. Il est trop commode de dire que la musique, c'est l'âme qui parle directement à l'âme. Cela n'empêche pas que si nous regardons comment on fait la musique, nous voyons par exemple quelqu'un qui tient du crin de cheval frotté de résine et retenu par un arc en bois de fer, et qui frotte avec cela du boyau de chat sur une caisse en bois blanc verni. Il y a là une sorte de machinerie concrète destinée à produire cet ébranlement rythmique de l'air qui fait le corps physique de la musique. L'air ébranlé dans certains tubes ne peut nous donner que certaines notes. Evidemment tous les musiciens souhaiteraient que le cor en ut puisse donner un fa dièse qui soit juste et un si bémol qui ne soit pas si près du si bécarre. C'est là une nécessité physique, et on y peut rien. Il y a là toute une masse de lois qui sont simplement les lois de la vibration, qui imposent des règles, des formes, des structures sur lesquelles la musique est obligée de se bâtir, ne pouvant pas arriver à s'en affranchir et cherchant simplement à en faire le meilleur usage possible. Et s'il s'agissait de l'art de la danse par exemple, la pauvre matérialité du corps humain avec ses articulations qui tournent si peu, la force musculaire qui permet des bonds si petits, fait qu'en réalité la danse est une sorte de reptation au sol qui tâche de donner l'impression d'un envol. Le plus brillant danseur n'élève pas sans aide son centre de gravité de plus de cinquante centimètres dans le bond le plus merveilleux. Tout le reste est illusion. C'est avec ce corps humain tel qu'il est fait, qui est la matière vivante de cet art qu'il faut arriver à faire du rêve, toutes sortes de musiques du mouvement, et ainsi de suite.

Etienne Souriau



1 LE STYLE DE LA NATURE

Étudier le sens artistique des animaux ne va pas sans difficultés. Sur le seuil de ce domaine plein de faits intéressants, et importants même pour l'homme, deux préjugés montent la garde.

L'un de ces préjugés — tout naturel au pays de Descartes — c'est le goût de préférer aux animaux tels qu'ils vivent d'illusoires animaux-machines ; goût que la science animalière d'il y a une soixantaine d'années a grandement renforcé, du temps où on espérait tout expliquer dans les activités animales par des tropismes et des réflexes. La science de nos jours a ouvert de nouveau beaucoup plus largement l'éventail des faits psychiques qu'une observation rigoureuse détecte chez les animaux.

De cette époque, dont il faut louer l'esprit de rigueur mais dont il faut dépasser le simplisme spéculatif, il nous reste un avertissement qui fut utile et qui reste valable : lorsque des comportements d'animaux ressemblent extérieurement beaucoup à des actions humaines, gardons-nous de supposer chez l'animal, par une analogie tout imaginative, les pensées qu'ont les hommes en des cas apparemment semblables.

La pensée de l'animal, et surtout des animaux qui, par leur organisation, s'éloignent profondément des hommes, est bien peu comparable à celle de l'homme, et nous est même difficilement concevable. Le monde que voit une araignée avec ses sept yeux, du haut de sa toile, ou celui d'une chauve-souris voletant agilement dans une ténébreuse caverne en se guidant par les ultrasons, est un monde dont nous ne saurions avoir nulle intuition directe. Et pensons à cette mère oiseau : on a, pendant son absence, mis hors du nid mais tout près de celui-ci ses petits à peine éclos et ayant encore besoin de la chaleur de ses ailes. Or, à son retour, elle se met à couver le nid vide, plutôt que ses petits qui sont pourtant sous ses yeux. Elle fait preuve à l'état de veille d'une sorte d'obscurité mentale dont nous ne trouverions chez nous l'équivalent que dans les ténèbres d'un semi-sommeil ou d'une intoxication grave. Même pas, car la mère humaine profondément assoupie qui ne trouverait pas son enfant dans le berceau vers lequel elle tend une main endormie se réveillerait aussitôt. L'oiseau ne peut pas se réveiller de l'assoupissement mental qui est son état le plus lucide.

Que cela soit donc entendu : nous ne cesserons de nous mettre en garde (au point, peut-être, d'en impatienter certains lecteurs) contre toute tendance à trop présumer de la pensée animale ; et à lui accorder sans bonnes garanties des possibilités mentales ou des sensibilités dépassant le niveau que lui prêtent les observateurs les plus sévères.

Cela ne veut pas dire qu'il faille mettre un abîme entre le psychisme de l'animal et celui de l'homme. S'il faut se garder de tout anthropomorphisme en étudiant l'animal, il n'est pas mauvais de faire parfois un peu de zoomorphisme en étudiant l'homme, dont bien souvent on exagère (je dis les psychologues même) la lucidité et le pouvoir de raisonner.

Le second préjugé, c'est de penser que l'art, fleur du génie humain, est une chose trop noble et trop pure pour qu'on ose le compromettre jusqu'à lui trouver des racines dans l'animalité. Préjugé que vient encore renforcer un certain *artificialisme* esthétique, ancien déjà : ses meilleurs représentants sont Baudelaire, et Des Esseintes, héros du Huysmans première manière. Bien qu'assez marqué par l'âge (il est du XIX^{e} siècle) cet artificialisme a encore des défenseurs. « Régler son compte à la nature » fut une préoccupation d'un excellent poète, mort il y a quelques années à peine, et très dédaigneux de toute esthéticité animale.

Mais vraiment est-ce blasphémer de penser que l'art a des assises cosmiques et qu'on trouve dans la nature de grands pouvoirs instaurateurs dont il est congénère ? Assurément non. C'est ce dont on est vite convaincu, sitôt qu'on fait l'effort de situer dans l'ensemble de la nature l'instinct artistique des animaux. Et c'est cet effort qu'il nous faut faire d'abord.

Le fait esthétique est abondamment présent dans la nature, dont bien des aspects apportent à un esprit humain normal un émerveillement dont les causes extérieures sont des qualités objectives et réelles des choses ; qualités à la connaissance desquelles cet émerveillement nous introduit.

A première vue, pourtant, et surtout pour les esprits qui ont un peu de peine à bien concevoir la réalité et l'objectivité du fait esthétique, il semble que ce fait soit une sorte de luxe, un surcroît qui s'ajoute à ce qui fait la vraie consistance positive des phénomènes naturels.

Dans cet esprit, on dira par exemple (et cela sera vrai jusqu'à un certain point) : voyez cette belle nuée orageuse qui monte à l'horizon. Pour expliquer sa forme et son aspect, que faut-il alléguer? Ions, vapeurs, courants d'air ascendants, chaleur des rayons solaires, et ainsi de suite. Et *de plus*, ce nuage est magnifique. Mais, ajoutera-t-on, cette magnificence n'est pour rien dans la genèse du phénomène.

Ou bien, dira-t-on encore, résistance variée des roches, usure par la pluie, par le vent, par la course des eaux, climat, dispositifs géographiques et géologiques de toute une région, action millénaire du temps, telles sont les causes qu'il faut évoquer pour expliquer Rainbow Bridge au milieu du territoire navajo. Et *il se trouve* que c'est l'un des chefs-d'œuvre les plus accomplis de la nature. Mais la nature n'a pas visé cela. Soit. Jusqu'ici on a raison. D'une part, il serait absurde d'affirmer que cette beauté (celle du nuage ou celle de la grande arche de rocher) n'est pas réelle. D'autre part, il serait imprudent de soutenir que cette beauté joue un rôle actif dans la genèse des formes du nuage ou de la montagne. Le paramètre esthétique, assurément présent de quelque manière dans l'équation complète du phénomène, y est pour ainsi dire inerte. Il explique simplement la coïncidence de ces formes avec les *desiderata* de notre sensibilité esthétique.

Remarquez que cette inertie des qualités formelles dans la genèse des choses naturelles n'est pas absolument certaine, philosophiquement parlant. Elle est seulement postulée par un certain gros bon sens scientifique dont il n'est pas prudent de trop s'écarter.

En est-il de même, si on considère les formes des êtres vivants, par exemple celles des plantes ? Cette fleur banale, sur l'accotement de la route (c'est une linaire jaune), nous pouvons assurer que sa présence et sa forme s'expliquent en grande partie par la chimie du sol où la graine est tombée, par le jeu des lois de Mendel, par la division des cellules et leur métabolisme, par l'effet du climat local. Mais pouvons-nous nous contenter d'ajouter, comme à propos du nuage ou du rocher, qu'il se trouve *en plus* qu'elle a certains caractères esthétiques remarquables ? A la regarder de près, on s'aperçoit que l'orfèvre ou le céramiste les plus inventifs et les mieux doués artistiquement donneraient difficilement autant d'élégance et d'accent à tous les détails de leurs meilleures créations, dans une harmonie stylistique aussi pure. Et cette fois-ci il serait extrêmement imprudent d'assurer que de telles qualités formelles n'ont absolument aucune corrélation avec les phénomènes qui se sont produits durant la croissance de la plante. Nous allons y revenir dans un instant.

Regardons à présent cette toile d'araignée sous la rosée,

Michel Souriau (Philosophe)

Michel Souriau (Philosophe)

Michel Souriau, né à Lille en 1891, intègre l'École normale supérieure (1910-1913) et obtient l'agrégation de philosophie en 1914. Il est mobilisé le 3 août 1914 et devient, pendant la Guerre, capitaine d'infanterie. Membre de la Fondation Thiers (1919-mai 1921), il est ensuite professeur suppléant au lycée Louis-le-Grand (1921), professeur à l'Institut français de Madrid (octobre 1921) puis au lycée d'Annecy (octobre 1922). Docteur en 1927 avec une thèse sur *La fonction pratique de la finalité*, il est chargé de cours à la faculté des lettres de Nancy (1929), maître de conférences de philosophie à la faculté de Rennes (1930) puis professeur à la faculté de Nancy (1933). Mobilisé en août 1939, il est chef de bataillon et une note relève : « Complètement encerclé par un ennemi supérieur

en nombre et en moyens, après que ses compagnies eurent succombé l'une après l'autre, a poursuivi la lutte avec les hommes de sa section de commandement jusqu'à épuisement de ses munitions[35] ». Il est fait prisonnier le 21 juin et envoyé en Allemagne. Dans une lettre du 13 juin 1941 au directeur de l'Enseignement supérieur, Michel Souriau écrit : « Prisonnier depuis le 21 juin 1940, j'ai été mis en congé de captivité comme père de quatre enfants, il y a un mois dans le périmètre du département de la Seine ». Il est nommé recteur à Rennes le 18 juin 1941 et le demeure jusqu'à ce qu'il soit chargé des fonctions de maître de conférences de sociologie à la faculté de Paris (17 juillet 1944). À l'évidence, le recteur Souriau est l'un des seuls, dans le groupe des nouveaux recteurs de Vichy, à ne pas partager l'idéologie réactionnaire du moment. Il est, après la Libération, nommé recteur à Nancy (28 novembre 1944) puis à Lille (20 février 1946) où il demeure jusqu'en 1955 avant de devenir directeur du Centre universitaire d'Antony puis de redevenir professeur à la faculté de Nancy de 1959 à 1962.

JOURNAL ARTICLE

Introduction au symbolisme mathématique

Auguste Leclère and Michel Souriau

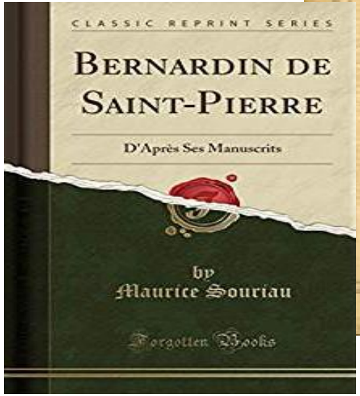
Revue Philosophique de la France et de l'Étranger

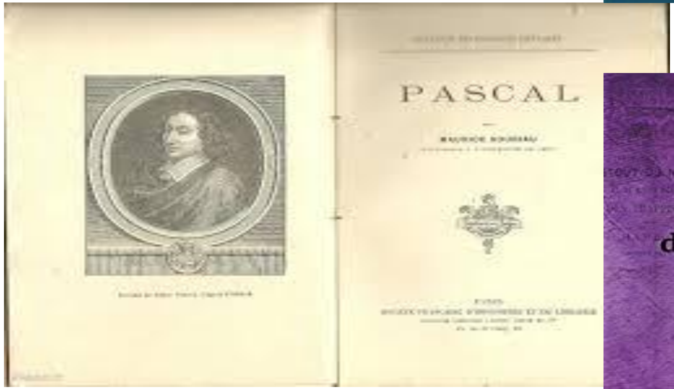
T. 125, No. 5/6 (MAI-JUIN. 1938), pp. 363-405

Maurice Anatole Souriau (Histoire de la littérature)

Maurice Anatole Souriau (Philosophe)

- Docteur en Philosophie 1885,
- Professeur à la Faculté des lettres des universités de Caen et de Poitiers (1856 – 1943)
- Professeur titulaire 1895
- Prix de l'Académie Française:
    - 1927 Prix Broquette-Gonin (littérature) - Histoire du romantisme en France
    - 1914 Prix Juteau-Duvigneaux - Deux mystiques normands au XVIIe siècle
    - 1905 Prix Marcelin Guérin - Bernardin de Saint-Pierre
    - 1898 Prix Saintour - La préface de Cromwell, de Victor Hugo
- Principales publications:
    - Histoire du romantisme en France, Editions Spes, 1927
    - Pascal, Société Française d'imprimerie et de librairie , 1898
    - Le jansénisme des "Pensées" de Pascal , A. Colin , 1896
    - Moralistes et poètes : Pascal, Lamartine, Casimir Delavigne, Alfred de Vigny, René Bazin Vuibert et Nony , 1907
    - Bernardin de Saint-Pierre d'après ses manuscrits, Slatkine , 1970
    - Science et religion Fascicules 522 - 530, Bloud et Cie , 1907-1909
    - Les pensées catholiques de Pascal, Editions Spes , 1935





Jean-Marie Souriau

- Diplômé ENS ULM (Ecole Normale Supérieure Paris), suit les cours d'Elie Cartan en 1945

- Thèse à l'ONERA: **J.M. Souriau, "Sur la Stabilité des Avions" ONERA Publ., 62, vi+94, 1953** (prouve que l'on peut stabiliser un avion quelque soit la position des moteurs: Caravelle), encadrée par André Lichnerowicz (Collège de France) & Joseph Pérès

ONERA
THE FRENCH AEROSPACE LAB

- Algèbre Multi-Linéaire: **J.M. Souriau, Calcul linéaire, P.U.F., Paris, 1964**; Algorithme de Le Verrier-Souriau (équation des paramètres du polynôme caractéristique d'une matrice)

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = k_0\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + \cdots + k_{n-1}\lambda + k_n$$
$$Q(\lambda) = \mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \lambda^{n-1}B_0 + \lambda^{n-2}B_1 + \cdots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}$$
$$k_0 = 1 \quad \text{et} \quad B_0 = I$$
$$A_i = B_{i-1}A, \qquad k_i = -\frac{1}{i}\mathrm{tr}(A_i), \qquad B_i = A_i + k_i I$$
$$A_n = B_{n-1}A \quad \text{et} \quad k_n = -\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_n)$$

« Ce que Lagrange a vu, que n'a pas vu Laplace, c'était la structure symplectique »

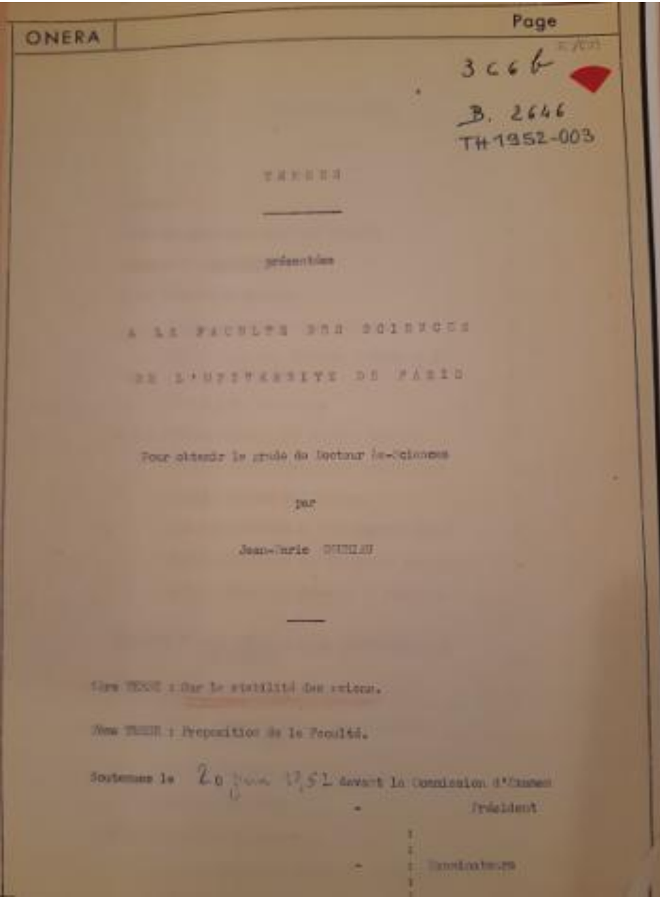
- Introduction de la Géométrie Symplectique en Mécanique (2 forme de Lagrange): **J.M. Souriau, Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 1970**

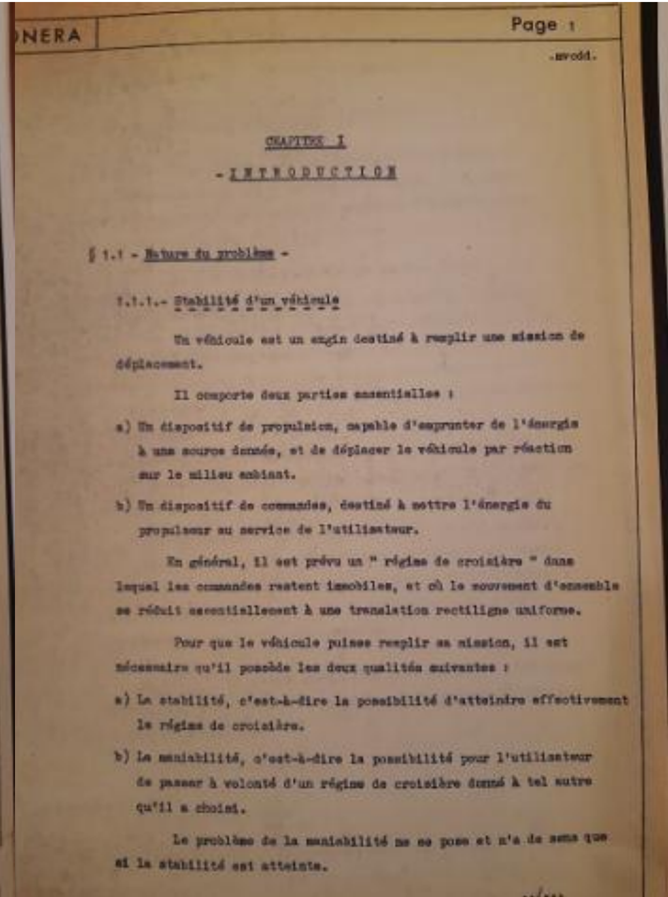
OPEN

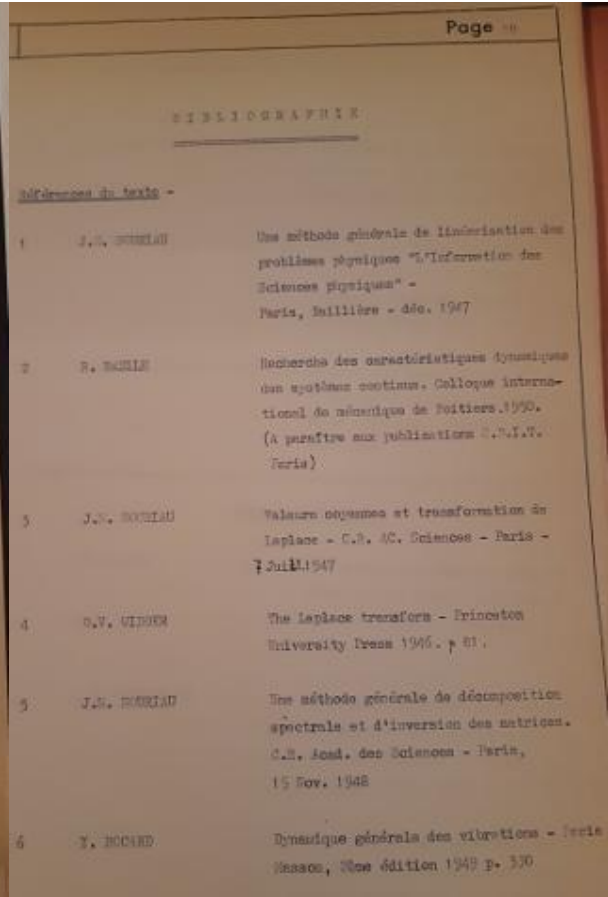
THALES

Jean-Marie Souriau: thèse à l'ONERA soutenue le 20 Juin 1952: « Sur la stabilité des avions »

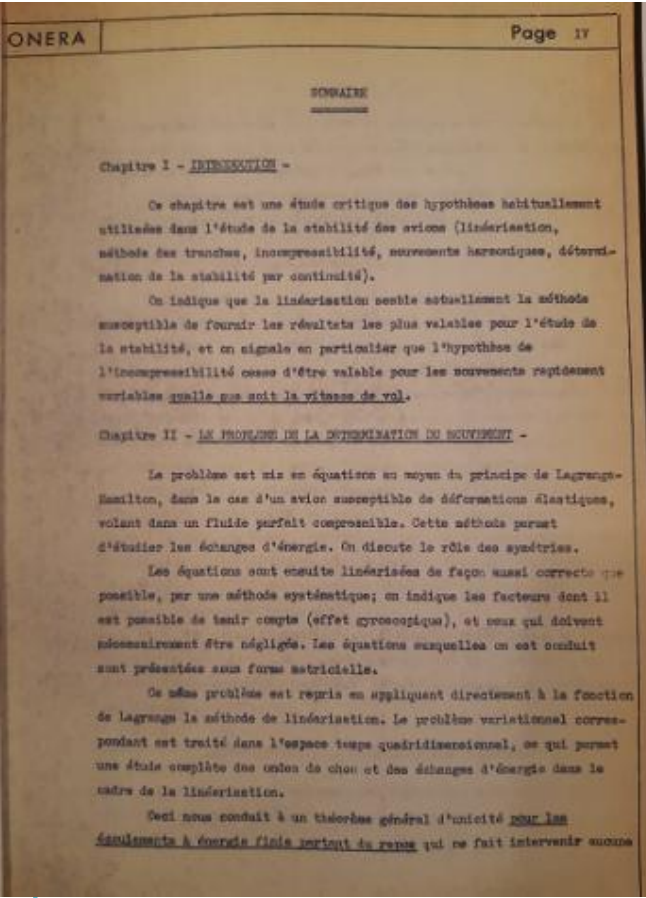
- Jean-Marie Souriau prouve que l'on peut stabiliser un avion quelque soit la position des moteurs







Jean-Marie Souriau: thèse à l'ONERA soutenue le 20 Juin 1952: « Sur la stabilité des avions »



ONERA — Page IV

SOMMAIRE

Chapitre I - INTRODUCTION -

Ce chapitre est une étude critique des hypothèses habituellement utilisées dans l'étude de la stabilité des avions (linéarisation, méthode des tranches, incompressibilité, mouvements harmoniques, détermination de la stabilité par continuité).

On indique que la linéarisation semble actuellement la méthode susceptible de fournir les résultats les plus valables pour l'étude de la stabilité, et on signale en particulier que l'hypothèse de l'incompressibilité cesse d'être valable pour les mouvements rapidement variables quelle que soit la vitesse de vol.

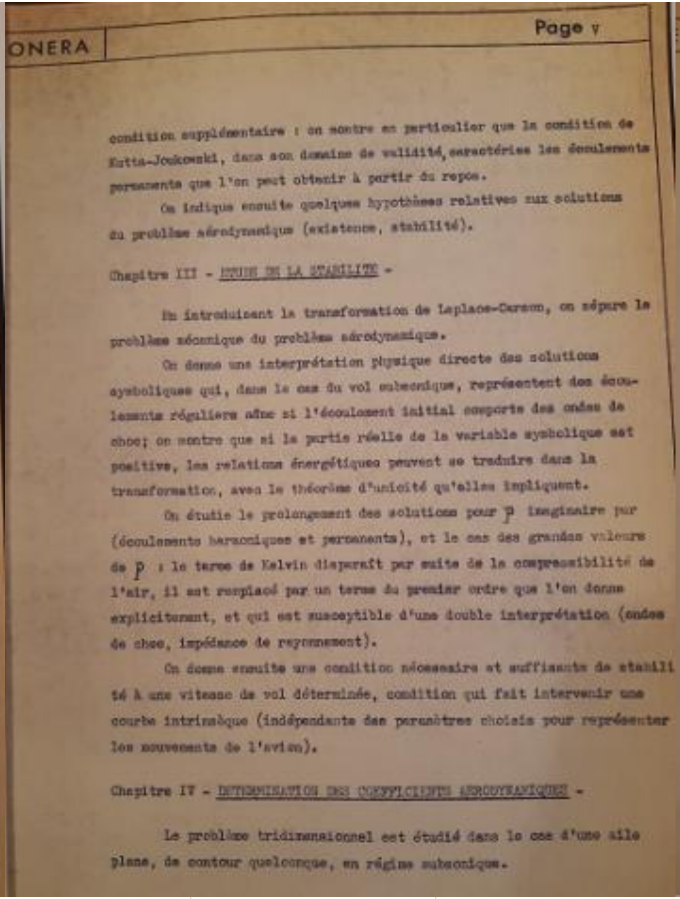
Chapitre II - LE PROBLEME DE LA DETERMINATION DU MOUVEMENT -

Le problème est mis en équations au moyen du principe de Lagrange-Hamilton, dans le cas d'un avion susceptible de déformations élastiques, volant dans un fluide parfait compressible. Cette méthode permet d'étudier les échanges d'énergie. On discute le rôle des symétries.

Les équations sont ensuite linéarisées de façon aussi correcte que possible, par une méthode systématique; on indique les facteurs dont il est possible de tenir compte (effet gyroscopique), et ceux qui doivent nécessairement être négligés. Les équations auxquelles on est conduit sont présentées sous forme matricielle.

Ce même problème est repris en appliquant directement à la fonction de Lagrange la méthode de linéarisation. Le problème variationnel correspondant est traité dans l'espace temps quadridimensionnel, ce qui permet une étude complète des ondes de choc et des échanges d'énergie dans le cadre de la linéarisation.

Ceci nous conduit à un théorème général d'unicité pour les écoulements à énergie finie partant du repos qui ne fait intervenir aucune



ONERA — Page V

condition supplémentaire : on montre en particulier que la condition de Kutta-Joukowski, dans son domaine de validité, caractérise les écoulements permanents que l'on peut obtenir à partir du repos.

On indique ensuite quelques hypothèses relatives aux solutions du problème aérodynamique (existence, stabilité).

Chapitre III - ETUDE DE LA STABILITE -

En introduisant la transformation de Laplace-Carson, on sépare le problème mécanique du problème aérodynamique.

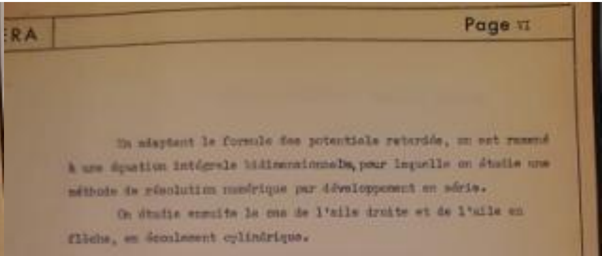
On donne une interprétation physique directe des solutions symboliques qui, dans le cas du vol subsonique, représentent des écoulements réguliers même si l'écoulement initial comporte des ondes de choc; on montre que si la partie réelle de la variable symbolique est positive, les relations énergétiques peuvent se traduire dans la transformation, avec le théorème d'unicité qu'elles impliquent.

On étudie le prolongement des solutions pour p imaginaire pur (écoulements harmoniques et permanents), et le cas des grandes valeurs de p : le terme de Kelvin disparaît par suite de la compressibilité de l'air, il est remplacé par un terme du premier ordre que l'on donne explicitement, et qui est susceptible d'une double interprétation (ondes de choc, impédance de rayonnement).

On donne ensuite une condition nécessaire et suffisante de stabilité à une vitesse de vol déterminée, condition qui fait intervenir une courbe intrinsèque (indépendante des paramètres choisis pour représenter les mouvements de l'avion).

Chapitre IV - DETERMINATION DES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES -

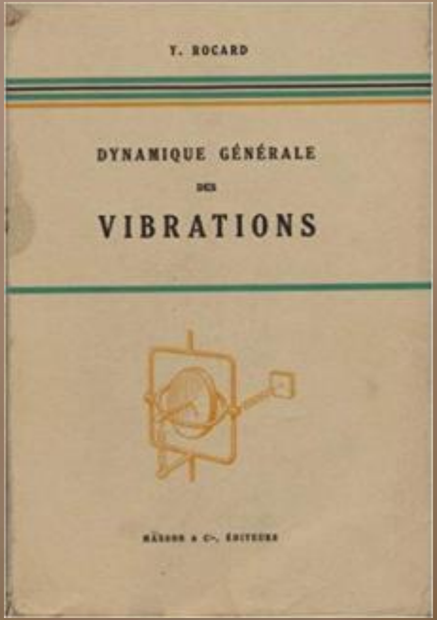
Le problème tridimensionnel est étudié dans le cas d'une aile plane, de contour quelconque, en régime subsonique.



ONERA — Page VI

En adaptant la formule des potentiels retardés, on est ramené à une équation intégrale bidimensionnelle, pour laquelle on étudie une méthode de résolution numérique par développement en série.

On étudie ensuite le cas de l'aile droite et de l'aile en flèche, en écoulement cylindrique.



Jean-Marie Souriau: thèse à l'ONERA soutenue le 20 Juin 1952: « Sur la stabilité des avions »

ONERA Page 35

../...

§ 2.5 - ETUDE THEORIQUE DU PROBLEME AERODYNAMIQUE LINEARISE-

2.5.1.- Réduction du problème pour l'étude de la stabilité -

Ainsi que nous l'avons indiqué plus haut (1.1.1.) pour étudier la stabilité, nous supposerons qu'un régime permanent est établi et règne jusqu'à l'instant $t = 0$, à partir duquel on appliquera une petite perturbation d'épreuve, et on étudiera la réponse de l'avion par la méthode des petits mouvements.

Ici, nous avons schématisé notre problème par un système linéaire. Par suite, la méthode des petits mouvements consistera simplement à remplacer les variables W, q, s par leur différence avec le cas permanent, c'est-à-dire à supposer qu'elles sont nulles pour $t<0$ et à remplacer le système (II,22,24) par le système rendu homogène, à l'exception, bien entendu, de la perturbation d'épreuve Λ.

Ce système sera donc remplacé par

(II,25) $$M\ddot{Q} + KQ + a^2\rho_0 \sum_j \iint F_j \left[s^+ - s^-\right] d\sigma = \Lambda$$

(II,26)
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Grad}(s) + S(W) = 0 \\ \mathrm{div}(W) + S(s) = 0 \end{array}\right\} \text{dans l'atmosphère}$$
$$W_n^{\pm} = S\left(\sum_j F_j q_j\right) \quad \text{sur le squelette}$$
$$\left.\begin{array}{l} W_n^+ = W_n^- \\ s^+ = s^- \end{array}\right\} \text{sur le sillage}$$

avec les conditions :

(II,27) $$Q = 0,\ W = 0,\ s = 0,\ \Lambda = 0 \quad \text{pour } t<0$$

ONERA Page 36

../...

Par suite, nous arrivons à la conclusion suivante :

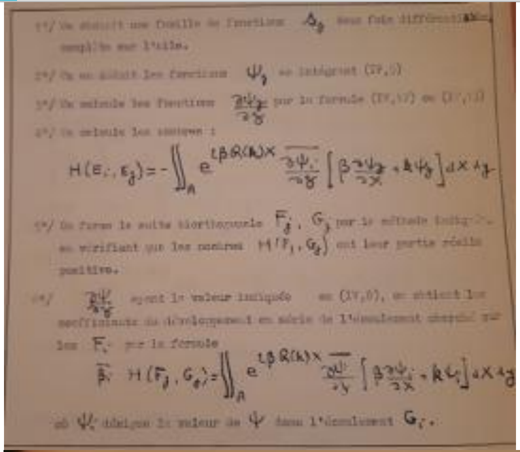
Dans le cadre de la linéarisation, ni le poids de l'avion, ni son épaisseur, ni la poussée des propulseurs, ni le régime permanent, n'ont d'influence sur la stabilité.

Ceci peut s'énoncer ainsi :

Pour étudier la stabilité, on peut se ramener au cas de l'avion d'épaisseur nulle, sans poids, en vol plané, régi par les équations (II,25,26).

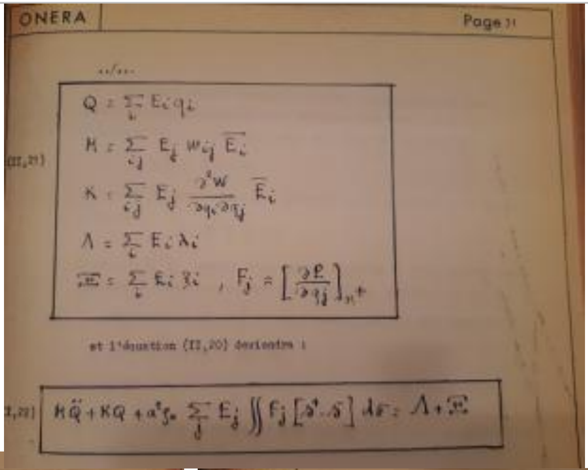
« Un des apports les plus importants de la théorie des systèmes dynamiques aux applications est l'étude de la stabilité. Il n'est pas toujours très facile dans une situation concrète de mettre en pratique cette étude. La thèse de J.-M. Souriau en est une belle illustration avec une discussion très délicate des hypothèses possibles dans l'étude de la stabilité des avions, le choix d'une méthode de linéarisation et la solution mathématique proposée sous la forme du calcul d'un déterminant complexe dont on calcule le nombre de tours qu'il fait autour de l'origine. Dans le cadre de la théorie des systèmes à plusieurs échelles de temps, de nouveaux problèmes de stabilité se posent. Par exemple, avec la théorie des bifurcations dynamiques introduite par R. Thom, on peut discuter les retards à la bifurcation. Les orbites correspondantes aux retards maximaux (canards maximaux) sont maintenant considérées comme des « séparatrices » au-delà desquelles on observe une transition très rapide vers de nouveaux attracteurs » - **Systèmes Dynamiques appliqués aux Oscillations, J.-P. FRANCOISE**

Jean-Marie Souriau: thèse à l'ONERA soutenue le 20 Juin 1952:
« Sur la stabilité des avions »



$$H(E_i, E_j) = -\iint_A e^{i\beta R(k)x}\, \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left[\beta \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + k \psi_j \right] dx\, dy$$

$$H(F_j, G_j) = -\iint_A e^{i\beta R(k)x}\, \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left[\beta \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + k \psi_i \right] dx\, dy$$



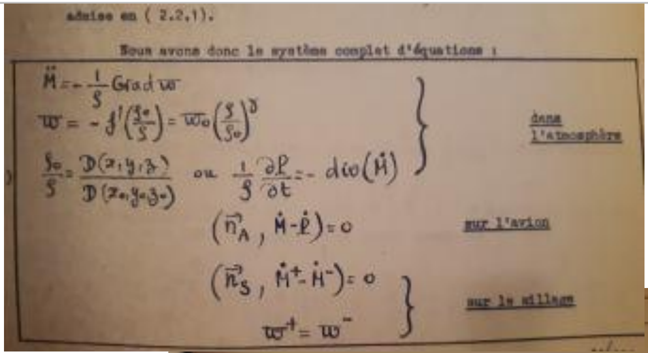
ONERA Page

$Q = \sum_i E_i q_i$

$\Lambda = \sum_i E_i \lambda_i$

et l'équation (II,20) devient :

$$K\ddot{Q} + KQ + a^2 \rho_0 \sum_j E_j \iint F_j [\delta^+ \cdot \delta]\, d\sigma = \Lambda + \Xi$$



admise en (2.2.1).

Nous avons donc le système complet d'équations :

$$\ddot{M} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{Grad}\,\varpi$$

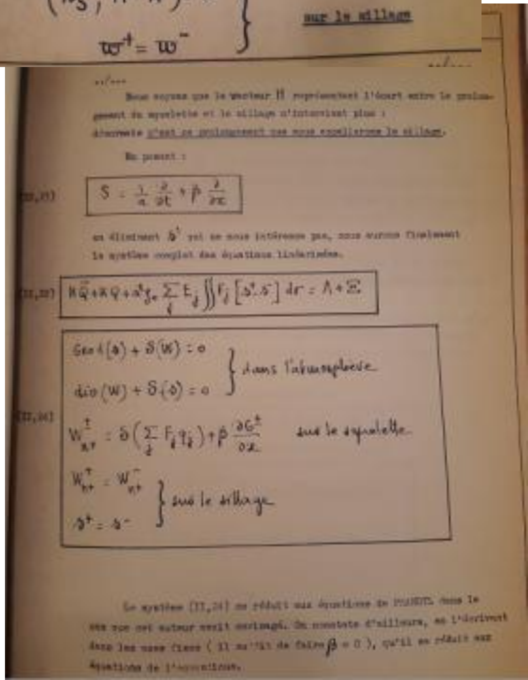
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{D(x,y,z)}{D(x_0,y_0,z_0)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\,\mathrm{div}(\dot{M})$$

dans l'atmosphère

$(\vec{n}_A, \dot{M} - \dot{P}) = 0$ sur l'avion

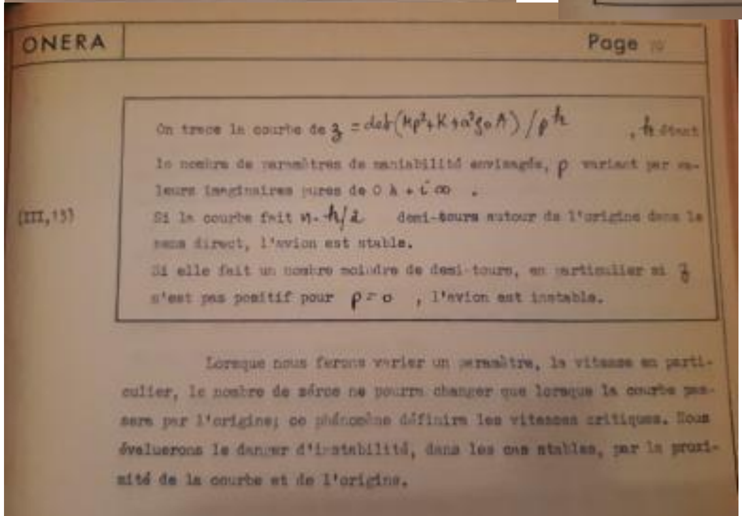
$(\vec{n}_S, \dot{M}^+ - \dot{M}^-) = 0$

$\varpi^+ = \varpi^-$ sur le sillage



En posant :

$S = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x}$



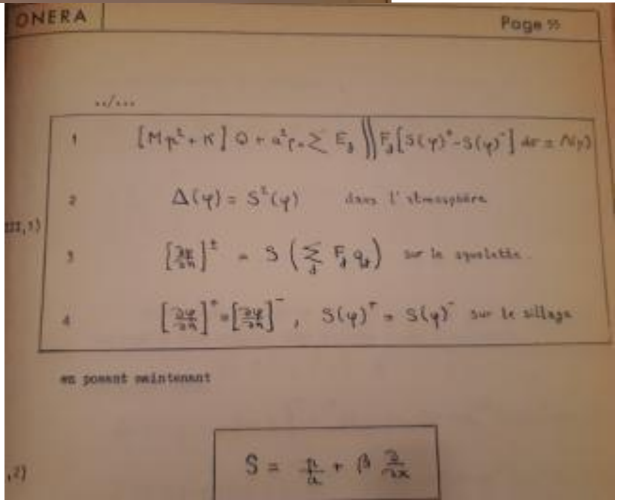
ONERA Page

(III,13) On trace la courbe de $z = \det(M p^2 + K + a^2 \rho_0 A) / p^h$

Si la courbe fait $n - h/2$ demi-tours autour de l'origine dans le sens direct, l'avion est stable.

Si elle fait un nombre moindre de demi-tours, en particulier si z n'est pas positif pour $p = 0$, l'avion est instable.

Lorsque nous ferons varier un paramètre, la vitesse en particulier, le nombre de zéros ne pourra changer que lorsque la courbe passera par l'origine; ce phénomène définira les vitesses critiques. Nous évaluerons le danger d'instabilité, dans les cas stables, par la proximité de la courbe et de l'origine.



ONERA Page

$\Delta(\varphi) = S^2(\varphi)$ dans l'atmosphère

en posant maintenant

$S = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x}$

Jean-Marie Souriau et sa thèse à l'ONERA défendue le 20 Juin 1952: « Sur la stabilité des avions »

Itinéraire d'un mathématicien
Un entretien avec Jean-Marie Souriau
propos recueillis par Patrick Iglesias

J.-M. Souriau Ma thèse portait sur la stabilité des avions.

J.-M. Souriau On couple les propriétés élastiques des ailes d'un avion avec la dynamique de l'atmosphère décrite par des équations aux dérivées partielles et une nappe de discontinuités tourbillonaires. Avec tout ça, on calcule un déterminant complexe et on compte combien il fait de tours autour de l'origine quand varie une pulsation ω. S'il fait le bon nombre de tours, l'avion est stable ; sinon il se mettra à vibrer et il explosera. Et ça marche ! Ça a été utilisé pour des avions comme le Concorde. Il en résultait qu'on pouvait mettre les réacteurs n'importe où, que ça ne changeait rien à la stabilité. A la suite de quoi, on a commencé à mettre les réacteurs sur l'empenage arrière et pendant 25 ans, tous les avions qui avaient des réacteurs à l'arrière ont payé des royalties à la France, mais pas à moi.

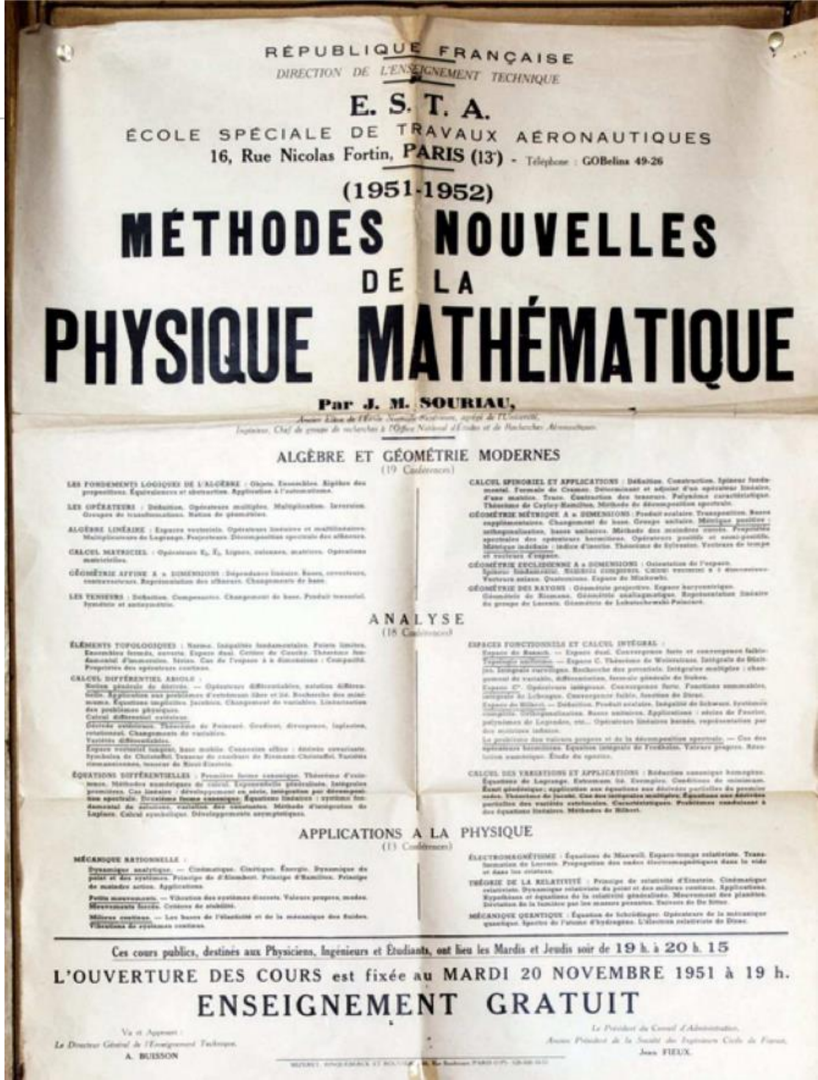
Voilà ma vie de scientifique à mes débuts. J'appliquais les mathématiques. J'analysais une situation, j'en donnais un modèle mathématique et, de façon annexe, j'essayais d'en trouver une conséquence pratique. Les problèmes posés dans ma thèse conduisaient à des problèmes de calcul numérique. Nous avions à notre disposition un centre de calcul où les calculatrices fonctionnaient à la manivelle, puis des machines mécanographiques à cartes perforées. Nous étions en pointe à l'ONERA, parce qu'on y était obligés. C'est comme ça que j'ai fait la première démonstration de calcul scientifique chez IBM. J'avais fait un programme qui, pendant que les invités prenaient l'apéritif, résolvait une équation du troisième degré ; à la fin de l'apéritif, on avait une racine de l'équation. Ça faisait beaucoup de bruit et ça consommait beaucoup de cartes. Peu après je faisais, dans les mêmes conditions, la première démonstration de calcul scientifique chez Bull qui ne voulait pas être en reste. A ce moment-là, écrire un programme, c'était se mettre devant un tableau et connecter des fils. Après, j'ai vécu tous les stades de l'informatique, j'ai été témoin de l'histoire de l'informatique et des choix stupides qui se sont succédés en France pendant des dizaines d'années : tout ce qu'on a fait dans les écoles, les subventions déguisées à l'informatique française sans se demander si les élèves pourraient en faire quelque chose ! Là, j'étais plutôt spectateur. Non, j'ai quand même inventé un algorithme en 1948 qui a été utilisé sur les premiers ordinateurs aux États Unis pour l'analyse spectrale des matrices (matrices de Leontiev en économie mathématique).

Caravelle Airplane
First flight: 27 May 1955

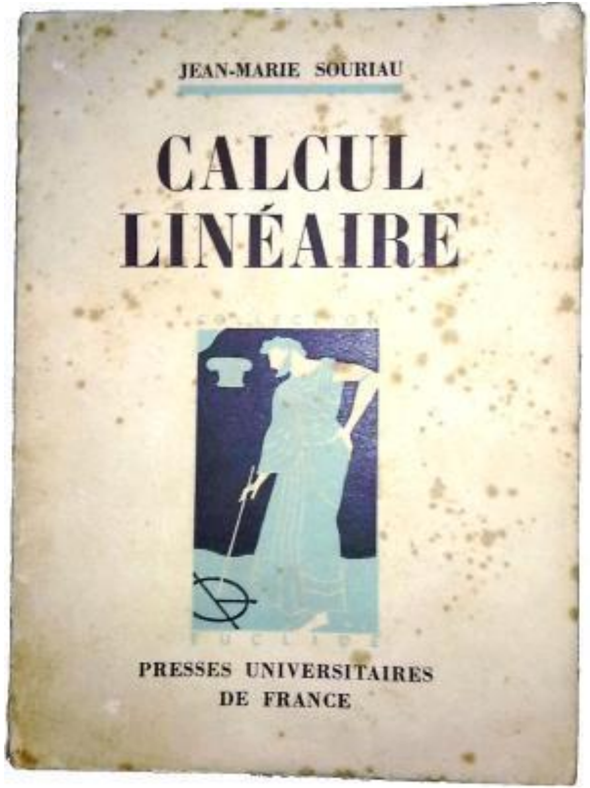
McD Douglas MD-11
First flight: 30 Dec 1986

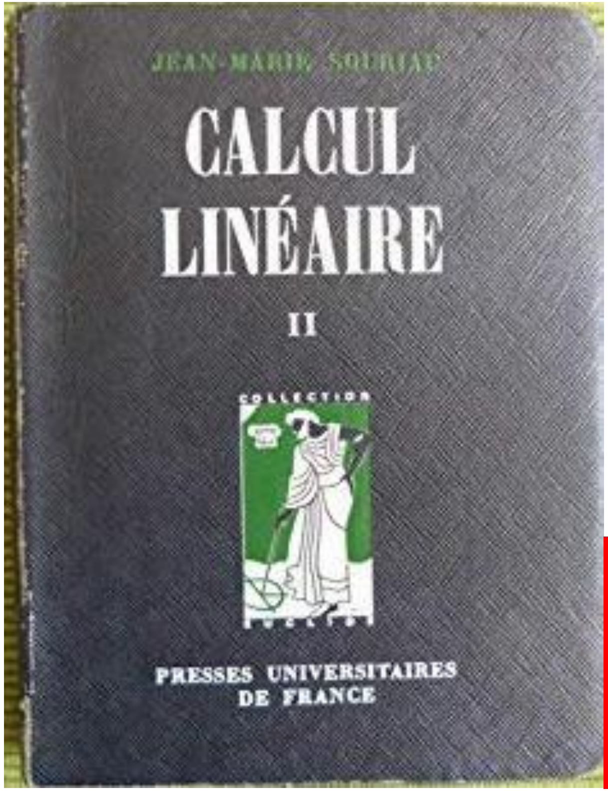
Jean-Marie Souriau Ingénieur

- "Jean-Marie l'ingénieur" par Claude Vallée
- https://smf.emath.fr/publications/la-gazette-des-mathematiciens-133-juillet-2012
- "La figure 1 reproduit une affiche que Jérôme Souriau a retrouvée dans les papiers de son papa et qu'il m'a obligeamment transmise. Elle concerne l'´epoque où Jean-Marie Souriau était Ingénieur de Recherches à l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales) de Chätillon-sous-Bagneux. Je me souviens qu'il m'a souvent parlé d'un cours du soir qu'il donnait à l'« Ecole des Meuniers » en collaboration avec Jérôme Chastenet de Géry et Roger Valid (qui rédigeaient les exercices). A l'origine, les cours publics de 1951-52 étaient une réponse aux manques en calcul matriciel que Jean-Marie Souriau avait ressentis chez les ingénieurs français en aéronautique, notamment à l'ONERA récemment crée. La simple addition de 2 matrices était considérée avec respect comme une notion très abstraite. Ces lacunes empêchaient les ingénieurs de comprendre les progrès réalisés par les avionneurs américains pendant la seconde guerre mondiale (progrès qui leur firent gagner la guerre des airs pendant que les Anglais gagnaient la guerre des mers). Les calculateurs américains avaient inventé la « Méthode des éléments finis » qui permettait de résoudre rapidement des problèmes de « Mécanique des Structures » (principalement des structures en forme de coques : coques d'avion, coques de bateau, coques de camions,...). Comme l'ancienne « Méthode de Ritz », la « Méthode des éléments finis » est une méthode numérique qui ramène l'équation aux dérivées partielles gouvernant le comportement d'une structure à un calcul linéaire. Mais la nouvelle méthode met en jeu des matrices dont les coefficients non nuls sont rassemblés dans une bande voisine de la diagonale. Voilà ce qui motivait, dans les années 1950, la nécessité d'une bonne compréhension du calcul matriciel pour maîtriser la « Mécanique des Structures » et concevoir des prototypes d'avions nouveaux. Roger Valid a continué sa carrière à l'ONERA après le d´epart de Jean-Marie Souriau. Il y a perfectionné la théorie des coques non pas avec les méthodes matricielles et numériques ci-dessus évoquées, mais avec une autre corde de l'arc de Jean-Marie Souriau : ses méthodes de géométrie différentielle exposées, elles aussi, en 1951-52 à l'« Ecole des Meuniers ´» pendant les 19 conférences d'« Algèbre et Géométrie modernes » résuméees sur l'affiche. Le programme des cours d' « Algèbre Linéaire » qu'on lit sur l'affiche (figure 1) a donné lieu au livre Calcul linéaire . Dans ce premier livre apparaît déjà le caractère opératoire des énoncés de Jean-Marie Souriau. On peut y trouver une présentation particulièrement astucieuse des multiplicateurs de Lagrange."
- Fig. 1 : Photographie d'une affiche datant de 1951. Don de Jérôme Souriau
- Souriau, Jean-Marie : Calcul linéaire. En deux tomes. Presses Universitaires de France, Paris, 1964.



Livre de Souriau « Calcul Linéaire »: Algorithme de Leverrier-Souriau





$$P(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\sum_{i=0}^{n}k_i\lambda^{n-i}$$

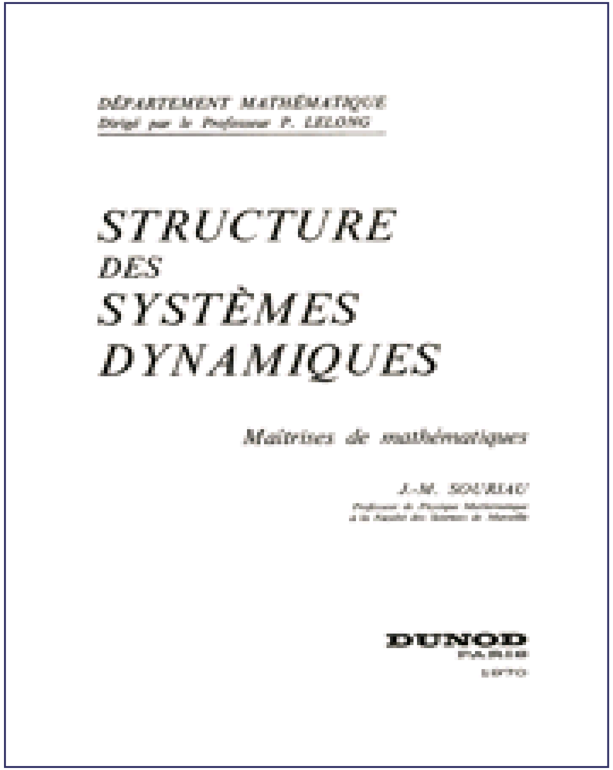
$$k_0=1 \quad \text{et} \quad B_0=I$$

$$\begin{cases} A_i=B_{i-1}A \quad , \quad k_i=-\dfrac{1}{i}tr(A_i),\ i=1,\ldots,n-1 \\ B_i=A_i+k_iI \quad \text{ou} \quad B_i=B_{i-1}A-\dfrac{1}{i}tr(B_{i-1}A)I \end{cases}$$

$$A_n=B_{n-1}A \quad \text{et} \quad k_n=-\frac{1}{n}tr(A_n)$$

Souriau, J.-M..:Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices. Comptes-Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 227 (2), 1010–1011, Gauthier-Villars, Paris (1948).

50ème anniversaire du Livre Structure des systèmes dynamiques 1969-2019



http://www.jmsouriau.com/structure_des_systemes_dynamiques.htm
http://www.springer.com/us/book/9780817636951

SOURIAU 2019

J.M. Souriau Interview: https://www.youtube.com/watch?v=uz69vWHXzWY

SOURIAU 2019

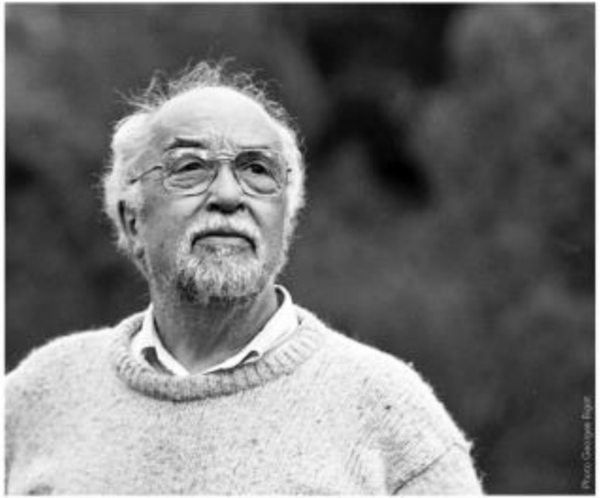
- Site internet: http://souriau2019.fr
- En 1969, il y a 50 ans, Jean-Marie Souriau publie le livre "Structure des systèmes dynamiques", dans lequel utilisant les idées de J.L. Lagrange, il formalise la "Mécanique Géométrique" dans sa forme moderne basée sur la Géométrie Symplectique.
- Le chapitre IV était consacré à la « Mécanique Statistique » (Thermodynamique des groupes de Lie)
- Témoignage de Jean-Pierre Bourguignon à Souriau'19 (IHES, directeur de l'ERC européen)

https://www.youtube.com/watch?v=93hFollBo0Q&t=3s

SOURIAU 2019

Conference May 27-31 2019, Paris-Diderot University

https://www.youtube.com/watch?v=beM2pUK1H7o



Frédéric Barbaresco
Daniel Bennequin
Jean-Pierre Bourguignon
Pierre Cartier
Dan Christensen
Maurice Courbage
Thibault Damour
Paul Donato
Paolo Giordano
Serap Gürer
Patrick Iglesias-Zemmour
Yael Karshon
Jean-Pierre Magnot
Yvette Kosmann-Schwarzbach
Marc Lachièze-Rey
Martin Pinsonnault
Elisa Prato
Urs Schreiber
Jean-Jacques Szczeciniarz
Roland Triay
Jordan Watts
Enxin Wu
San Vũ Ngọc
Alan Weinstein

JEAN-MARIE SOURIAU

In 1969, the groundbreaking book of Jean-Marie Souriau appeared "Structure des Systèmes Dynamiques". We will celebrate, in 2019, the jubilee of its publication, with a conference in honour of the work of this great scientist.

Symplectic Mechanics, Geometric Quantization, Relativity, Thermodynamics, Cosmology, Diffeology & Philosophy

80|Prime

PARIS DIDEROT · Aix-Marseille université · ONERA · SPHERE

Jean-Marie Souriau (ENS 1942)

Bibliographie:

- Sur la stabilité des avions, thèse 62, ONERA, 1953.
- Structure des systèmes dynamiques, Maîtrises de mathématiques, Dunod, Paris, 1970 (ISSN 0750-2435).
- Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie. Colloque International du CNRS : Géométrie symplectique et physique Mathématique, Aix-en-Provence, 1974
- Géométrie symplectique et physique mathématique, Gazette des mathématiciens, n° 10, 1978, p. 90-133.

Inventions:

- Première interprétation géométrique du spin
- Application Moment (géométrisation du théorème de Noether)
- Action coadjointe d'un groupe sur son espace des moments
- Préquantification (quantification géométrique)
- Classification des feuilles symplectiques homogènes
- **Thermodynamique des groupes de Lie** (modèle symplectique de la mécanique statistique et généralisation de la métrique de Fisher-Koszul de la géométrie de l'information)
- Espaces difféologiques.

« ***Il n'y a rien de plus dans les théories physiques que les groupes de symétrie si ce n'est la construction mathématique qui permet précisément de montrer qu'il n'y a rien de plus*** » - **Jean-Marie Souriau**

Les Principes du calcul des variations

Pierre
de Fermat

Principe de
Fermat de temps
minimal

Pierre
Louis
Maupertuis

principe de
Maupertuis de la
moindre quantité
d'action

Joseph
Louis
Lagrange

Equation
(Euler)
Lagrange

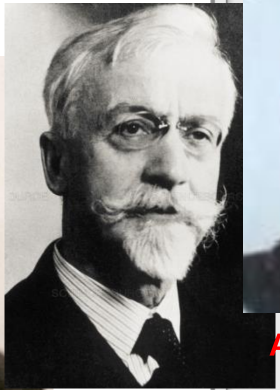
Simeon
Denis
Poisson

Crochet
de Poisson

Henri
Poincaré

Equation
(Euler)
Poincaré

Elie
Cartan



Invariant
Intégral
Poincaré
Cartan

Jean- Marie
Souriau

Application
Moment
de Souriau,
2-forme
et cocycle
de Souriau,
Thermodynamique
des groupes
de Lie

Jean-Michel
Bismut

Mécanique
Aléatoire

THALES

Séminaire MAMUPHI
Avril 2023, IRCAM, sale Shannon

MAMUPHI
mathématiques - musique – philosophie
MAMUPHI

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Mécanique statistique et la Thermodynamique des groupes de Lie

OPEN

La 2-forme de Lagrange redécouverte par Jean-Marie Souriau

- Réécriture des équations de la mécanique classique dans l'espace de phase $\begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}$

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F \quad \Longrightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = F \quad \text{et} \quad v = \frac{dr}{dt}$$

- Souriau redécouvre que Lagrange a considéré l'espace des mouvements: $y = \begin{pmatrix} t \\ r \\ v \end{pmatrix} \in V$

$$\begin{cases} m\delta v - F\delta t = 0 \\ \delta r - v\delta t = 0 \end{cases}$$

- Un système dynamique est représenté par un feuilletage (ensemble des solutions). Ce feuilletage est donné par un tenseur covariant du 2nd ordre antisymmétrique σ , appelé forme de Lagrange (-Souriau), un opérateur bilinéaire sur les vecteurs tangents à V (espace des mouvements)

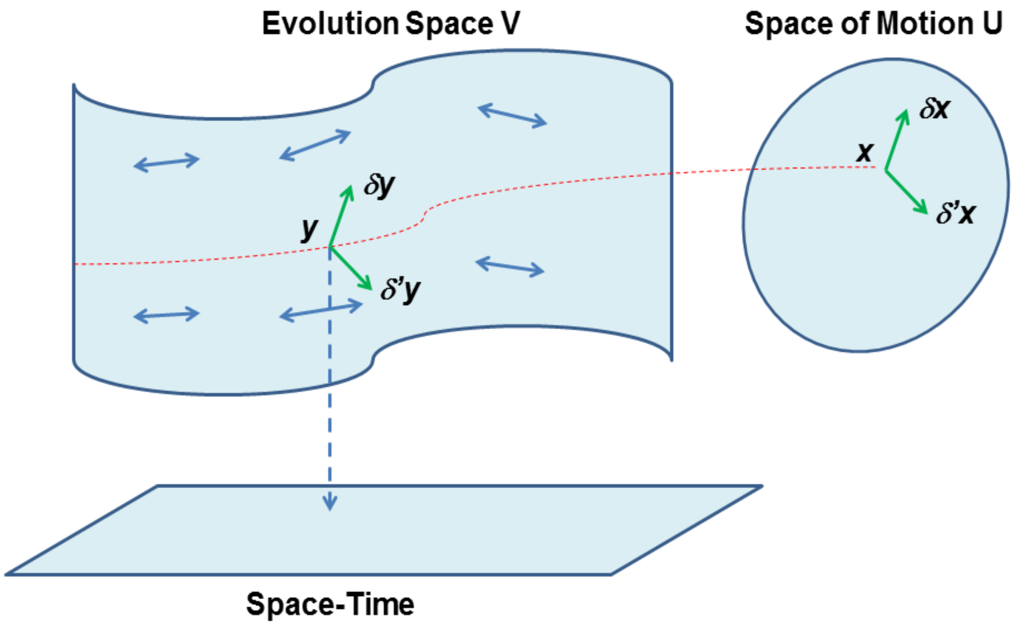
$$\sigma(\delta y)(\delta' y) = \langle m\delta v - F\delta t, \delta' r - v\delta' t\rangle - \langle m\delta' v - F\delta' t, \delta r - v\delta t\rangle \qquad \delta y = \begin{pmatrix} \delta t \\ \delta r \\ \delta v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta' y = \begin{pmatrix} \delta' t \\ \delta' r \\ \delta' v \end{pmatrix}$$

- *Dans le modèle de Souriau-Lagrange , σ est une 2-forme sur l'espace d'évolution V, et l'equation différentielle du mouvement implique :* $\delta y \in \varepsilon$

$$\sigma(\delta y)(\delta' y) = 0 \ , \ \forall \delta' y \qquad \sigma(\delta y) = 0 \ \text{ ou } \ \delta y \in \ker(\sigma)$$

THALES

Espace d'évolution de Lagrange-Souriau



$$\begin{cases} m\delta v - F\delta t = 0 \\ \delta r - v\delta t = 0 \end{cases}$$

Racine des travaux de Souriau : la thèse de François Gallissot

- **Théorème de Gallissot** : Il y a 3 types de formes différentielles générant les équations du mouvement du point materiel , **invariantes sous l'action du groupe de Galillée**

$$A:\begin{cases} s=\dfrac{1}{2m}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(mdv_i-F_idt\right)^2 \\ e=\dfrac{m}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(dx_j-v_jdt\right)^2 \end{cases}$$

F. Gallissot, Les formes extérieures en Mécanique (*Thèse*), Durand, Chartres, 1954.

$$B:f=\sum_{1}^{3}\delta_{ij}\left(dx_i-v_idt\right)\left(mdv_j-F_jdt\right)\ \text{with}\ \delta_{ij}\ \text{krönecker symbol}$$

$$C:\ \omega=\sum_{1}^{3}\delta_{ij}\left(mdv_i-F_idt\right)\wedge\left(dx_j-v_jdt\right)$$

- $d\omega=0$ contraint la forme de Pfaff $\delta_{ij}F_idx_j$ d'être fermée et d'être réduite à la differentielle de U : $C\Rightarrow\omega=m\delta_{ij}dv_i\wedge dx_j-dH\wedge dt$ avec $H=T-U$ et $T=1/2\sum_{i=1}^{3}m\left(v_i\right)^2$
- Cela prouve que ω a une différentielle extérieure $d\omega$ générant l'**invariant intégral de Poincaré-Cartan :**

$$d\omega=\sum_{i=1}^{3}mv_idx_j-Hdt$$

Thèse de François Gallissot de 1952 basé sur les travaux de Elie et Henri Cartan

APPLICATION DES FORMES EXTÉRIEURES DU 2e ORDRE
A LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE ET RELATIVISTE

par **François GALLISSOT** (Grenoble).

1951

Introduction

La mécanique est généralement conçue en définissant des grandeurs cinématiques vitesse, accélération, des grandeurs dynamiques forces, la différentielle du vecteur vitesse étant liée au produit vecteur force par dt par le principe de Newton. En admettant que les phénomènes mécaniques sont susceptibles d'être décrits par des équations différentielles, il est intéressant d'avoir une forme génératrice des équations différentielles complètement invariantes dans les transformations du groupe ponctuel portant sur un ensemble de $2n$ variables de position et vitesse.

A notre point de vue en mécanique Newtonienne, un point matériel de masse m est repéré par 7 variables x^i, t, v^i (i variant de 1 à 3) auquel on associe une forme extérieure construite sur les différentielles dx^i, dt, dv^i,

$$\omega = mk_{ij}dv^i \wedge dx^j - mk_{ij}v^i dv^j \wedge dt + k_{ij}X^i dx^j \wedge dt$$

(k_{ij} symbole de Krönecker, X^i composantes de la force F appliquée au point) ω est invariante dans les transformations du groupe Galiléen et son expression a même forme par rapport à tout repère Galiléen orthonormé. Les équations différentielles du mouvement sont les équations associées à ω :

$$\frac{\partial\omega}{\partial(dx^j)} = -m\,dv^j + X^j dt = 0 \qquad \frac{\partial\omega}{\partial(dv^j)} = m(dx^j - v^j dt) = 0.$$

Il est essentiel de remarquer que ce sont les équations associées à ω qui lient les paramètres v^i aux différentielles des paramètres de position x^i et au temps.

(1) Cf. Communication au Congrès des Sociétés Savantes, Grenoble, 1952, sous presse. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 234, p. 2148-2150, 26 mai 1952.

MÉCANIQUE. — *Les formes extérieures et la Mécanique des milieux continus.* Note de M. François Gallissot, présentée par M. Henri Villat.

Le mouvement d'un milieu continu avec déformations est une application φ de classe $C^r (r \geq 2)$ de l'espace R^4 dans ρ^3, en désignant par ρ^3 l'espace numérique à 3 dimensions, par R^4 le produit de l'espace numérique à 3 dimensions par la droite numérique t.

Plus généralement, nous considérons les applications φ de classe C^r de l'espace numérique R^p dans l'espace numérique ρ^n, auxquelles nous associons la variété des jets (1) du premier ordre $J^1(R^p, \rho^n)$. Soient $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ les coordonnées d'un point ξ de $\rho^n(x^1, \ldots, x^p)$ les coordonnées d'un point x de R^p. Dans $J^1(R^p, \rho^n)$ de dimension $np+n+p$, les coordonnées canoniques d'un point sont $(\xi^1, \ldots, \xi^n, \ldots, a_i^k, \ldots, x^1, \ldots, x^p)$. Les éléments $(0, \ldots, 0; \ldots; a_i^k; \ldots; 0, \ldots 0)$ constituent le noyau E_{pn} de la variété des jets, de sorte que $J^1(R^p, \rho^n) = R^p E_{pn} \rho^n$.

Les champs $\vec{a}_i$ *et les formes* $\theta(\vec{a}_i)V_p$. Nous désignons par $\vec{a}_i$ le champ de vecteurs dans J^1 de composantes $(0, \ldots, 0; a_i^1, \ldots, a_i^p; 0, \ldots, 0)$. A la forme volume V_p définie sur R^p qui s'écrit $V_p = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$ et au champ $\vec{a}_i$ nous faisons correspondre, au moyen de l'opérateur des transformations infinitési-

Thèse de François Gallissot de 1952 basé sur les travaux de Elie et Henri Cartan

LES FORMES EXTÉRIEURES EN MÉCANIQUE

par F. GALLISSOT.

1952

INTRODUCTION

La mécanique des systèmes paramétriques développée traditionnellement d'après les idées de Lagrange s'est toujours heurtée à des difficultés notables lorsqu'elle a désiré aborder les questions de frottement entre solides (impossibilité et indétermination) ou la notion générale de liaison (asservissement de M. Béghin), d'autre part la forme lagrangienne des équations du mouvement ne nous donne aucune indication sur la nature du problème de l'intégration.

Dans ces célèbres leçons sur les invariants intégraux Élie Cartan a montré que toutes les propriétés des équations différentielles de la dynamique des sytèmes holonomes résultaient de l'existence de l'invariant intégral $\int \omega$, $\omega = p_i dq^i - H dt$. Ainsi à tout système holonome dont les forces dérivent d'une fonction de forces est associé une forme ω, les équations du mouvement étant les caractéristiques de la forme extérieure $d\omega$. Au cours de ces dix dernières années, sous l'influence des topologistes s'est édifiée sur des bases qui semblent définitives la théorie des formes extérieures sur les variétés différentiables. Il est alors naturel de se demander si la mécanique classique ne peut pas bénéficier largement de ce courant d'idées, si elle ne peut pas être construite en plaçant à sa base une forme extérieure de degré deux, si grâce à la notion de variétés, la notion de liaison ne peut pas être envisagée sous un angle plus intelligible, si les indéterminations et impossibilités qui paraissent paradoxales dans le cadre lagrangien n'ont pas une explication naturelle, enfin s'il n'est pas possible de considérer sous un jour nouveau le problème de l'intégration des équations du mouvement, ces dernières étant engendrées par une forme Ω de degré deux.

S'affranchir de la servitude des coordonnées

$$i(E)\Omega = 0$$

Pour atteindre ces divers objectifs il m'a semblé utile de reprendre dans le chapitre I l'étude des bases logiques sur lesquelles est édifiée la mécanique galiléenne. Je montre ainsi dans le § I que lorsqu'on se propose de trouver des formes génératrices des équations du mouvement d'un point matériel invariantes dans les transformations du groupe galiléen, la forme la plus intéressante est une forme extérieure de degré deux définie sur une variété $V_7 = E_3 \otimes E_3 \otimes T$ (E_3 espace euclidien, T droite numérique temporelle)[1]. Dans le § II on montre qu'à tout système paramétrique holonome à n degrés de liberté est associé une forme Ω de degré deux de rang $2n$ définie sur une variété différentiable dont les caractéristiques sont les équations du mouvement[2]. Cette forme s'exprime si l'on veut au moyen de $2n$ formes de Pfaff et de dt, la forme hamiltonienne n'étant qu'un cas particulier simple. Dans le § 3 j'indique sommairement comment on peut s'affranchir de la servitude des coordonnées dans l'étude des systèmes dynamiques et le rôle important joué par l'opérateur $i(\ )$ antidérivation de M. H. Cartan[3], le champ caractéristique E de la forme Ω étant défini par la relation $i(E)\Omega = 0$.

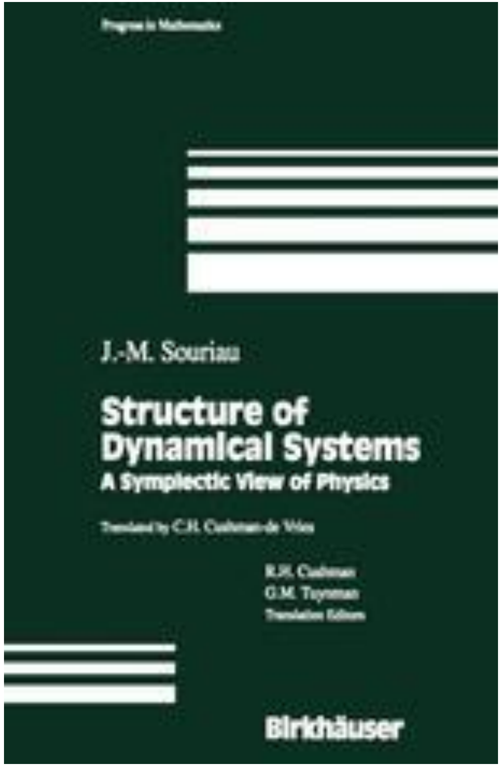
(1) M. Kravtchenko a présenté cette conception au VIIIe Congrès de Mécanique.

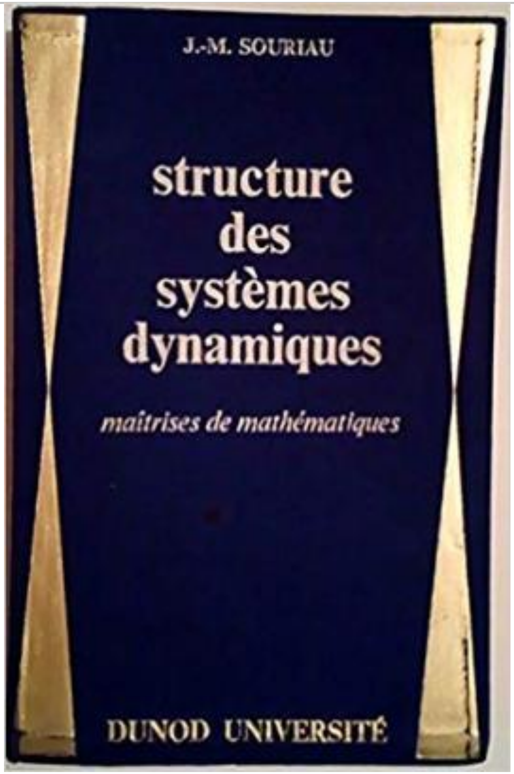
(2) Dès 1946 M. Lichnerowicz au *Bulletin des Sciences Mathématiques* tome LXX, p. 90 a déjà introduit les formes extérieures pour la formation des équations des systèmes holonomes et linéairement non holonomes.

(3) M. H. Cartan, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950. Masson, Paris, 1951.

F. Gallissot, Les formes extérieures en Mécanique (*Thèse*), Durand, Chartres, 1954.

Le Livre de J.M. Souriau « Structure des systèmes dynamiques », 1969

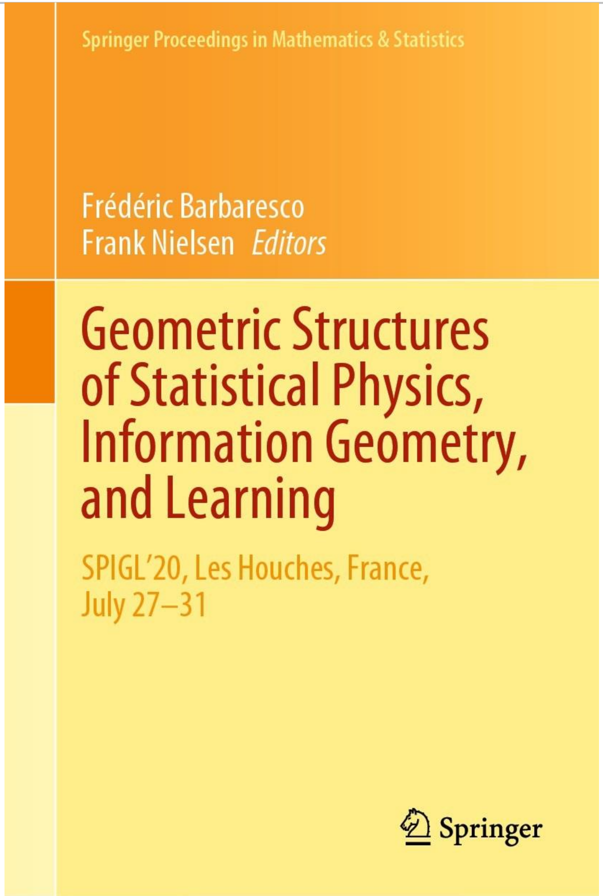




- Introduction de la géométrie symplectique en mécanique
- Invention de l'"application moment" (géométrisation du théorème de Noether)
- Théorème de decomposition barycentrique
- La masse totale d'un système dynamique isolé est la classe de cohomologie du défaut d'équivariance de l'application moment
- Mécanique Statistique (Chapitre IV): Thermodynamique des groups de Lie

http://www.jmsouriau.com/structure_des_systemes_dynamiques.htm
http://www.springer.com/us/book/9780817636951

50ème anniversaire du livre SSD de Souriau / séminaire SPIGL'20 aux Houches



Structure des Systèmes Dynamiques Jean-Marie Souriau's Book 50th Birthday

Géry de Saxcé & Charles-Michel Marle

Conference paper | First Online: 27 June 2021

Part of the Springer Proceedings in Mathematics & Statistics book series (PROMS,volume 361)

Abstract

Jean-Marie Souriau's book "Structure des systèmes dynamiques", published in 1970, republished recently by Gabay, translated in English and published under the title "Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics", is a work with an exceptional wealth which, fifty years after its publication, is still topical. In this paper, we give a brief description of its content and we intend to highlight the ideas that to us, are the most creative and promising.

https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-77957-3_1

SSD Chapitre IV: L'équilibre de Gibbs n'est pas covariant sous l'action des groupes de la physique

MÉCANIQUE STATISTIQUE COVARIANTE

Le groupe des translations dans le temps (7.9) est un sous-groupe du groupe de Galilée ; mais *ce n'est pas un sous-groupe invariant*, ainsi que le montre un calcul trivial. Si un système dynamique est *conservatif* dans un repère d'inertie, il en résulte qu'il peut *ne plus être conservatif dans un autre*. La formulation (17.24) du principe de Gibbs doit donc être élargie, pour devenir compatible avec la relativité galiléenne.

Nous proposons donc le principe suivant :

(17.77) Si un système dynamique est invariant par un sous-groupe de Lie G' du groupe de Galilée, les équilibres naturels du système constituent l'ensemble de Gibbs du groupe dynamique G'.

Soit $\mathscr{G}'$ l'algèbre de Lie G' ; on sait que $\mathscr{G}'$ est une sous-algèbre de Lie de celle de G, notée $\mathscr{G}$; un équilibre du système sera caractérisé par un élément Z de $\mathscr{G}'$, donc de $\mathscr{G}$; on pourra écrire

(17.78) $$Z = \begin{bmatrix} j(\omega) & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en utilisant les notations (13.4) ; Z parcourt l'ensemble Ω défini en (16.219) ; à chaque valeur de Z est associé un élément M du dual $\mathscr{G}'^*$ de $\mathscr{G}'$, valeur moyenne du moment μ ; on peut appliquer les formules (16.219), (16.220), qui généralisent les relations thermodynamiques (17.26), (17.27), (17.28).

(17.79) On voit que c'est Z (17.78) qui généralise la « température » ; le théorème d'isothermie (17.32) s'étend immédiatement : l'équilibre d'un système composé de plusieurs parties sans interactions s'obtient en attribuant à chaque composante un équilibre *correspondant à la même valeur de Z* ; l'entropie s, le potentiel de Planck z et le moment moyen M sont *additifs*. W

J.M. Souriau, Structure des systèmes dynamiques, Chapitre IV « Mécanique Statistique »

Trompette de Souriau

Lorsque le fait qu'on rencontre est en opposition avec une théorie régnante, il faut accepter le fait et abandonner la théorie, alors même que celle-ci, soutenue par de grands noms, est généralement adoptée
- Claude Bernard "Introduction à l'Étude de la Médecine Expérimentale"

THALES

La Thermodynamique des groupes de Lie

- La température géométrique (de Planck) est **un élément de l'algèbre de Lie** du groupe dynamique (Galillée ou Poincaré) agissant sur le système, et la chaleur géométrique **un élément du dual**.

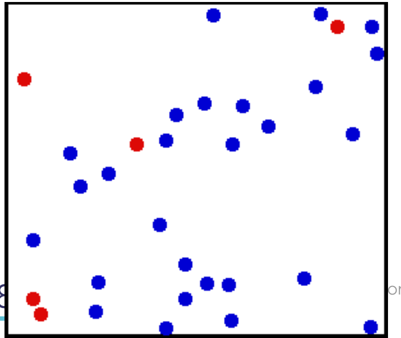
- L'Entropie géométrique est **la transformée de Legendre de l'opposée du logarithme de la transformée de Laplace**

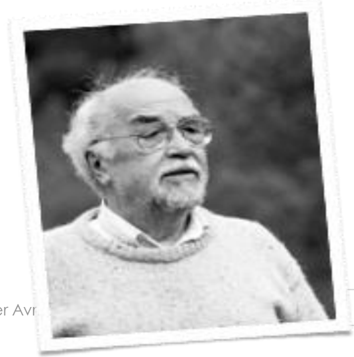
$$Entropie = Legendre(-\log Laplace)$$

- La métrique de Fisher de la géométrie de l'information est associée à la 2-forme KKS (Kostant-Kirillov-Souriau); 2-forme conférant une structure symplectique aux orbites coadjointes associée à l'application moment

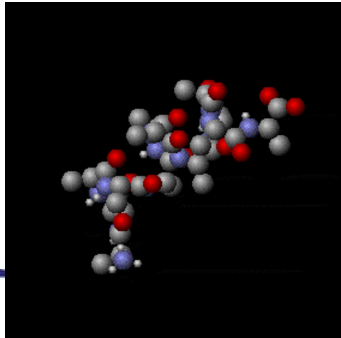
- La métrique de Fisher s'identifie à une **capacité calorifique géométrique (hessien du potentiel de Massieu)**

- L'Entropie est une fonction de Casimir invariante le long des feuilles symplectiques données par les orbites coadjointes





Le formalisme de Souriau est **covariant** (covariance of de la densité de Gibbs sous l'action des groups dynamiques)



Charles-Michel Marle (Corps des Mines, Sorbonne Université)

On Gibbs states of mechanical systems with symmetries
Charles-Michel Marle

Gibbs states for the Hamiltonian action of a Lie group on a symplectic manifold were studied, and their possible applications in Physics and Cosmology were considered, by the French mathematician and physicist Jean-Marie Souriau. They are presented here with detailed proofs of all the stated results. Using an adaptation of the cross product for pseudo-Euclidean three-dimensional vector spaces, we present several examples of such Gibbs states, together with the associated thermodynamic functions, for various two-dimensional symplectic manifolds, including the pseudo-spheres, the Poincaré disk and the Poincaré half-plane.

https://arxiv.org/abs/2012.00582

Charles MARLE

X 53

OPEN

THALES

Géométrie de l'Information et structure de Legendre

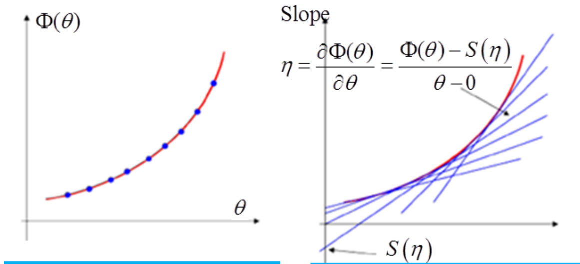
Transformée de Legendre , potentiels duaux et métrique de Fisher

- **S.I. Amari** a prouvé que la métrique riemannienne dans une famille exponentielle est la **matrice d'information de Fisher** définie par :

$$g_{ij} = -\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right]_{ij} \quad \text{with} \quad \Phi(\theta) = -\log \int_R e^{-\langle \theta, y \rangle} dy$$

- et le potentiel dual, l' **entropie de Shannon** , est donné par la **transformée de Legendre** :

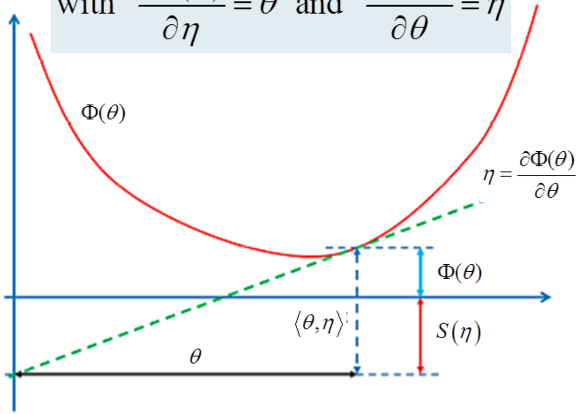
$$S(\eta) = \langle \theta, \eta \rangle - \Phi(\theta) \quad \text{with} \quad \eta_i = \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta_i} \quad \text{and} \quad \theta_i = \frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i}$$



Classical Geometry
(curve is given by a continuum of points)

Plücker Geometry
(curve is given by the envelop of its tangents)

$$S(\eta) = \langle \theta, \eta \rangle - \Phi(\theta)$$
$$\text{with} \quad \frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta} = \theta \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta} = \eta$$



Métrique de Fisher et 2-forme de Souriau: thermodynamique des groupes de Lie

Mécanique statistqiue , Potentiels duaux & métrique de Fisher

- En mécanique statistique géométrique, **J.M. Souriau** a développé une « **thermodynamique des groupes de Lie » des systèmes dynamiques où la densité de Gibbs** (entropie maximale) est covariante par rapport à l'action du groupe de Lie. Dans le modèle de Souriau, les structures précédentes de la géométrie de l'information sont conservées :

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \text{ with } \Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda \qquad U : M \to \mathfrak{g}^*$$

$$S(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) \text{ with } Q = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^* \text{ and } \beta = \frac{\partial S(Q)}{\partial Q} \in \mathfrak{g}$$

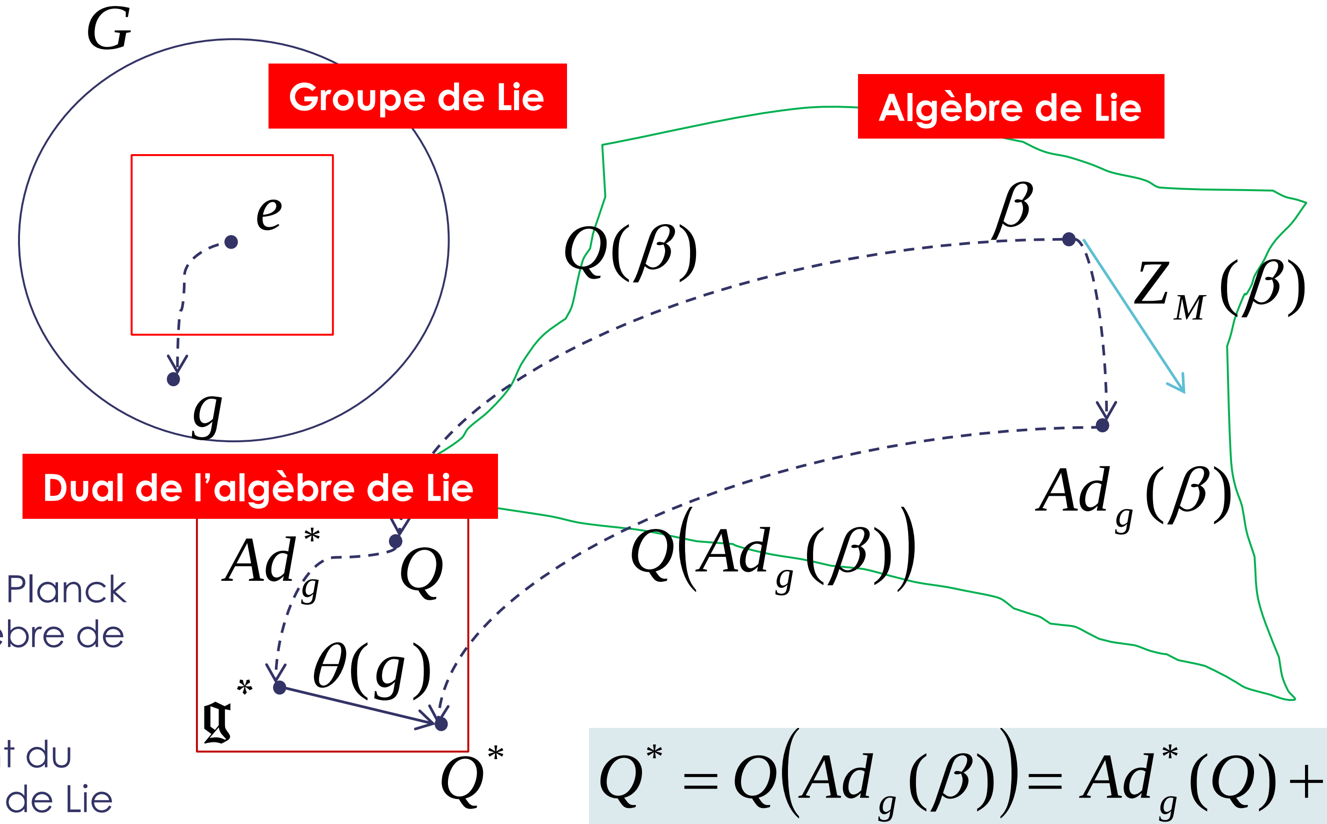
Jean-Marie Souriau

- modèle **thermodynamique des groupes de Lie** de Souriau , β est une température « géométrique » (Planck), élément de l'algèbre de Lie du groupe $\mathfrak{g}$, et Q est une chaleur « géométrique », élément du dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$.

OPEN

THALES

Cocycle de Souriau: Non équivariance de l'opérateur coadjoint

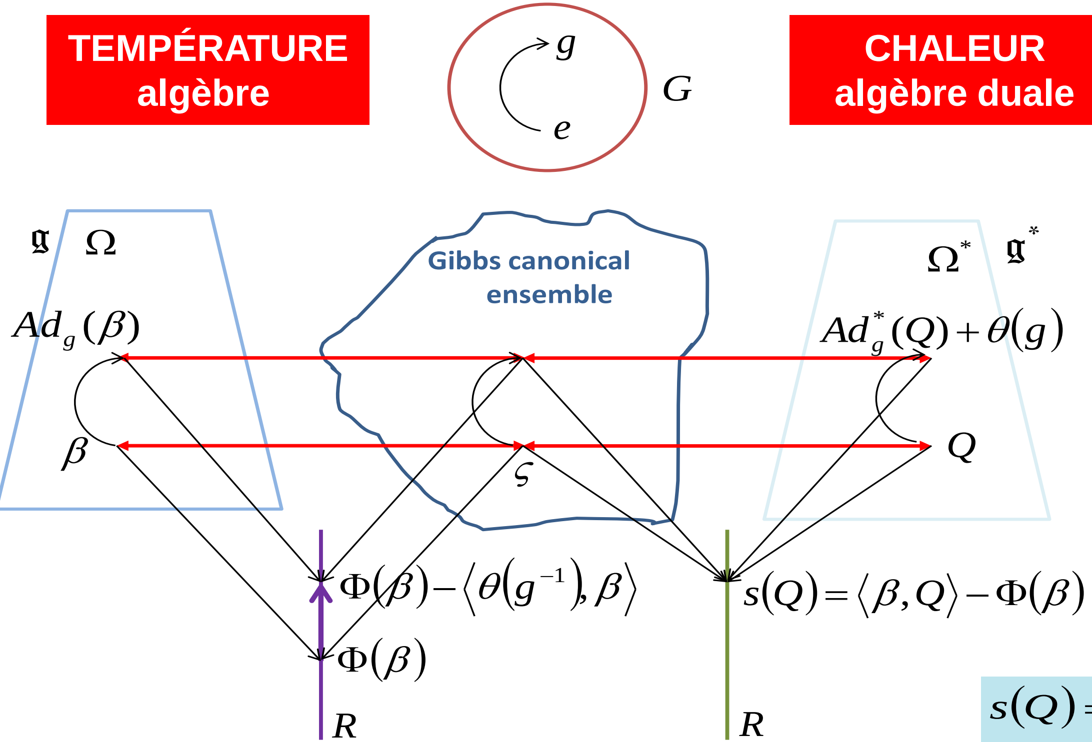


β : température de Planck
Élément de l'algèbre de Lie

Q : Chaleur, élément du dual de l'algèbre de Lie

$$Q^* = Q\left(Ad_g(\beta)\right) = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$$

Métrique de Fisher-Souriau et Thermodynamique des groupes de Lie



Logarithme de la fonction (Fonction caractéristique de Massieu)

Entropie

Métrique de Fisher

$$g_\beta([\beta,Z_1],[\beta,Z_2])=\tilde{\Theta}_\beta(Z_1,[\beta,Z_2])\geq 0$$

$$I(\beta)=I\left(Ad_g(\beta)\right)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}=\frac{\partial^2 \log \int_M e^{-\langle\beta,U(\xi)\rangle}d\lambda}{\partial\beta^2}$$

Invariance de l'entropie sous l'action du groupe

Legendre Clairaut

$$s(Q)=\langle\beta,Q\rangle-\Phi(\beta)=\left\langle\Theta^{-1}(Q),Q\right\rangle-\Phi\left(\Theta^{-1}(Q)\right)$$

$$Q=\Theta(\beta)=\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\in\mathfrak{g}^*$$

$$\beta=\Theta^{-1}(Q)\in\mathfrak{g}$$

Métrique de Fisher Souriau liée à la 2 forme KKS (Kirillov-Kostant-Souriau)

- La 2 forme KKS (Kostant-Kirillov-Souriau) dans le cas à cohomologie non nulle de la Thermodynamique des groupes de Lie étend la définition de la métrique de Fisher de la géométrie de l'Information:

Métrique de Fisher-Souriau $I(\beta)=\left[g_\beta\right]$ avec $g_\beta\left([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]\right)=\tilde{\Theta}_\beta\left(Z_1,[\beta,Z_2]\right)$

$$\text{avec } \tilde{\Theta}_\beta\left(Z_1,Z_2\right)=\tilde{\Theta}\left(Z_1,Z_2\right)+\left\langle Q,[Z_1,Z_2]\right\rangle$$

Cohomologie non-nulle: terme additionnel (cocycle de Souriau)

2 forme KKS classique

$$\tilde{\Theta}(X,Y)=J_{[X,Y]}-\left\{J_X,J_Y\right\} \text{ avec } J(x):M\rightarrow\mathfrak{g}^* \text{ tel que } J_X(x)=\left\langle J(x),X\right\rangle, X\in\mathfrak{g}$$

$$\tilde{\Theta}\left(X,Y\right):\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\rightarrow\Re$$

$$X,Y\mapsto\left\langle\Theta(X),Y\right\rangle$$

$$\text{avec } \Theta(X)=T_e\theta\left(X(e)\right)$$

$$\tilde{\Theta}\left(\beta,Z\right)+\left\langle Q,[\beta,Z]\right\rangle=0$$

$$\beta\in Ker\,\tilde{\Theta}_\beta$$

Equation fondamental de Souriau de la thermodynamique des groupes de Lie

$$Q\left(Ad_g(\beta)\right)=Ad_g^*(Q)+\theta\left(g\right)$$

François Jacques Dominique Massieu : fonction caractéristique

Publication de François Massieu

$$S=\varphi-\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\left(1/T\right)}=\varphi-\beta.U \quad \text{(Tr. Legendre)}$$

S: Entropie, φ: fonction caractéristique

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

TOME XXII. — N° 2.

THERMODYNAMIQUE.

MÉMOIRE

SUR

LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DES DIVERS FLUIDES

ET SUR LA THÉORIE DES VAPEURS,

PAR F. MASSIEU,

INGÉNIEUR DES MINES, PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

THERMODYNAMIQUE. — *Addition au précédent Mémoire sur les fonctions caractéristiques.* Note de M. F. MASSIEU, présentée par M. Combes.

» Cette conclusion résultait *à posteriori* de la théorie même; mais j'ai reconnu qu'il était possible de l'établir de prime abord par un procédé qui a l'avantage de conduire plus simplement à la connaissance de la fonction caractéristique et de montrer la liaison de cette fonction avec d'autres fonctions déjà introduites dans la science, savoir : l'entropie S et l'énergie ou chaleur interne U. Je rappellerai d'ailleurs qu'une fois la fonction caractéristique d'un corps déterminée, la théorie thermodynamique de ce corps est faite.

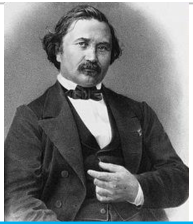
$$\boxed{\psi = S - \frac{U}{T}.}$$

Or, pour avoir S et U, et par suite ψ, il suffit de connaître quelles sont les quantités élémentaires de chaleur dQ qu'il faut fournir au corps suivant un cycle quelconque, pour le faire passer d'un état initial à un état déterminé, et en outre l'accroissement dU de sa chaleur interne pour les différents éléments de ce cycle, ou de tout autre cycle, reliant le même état initial au même état final.

THALES

Mauvais conseil du Prof. Joseph Louis François Bertrand à Massieu

- Dans les publications suivantes, l'article de François Massieu est revu par Joseph Louis François Bertrand, qui lui donne un mauvais conseil de remplacer la variable 1/T par la variable T. Si les équations semblent plus simples, le support de la structure par la transformée de Legendre est cassé.


Joseph Louis François Bertrand

(1) Dans le mémoire dont un extrait est inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 18 octobre 1869, ainsi que dans la Note additionnelle insérée le 22 novembre suivant, j'avais adopté pour fonction caractéristique $\frac{H}{T}$, ou $S - \frac{U}{T}$; c'est d'après les bons conseils de M. Bertrand que j'y ai substitué la fonction H, dont l'emploi réalise quelques simplifications dans les formules.

- La fonction caractéristique de Massieu et sa bonne paramétrisation ont été redécouvertes par Max Planck (1897) et développées par Herbert Callen (1960) et Roger Balian.


M. Planck


H. Callen


R. Balian

Mécanique Statistique, Groupe de Lie et Cosmologie (Souriau 1974)

FORMULATION SYMPLECTIQUE DE LA MECANIQUE STATISTIQUE

1974

RESUME

La notion classique d'ensemble canonique de Gibbs est étendue au cas d'une variété symplectique sur laquelle un groupe de Lie possède une action symplectique ("groupe dynamique").

La définition rigoureuse donnée ici permet d'étendre un certain nombre de propriétés thermodynamiques classiques (la température est ici un élément de l'algèbre de Lie du groupe, la chaleur un élément de son dual), notamment des inégalités de convexité.

Dans le cas de groupes non commutatifs, des propriétés particulières apparaissent : la symétrie est spontanément brisée, certaines relations de type cohomologique sont vérifiées dans l'algèbre de Lie du groupe.

Diverses applications sont abordées (corps tournants, mécanique statistique covariante ou relativiste).

[Ces résultats précisent et complètent une étude publiée dans un ouvrage antérieur (2) qui sera désigné par les initiales S.S.D.].

Souriau, J-M., Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie, Colloques Internationaux C.N.R.S., n°237 – Géométrie symplectique et physique mathématique, pp.59-113, 1974

Traduction en anglais par F. Barbaresco: https://www.academia.edu/42630654/Statistical_Mechanics_Lie_Group_and_Cosmology_1_st_part_Symplectic_Model_of_Statistical_Mechanics

Main references for Souriau « Lie Groups Thermodynamics »

1966

SUPPLEMENTO AL NUOVO CIMEN
VOLUME IV

N. 1, 1966

Définition covariante des équilibres thermodynamiques.

J.-M. Souriau
Faculté des Sciences - Marseille

(ricevuto il 5 Novembre 1965)

Contents. — 1. Un problème variationnel. – 2. Mécanique statistique classique. – 3. Equilibres permis par un groupe de Lie. – 4. Exemples. – 5. Localisation de la température vectorielle.

1974

Colloques Internationaux C.N.R.S.
N° 237 – Géométrie symplectique et physique mathématique

MÉCANIQUE STATISTIQUE,
GROUPES DE LIE ET COSMOLOGIE

Jean-Marie SOURIAU (1)

Première partie
FORMULATION SYMPLECTIQUE DE LA MECANIQUE STATISTIQUE

Référence to Blanc-Lapierre Book in Souriau Book

[7] A. Blanc-Lapierre, P. Casal, and A. Tortrat, *Méthodes mathématiques de la mécanique statistique*, Masson, Paris, 1959.

Souriau Quinta Essentia (Quinte Essence)

- *"Plaçons-nous d'abord dans le cadre de la mécanique classique. Étudions un système mécanique isolé, non dissipatif—nous dirons brièvement une «chose». L'ensemble des mouvements de cette «chose» est une variété symplectique. Pourquoi ? Il suffit de se reporter à la Mécanique Analytique de Lagrange (1811); l'espace des mouvements y est traité comme variété différentiable; les coordonnées covariantes et contravariantes de la forme symplectique y sont écrites (Ce sont les "parenthèses" et "crochets" de Lagrange). Évoquons maintenant la géométrie du 20éme siècle. Soit G un groupe difféologique (par exemple un groupe de Lie); μ un moment de G (un moment, c'est une 1-forme invariante à gauche sur G); alors l'action du groupe sur μ engendre canoniquement un espace symplectique (ces groupes pourront avoir une dimension infinie). Présomption épistémologique: derrière chaque «chose» est caché un groupe G (sa "source"), et les mouvements de la «chose» sont simplement des moments de G (doublet latin mnémotechnique : momentum-movimentum). L'isolement de la «chose» indique alors que le groupe de Poincaré (respectivement de Galilée-Bargmann) est inséré dans G; voilà l'origine des grandeurs conservées relativistes (respectivement classiques) associées à un mouvement x: elles constituent simplement le moment induit sur le groupe spatio-temporel par le moment-mouvement x."*
  Quantique? Alors c'est géométrique

Souriau Quinta Essentia (Quinte Essence)

- *“Il y a un théorème qui remonte au XXème siècle. Si on prend une orbite coadjointe d’un groupe de Lie, elle est pourvue d’une structure symplectique. Voici un algorithme pour produire des variétés symplectiques : prendre des orbites coadjointes d’un groupe. Donc cela laisse penser que derrière cette structure symplectique de Lagrange, il y avait un groupe caché. Prenons le mouvement classique d’un moment du groupe, alors ce groupe est très «gros» pour avoir tout le système solaire. Mais dans ce groupe est inclus le groupe de Galilée, et tout moment d’un groupe engendre des moments d’un sous-groupe. On va retrouver comme cela les moments du groupe de Galilée, et si on veut de la mécanique relativiste, cela va être celui du groupe de Poincaré. En fait avec le groupe de Galilée, il y a un petit problème, ce ne sont pas les moments du groupe de Galilée qu’on utilise, ce sont les moments d’une extension centrale du groupe de Galilée, qui s’appelle le groupe de Bargmann, et qui est de dimension 11. C’est à cause de cette extension, qu’il y a cette fameuse constante arbitraire figurant dans l’énergie. Par contre quand on fait de la relativité restreinte, on prend le groupe de Poincaré et il n’y a plus de problèmes car parmi les moments il y a la masse et l’énergie c’est mc^2. Donc le groupe de dimension 11 est un artéfact qui disparait, quand on fait de la relativité restreinte.”*

Groupe de Galillée et extension centrale de Bargmann

- Cocycle symplectique du groupe de Galillée: V. Bargmann (Ann. Math. 59, 1954, pp 1–46) a prouvé que l'espace de cohomologie symplectique du groupe de Galillée est de dimension 1.

- Groupe et Algèbre de Gallilée

$$\begin{cases} \vec{x}' = R.\vec{x} + \vec{u}.t + \vec{w} \\ t' = t + e \end{cases}$$

$$\vec{x}, \vec{u} \ \text{ and } \ \vec{w} \in R^3, e \in R^+$$

$$R \in SO(3)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ t' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \vec{u} & \vec{w} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\omega} & \vec{\eta} & \vec{\gamma} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} \vec{\eta} \ \text{ and } \ \vec{\gamma} \in R^3, \varepsilon \in R^+ \\ \vec{\omega} \in so(3) : \vec{x} \mapsto \vec{\omega} \times \vec{x} \end{cases}$$

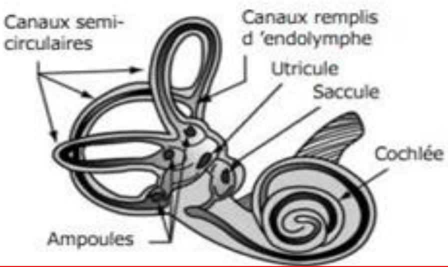
- Extension centrale de Bargman:

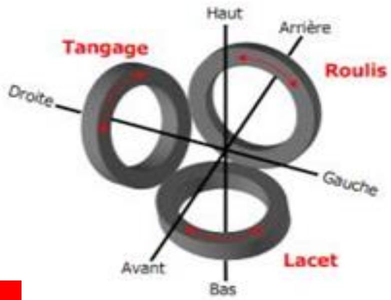
$$\begin{bmatrix} R & \vec{u} & 0 & \vec{w} \\ 0 & 1 & 0 & e \\ -\vec{u}^t R & -\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Souriau Quinta Essentia (Quinte Essence)

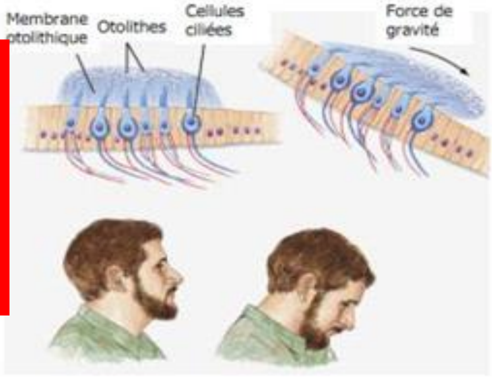
- *"Je me suis dit, à force de rencontrer des groupes, il y a quelque chose de caché là-dessous. La catégorie métaphysique des groupes qui plane dans l'empyrée des mathématiques, que nous découvrons et que nous adorons, elle doit se rattacher à quelque chose de plus proche de nous. En écoutant de nombreux exposés faits par des neurophysiologistes, j'ai fini par apprendre le rôle primitif du déplacement des objets. Nous savons manipuler ces déplacements mentalement avec une très grande virtuosité. Ce qui nous permet de nous manipuler nous-même, de marcher, de courir, de sauter, de nous rattraper quand nous tombons, etc. Ce n'est pas vrai seulement pour nous, c'est vrai aussi pour les singes ; ils sont beaucoup plus adroits que nous pour anticiper les résultats d'un déplacement. Pour certaines opérations élémentaires de «lecture», ils vont même dix fois plus vite que nous. Beaucoup de neurophysiologistes pensent qu'il y a une structure spéciale génétiquement inscrite dans le cerveau, le câblage d'un groupe … Lorsque il y un tremblement de terre, nous assistons à la mort de l'Espace. … Nous vivons avec nos habitudes que nous pensons universelles. … La neuroscience s'occupe rarement de la géométrie … Pour les singes qui vivent dans les arbres, certaines propriétés du groupe d'Euclide sont mieux câblées dans leurs cerveaux."*

Le système vestibulaire et les groupes de Lie (cf. travaux d'Alain Berthoz & Daniel Bennequin)

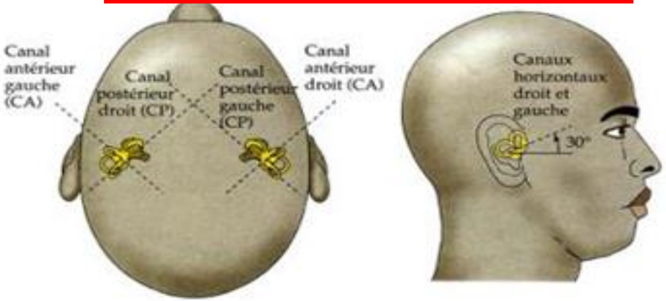


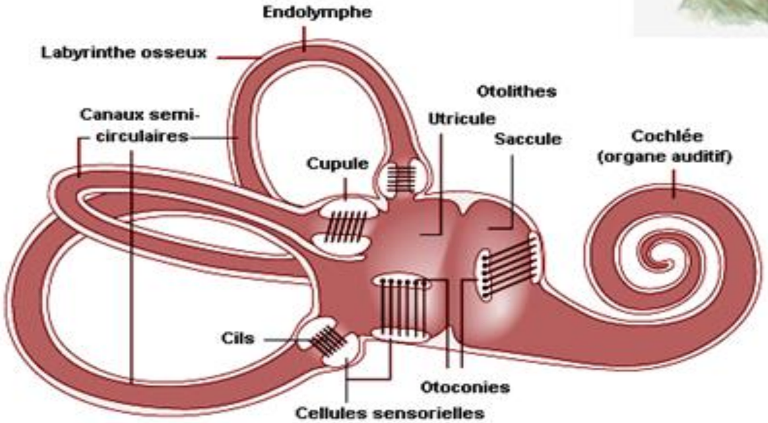


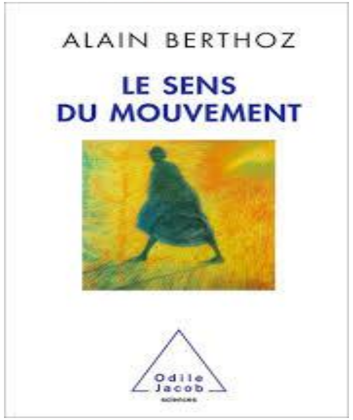
LE système vestibulaire fait des mesures dans l'algèbre de Lie du groupe de Gallillée homogène



Le cerveau commence par apprendre l'espace





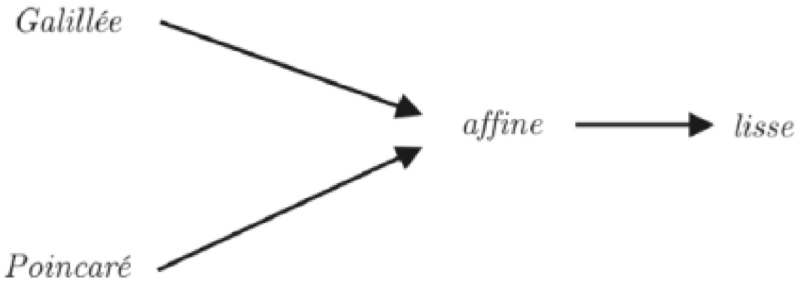


Daniel Bennequin, GSI'17, Geometry and the Visio-Vestibular Information
https://www.youtube.com/watch?v=a-ctwxBpJxE&t=782s

GDR CNRS ISIS & ROBOTIQUE « Apprentissage et Robotique »
http://www.gdr-isis.fr/index.php?page=reunion&idreunion=388

SOURIAU: Thermodynamique et groupe affine

- « Les différentes versions de la science mécanique peuvent se classer par la géométrie que chacune implique pour l'espace et le temps ; géométrie qui se détermine par le groupe de covariance de la théorie. Ainsi la mécanique newtonienne est covariante par le **groupe de Galilée**; la relativité restreinte par le **groupe de Lorentz-Poincaré** ; la relativité générale par le **groupe « lisse »** (le groupe des difféomorphismes de l'espace-temps). Il existe cependant une partie des énoncés de la mécanique dont la covariance appartient à un quatrième groupe – rarement envisagé : **le groupe affine**. Groupe qui figure dans le diagramme d'inclusion suivant :



- Comment se fait-il qu'un point de vue unitaire, (**qui serait nécessairement une véritable Thermodynamique**), ne soit pas encore venu couronner le tableau ? Mystère... »

OPEN
THALES

Le Lien avec Thermodynamique classique

Relations de Souriau:

$Q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}$	$\beta = \dfrac{\partial S}{\partial Q}$
$S(Q) = \left\langle \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \beta \right\rangle - \Phi$	$\Phi(\beta) = \left\langle Q, \dfrac{\partial s}{\partial Q} \right\rangle - S$

Pour la thermodynamique classique, le groupe qui agit est la translation temporelle et seule l'énergie est conservée. On retrouve la définition de Boltzmann-Clausius de l'Entropie:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\partial S}{\partial Q} \\ \beta = \dfrac{1}{T} \end{cases} \Rightarrow dS = \frac{dQ}{T}$$

Thermodynamique des groupes de Lie: Capacité Calorifique

Nous prenons désormais Z dans C. La valeur moyenne du moment $\Psi(x)$ dans l'état de Gibbs est égal à la dérivée

$$Q = z'(Z);$$

$Z \mapsto Q$ est un difféomorphisme analytique de C sur un ouvert convexe de $\mathfrak{g}^*$; la transformée de Legendre s de z :

$$s(Q) = QZ - z$$

y est convexe et vérifie $Z = s'(Q)$; la dérivée seconde:

$$\boxed{K = z''(Z)}$$

est un tenseur positif, dont l'inverse est égal à $s''(Q)$.

K munit l'ensemble C d'une structure riemannienne invariante par l'action du groupe; pour cette structure, l'application linéaire $\mathrm{Ad}(Z)$ est antihermitienne.

L'application f_Z, définie par:

$$\boxed{f_Z(Z', Z'') = K([Z, Z'], Z'') \quad \forall Z', Z'' \in \mathfrak{g}}$$

est un cocycle symplectique, cohomologue à f [formule (2,7 C)]; son noyau est l'orthogonal de l'orbite adjointe de Z pour la structure riemannienne de C.

La métrique de Fisher-Souriau est une géométrisation de la notion de «Capacité calorifique» (Pierre Duhem a développé cette idée de « capacités généralisées »)

■ Dans le cas classique, on ne considère que le groupe de dimension 1 des translations temporelles (qui n'est défini qu'après avoir choisi un référentiel - par exemple celui de la boîte qui contient le gaz). Alors, avec des unités convenables, Z est l'inverse de la TEMPERATURE ABSOLUE; z est le POTENTIEL THERMODYNAMIQUE DE PLANCK; $-s$ est l'ENTROPIE; Q est l'ENERGIE INTERNE; K caractérise la CAPACITE CALORIFIQUE. ■

THALES

Thermodynamique des groupes de Lie: Capacité Calorifique

Il faut bien entendu que cette intégrale soit convergente ; nous définirons l'ensemble canonique de Gibbs Ω comme le plus grand ouvert (dans l'algèbre de Lie) où cette intégrale est localement normalement convergente (en Θ). On montre que Ω est convexe, et que z est une fonction C^∞ sur Ω ; que la dérivée $Q = \frac{\partial z}{\partial \Theta}$ coïncide avec la valeur moyenne de l'énergie E (Q généralise donc la chaleur) ; que le tenseur $\frac{\partial Q}{\partial \Theta}$ est symétrique et positif (il généralise la capacité calorifique). Il en résulte que z est fonction convexe de Θ ; la transformation de Legendre lui associe une fonction concave, à savoir

$$(7.3) \qquad Q \mapsto s = z - Q\Theta$$

s est l'entropie.

Métrique de Fisher-Souriau et cocycle symplectique de Souriau

pour chaque "température" Θ , définissons un tenseur f_Θ , somme du cocycle f (défini en (3.2)) et du cobord de la chaleur :

(7.4) $$f_\Theta(Z,Z') = f(Z,Z') + Q[Z,Z'] .$$

f_Θ jouit alors des propriétés suivantes :

5)
a) f_Θ est un cocycle symplectique ;

b) $\Theta \in \ker f_\Theta$

c) Le tenseur symétrique g_Θ , défini sur l'ensemble de valeurs de $\mathrm{ad}(\Theta)$ par

$$g_\Theta([\Theta,Z],[\Theta,Z']) = f_\Theta(Z,[\Theta,Z']) .$$

est positif (et même défini positif si l'action du groupe est effective).

Ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique U - mais seulement le groupe G , son cocycle symplectique f et les couples Θ , Q . Peut-être cette "thermodynamique des groupes de Lie" a-t-elle un intérêt mathématique.

THALES

Cas des gaussiennes multivariées

Exemple : (*loi normale*) :

Prenons le cas $V = R^n$, λ = mesure de Lebesgue, $\Psi(x) \equiv \begin{pmatrix} x \\ x \otimes x \end{pmatrix}$;
un élément Z du dual de E peut se définir par la formule

$$Z(\Psi(x)) \equiv \bar{a}.x + \tfrac{1}{2}\bar{x}.H.x$$

[$a \in R^n$; H = matrice symétrique]. On vérifie que la convergence de l'intégrale I_0 a lieu si la matrice H est positive (1) ; dans ce cas la loi de Gibbs s'appelle *loi normale de Gauss* ; on calcule facilement I_0 en faisant le changement de variable $x^* = H^{1/2}\,x + H^{-1/2}\,a$ (2) ; il vient

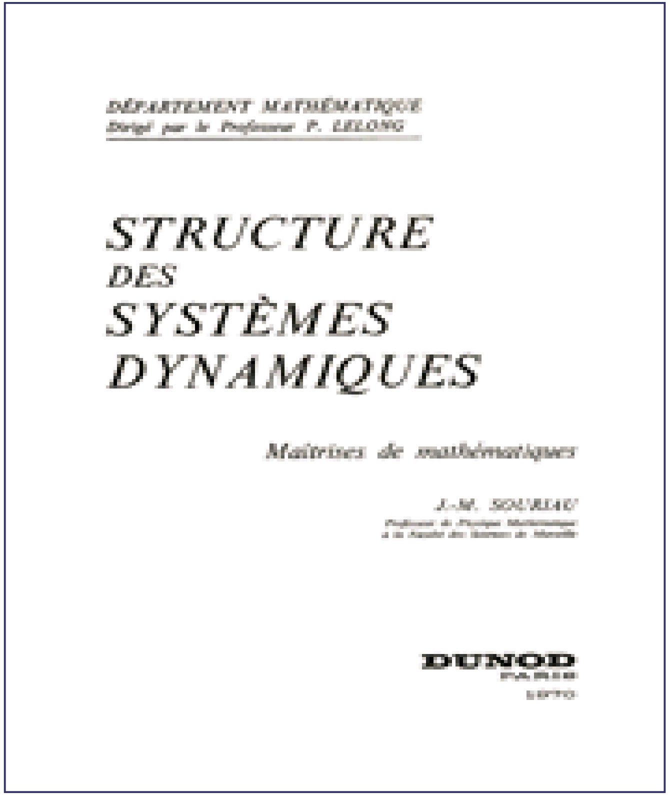
$$\boxed{z = \tfrac{1}{2}\left[\bar{a}.H^{-1}.a - \log(\text{dét}\,(H)) + n \log(2\,\pi)\right]}$$

alors la convergence de I_1 a lieu également ; on peut donc calculer M, qui est défini par les moments du premier et du second ordre de la loi (16.196) ; le calcul montre que le moment du premier ordre est égal à $-H^{-1}.a$ et que les composantes du tenseur *variance* (16.196) sont égales aux éléments de la matrice H^{-1} ; le moment du second ordre s'en déduit immédiatement.

La formule (16.200) donne l'*entropie* :

$$\boxed{s = \frac{n}{2}\log(2\,\pi e) - \frac{1}{2}\log(\text{dét}\,(H))} \; ;$$

(1) Voir *Calcul linéaire*, tome II.
(2) C'est-à-dire en recherchant l'*image* de la loi par l'application $x \mapsto x^*$.



http://www.jmsouriau.com/structure_des_systemes_dynamiques.htm

Exemple des gaussiennes multivariées traité par Souriau

Densité gaussienne multivariée paramétrée par les moments

$$p_{\hat{\xi}}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(R)^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(z-m)^T R^{-1}(z-m)}$$

$$\frac{1}{2}(z-m)^T R^{-1}(z-m)=\frac{1}{2}\left[z^T R^{-1}z-m^T R^{-1}z-z^T R^{-1}m+m^T R^{-1}m\right]$$

$$=\frac{1}{2}z^T R^{-1}z-m^T R^{-1}z+\frac{1}{2}m^T R^{-1}m$$

$$p_{\hat{\xi}}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(R)^{1/2}e^{\frac{1}{2}m^T R^{-1}m}}e^{-\left[-m^T R^{-1}z+\frac{1}{2}z^T R^{-1}z\right]}=\frac{1}{Z}e^{-\langle\xi,\beta\rangle}$$

La gaussienne est une densité à Maximum d'Entropie du 1er ordre

$$\xi=\begin{bmatrix} z \\ zz^T \end{bmatrix} \text{ et } \beta=\begin{bmatrix} -R^{-1}m \\ \frac{1}{2}R^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ H \end{bmatrix} \text{ avec } \langle\xi,\beta\rangle=a^T z+z^T Hz=Tr\left[za^T+H^T zz^T\right]$$

OPEN

THALES

Etats de Gibbs pour des actions hamiltoniennes de sous-groupes du groupe de Galillée

- Transformation de Galillée en position et vitesse:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}' & \vec{v}' \\ t' & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{d} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} & \vec{v} \\ t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{r} + t\vec{b} + \vec{d} & A\vec{v} + \vec{b} \\ t + e & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **<u>Théorème de Souriau</u>**: cette action est hamiltonienne, avec l'application ***J***, définie sur l'espace d'évolution de la particule, à valeur dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie du groupe ***G***, comme application moment

$$J(\vec{r},t,\vec{v},m) = m \begin{pmatrix} \vec{r}\times\vec{v} & 0 & 0 \\ \vec{r} - t\vec{v} & 0 & 0 \\ \vec{v} & \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 & 0 \end{pmatrix} = m\left\{ \vec{r}\times\vec{v}, \vec{r} - t\vec{v}, \vec{v}, \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 \right\} \in \mathfrak{g}^*$$

- Formule de couplage:

$$\langle J(\vec{r},t,\vec{v},m), \beta \rangle = \left\langle m\left\{ \vec{r}\times\vec{v}, \vec{r} - t\vec{v}, \vec{v}, \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 \right\}, \left\{ \vec{\omega}, \vec{\alpha}, \vec{\delta}, \varepsilon \right\} \right\rangle$$

$$Z = \begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \vec{\omega}, \vec{\alpha}, \vec{\delta}, \varepsilon \right\} \in \mathfrak{g}$$

$$\langle J(\vec{r},t,\vec{v},m), \beta \rangle = m\left(\vec{\omega}\vec{r}\times\vec{v} - (\vec{r}\times\vec{v}).\vec{\alpha} + \vec{v}.\vec{\delta} - \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 \varepsilon \right)$$

THALES

Etats de Gibbs-Souriau pour les sous-groupes à 1 paramètre du groupe de Galillée

- **Théorème de Souriau:** L'action du groupe galiléen complet sur l'espace des mouvements d'un système mécanique isolé n'est liée à aucun état d'équilibre de Gibbs (le sous-ensemble ouvert de l'algèbre de Lie, associé à cet état de Gibbs, est vide)
- Le **sous-groupe à 1 parameter du groupe de Galillée** généré par β élément de l'algèbre de Lie, est donné par les matrices

$$\exp(\tau\beta) = \begin{pmatrix} A(\tau) & \vec{b}(\tau) & \vec{d}(\tau) \\ 0 & 1 & \tau\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } \begin{cases} A(\tau) = \exp\left(\tau j(\vec{\omega})\right) \text{ and } \vec{b}(\tau) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} \left(j(\vec{\omega})\right)^{i-1} \right) \vec{\alpha} \\ \vec{d}(\tau) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} \left(j(\vec{\omega})\right)^{i-1} \right) \vec{\delta} + \varepsilon \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\tau^i}{i!} \left(j(\vec{\omega})\right)^{i-2} \right) \vec{\alpha} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} j(\vec{\omega}) & \vec{\alpha} & \vec{\delta} \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$$

La thermodynamique de la crémière et du beurre barrate

Si on considère le cas de la centrifugeuse

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \ , \ \vec{\alpha} = 0 \ \text{ et } \ \vec{\delta} = 0$$

$$\text{Vitesse de rotation : } \frac{\omega}{\varepsilon}$$

$$f_i\left(\vec{r}_{i0}\right) = -\frac{\omega^2}{2\varepsilon^2}\left\|\vec{e}_z \times \vec{r}_{i0}\right\|^2$$

$$\text{avec } \ \Delta = \left\|\vec{e}_z \times \vec{r}_{i0}\right\| \ \text{ distance à l'axe z}$$

> “Le moment cinétique est transmis au gaz lorsque les molécules entrent en collision avec les parois en rotation, ce qui modifie la distribution de Maxwell à chaque point, déplaçant son origine. Les parois jouent le rôle de réservoir de moment cinétique. Leur mouvement est caractérisé par une certaine vitesse angulaire, et les vitesses angulaires du fluide et des parois deviennent égales à l'équilibre, exactement comme l'égalisation de la température par les échanges d'énergie”. – Roger Balian

$$\rho_i(\beta) = \frac{1}{P_i(\beta)}\exp\left(-\langle J_i, \beta\rangle\right) = cst.\exp\left(-\frac{1}{2m_i\kappa T}\left\|\vec{p}_{i0}\right\|^2 + \frac{m_i}{2\kappa T}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2\Delta^2\right)$$

- le comportement d'un gaz constitué de particules ponctuelles de masses diverses dans une centrifugeuse tournant à vitesse angulaire constante (les particules les plus lourdes se concentrent plus loin de l'axe de rotation que les plus légères) $\frac{\omega}{\varepsilon}$

OPEN

THALES

Thermodynamique de la centrifugeuse : Beurre, U235 & Ribo acides

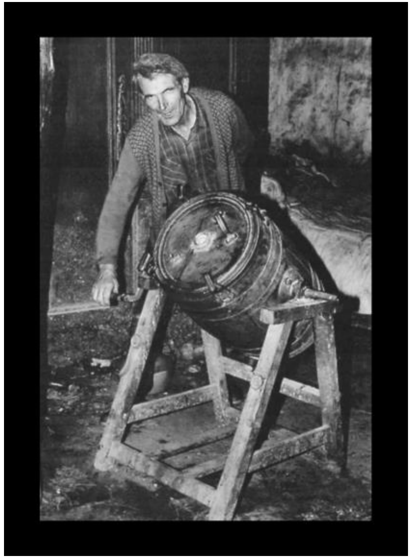
- Physiquement, la théorie donne de bons résultats si on l'applique aux divers sous-groupes du groupe de Galilée qui sont caractéristiques des appareils thermodynamiques : ainsi une boite cylindrique dans laquelle on enferme un fluide lui laisse un sous-groupe d'invariance de dimension 2 : rotations autour de l'axe, translations temporelles. D'où résulte un vecteur température à deux dimensions, que l'on peut "transmettre" au fluide par l'intermédiaire de la boite, (en la refroidissant, par exemple, et en la faisant tourner) ; les résultats de la théorie sont ceux-là même que l'on exploite dans les centrifugeuses (par exemple pour fabriquer du beurre, de l'uranium 235 ou des acides ribonucléiques).

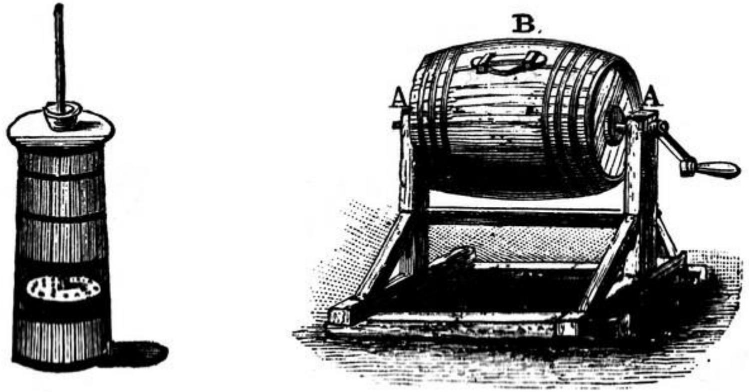
- On remarquera que le processus par lequel une centrifugeuse réfrigérée transmet son propre vecteur-température à son contenu porte deux noms différents : conduction thermique et viscosité, selon la composante du vecteur-température que l'on considère ; conduction et viscosité devraient donc être unifiées dans une théorie fondamentale des processus irréversibles (théorie qui reste à construire).

OPEN

THALES

Baratte Normande: instrument de la thermodynamique de Souriau
Le beurre y est à un équilibre de Gibbs covariant « centrifuge »





Baratte ordinaire. Baratte normande.

FIG. 172. — La *crème* battue dans la **baratte** donne le beurre.

Epreuve de la 2nd édition du Livre SSD

J.M. SOURIAU

DYNAMIC SYSTEMS STRUCTURE

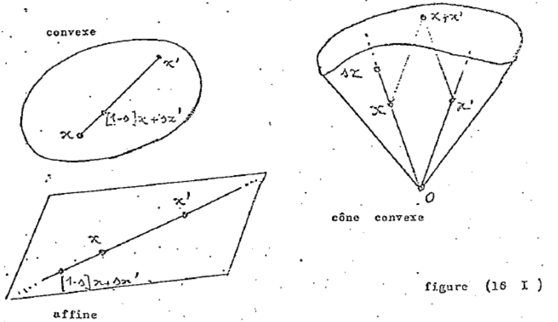


figure (16 I)

TRANSFORMATION DE LAPLACE.

Définition, théorème:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, μ une mesure de son dual E^*.

Alors la fonction définie par

$$\Theta \mapsto \int_E e^{M\Theta}\,\mu(M)\,dM \qquad [M\in E^*]$$

pour tout $\Theta \in E$ tel que l'intégrale soit convergente s'appelle transformée de Laplace de μ ; son ensemble de définition est un convexe de E.

Théorème (notations(17.17♦)):

La transformée de Laplace F de la mesure μ est différentiable dans l'intérieur de son ensemble de définition def(F); sa dérivée p-ème est donnée par l'intégrale convergente

$$\boxed{D^p(F)(\Theta) = \int_{E^*} M\otimes M\otimes\ldots\otimes M\; e^{M.\Theta}\,\mu(M)\,dM}$$

en tout point intérieur à def(F).

Théorème:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, μ une mesure positive non nulle du dual E^*, F sa transformée de Laplace (17.17♦). Alors :

1°) F est une fonction convexe semi-continue; $F(\Theta) > 0 \quad \forall \Theta \in def(F)$;

2°) $f = \mathrm{Log} \circ F$ est convexe et semi-continue ;

3°) Soit Θ un point intérieur de def(F). Alors :

a) $D^2(f)(\Theta) \geq 0$;

b) $D^2(f)(\Theta) = \int_{E^*} e^{M.\Theta}\,[M - D(f)(\Theta)]^{\otimes 2}\,\mu(M)\,dM$

c) $[D^2(f)(\Theta)$ inversible$] \Leftrightarrow [$enveloppe affine(support(μ)) $= E^*]$

ENTROPIE

Lemme :

(17.190) Soit X un espace localement compact; soit λ une mesure positive de X ayant X comme support.

Alors la fonction Φ :

$$\Phi(h) = \mathrm{Log} \int_X e^{h(x)} \lambda(x)\, dx \quad \left[\forall h \in \mathcal{C}(X) \text{ tel que l'intégrale converge} \right.$$

est convexe.

D'après (17.141), l'intégrale est strictement positive lorsqu'elle est convergente, ce qui assure l'existence de son logarithme. L'épigraphe de Φ (16.46) ... est l'ensemble des $\binom{h}{y}$ tels que $\int_X e^{h(x)-y} \lambda(x)\, dx \leqslant 1$; la convexité de l'exponentielle montre que cet épigraphe est convexe.

C.Q.F.D.

Nous allons définir - sous le nom de néguentropie - une transformée de Legendre formelle de cette fonction Φ :

Définition (suite de (17.190))

(17.191) Nous appellerons loi de Boltzmann (relative à λ) toute mesure μ de X telle que l'... ensemble de réels

$$\mu(h) - \Phi(h) \quad \left[\begin{array}{l} h \in \mathrm{def}(\Phi) \\ \quad \text{et} \\ h \quad \mu\text{-intégrable} \end{array} \right]$$

THALES

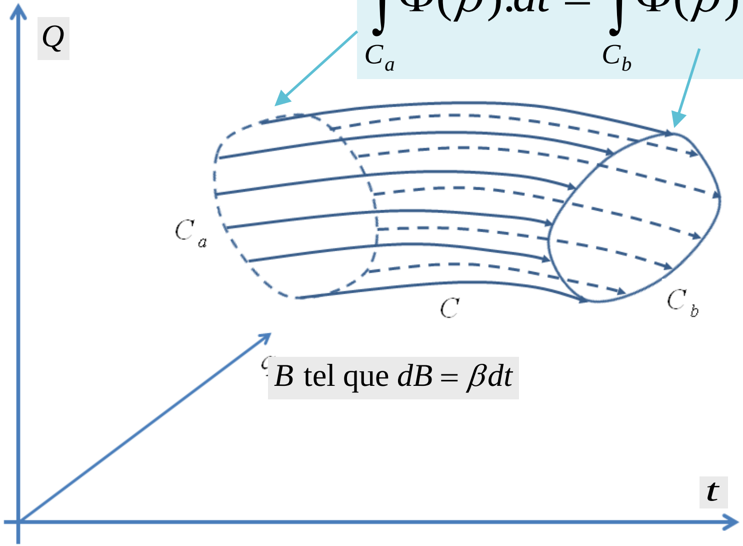
Principe Variationnel de la thermodynamique de Souriau: Invariant intégral de Poincaré-Cartan et fonction caractéristique de Massieu

Extension de la notion d'invariant intégral de Poincaré-Cartan

$$\omega = \langle Q, (\beta.dt) \rangle - S.dt = \left(\langle Q, \beta \rangle - S \right).dt = \Phi(\beta).dt$$

$$g(t) \in G \qquad \beta(t) = g(t)^{-1} \dot{g}(t) \in \mathfrak{g}$$

$$\int_{C_a} \Phi(\beta).dt = \int_{C_b} \Phi(\beta).dt$$



Modèle Variationnel pour un chemin $\eta(t)$

$$\delta\beta = \dot{\eta} + [\beta, \eta]$$

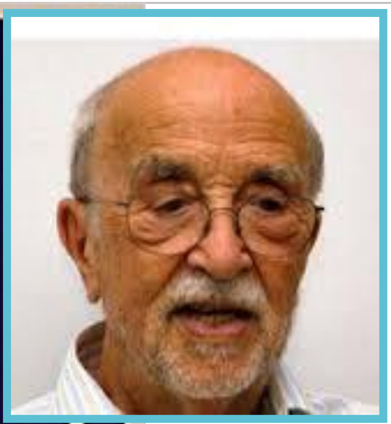
$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\beta(t)).dt = 0$$

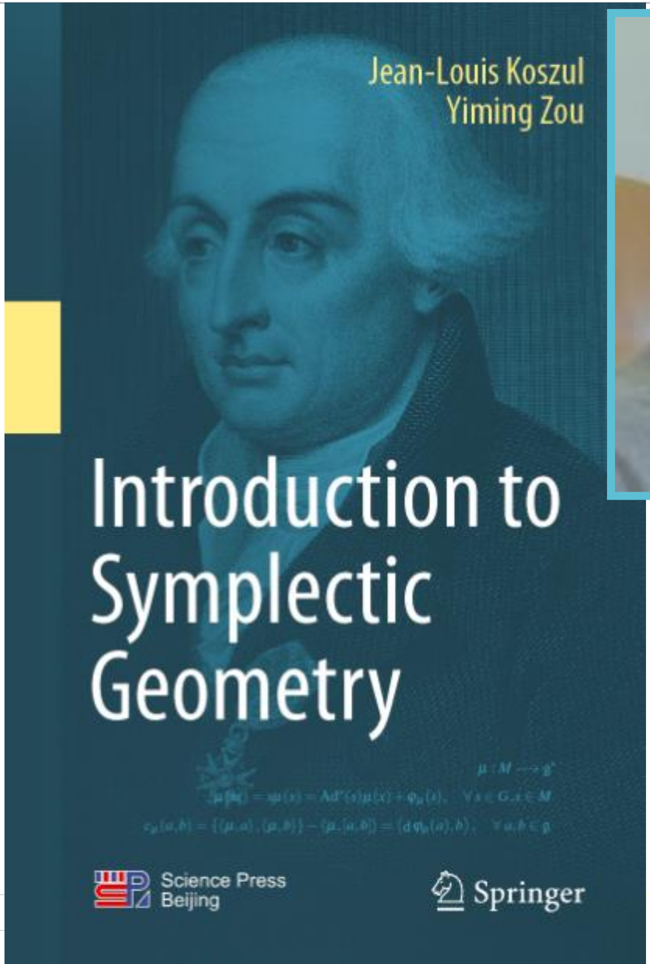
OPEN

THALES

Jean-Marie Souriau and Jean-Louis Koszul

50ème anniversaire
1969-2019





1921-2018

2019

Livre de J.L. Koszul
sur le modèle de Souriau

Jean-Louis Koszul · Yiming Zou

Introduction to Symplectic Geometry

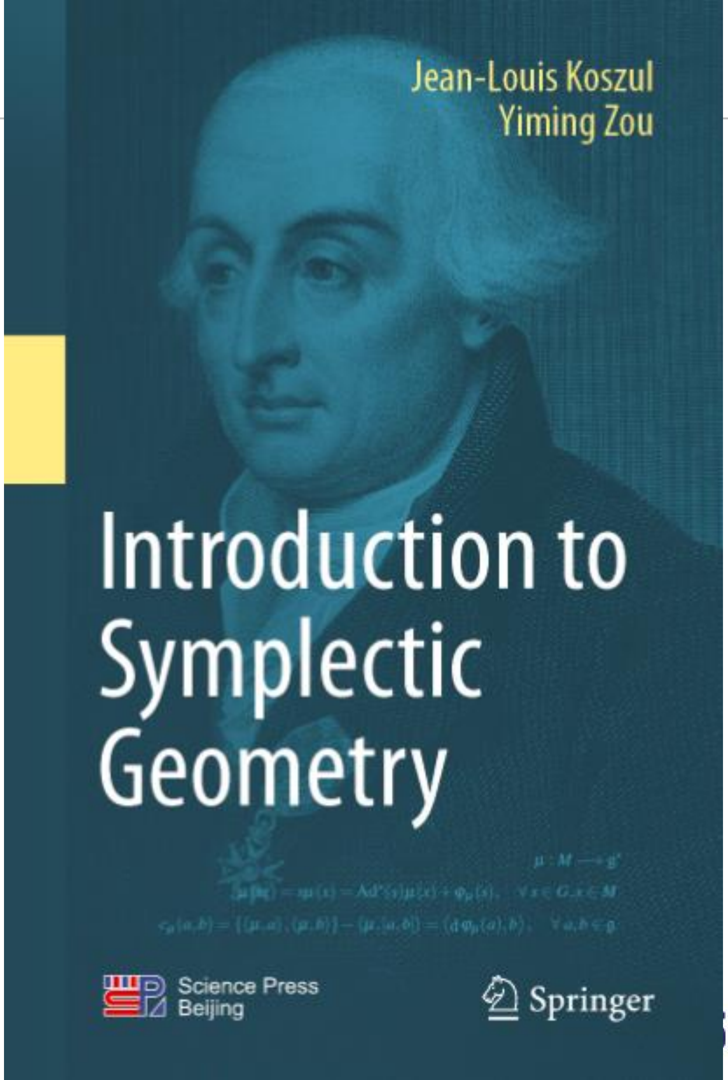
Forewords by Michel Nguiffo Boyom, Frédéric Barbaresco and Charles-Michel Marle

This introductory book offers a unique and unified overview of symplectic geometry, highlighting the differential properties of symplectic manifolds. It consists of six chapters: Some Algebra Basics, Symplectic Manifolds, Cotangent Bundles, Symplectic G-spaces, Poisson Manifolds, and A Graded Case, concluding with a discussion of the differential properties of graded symplectic manifolds of dimensions (0,n). It is a useful reference resource for students and researchers interested in geometry, group theory, analysis and differential equations.

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$\mu(sx) = s\mu(x) = \mathrm{Ad}^*(s)\mu(x) + \varphi_\mu(s), \quad \forall s \in G, x \in M$$

$$c_\mu(a,b) = \{\langle \mu, a\rangle, \langle \mu, b\rangle\} - \langle \mu, [a,b]\rangle = \langle d\varphi_\mu(a), b\rangle, \quad \forall a,b \in \mathfrak{g}$$



Jean-Louis KOSZUL et le petit livre vert en chinois

Le petit Livre vert

- En 1986, livre "**Introduction à la géométrie symplectique**" suite à un cours de chinois Koszul en Chine (traduit en anglais par Springer en 2019).

- Cet ouvrage reprend et développe les travaux de Jean-Marie Souriau sur les variétés symplectiques homogènes. Chuan Yu Ma écrit dans une critique, sur ce livre en chinois, que "**Ce travail a coïncidé avec des développements dans le domaine de la mécanique analytique. De nombreuses idées nouvelles ont également été dérivées en utilisant une grande variété de notions d'algèbre moderne, de géométrie différentielle, de groupes de Lie , analyse fonctionnelle, variétés différentiables et théorie des représentations. [Le livre de Koszul] met l'accent sur les propriétés différentielles-géométriques et topologiques des variétés symplectiques. Il donne un traitement moderne du sujet qui est utile aussi bien aux débutants qu'aux experts**".


TABLE OF CONTENTS

iii

OPEN

THALES

Correspondances avec Jean-Louis Koszul

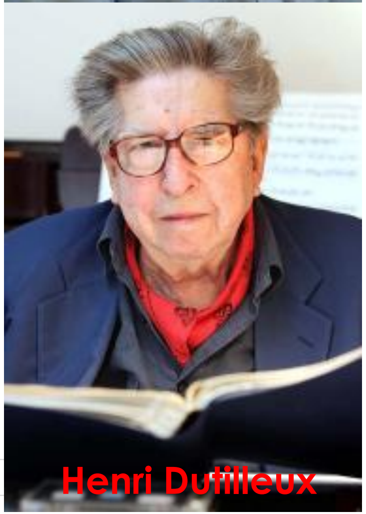
- *“A l'époque où Souriau développait sa théorie, l'establishment avait tendance à ne pas y voir des avancées importantes. Je l'ai entendu exposer ses idées sur la thermodynamique mais je n'ai pas du tout réalisé à l'époque que la géométrie hessienne était en jeu. »*
- *“Je ne crois pas avoir jamais parlé de ses travaux avec Souriau. Du reste j'avoue ne pas en avoir bien mesuré l'importance à l'époque »*

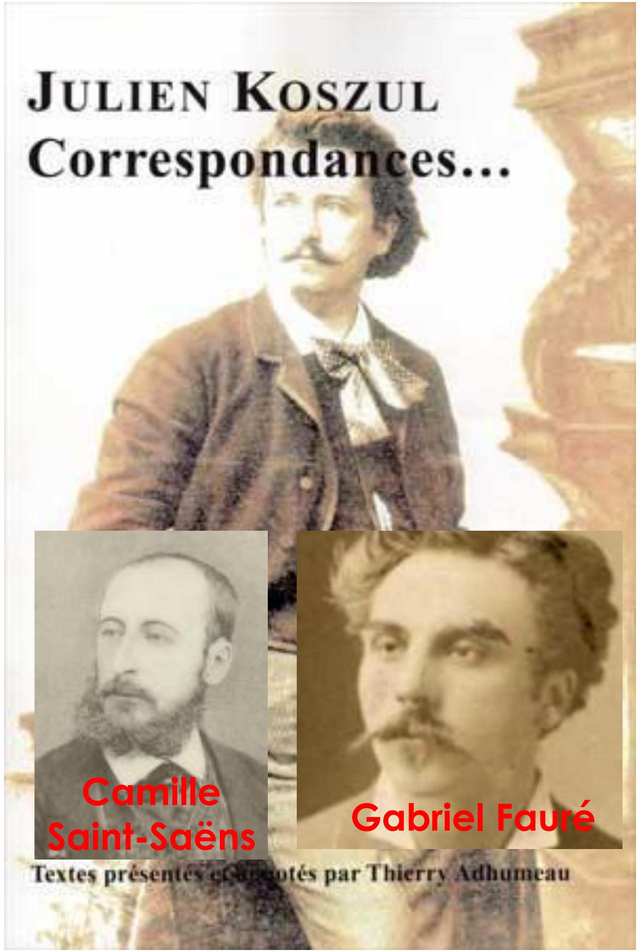
Jean-Louis & Julien Koszul:« Moment 1900 » et « Ecole Niedermeyer »

Julien KOSZUL (1844-1927)

- Grand père de Jean-Louis Koszul et du compositeur Henri Dutilleux, étudiant de Camille Saint-Saëns et ami de Gabriel Fauré. Professeur d'Albert Roussel.
- Principales compositions:
  - Quo Vadis pour choeur d'hommes à 5 voix
  - Pié Jesus en si m
  - Pièces pour piano à deux mains et 1 pièce pour piano à 4 mains
  - Mélodies de 1872 et 1879

http://www.resmusica.com/2005/06/01/qui-est-julien-koszul/





Julien KOSZUL, Gabriel Fauré et Camille Saint-Saëns

G. Fauré à Julien Koszul[1]

Rue des Vignes 32 XVI^{e} 21 avril 1924

Mon cher ami

Je te remercie de m'avoir envoyé une jolie Berceuse qui me donne le vif désir de connaître les autres mélodies ; je les demanderai à Hamelle.

Es-tu content de ta santé ? Ne viens-tu jamais à Paris ? Je serais tellement heureux de te revoir, de pouvoir bavarder un peu longuement avec toi ! Nous avons tant de bons souvenirs. Te souviens-tu que c'est toi qui introduisis *Schumann* à l'École Niedermeyer où il était si profondément inconnu et où n'avons pas tardé, tous, à l'adorer ?

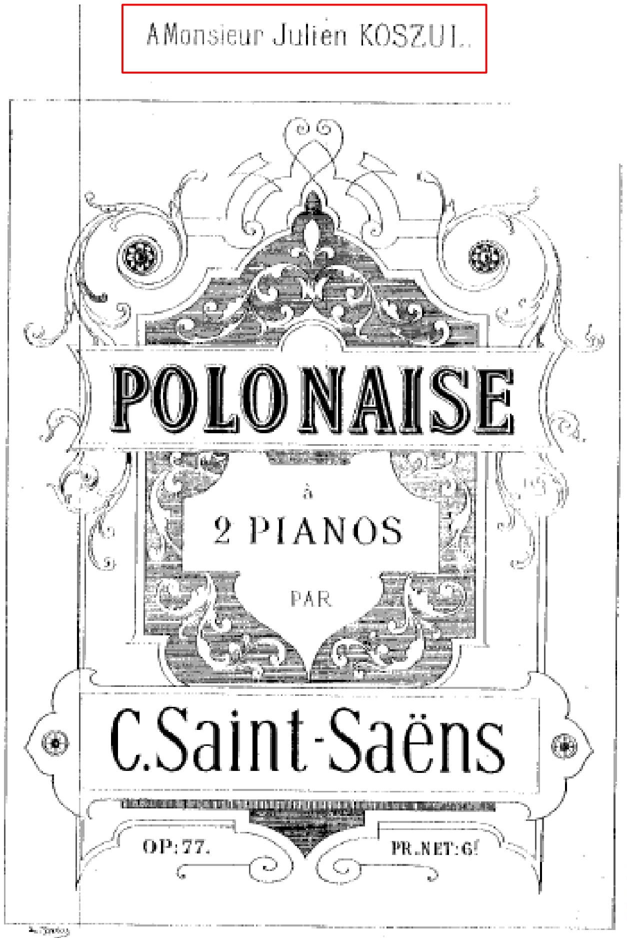
Et puis, autres moins lointains souvenirs, mes visites à Roubaix et l'accueil délicieux que je recevais dans ta chère maison !

Donne-moi de tes nouvelles ; parle-moi de tes enfants, et, si tu as une photo, envoie-la moi comme je t'envoie la mienne[2]. J'y joins, mon cher ami, toute ma vieille et bien fidèle amitié

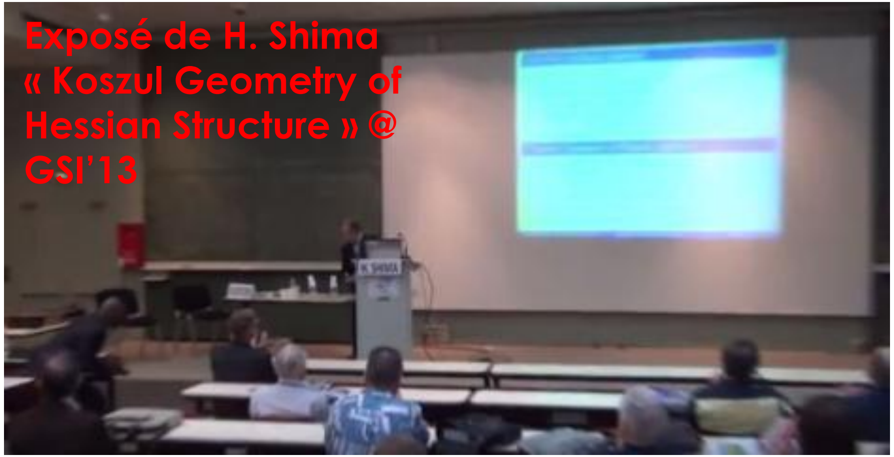
Gabriel Fauré

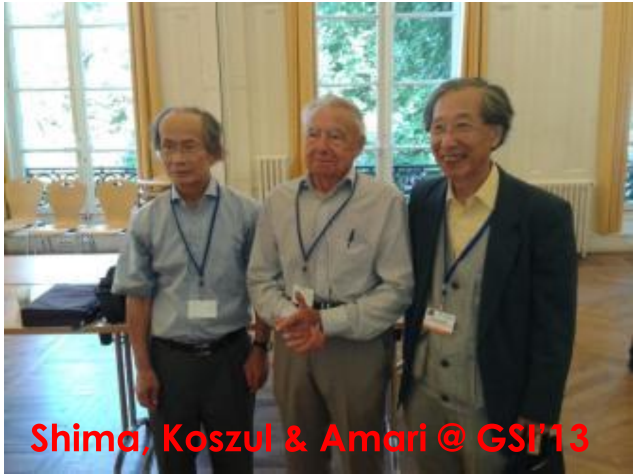
Bibliothèque nationale, département de la Musique, don d'Henri Dutilleux

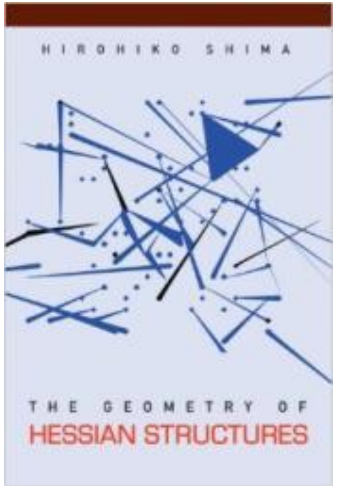
1. Voir plus haut la lettre que lui adressa le jeune Fauré en juin 1870 (lettre 7). Enveloppe portant le cachet postal Paris, 22.IV.1924 : « Monsieur J. Koszul, Ancien Directeur du Conservatoire de Roubaix, *Douai. Nord* »
2. Photo jointe : portrait de Fauré en 1924 par les frères Manuel.



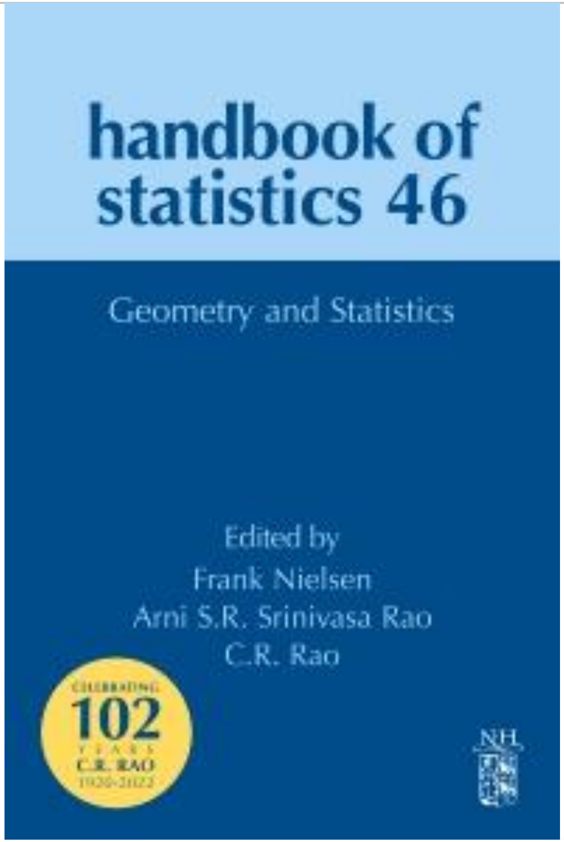
Jean-Louis Koszul (1921-2018) et la Géométrie de l'Information







Elsevier Handbook of Statistics n°46 « Geometry and Statistics »

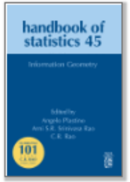


ELSEVIER

Handbook of Statistics

Available online 22 April 2022

In Press, Corrected Proof



Symplectic theory of heat and information geometry

Frédéric Barbaresco

THALES Land & Air Systems, Meudon, France

Available online 22 April 2022.

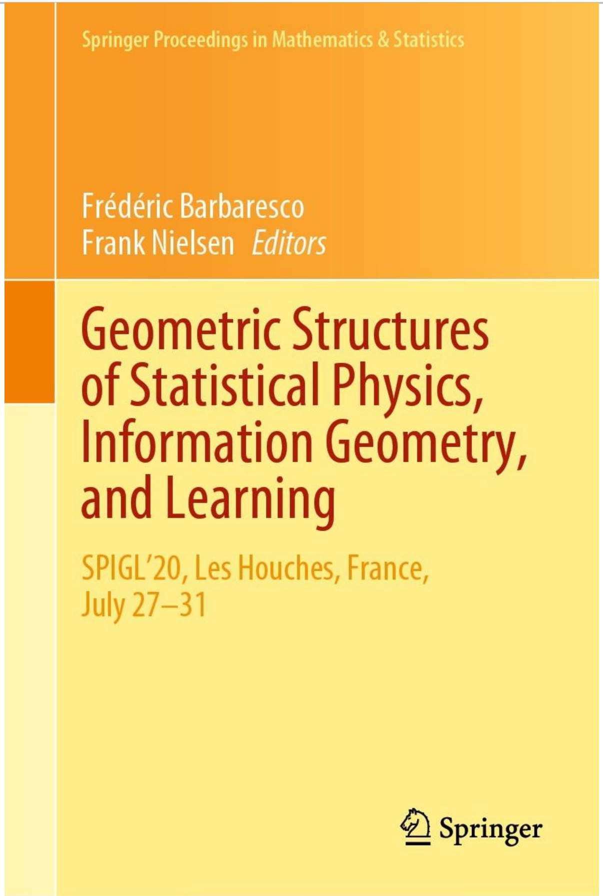
https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0169716122000062

https://www.elsevier.com/books/geometry-and-statistics/nielsen/978-0-323-91345-4

https://www.sciencedirect.com/handbook/handbook-of-statistics

THALES

Souriau's book 50th birthday



Jean-Marie Souriau's Symplectic Model of Statistical Physics: Seminal Papers on Lie Groups Thermodynamics - Quod Erat Demonstrandum

Frédéric Barbaresco

Conference paper | First Online: 27 June 2021

Part of the Springer Proceedings in Mathematics & Statistics book series (PROMS,volume 361)

Abstract

The objective of this chapter is to make better known Jean-Marie Souriau works, more particularly his symplectic model of statistical physics, called "Lie groups thermodynamics". This model was initially described in chapter IV "Statistical Mechanics" of his book "Structure of dynamical systems" published in 1969. We have translated in English some parts of three Souriau's publications which provide more details about this geometric model of Thermodynamics. Entropy acquires a geometric foundation as a function parameterized by mean of moment map in dual Lie algebra, and in term of foliations. Souriau established the generalized Gibbs laws when the manifold has a symplectic form and a connected Lie group G operates on this manifold by symplectomorphisms. Souriau Entropy is invariant under the action of the group acting on the homogeneous symplectic manifold. As quoted by Souriau, these equations are universal and could be also of great interest in Mathematics.

https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-77957-3_2

World Scientific « Frontiers in Entropy Across the Disciplines »
Panorama of Entropy: Theory, Computation, and Applications

Contemporary Mathematics and Its Applications: Monographs, Expositions and Lecture Notes

Frontiers in Entropy Across the Disciplines

Panorama of Entropy: Theory, Computation, and Applications

https://doi.org/10.1142/12920 | November 2022

Pages: 650

Edited By: Willi Freeden (*University of Kaiserslautern, Germany*) and M Zuhair Nashed (*University of Central Florida, USA*)

World Scientific
Connecting Great Minds

Frontiers in Entropy Across the Disciplines presents a panorama of entropy emphasizing mathematical theory, physical and scientific significance, computational methods, and applications in mathematics, physics, statistics, engineering, biomedical signals, and signal processing.

Topics include entropy and society, entropy and time, **Souriau entropy on symplectic model of statistical physics**, **new definitions of entropy**, **geometric theory of heat and information**, maximum entropy in Bayesian networks, maximum entropy methods, entropy analysis of biomedical signals (review and comparison of methods), spectral entropy and its application to video coding and speech coding, a comprehensive review of 50 years of entropy in dynamics, a comprehensive review on entropy, entropy-like quantities and applications, topological entropy of multimodal maps, entropy production in complex systems, entropy production and convergence to equilibrium, reversibility and irreversibility in entropy, nonequilibrium entropy, index of various entropy, entropy and the greatest blunder ever.

- **Souriau Entropy based on Symplectic Model of Statistical Physics: Three Jean-Marie Souriau's Seminal Papers on Lie Groups Thermodynamics** (Frédéric Barbaresco)
- **Entropy Geometric Structure as Casimir Invariant Function in Coadjoint Representation: Geometric Theory of Heat and Information Based on Souriau Lie Groups Thermodynamics and Lie Algebra Cohomology** (Frédéric Barbaresco)

https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/12920#t=aboutBook

THALES

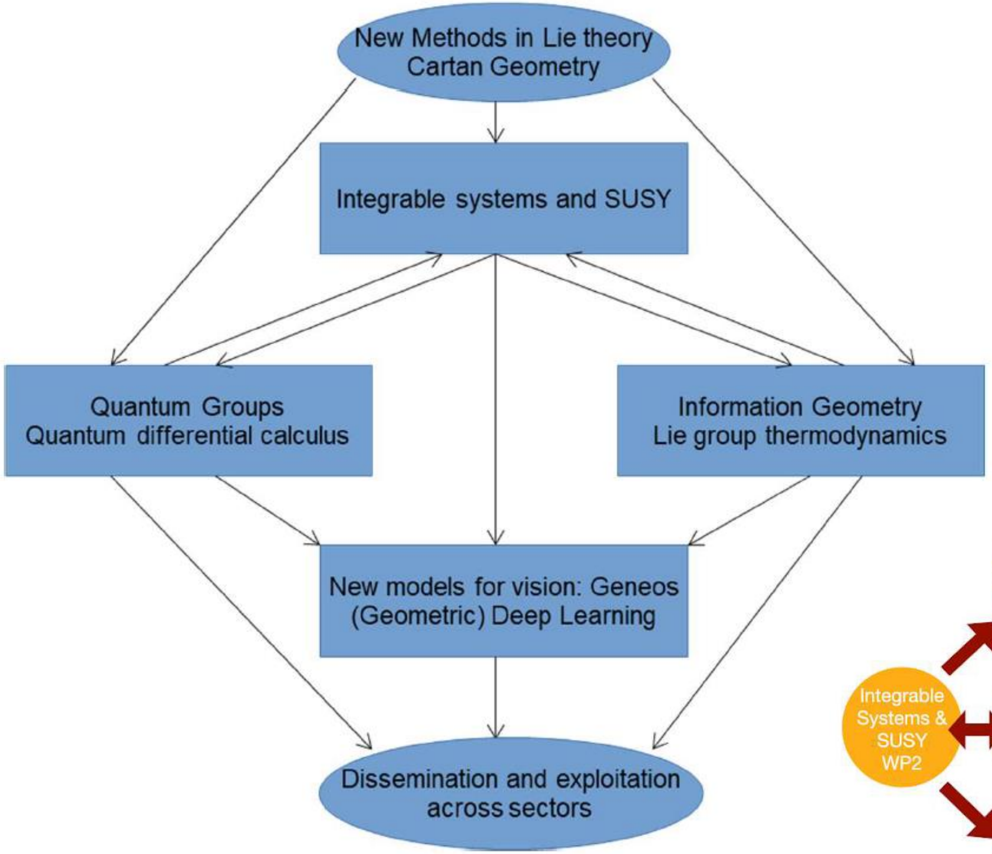
European COST Network CaLISTA (Cartan geometry, Lie, Integrable Systems, quantum group Theories for Applications)

MoU: https://e-services.cost.eu/files/domain_files/CA/Action_CA21109/mou/CA21109-e.pdf

WEBSITE: https://www.cost.eu/actions/CA21109/

Description: Symmetry is a central unifying theme in mathematics and physics. This Action focusses on symmetries realized through Lie groups and Lie algebras. In addition to the spectacular achievements in representation theory, and differential geometry, Lie theory is also exceptionally important for the formalization of fundamental physical theories. CaLISTA aims to advance cutting-edge research in mathematics and physics through a systematic application of the ideas and philosophy of Cartan geometry, a thoroughly Lie theoretic approach to differential geometry. In addition to making major progress in Cartan geometry itself, CaLISTA aims to develop crucial applications to integrable systems and supersymmetric gauge theories. Quantum groups and their quantum homogeneous spaces come into the play as a bridge between these topics: quantum groups stem originally from the R-matrix formulation in integrable systems, and their homogeneous spaces offer prototypical examples of noncommutative parabolic geometries. Parabolic geometry is the first and possibly the most important example of Cartan geometry, and one of the main aims of CaLISTA is to obtain a quantum generalization.
Surprisingly, Lie theory and Cartan geometry play a role in an exciting new interpretation of the differential structure, and related dynamics, of models for popular algorithms of vision like Deep Learning and the more recent Geometric Deep Learning. CaLISTA aims to investigate and improve on these techniques. CaLISTA will provide essential mathematical models with far-reaching applications, placing Europe among the leading actors in these innovative research areas.
Action keywords: Lie Theory - Cartan Geometry - Quantum Groups - Integrable Systems - Vision

MARIE SKŁODOWSKA-CURIE ACTIONS CaLIGOLA



Work Package no.	5	Start/end month	4/48			
Work Package title	The geometry of Deep Learning					
Lead beneficiary	Fioresi (UNIBO) [Barbaresco (Thales)]					
Participating organisation short name	UNIBO	CU	MU	UVEG	UC	ISI	ETH
Total person months per participating organisation:	5	9	4	6	6	0	0

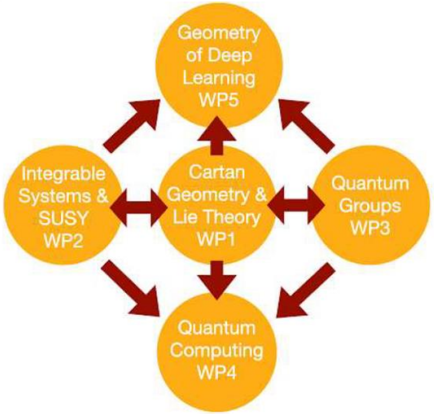
Objectives: Develop new vision models and algorithms with the use of persistent homology, Lie Group statistics to boost the machine learning techniques. Understand (Geometric) Deep Learning with the new invariance mathematical tools and quantum group techniques.

Description of Work and role of specific beneficiaries/associated partners broken down and listed into numbered tasks including the following details:

Task 5.1. Lie groups thermodynamics. Use the techniques of WP1 and WP2 to explore the geometry of the information manifold and its Lie structure (i.e. foliation induced by the coadjoint action). Key expertise: UNIBO, Fioresi; Thales, Barbaresco.

Task 5.2 Persistent Homology and Geneos: going beyond topology and endow the space of all equivariant non-expansive operators (Geneo) a suitable Lie (differentiable) structure. Key expertise: UNIBO, Frosini; UC Otter.

Task 5.3 The geometry of (Geometric) Deep Learning. Differential calculus on graph neural networks, via quantum calculus. New theoretical foundations for the geometric deep learning algorithm. Key expertise: UNIBO (Fioresi, Latini), CU (O'Buachalla), UC IPAM Institute, Sturmfels.



CaLIGOLA: Cartan geometry, Lie and representation theory, Integrable Systems, quantum Groups and quantum computing towards the understanding of the geometry of deep Learning and its Application

Avant-Garde européenne et modèle de Souriau

LIÈGE université

Faculté des Sciences

Département de Mathématique

États de Gibbs d'une action hamiltonienne

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques,
à finalité approfondie

Année académique 2021-2022

Auteur : Guillaume Neuttiens

Promoteur : Pierre Bieliavsky

Co-Promoteur : Pierre Mathonet

Homogeneous Symplectic Spaces and Central Extensions

MaxEnt2022

Andrew Beckett
(Work with José Figueroa-O'Farrill)

Maxwell Institute Graduate School,
University of Edinburgh

21 July 2022

The University of Edinburgh

eMPG

Maxwell Institute for Mathematical Sciences

scai Sorbonne Center for Artificial Intelligence

ihp Institut Henri Poincaré

see

cnrs

OPEN

THALES

GSI’23 Saint-Malo – 30 Aout au 1 Septembre 2023

OPEN

THALES

Interior/Exterior Products and Lie derivative

- $i_V\omega$ is the (p-1)-form on X obtained by inserting $V(x)$ as the first argument of ω :

Interior product : $i_V\omega\left(v_2,\cdots v_p\right)=\omega\left(V(x),v_2,\cdots,v_p\right)$

- $\theta\wedge\omega$ is the (p + 1)-form on X where ω is a p-form and θ is a 1-form on X :

Exterior product : $\theta\wedge\omega\left(v_0,\cdots,v_p\right)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\,\theta(v_i)\omega\left(v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_p\right)$

(where the hat indicates a term to be omitted).

- $L_V\omega$ is a p-form on X ,and $L_V\omega=0$ if the flow of V consists of symmetries of ω:

Lie derivative : $L_V\omega\left(v_1,\cdots,v_p\right)=\left.\frac{d}{dt}e^{tV*}\omega\left(v_1,\cdots,v_p\right)\right|_{t=0}$

Exterior derivative and E.Cartan, H. Cartan & S. Lie formulas

- $d\omega$ is the (p+1)-form on X defined by taking the ordinary derivative of ω and then antisymmetrizing:

Exterior derivative : $$d\omega\left(v_0,\cdots,v_p\right)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\frac{\partial\omega}{\partial x}(v_i)(v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_p)$$

$$p=0,[d\omega]_i=\partial_i\omega \;\; ; \;\; p=1,[d\omega]_{ij}=\partial_i\omega_j-\partial_j\omega_i \;\; ; \;\; p=2,[d\omega]_{ijk}=\partial_i\omega_{jk}+\partial_j\omega_{ki}+\partial_k\omega_{ij}$$

- The properties of the exterior and Lie Derivative are the following:

$$L_V\omega=di_V\omega+i_Vd\omega$$ (E. Cartan)

$$i_{[U,V]}\omega=i_VL_U\omega-L_Ui_V\omega$$ (H.Cartan)

$$L_{[U,V]}\omega=L_VL_U\omega-L_UL_V\omega$$ (S. Lie)

Souriau Moment Map (1/2)

- Let (X,σ) be a connected symplectic manifold.
- A vector field η on X is called symplectic if its flow preserves the 2-form :

$$L_\eta \sigma = 0$$

- If we use Elie Cartan's formula, we can deduce that :

$$L_\eta \sigma = d i_\eta \sigma + i_\eta d\sigma = 0$$

- but as $d\sigma = 0$ then $d i_\eta \sigma = 0$. We observe that the 1-form $i_\eta \sigma$ is closed.
- When this 1-form is exact, there is a smooth function $x \mapsto H$ on X with:

$$\boxed{i_\eta \sigma = -dH}$$

- This vector field η is called Hamiltonian and could be define as s symplectic gradient :

$$\boxed{\eta = \nabla_{Symp} H}$$

Souriau Moment Map (2/2)

$$d i_\eta \sigma = 0 \qquad \boxed{i_\eta \sigma = -dH}$$

- We define the Poisson bracket of two functions H , H' by :

$$\{H, H'\} = \sigma(\eta, \eta') = \sigma\left(\nabla_{Symp} H', \nabla_{Symp} H\right)$$

with $i_\eta \sigma = -dH$ and $i_{\eta'} \sigma = -dH'$

- Let a Lie group G that acts on X and that also preserve σ .

- A moment map exists if these infinitesimal generators are actually hamiltonian, so that a map exists:

$\boxed{\Phi : X \to \mathfrak{g}^*}$ with $\boxed{i_{Z_X} \sigma = -dH_Z}$ where $\boxed{H_Z = \langle \Phi(x), Z \rangle}$

THALES

Séminaire MAMUPHI
Avril 2023, IRCAM, sale Shannon

MAMUPHI
mathématiques - musique – philosophie
MAMUPHI

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

L'Entropie fonction invariante de Casimir sur les feuilles symplectiques

OPEN

Entropy Definition by Jean-Marie Souriau (1/3)

- Let E a vector space of finite size, μ a measure on the dual space E^*, then the function given by:

$$\alpha \mapsto \int_{E^*} e^{M\alpha} \mu(M)dM$$

for all $\alpha \in E$ such that the integral is convergent.

- This function is called **Laplace Transform**. This transform F of the measure μ is differentiable inside its definition set $def(F)$. Its p-th derivables are given by the following convergent integrals :

$$F^{(p)}(\alpha) = \int_{E^*} M \otimes M \ldots \otimes M\mu(M)dM$$

Entropy Definition by Jean-Marie Souriau (2/3)

Souriau Theorem:

- Let E a vector space of finite size, μ a non zero positive measure of its dual space E^* , F its Laplace transform, then:
  - F is a semi-definite convex function, $F(\alpha) > 0, \forall \alpha \in def(F)$
  - $f = \log(F)$ is convex and semi-continuous
  - Let α an interior point of $def(F)$ then:
    - $D^2(f)(\alpha) \geq 0$
    - $D^2(f)(\alpha) = \int_{E^*} e^{M\alpha}\left[M - D(f)(\alpha)\right]^{\otimes 2} \mu(M)dM$
    - $D^2(f)(\alpha)$ inversible $\Leftrightarrow$ affine Enveloppe (support(μ)) $=E^*$

Entropy Definition by Jean-Marie Souriau (3/3)

Lemme:

- Let X a locally compact space, Let λ a positive measure of X , with X as support, then the following function Φ is convex:

$$\Phi(h) = \log \int_X e^{h(X)} \lambda(x) dx \ , \ \forall h \in C(X)$$

such that the integral is convergent.

Proof:

- The integral is strictly positive when its converges, insuring existence of its logarithm
- Epigraph Φ is the set of $\begin{pmatrix} h \\ y \end{pmatrix}$ such that $\int_X e^{h(x)-y} \lambda(x) dx \leq 1$.
- Convexity of exponential prove that this epigraph is convex.

Gromov question: Are there « entropies » associated to moment maps

Bernoulli Lecture - What is Probability?

- 27 March 2018 - CIB - EPFL - Switzerland
- Lecturer: Mikhail Gromov
  - https://bernoulli.epfl.ch/images/website/What_is_Probability_v2(2).mp4
  - http://forum.cs-dc.org/uploads/files/1525172771489-alternative-probabilities-2018.pdf

Fisher Metric. Recall (Archimedes, 287-212 BCE) the *real moment map* from the unit sphere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ to the probability simplex $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ for

$$(x_0, ..., x_n) \mapsto (p_0 = x_0^2, ..., p_n = x_n^2)$$

and observe following R. Fisher that the spherical metric (with constant curvature +1) thus transported to Δ^n, call it ds^2 on Δ^n, is equal, up to a scalar multiple, to the *Hessian of the entropy*

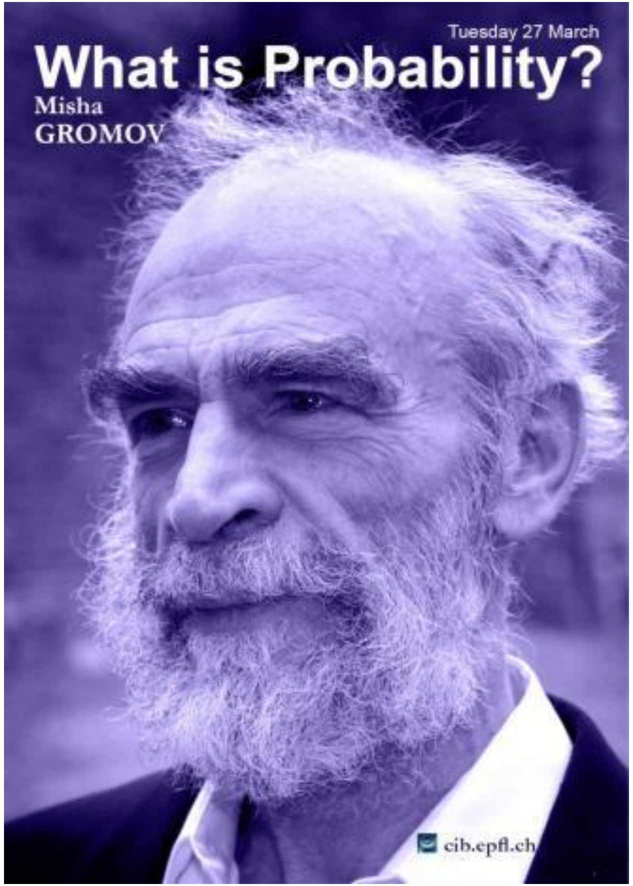
$$ent\{p_0, ..., p_n\} = -\sum_i p_i \log p_i.$$

$$ds^2 = const \frac{\partial^2 ent(p_i)}{dp_i dp_j}.$$

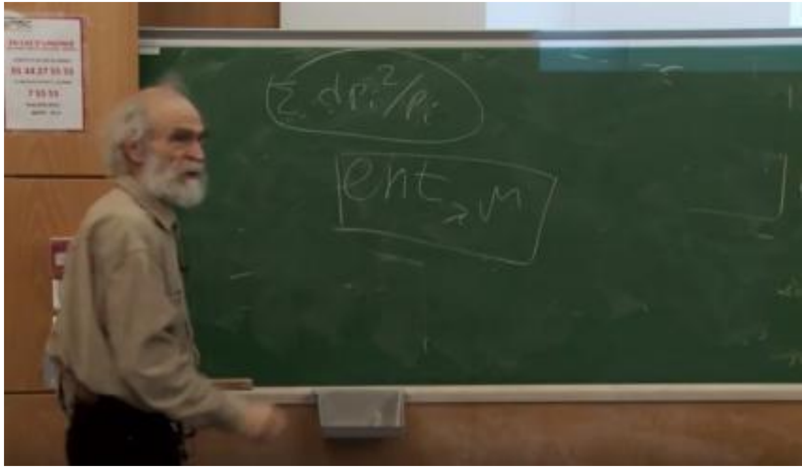
If, accordingly, we take the "inverse Hessian" – a kind of double integral "$\int\int ds^2$" for the *definition* of entropy – we arrive at

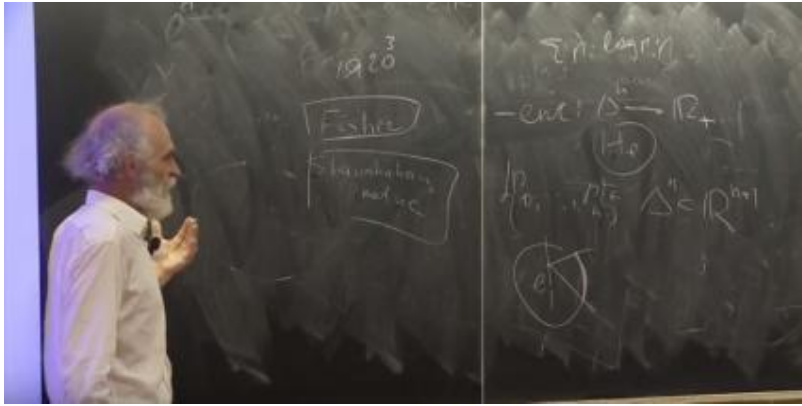
Question 2. Are there *interesting* "entropies" associated to (real and complex) moment maps of general toric varieties? Is there a *meaningful* concept of "generalised probability" grounded in positivity encountered in algebraic geometry?

****



Fisher Metric by Misha Gromov (IHES)





- **M. Gromov, In a Search for a Structure, Part 1: On Entropy. July 6, 2012**
  - http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/structre-serch-entropy-july5-2012.pdf
- **Gromov Six Lectures on Probability, Symmetry, Linearity. October 2014, Jussieu, November 6th , 2014**
  - Lecture Slides & video:

  http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/probability-huge-Lecture-Nov-2014.pdf

  https://www.youtube.com/watch?v=hb4D8yMdov4
- **Gromov Four Lectures on Mathematical Structures arising from Genetics and Molecular Biology, IHES, October 2013**

  https://www.youtube.com/watch?v=v7QuYuoyLQc&t=5935s **(at time 01h35min)**

Souriau Entropy and Casimir Invariant Function

Geometric Definition of Entropy

- In the framework of Souriau Lie groups Thermodynamics, we can characterize the Entropy as a generalized Casimir invariant function in coadjoint representation,

Geometric Definition of Massieu Characteristic Function

- Massieu characteristic function (or log-partition function), dual of Entropy by Legendre transform, as a generalized Casimir function in adjoint representation.

Casimir Function Definition

- When M is a Poisson manifold, a function on M is a Casimir function if and only if this function is constant on each symplectic leaf (the non-empty open subsets of the symplectic leaves are the smallest embedded manifolds of M which are Poisson submanifolds)

Souriau Entropy Invariance

Casimir Invariant Function in coadjoint representation

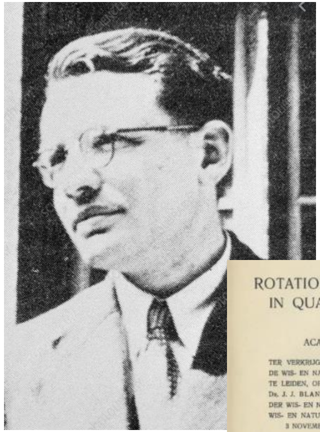
- We observe that Souriau Entropy $s(Q)$ defined on coadjoint orbit of the group has a property of invariance :

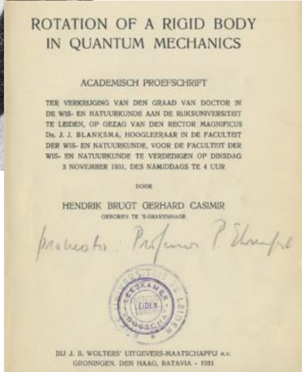
$$s\left(Ad_g^{\#}(Q)\right)=s(Q)$$

- with respect to Souriau affine definition of coadjoint action:

$$Ad_g^{\#}(Q)=Ad_g^{*}(Q)+\theta(g)$$

- where $\theta(g)$ is called the Souriau cocyle.





ROTATION OF A RIGID BODY
IN QUANTUM MECHANICS

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS Dr. J. J. BLANKSMA, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE, VOOR DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP DINSDAG 3 NOVEMBER 1931, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

HENDRIK BRUGT GERHARD CASIMIR
GEBOREN TE 'S-GRAVENHAGE

LEESKAMER LEIDEN

BIJ J. B. WOLTERS' UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ N.V.
GRONINGEN, DEN HAAG, BATAVIA - 1931

$$Q\left(Ad_g(\beta)\right)=Ad_g^{*}(Q)+\theta(g)$$

$$s\left(Q\left(Ad_g(\beta)\right)\right)=s(Q)$$

New Entropy Definition:
Casimir Function in Coadjoint Representation Invariant under the action of the Group

Hendrik Casimir (Thesis supervised by Niels Bohr & Paul Ehrenfest)

H.B.G. Casimir, On the Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics, Doctoral Thesis, Leiden, 1931.

Entropy as Invariant Casimir Function in Coadjoint Representation

NEW GEOMETRIC DEFINITION OF ENTROPY

$$\{S,H\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=0$$

$$ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)=0$$

$$\{S,H\}(Q)=\left\langle Q,\left[\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right]\right\rangle=-C_{ij}^k Q_k\frac{\partial S}{\partial Q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial Q_j}$$

$$\left[e_i,e_j\right]=C_{ij}^k e_k \quad , \quad C_{ij}^k \quad \text{structure coefficients}$$

$$\{S,H\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=\left\langle Q,\left[\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right]\right\rangle+\tilde{\Theta}\left(\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right)=0 \quad , \quad \forall H:\mathfrak{g}^*\rightarrow R,\quad Q\in\mathfrak{g}^*$$

$$\tilde{\Theta}(X,Y)=J_{[X,Y]}-\{J_X,J_Y\} \quad \text{where} \quad J_X(x)=\langle J(x),X\rangle$$

$$\tilde{\Theta}(X,Y)=\langle\Theta(X),Y\rangle \quad \text{with} \quad \Theta(X)=T_e\theta(X(e))$$

$$\theta(g)=Q\left(Ad_g(\beta)\right)-Ad_g^*(Q)$$

THALES

Fundamental Equation of Geometric Thermodynamic: Entropy Function is an Invariant Casimir Function in Coadjoint Representation

Entropy S

$$S:\mathfrak{g}^* \to R$$
$$Q \mapsto S(Q)$$

Heat Q, (Planck) Temperature β and Φ Massieu Characteristic Function

$$S(Q)=\langle \beta,Q\rangle-\Phi(\beta)\ ,\ Q=\frac{\partial\Phi(\beta)}{\partial\beta}\in\mathfrak{g}^*\ \ ,\ \beta=\frac{\partial S(Q)}{\partial Q}\in\mathfrak{g}$$

Invariance of Entropy S Under the action of the Group

$$Q\left(Ad_g(\beta)\right)=Ad_g^*(Q)+\theta(g)$$

$$S\left(Q\left(Ad_g(\beta)\right)\right)=S(Q)$$

New Definition of Entropy S as Invariant Casimir Function in Coadjoint Representation

$$ad^*_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)=0$$

$$\{S,H\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=\left\langle Q,\left[\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right]\right\rangle+\tilde{\Theta}\left(\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right)=0$$

$$\Theta(X)=T_e\theta\left(X(e)\right)$$

$$\tilde{\Theta}(X,Y)=\langle\Theta(X),Y\rangle=J_{[X,Y]}-\{J_X,J_Y\}=-\langle d\theta(X),Y\rangle$$

Moment Map J

Lie Groups Thermodynamic Equations and its extension (1/3)

Q : Heat, element of dual Lie Algebra

β : (Planck) température element of Lie algebra

$$Q\left(Ad_g(\beta)\right) = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$$

$\theta(g)$: Souriau Cocyle

Φ : Massieu Characteristic Function

J : Souriau Moment Map

$$\Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, J(\xi) \rangle} d\lambda$$

$$J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

S : Entropy

Legendre Transform

$$S(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) \text{ with } Q = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^* \text{ and } \beta = \frac{\partial S(Q)}{\partial Q} \in \mathfrak{g}$$

I : Fisher Information Metric

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}$$

THALES

Lie Groups Thermodynamic Equations and its extension (2/3)

Entropy Invariance under the action of the Group !

$$S\left(Ad_g^{\#}(Q)\right)=S(Q)$$

$$Ad_g^{\#}(Q)=Ad_g^{*}(Q)+\theta(g)$$

Souriau characteristic of the foliation

$$\langle Q,[\beta,Z]\rangle+\tilde{\Theta}(\beta,Z)=0$$

Entropy Solution of Casimir Equation

$$ad^{*}_{\frac{\partial S}{\partial Q}}Q+\Theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)=0$$

Souriau cocycle

$$\Theta(X)=T_e\theta(X(e))$$

$$\theta(g)=Q\left(Ad_g(\beta)\right)-Ad_g^{*}(Q)$$

Entropy & Poisson Bracket

$$\{S,H\}_{\tilde{\Theta}}(Q)=\left\langle Q,\left[\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right]\right\rangle+\tilde{\Theta}\left(\frac{\partial S}{\partial Q},\frac{\partial H}{\partial Q}\right)=0$$

$$\tilde{\Theta}(X,Y)=\langle\Theta(X),Y\rangle=J_{[X,Y]}-\{J_X,J_Y\}=-\langle d\theta(X),Y\rangle$$

Lie Groups Thermodynamic Equations and its extension (3/3)

Entropy Production

$$dS = \tilde{\Theta}_\beta\left(\frac{\partial H}{\partial Q},\beta\right)dt$$

2nd principle is related to positivity of Fisher tensor

$$\frac{dS}{dt} = \tilde{\Theta}_\beta\left(\frac{\partial H}{\partial Q},\beta\right) \geq 0$$

Metric Tensor related to Fisher Metric

$$\tilde{\Theta}_\beta\left(\frac{\partial H}{\partial Q},\beta\right) = \tilde{\Theta}\left(\frac{\partial H}{\partial Q},\beta\right) + \left\langle Q,\left[\frac{\partial H}{\partial Q},\beta\right]\right\rangle$$

Time Evolution of Heat wrt to Hamiltonian H

$$\frac{dQ}{dt} = ad^*_{\frac{\partial H}{\partial Q}}Q + \Theta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)$$

Stochastic Equation

$$dQ + \left[ad^*_{\frac{\partial H}{\partial Q}}Q + \Theta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)\right]dt + \sum_{i=1}^{N}\left[ad^*_{\frac{\partial H_i}{\partial Q}}Q + \Theta\left(\frac{\partial H_i}{\partial Q}\right)\right] \circ dW_i(t) = 0$$

Euler-Poincaré Equation in case of Non-Null Cohomology

$$\frac{dQ}{dt} = ad^*_{\frac{\partial H}{\partial Q}} Q + \Theta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)$$

$$Q = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = ad^*_{\frac{\partial H}{\partial Q}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \Theta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)$$

$$\left(ad^*_{\frac{\partial H}{\partial Q}} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)_j + \Theta\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)_j = C^k_{ij}\, ad^*_{\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)^i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)_k + \Theta_j$$

« Ayant eu l'occasion de m'occuper du mouvement de rotation d'un corps solide creux, dont la cavité est remplie de liquide, j'ai été conduit à mettre les équations générales de la mécanique sous une forme que je crois nouvelle et qu'il peut être intéressant de faire connaître » - Henri Poincaré, CRAS, 18 Février 1901

SÉANCE DU LUNDI 18 FÉVRIER 1901,

PRÉSIDENCE DE M. FOUQUÉ.

MEMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — *Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique*. Note de M. H. POINCARÉ.

« Ayant eu l'occasion de m'occuper du mouvement de rotation d'un corps solide creux, dont la cavité est remplie de liquide, j'ai été conduit à mettre les équations générales de la Mécanique sous une forme que je crois nouvelle et qu'il peut être intéressant de faire connaître.

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\eta_s} = \sum c_{ski}\frac{dT}{d\eta_i}\eta_k + \Omega_s.$$

« Elles sont surtout intéressantes dans le cas où U étant nul, T ne dépend que des η » - Henri Poincaré

de Saxcé, G. Euler-Poincaré equation for Lie groups with non null symplectic cohomology. Application to the mechanics. In GSI 2019. LNCS; Nielsen, F., Barbaresco, F., Eds.; Springer: Berlin, Germany, 2019; Volume 11712

Koszul Poisson Cohomology and Entropy Characterization

- Poisson Cohomology was introduced by A. Lichnerowicz and J.L. Koszul.

- Koszul Cohomology and seminal work of Elie Cartan. Koszul made reference to seminal E. Cartan paper

  - “***Elie Cartan does not explicitly mention $\Lambda(g')$ [the complex of alternate forms on a Lie algebra], because he treats groups as symmetrical spaces and is therefore interested in differential forms which are invariant to both by the translations to the left and the translations to the right, which corresponds to the elements of $\Lambda(g')$ invariant by the prolongation of the coadjoint representation. Nevertheless, it can be said that by 1929 an essential piece of the cohomological theory of Lie algebras was in place.***” – Jean-Louis Koszul

Koszul Poisson Cohomology and Entropy Characterization

- Y. Vorob'ev and M.V. Karasev have suggested cohomology classification in terms of closed forms and de Rham Cohomology of coadjoint orbits Ω (called Euler orbits by authors), symplectic leaves of a Poisson manifold N .
- Let $Z^k(\Omega)$ and $H^k(\Omega)$ be the space of closed k-forms on Ω and their de Rham cohomology classes.
- Considering the base of the fibration of N by these orbits as N/Ω , they have introduced the smooth mapping

$Z^k[\Omega]=C^\infty\left(N/\Omega\to Z^k(\Omega)\right)$ and $H^k[\Omega]=C^\infty\left(N/\Omega\to H^k(\Omega)\right)$

- The elements of $Z^k(\Omega)$ are closed forms on Ω , depending on coordinates on N/Ω
- Then $H^0[\Omega]=Casim(N)$ is the set of Casimir functions on N , of functions which are constant on all Euler orbits.
- **Entropy is then characterized by zero-dimensional de Rham Cohomology**.
- The center of Poisson algebra induced from the symplectic structure is the zero-dimensional de Rham cohomology group, the Casimir functions.

THALES

Séminaire MAMUPHI
Avril 2023, IRCAM, sale Shannon

MAMUPHI
mathématiques - musique – philosophie

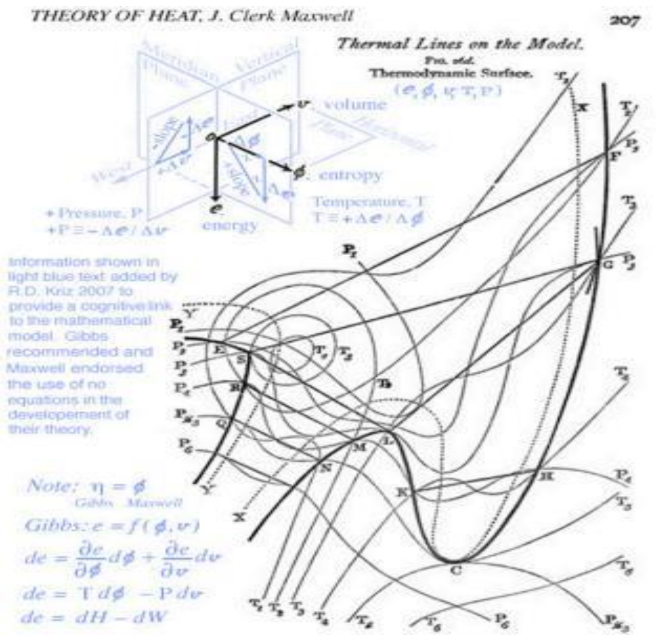
MAMUPHI

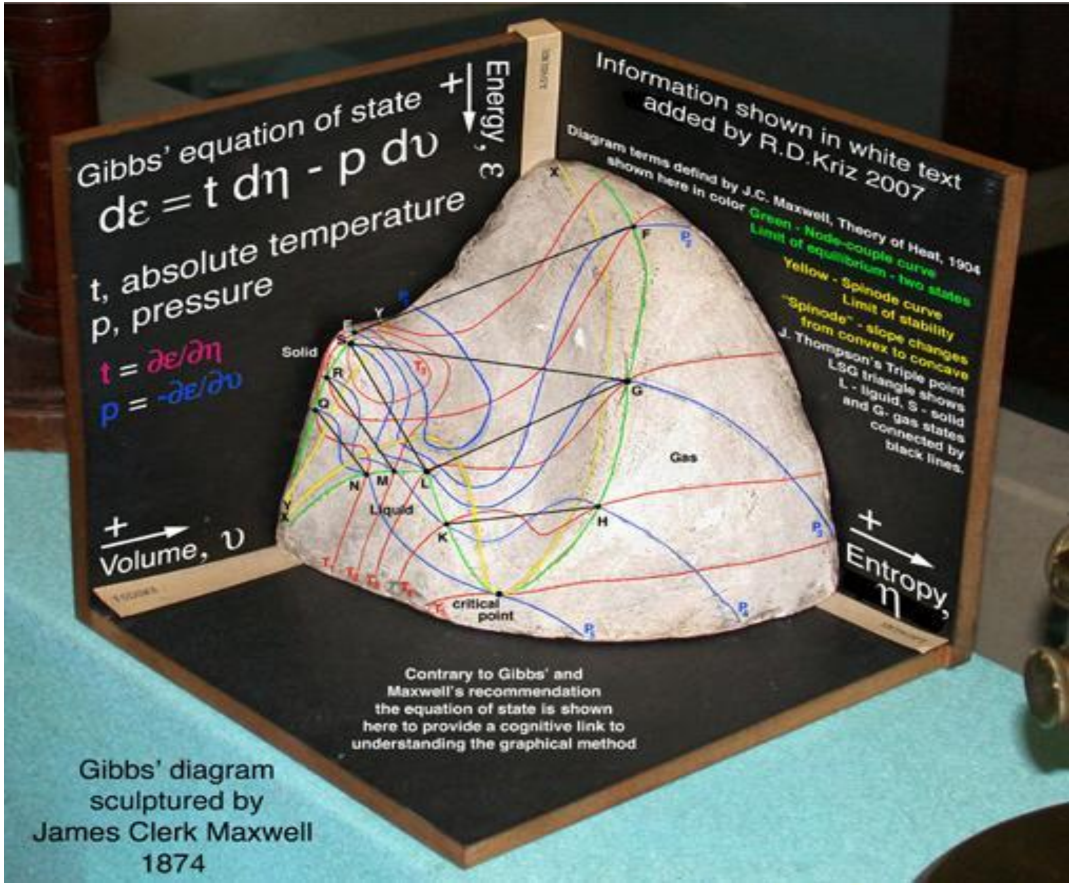
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Feuilletages symplectiques d'Ereshmann/Reeb à Libermann et Souriau

OPEN

Diagrammes de Gibbs sculptés par James Clerk Maxwell (1874)





Feuilletages: idée séminale de Carathéodory

Haefliger, A.: Naissance des feuilletages d'Ehresmann-Reeb à Novikov. Journal 2(5), 99–110 (2016)

- *« D'une manière générale, pour un champ de plans de codimension 1 donné par une forme de Pfaff ω, la condition d'intégrabilité équivaut à $\omega \wedge d\omega = 0$. Dans ce cas il existe localement une fonction non nulle λ, appelée un facteur intégrant, et une fonction φ, appelée une intégrale première, telles que $\omega = \lambda d\varphi$. Les variétés de niveau de φ sont les variétés intégrales.* ***Carathéodory [5] a donné en 1909 une caractérisation géométrique locale de la complète intégrabilité d'une forme de Pfaff ω****, à savoir: ω est complètement intégrable si et seulement si, pour tout voisinage U de tout point x, il existe un point de U qui ne peut être relié à x par une courbe dans U tangente au noyau de ω. Il a utilisé cette caractérisation pour* ***exprimer de manière remarquablement concise et conceptuelle le second principe de la thermodynamique****. »*
    - Je remercie Daniel Bennequin et Alain Chenciner qui m'ont signalé ce fait qui est aussi mentionné dans le livre de B. L. Reinhart [71].

- [5] C. Carathéodory, Untersuchungen ubër die Grundlagen der Thermodynamic, Math. Ann. 67 (1909), p.355-386
- [71] B. L. Reinhart, Differential Geometry of Foliations, vol. 99, Springer Verlag

Feuilletages: idée séminale de Carathéodory

B. L. Reinhart, Differential Geometry of Foliations, vol. 99, Springer Verlag

6.7 Example. Thermodynamics. Carathéodory [1909] gives a treatment of the foundations of thermodynamics in which the key hypothesis is the existence near any initial state of states which cannot be reached from that initial state. In this treatment, the set of equilibrium states of an isolated system is assumed to be parametrized by some $\mathbb{R}^m$ whose coordinates are interpreted as volumes, pressures, and densities. Changes of state take place along piecewise differentiable curves γ in $\mathbb{R}^m$, and the external work supplied during such a change is the integral along the curve of a given 1-form ω. There are two axioms. The first asserts the existence of a function E, the internal energy, which can be changed only by external work supplied or done. The second asserts that in any neighborhood of any given state, there are states which cannot be reached from it. A curve along which $dE + \omega = 0$ is called a quasi-static change, because physically it is viewed as proceeding so slowly that there is no loss of available energy through friction. The following proposition implies that there exist functions S and T such that

$$dE + \omega = T\,dS. \tag{6.8}$$

6.9 Proposition. *Let the C^1 form in $\mathbb{R}^m$*

$$dx^1 + f_2(x)\,dx^2 + \ldots + f_m(x)\,dx^m = \phi$$

be such that in every neighborhood of every point, there exist points which cannot be reached by integral curves of this form. Then there exist functions T and S such that $\phi = T\,dS$.

Proof. See Carathéodory [1909, pp. 369–370]. One first constructs the foliation of $\mathbb{R}^m$ by level surfaces of S, then from it obtains S and T. ▯

This beautiful result has still not used the full strength of the second axiom. Consider now a change of state $\gamma(t)$ which need not be quasi-static. The value of dS on a tangent vector to $\gamma(t)$ can be zero, but the sign of its nonzero values must be independent of γ, since otherwise every point could be reached. In the physical interpretation, T is absolute temperature and S is entropy, so with the proper choice of signs, this last result says that entropy never decreases, and that it remains constant under quasi-static changes. The latter are therefore the only reversible changes.

In order to make a universal determination of S and T, one takes two isolated systems and puts them into contact in such a way that one relation among the variables, is introduced. By applying Proposition 6.8 to each system separately and to the combined system it is possible to determine T up to a multiplicative constant, which in turn determines S up to an additive constant. Besides Carathéodory's paper, the book of Born [1949] gives a good presentation of these ideas. The statement of the second axiom which is given here is Born's version. Carathéodory is careful to observe that from a physical point of view, one should speak of approximating a given state rather than of reaching it, since no measurement can be precise enough to make certain that the state is reached.

[A] Carathéodoty C.: Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik, Math. Ann. 67, 355-386 (1909)
[B] Caratheodory, C. : Calculus of variations and partial differential equations of the first order. Volumes I and 11. Holden Day, San Francisco (1967)

Structures feuilletées – Georges Henri REEB

STRUCTURES FEUILLETEES

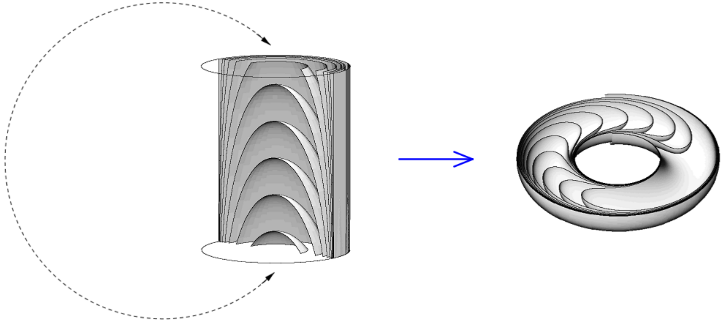
Pourquoi les a-t-on étudiées. Comment les a-t-on étudiées. Est-il "rentable" de continuer ces investigations ?

par

G. REEB

L'exposé débute inévitablement par l'enquête : Y a-t-il un botaniste dans l'assistance ? En effet, depuis toujours, (M. Maresquelle a initié la série en 1948) un botaniste au moins se trouve interpelé par les vocables : feuilles, feuillage,... La même assimilation a permis à un typographe, exaspéré, de composer malicieusement un titre : feuilles mortes.

A défaut de botaniste l'assemblée comptera peut-être un pâtissier. La pâte feuilletée - j'ai de bonnes raisons de le croire - donne une bonne idée d'un feuilletage (de codimension 1 dans R^3) dont elle dessine bien les feuilles et en suggère des propriétés.



Feuilletages

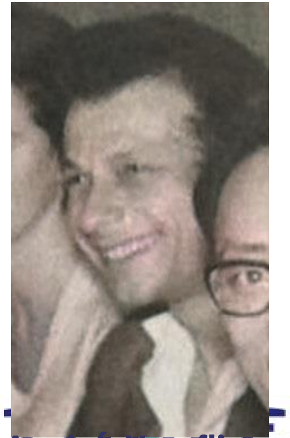
L'Ecole Française des feuilletages Ehresmann & Reeb

- Le géomètre André Haefliger vient de mourir le 7 Mars 2023. Ci-dessous un de ses articles sur les FEUILLETAGES:
  - **Haefliger, A.: Naissance des feuilletages d'Ehresmann-Reeb à Novikov. Journal 2(5), 99–110 (2016)**
- G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées (Thèse), Hermann 1952. supervisé par Charles Ehresmann
- " ***Sur une durée de quarante années l'immeuble s'est édifié; des centaines d'ouvriers ont œuvré. L'édifice n'est pas achevé, mais on peut visiter. Oui, visiter est le mot*** " - Georges REEB

Charles Ehresmann

Georges Henri Reeb

Sergei Petrovich Novikov



André Haefliger

Structures feuilletées – Georges Henri REEB
Motivations pour l’étude des feuilletages

G. Reeb, Structures feuilletées, Differential Topology, Foliations and Gelfand-Fuks cohomology, Rio de Janeiro, 1976, Springer Lecture Notes in Math. 652 (1978), 104-113.

STRUCTURES FEUILLETEES

Pourquoi les a-t-on étudiées. Comment les a-t-on étudiées. Est-il "rentable" de continuer ces investigations ?

Orbites coadjointes (action d’un groupe sur le dual de l’algèbre de Lie)

M_3 : La théorie des actions de groupes de Lie (théorie bien plus ancienne que celle des feuilletages) conduit souvent à considérer des feuilletages engendrés. De même la théorie du "repère mobile" (CARTAN) ("duale" en un sens assez vague de la précédente) suggère des classes de feuilletages à structure transversale remarquable.

Thermodynamiques et formes de Pfaff

M_4 : La thermodynamique a habitué de longue date la physique mathématique [cf. DUHEM P.] à la considération de formes de Pfaff complètement intégrables : la chaleur élémentaire dQ [notation des thermodynamiciens] représentant la chaleur élémentaire cédée dans une modification infinitésimale réversible est une telle forme complètement intégrable. Ce point ne semble guère avoir été creusé depuis lors.

> *"Sur une durée de quarante années l’immeuble s’est édifié; des centaines d’ouvriers ont œuvré. L’édifice n’est pas achevé, mais on peut visiter. Oui, visiter est le mot"* - Georges REEB

THALES

Œuvres complètes de Charles Ehresmann

La Géométrie Symplectique en liaison avec la Mécanique Analytique, a pris un extension considérable ces trente dernières années ; inspirés par les travaux de S. Lie et E. Cartan, A. Lichnerowicz [27], G. Reeb [44, 45], J.M. Souriau [48], ainsi que F. Gallissot [8], ont été les initiateurs de ce renouveau de la Mécanique Analytique.

Références:

- G. REEB, Propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, Mém. Acad. Se. Bruxelles 27 (1952).
- G. REEB, Varietés symplectiques, varietés presque-complexes et systèmes dynamiques, Comptes Rendus de l'Académie de Sciences, 235, (1952) 776–778
- G, REEB, Espaces de Finsler et espaces de Cartan, Coll. Int. CNRS Géom. Diff. Strasbourg (1953), 35-40.
- G. REEB, Problèmes relatifs aux variétés presque symplectiques et systèmes dynamiques, Convegno Int. Geom. Diff. Venise-Bologne-Pise (1953), 104-113

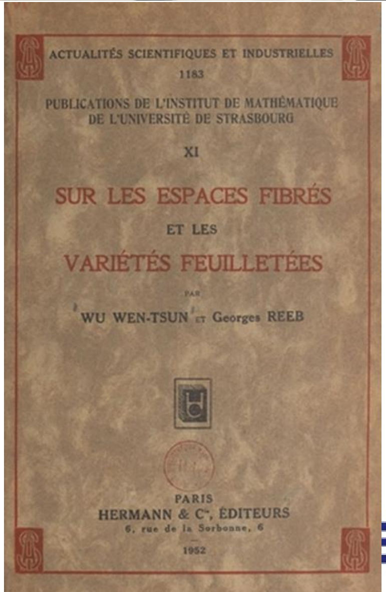
THALES

Ecole de Strasbourg

« Il [Jean-Louis Koszul] nous a quitté au bout de 2 ans pour aller à Grenoble, dans une manœuvre peu courante au moment de l'échange de poste avec Georges Reeb » - **Pierre Cartier**

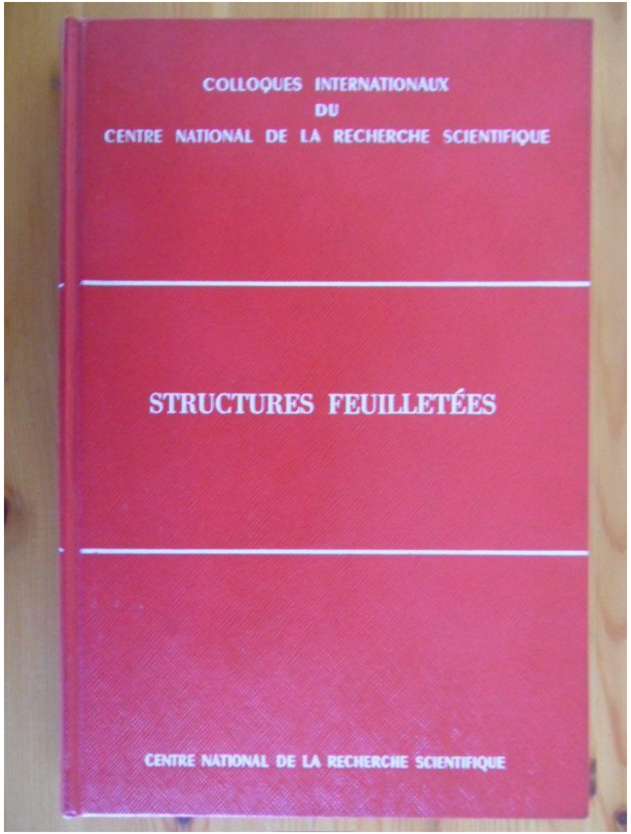
"It was fantastic. At that time [1954], I was the only graduate student. Wu Wentsun and Georges Reeb had been students in Strasbourg, but they had left by then. It is strange that I was the only student! There were very good people there: [Jean-Louis] Koszul, [Georges] Cerf (the father of Jean Cerf), and René Thom, of course. And Ehresmann invited many, many people." – **André Haefliger**

He (G. Reeb] was already in Grenoble when you were in Strasbourg. Did he come back to Strasbourg sometimes?
Haefliger: Yes. He was very kind and his wife also. He was truly Alsatian. He didn't go to the École Normale, so he was really an outsider! Of course we saw him very often, in Brazil, in many places. He had a whole school around him. In the end, he was interested in nonstandard analysis. It was like a religion! He wanted to persuade people they should know about Did you learn about foliations from Reeb?
Haefliger: Yes, by reading his thesis. I remember in 1954 I went to the International Congress in Amsterdam. I didn't know the thesis of Reeb before that. I saw it on a table, and I opened it, and I found it fascinating. He posed several problems in his thesis. I was also very much influenced [in my thesis] by Ehresmann's way of thinking about mathematics. And people disliked that very much.


ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
1183
PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
XI
SUR LES ESPACES FIBRÉS
ET LES
VARIÉTÉS FEUILLETÉES
PAR
WU WEN-TSUN ET Georges REEB
PARIS
HERMANN & C^ie, ÉDITEURS
6, rue de la Sorbonne, 6
1952

1963, naissance des « Structures feuilletées »

C. EHRESMANN, Structures feuilletées, Proceedings of the Fifth Canadian Mathematïcal Congress, 109-172., 1963



Structures feuilletées -
Grenoble, 25-30 juillet 1963 -
Georges Reeb
Auteur(s) : Georges Reeb - Charles Ehresmann - René Thom - Paulette Libermann
Editeur : Centre National De La Recherche Scientifique
Collection : Colloques Internationaux Du Cnrs
Langue : Français
Parution : 01/01/1964
Nombre de pages : 268

STRUCTURES FEUILLETEES

CHARLES EHRESMANN, *Institut Henri Poincaré*

Introduction

Cet article a pour but la définition précise et l'étude des structures feuilletées dans le cadre de la théorie des structures locales telle qu'elle est exposée dans (**3**; **5**; **6**). Les résultats connus dans le cas des variétés feuilletées sont précisés et généralisés au cas d'un feuilletage topologique localement simple. Les notions d'holonomie, de déroulements et de tubes analysées ici permettent d'étudier les questions de stabilité. Seuls des problèmes généraux sont abordés, les applications étant réservées pour une publication ultérieure.

La plupart des idées contenues dans ce travail ont été exposées dans mes cours (en particulier, Paris 1955–56, 1958, 1961) et dans des conférences (par exemple Princeton 1953, Buenos-Aires 1959–60, Montréal 1961). Rappelons que la notion de variété feuilletée a été introduite dans une Note en collaboration avec Reeb (**1**), puis étudiée d'une façon approfondie par Reeb (**13**; **14**) dans différentes publications. Les structures feuilletées d'espèce $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$ élargie et de seconde espèce ont été définies dans (**3**). Les Γ-structures étudiées par Haefliger (**16**), qui sont étroitement liées aux feuilletages de seconde espèce, ne seront pas considérées ici. Les feuilletages localement simples ont été introduits dans une Note en collaboration avec Shih Weishu (**2**).

I. Définitions de diverses espèces de structures feuilletées

1. *Feuilletages topologiques*

Soit E un ensemble muni de deux topologies T et T'. On dira que (T, T') définit sur E un *feuilletage topologique* ou une structure d'*espace feuilleté topologique* si la condition suivante est vérifiée : Pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U' de x relativement à T' sur lequel T et T' induisent la même topologie.

Si (T, T') est un feuilletage topologique sur E, alors T' est une topologie plus fine que T. Nous supposerons désormais que T' est

109

Paulette Libermann

Paulette Libermann

1919-2007

Première normalienne docteure en mathématiques, spécialiste de géométrie différentielle

Mathématicienne, Paulette Libermann a eu une vie scientifique longue et productive, bien que commencée sous de mauvais augures sous le gouvernement de Vichy. Sa thèse de géométrie différentielle contenait des résultats souvent redécouverts beaucoup plus tard. Jusqu'à sa mort, elle publie et participe à des colloques dans sa discipline. Elle fut professeure de mathématiques dans les universités de Rennes, de Paris Sorbonne puis de Paris Diderot - Paris 7. Le livre de géométrie symplectique qu'elle a écrit avec son collaborateur C.-M. Marle en 1987 reste une référence dans le domaine.

Brillante élève au lycée Lamartine à Paris, elle est admise en 1938 à l'École normale supérieure (ENS) de Sèvres, alors spécialisée dans la formation de professeures de lycée. La directrice, Eugénie Cotton, physicienne, a pour ambition que les sévriennes reçoivent un enseignement de même niveau que celui dispensé dans l'ENS de la rue d'Ulm, réservée aux garçons. C'est ainsi que Paulette Libermann aura comme enseignants les mathématiciens Élie Cartan et André Lichnerowicz.

En 1940 la législation antisémite de Vichy l'empêche de devenir enseignante. E. Cartan lui suggère donc de faire de la recherche. En 1942, elle se réfugie avec sa famille à Lyon, où elle survivra en donnant des cours particuliers, et ne pourra réintégrer l'ENS qu'en 1944. Elle sera alors reçue à l'agrégation de mathématiques. Elle est d'abord nommée professeure au lycée de jeunes filles de Douai, puis après un séjour de recherche de deux ans avec Henry Whitehead à Oxford, elle va enseigner au lycée de jeunes filles de Strasbourg. C'est là qu'elle rencontre les mathématiciens Georges Reeb, René Thom et Charles Ehresmann. Elle effectuera une thèse sous la direction de ce dernier, devenant ainsi en 1953 la première sévrienne docteure en mathématiques.

Elle devient professeure d'université à Rennes, puis à Paris à partir de 1966. Elle y anime un séminaire, d'abord avec Ehresmann, puis avec des collègues plus jeunes jusqu'en 1990. Elle y invitait des personnalités célèbres, mais aussi de jeunes mathématicien·ne·s encore peu connu·e·s. Elle a étudié des notions fondamentales en géométrie symplectique : structures presque complexes, feuilletages lagrangiens… Elle fut invitée dans de nombreuses universités et centres de recherche dans le monde entier. Toutes celles et tous ceux qui l'ont côtoyée ont apprécié ses connaissances étendues, son jugement sûr et sa chaleur humaine.

BIBLIOGRAPHIE & SITES

Kosmann-Schwarzbach Yvette, ***Hommage à Paulette Libermann (1919-2007)***, SMF Gazette 114 (2007). Marle Charles-Michel, ***idem***, SMF Gazette 114 (2007).

http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2007/114/

Marc Chaperon (éd. Michèle Audin), ***Souvenirs de Paulette Libermann, Image des mathématiques***, 2009.

http://images.math.cnrs.fr/Souvenirs-de-Paulette-Libermann.html

Foliation Structures of Lie Groups Thermodynamics

Thermodynamics-Informed Neural Networks and Symplectic Foliation

- Metriplectic flow (also called GENERIC flow) models:
  - **non-dissipative dynamics (1st thermodynamic principle of energy preservation)**
  - **dissipative dynamics (2nd thermodynamic principle of entropy production).**
- Souriau's Lie Groups Thermodynamics allows to characterize geometrically metriplectic flow by:
  - **Symplectic foliation (non-dissipative part)**
  - **Riemanian Foliations (dissipative part), transverse to symplectic leaves**
- From symmetries of the problem, we can generate **Lie group coadjoint orbits that are symplectic leaves defined as level sets of Entropy**, where Entropy is an invariant Casimir function in coadjoint representation (invariant function on these symplectic leaves).
- Dynamics along these symplectic leaves, given by Poisson bracket, characterize non-dissipative dynamics with energy preservation.
- Dissipative dynamics are then given by transverse Poisson structure and metric flow bracket, with evolution from leaf to leaf constrained by entropy production. Foliation transverse structure are closely linked with Riemannian foliations given by Souriau-Fisher metric.

Modèle Bi-Feuilletage et structure transverse du modèle de Souriau

Foliation Ψ
by levels of
a function set $\Im_\Psi$

$\{e_i\}$ basis of $\mathfrak{g}$ and $\{e^i\}$ basis of $\mathfrak{g}^*$

$\left[e_i,e_j\right]=c_{ij}^k e_k$ and $\left\langle e^i,e_j\right\rangle=\delta_{ij}$

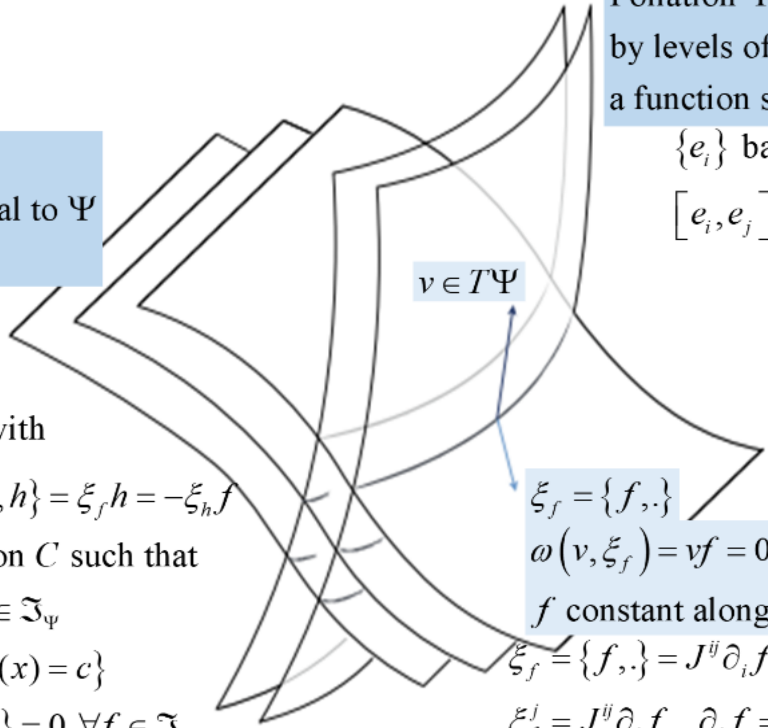
$l=l_i e^i$

and l_i coordinates of l on $\mathfrak{g}^*$

$\nabla f=e_i\dfrac{\partial f}{\partial l_i}$ so that $\nabla l_i=e_i$

$\left\{l_i,l_j\right\}=\left\langle l,\left[e_i,e_j\right]\right\rangle=c_{ij}^k l_k$

Foliation $\Psi^\perp$
skew-orthogonal to Ψ
at any point



$v\in T\Psi$

$\xi_f=\{f,.\}$

$\omega\left(v,\xi_f\right)=vf=0$

f constant along Ψ

$i_{\xi_f}\omega+df=0$ with

$\omega\left(\xi_f,\xi_h\right)=\{f,h\}=\xi_f h=-\xi_h f$

Casimir function C such that

$\{C,f\}=0,\forall f\in\Im_\Psi$

$\Lambda_c=\{x\in P:C(x)=c\}$

$\Rightarrow \xi_f C=\{f,C\}=0,\forall f\in\Im_\Psi$

$\xi_f=\{f,.\}=J^{ij}\partial_i f\partial_j=\xi_f^j\partial_j$

$\xi_f^j=J^{ij}\partial_i f,\ \ \partial_i f=\omega_{ij}\xi_f^i$ and $\xi_{\{f,g\}}=\left[\xi_f,\xi_g\right]$

Poincaré Unit Disk and SU(1,1) Lie Group

- The group of complex unimodular pseudo-unitary matrices $SU(1,1)$:

$$G = SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} / |a|^2 - |b|^2 = 1,\ a, b \in C \right\}$$

- the Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1,1)$ is given by:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} -ir & \eta \\ \eta^* & ir \end{pmatrix} / r \in R, \eta \in C \right\}$$

with the following bases $(u_1, u_2, u_3) \in \mathfrak{g}$:

$$u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

with the commutation relation:

$$[u_3, u_2] = u_1, [u_3, u_1] = u_2, [u_2, u_1] = -u_3$$

THALES

Poincaré Unit Disk and SU(1,1) Lie Group

- Dual base on dual Lie algebra is named $\left(u_1^*, u_2^*, u_3^*\right) \in \mathfrak{g}^*$
- The dual vector space $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{su}^*(1,1)$ can be identified with the subspace of $\mathfrak{sl}(2,C)$ of the form:

$$\mathfrak{g}^* = \left\{ \begin{pmatrix} z & x+iy \\ -x+iy & -z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} / x,y,z \in R \right\}$$

- Coadjoint action of $g \in G$ on dual Lie algebra $\xi \in \mathfrak{g}^*$ is written $g.\xi$

Coadjoint Orbit of SU(1,1) and Souriau Moment Map

- The torus $K = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \theta \in R \right\}$ induces rotations of the unit disk
- K leaves 0 invariant. The stabilizer for the origin 0 of unit disk is maximal compact subgroup K of $SU(1,1)$.
- B. Cahen has observed that $O\left(ru_3^*\right) \approx G / K$ and is diffeomorphic to the unit disk $D = \left\{ z \in C / |z| < 1 \right\}$
- The **moment map** is given by:

$$J : D \to O\left(ru_3^*\right)$$

$$z \mapsto J(z) = r\left(\frac{z+z^*}{\left(1-|z|^2\right)} u_1^* + \frac{z-z^*}{i\left(1-|z|^2\right)} u_2^* + \frac{1+|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)} u_3^* \right)$$

Benjamin Cahen, Contraction de SU(1,1) vers le groupe de Heisenberg, Travaux mathématiques, Fascicule XV, pp.19-43, (2004)

Coadjoint Orbit of SU(1,1) and Souriau Moment Map

$$J : D \to \mathrm{O}_n$$

$$z \mapsto J(z) = \frac{n}{2}\left(\frac{z+z^*}{\left(1-|z|^2\right)} u_1^* + \frac{z-z^*}{i\left(1-|z|^2\right)} u_2^* + \frac{1+|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)} u_3^* \right)$$

- Group G act on D by homography: $g.z = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{a^*z+b^*}$
- This action corresponds with coadjoint action of G on O_n .
- The Kirillov-Kostant-Souriau 2-form of O_n is given by:

$$\Omega_n(\zeta)\left(X(\zeta),Y(\zeta)\right) = \left\langle \zeta,[X,Y]\right\rangle \ , X,Y \in \mathfrak{g} \text{ and } \zeta \in \mathrm{O}_n$$

- and is associated in the frame by ψ_n with: $\omega_n = \frac{in}{\left(1-|z|^2\right)^2} dz \wedge dz^*$

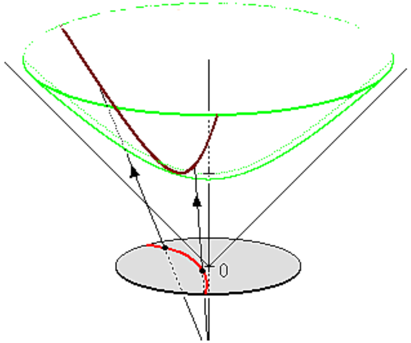
THALES

Coadjoint Orbit of SU(1,1) and Souriau Moment Map

$$J(z)=r\left(\frac{z+z^*}{\left(1-|z|^2\right)}u_1^*+\frac{z-z^*}{i\left(1-|z|^2\right)}u_2^*+\frac{1+|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)}u_3^*\right)\in O\left(ru_3^*\right),z\in D$$

- J is linked to the natural action of G on D (by fractional linear transforms) but also the coadjoint action of G on $O\left(ru_3^*\right)=G/K$
- J^{-1} could be interpreted as the stereographic projection from the two-sphere S^2 onto $C\cup\infty$:

The coadjoint action of $G=SU(1,1)$ is the upper sheet $x_3>0$ of the two-sheet hyperboloid



Charles-Michel Marle, Projection stéréographique et moments, hal-02157930, version 1, Juin 2019

$$\left\{\xi=x_1u_1^*+x_2u_2^*+x_3u_3^*:-x_1^2-x_2^2+x_3^2=r^2\right\}$$

THALES

Moment Map for SU(1,1)

Invariant Moment Map

- The associated moment map $J : D \rightarrow su^*(1,1)$ defined by $J(z).u_i = J_i(z,z^*)$, maps D into a coadjoint orbit in $su^*(1,1)$.
- Then, we can write the moment map as a matrix element of $su^*(1,1)$:

$$J(z) = J_1\left(z,z^*\right)u_1^* + J_2\left(z,z^*\right)u_2^* + J_3\left(z,z^*\right)u_3^*$$

$$J(z) = \rho \begin{pmatrix} \dfrac{1+|z|^2}{1-|z|^2} & -2\dfrac{z^*}{1-|z|^2} \\ 2\dfrac{z}{1-|z|^2} & -\dfrac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}^*$$

$$\mathfrak{g}^* = \left\{ \begin{pmatrix} z & x+iy \\ -x+iy & -z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} / \, x,y,z \in R \right\}$$

Gibbs State Equilibrium

One parameter subgroup

- We can then exponentiate β with exponential map to get :

$$g=\exp(\varepsilon\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon\beta)^k}{k!}=\begin{pmatrix} a_\varepsilon(\beta) & b_\varepsilon(\beta) \\ b_\varepsilon^*(\beta) & a_\varepsilon^*(\beta) \end{pmatrix}$$

- If we make the remark that we have the following relation

$$\beta^2=\begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir \end{pmatrix}=\left(|\eta|^2-r^2\right)I$$

- we can developed the exponential map :

$$g=\exp(\varepsilon\beta)=\begin{pmatrix} \cosh(\varepsilon R)+ir\dfrac{\sinh(\varepsilon R)}{R} & \eta\dfrac{\sinh(\varepsilon R)}{R} \\ \eta^*\dfrac{\sinh(\varepsilon R)}{R} & \cosh(\varepsilon R)-ir\dfrac{\sinh(\varepsilon R)}{R} \end{pmatrix} \text{ with } R^2=|\eta|^2-r^2$$

Souriau Gibbs density for SU(1,1)

Covariant Gibbs density

- We can the write the covariant Gibbs density in the unit disk given by moment map of the Lie group $SU(1,1)$ and geometric temperature in its Lie algebra $\beta \in \Lambda_\beta$:

$$p_{Gibbs}(z) = \frac{e^{-\langle J(z),\beta\rangle}}{\int_D e^{-\langle J(z),\beta\rangle} d\lambda(z)} \text{ with } d\lambda(z) = 2i\rho \frac{dz \wedge dz^*}{\left(1-|z|^2\right)^2}$$

$$p_{Gibbs}(z) = \frac{e^{-\left\langle \rho\left(2\Im bb^+ - Tr\left(\Im bb^+\right)I\right),\beta\right\rangle}}{\int_D e^{-\langle J(z),\beta\rangle} d\lambda(z)} = \frac{e^{-\left\langle \rho \begin{pmatrix} \frac{1+|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)} & \frac{-2z^*}{\left(1-|z|^2\right)} \\ \frac{2z}{\left(1-|z|^2\right)} & -\frac{1+|z|^2}{\left(1-|z|^2\right)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir \end{pmatrix} \right\rangle}}{\int_D e^{-\langle J(z),\beta\rangle} d\lambda(z)}$$

$$J(z) == \rho\left(2Mbb^+ - Tr\left(Mbb^+\right)I\right) \text{ with } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } b = \frac{1}{1-|z|^2}\begin{bmatrix} 1 \\ -z \end{bmatrix}$$

Souriau Gibbs density

Covariant Gibbs Density

$$p_{Gibbs}(z)=\frac{e^{-\left\langle \rho\begin{pmatrix}\frac{1+|z|^2}{(1-|z|^2)} & \frac{-2z^*}{(1-|z|^2)}\\ \frac{2z}{(1-|z|^2)} & -\frac{1+|z|^2}{(1-|z|^2)}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir\end{pmatrix}\right\rangle}}{\int\limits_D e^{-\langle J(z),\beta\rangle}d\lambda(z)}$$

- To write the Gibbs density with respect to its statistical moments, we have to express the density with respect to $Q=E\left[J(z)\right]$
- Then, we have to invert the relation between Q and β, to replace $\beta=\begin{pmatrix} ir & \eta \\ \eta^* & -ir\end{pmatrix}\in\Lambda_\beta$ by $\beta=\Theta^{-1}(Q)\in\mathfrak{g}$ where $Q=\frac{\partial\Phi(\beta)}{\partial\beta}=\Theta(\beta)\in\mathfrak{g}^*$ with $\Phi(\beta)=-\log\int\limits_D e^{-\langle J(z),\beta\rangle}d\lambda(z)$ deduce from Legendre tranform. The mean moment map is given by:

$$Q=E\left[J(z)\right]=E\left[\rho\begin{pmatrix}\frac{1+|w|^2}{(1-|w|^2)} & \frac{-2w^*}{(1-|w|^2)}\\ \frac{2w}{(1-|w|^2)} & -\frac{1+|w|^2}{(1-|w|^2)}\end{pmatrix}\right] \quad \text{where } w\in D$$

Poisson Bracket for SU(1,1)

- Since the unit disk is Kählerian, it is symplectic and so can be given a phase space structure and interpretation. This Poisson Bracket could be written in terms of the Poincare disk coordinates as:

$$\{f,g\}=\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{2i}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z^*}-\frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

- It is possible to define new coordinates (q,p) that are canonical in the sense that:

$$\{f,g\}=\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}\right)$$ with coordinates given by: $$\frac{q+ip}{2}=\frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}}$$

- The Metriplectic equation is then given by:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\{f,H\}+(f,H)=\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{2i}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z^*}-\frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\partial H}{\partial z}\right)+(f,H)$$

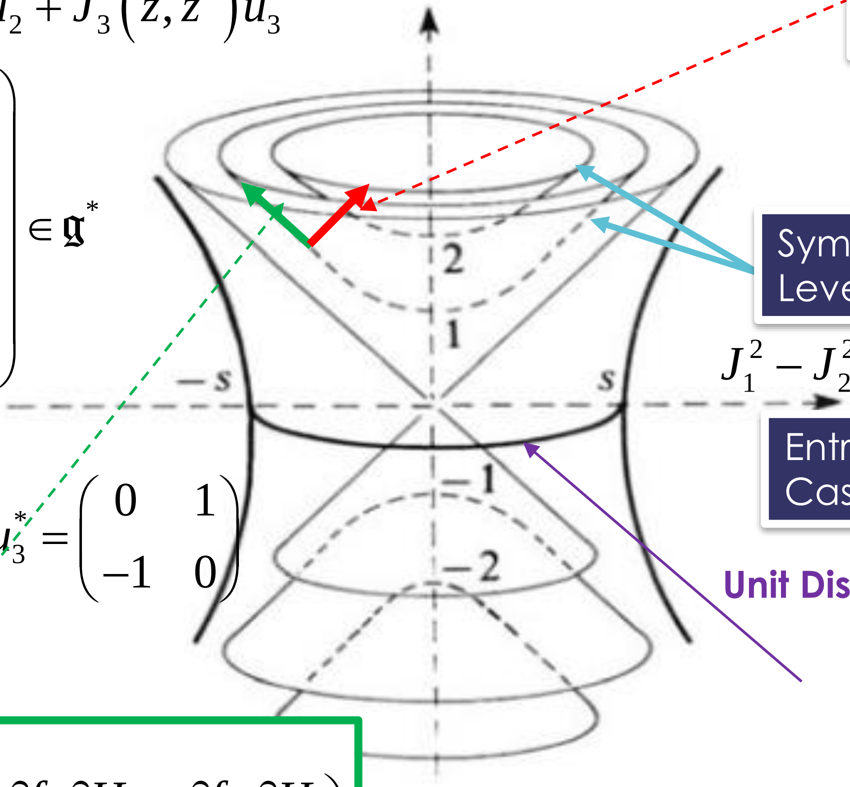
Souriau Lie Groups Thermodynamics Model for SU(1,1) and Unit Disk

$$J(z) = J_1\left(z,z^*\right)u_1^* + J_2\left(z,z^*\right)u_2^* + J_3\left(z,z^*\right)u_3^*$$

$$J(z) = \rho\begin{pmatrix} \dfrac{1+|z|^2}{1-|z|^2} & -2\dfrac{z^*}{1-|z|^2} \\ 2\dfrac{z}{1-|z|^2} & -\dfrac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}^*$$

$$J_1u_1^* + J_2u_2^* + J_3u_3^* \in su^*(1,1)$$

$$u_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ u_2^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ u_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Dissipative flow (transverse to symplectic leaves)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} = (f, H)}$$

Symplectic Leaves = Level sets of Entropy

$$J_1^2 - J_2^2 - J_3^2 = \rho^2 \quad , \quad J_1 \geq \rho$$

Entropy = Invariant Casimir Function

Non Dissipative flow (along the symplectic leaves)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} = \frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{2i}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z^*} - \frac{\partial f}{\partial z^*}\frac{\partial H}{\partial z}\right)}$$

Unit Disk as Symplectic Manifold

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\right\}$$

$$\omega_\rho = 2i\rho\frac{dz \wedge dz^*}{\left(1-|z|^2\right)^2}$$

THALES

THALES

Séminaire MAMUPHI
Avril 2023, IRCAM, sale Shannon

MAMUPHI
mathématiques - musique – philosophie
MAMUPHI

CNRS CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Feuilletage transverse, dissipation et 2nd principe de la thermodynamique

OPEN

METRIPLECTIC FRAMEWORK FOR DISSIPATIVE HEAT EQUATION

METRIPLECTIC & GENERIC Models

- Systems that preserve energy throughout the phase are characterized by an Hamiltonian formulation of dynamics.
- Classical Hamiltonian systems cannot take into account dissipative effects, as irreversible changes from a thermodynamic standpoint (dissipative dynamics that do not preserve energy).
- A. N. Kaufman and P.J. Morrison have introduced in 1983, the **metriplectic** bracket by introducing a bracket formalism that ensures both conservation of energy and non-decrease of entropy, and that reduces to the standard Poisson bracket formalism in the limit of no dissipation.
- This model has been axiomatized in parallel by Grmela and his collaborators (**GENERIC method: General Equation for Non-Equilibrium Reversible Irreversible Coupling**).

METRIPLECTIC FRAMEWORK FOR DISSIPATIVE HEAT EQUATION

Metriplectic Model

- Dissipation could take two forms:
  - viscosity removes energy from the system (e.g. Navier-Stokes equation)
  - thermal diffusion with conservation of energy and entropy production by heat transfer (e.g. Boltzmann operator, Transport equations with collision operators,…).
- Metriplectic dynamics includes these kind of systems compliant both with the first and second thermodynamics principles.
- In the metriplectic formalism, evolution equation is given by a new bracket: $\{\{.,.\}\}$

$$\frac{df}{dt} = \{\{f,F\}\} = \{f,F\} + (f,F)$$

Non-Dissipative Bracket
(Poisson Bracket)

Dissipative Bracket
(Metric Flow Bracket)

METRIPLECTIC FRAMEWORK FOR DISSIPATIVE HEAT EQUATION

Metriplectic Model

$$\frac{df}{dt} = \{\{f, F\}\} = \{f, F\} + (f, F)$$

- Hamiltonian components is introduced by requiring:

$$F = H + S$$

- The 2nd bracket has 2 constraints :

$$(f, F) = (F, f) \quad \text{and} \quad (f, f) \geq 0$$

- with **the entropy S selected from the set of Casimir invariants of the non-canonical Poisson bracket**, playing the role of a Lyapunov functional.
- A metriplectic vector field induced by F is given by the dynamics:

$$\frac{dz_i}{dt} = J_{ij}\frac{\partial F}{\partial z_j} + M_{ij}\frac{\partial F}{\partial z_j}$$

Metriplectic Model Compliance to Thermodynamics Principles

Metriplectic Model compliance with two first principles of thermodynamics

- First principle: **Energy conservation**

$$F = H + S$$

$$\frac{dH}{dt} = \{H,F\} + (H,F) = \{H,H\} + \{H,S\} + (H,H) + (H,S) = 0$$

$$\text{because } \begin{cases} \{H,H\} = 0 \text{ by symmetry} \\ \{f,S\} = 0, \quad \forall f \\ (H,f) = 0, \quad \forall f \end{cases}$$

Metriplectic Model Compliance to Thermodynamics Principles

Metriplectic Model compliance with two first principles of thermodynamics

- Second principle: **Entropy production**

$$\frac{dS}{dt} = \{S,F\} + (S,F) = 0 + (S,H) + (S,S) = (S,S) \geq 0$$

$$\text{because } \begin{cases} \{S,f\} = 0, \quad \forall f \quad \text{(Casimir property)} \\ (f,H) = 0, \quad \forall f \\ \text{positive semi-definite } \Rightarrow \quad (S,S) \geq 0 \end{cases}$$

- The choice of thermal equilibrium is induced by selecting **Entropy as Casimir invariant function**.

Metriplectic Model and Casimir invariants

Metriplectic Model

- Finally in metriplectic systems, the geometry is determined by two compatible brackets, a Poisson bracket and a symmetric bracket:

$$\frac{df}{dt}=\{\{f,F\}\}=\{f,H\}+(f,S)$$

- The energy H is a Casimir invariant of the dissipative bracket, and the entropy S is a Casimir invariant of the Poisson bracket:

$$\{S,H\}=0 \quad \forall H$$

$$(H,S)=0 \quad \forall S$$

Canonical /Noncanonical Hamiltonian Structures and Poisson Bracket

Non-dissipative part of Metriplectic Model

- The 1st part of a metriplectic vector field relative to non-dissipative part is given by Poisson bracket. Considering the Hamiltonian function $H(q,p)$ depending on the canonical coordinates q and momenta p, with $z=(p,q)$, Hamiltonian equations:

$$\frac{dz_i}{dt} = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial z_j} = \{z_i, H\}, \quad i,j = 1,...,2N$$

$$J = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix} \text{ and } \{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial z_j} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial z_j}$$

- We note the symplectic 2-form $\omega = \sum dp^i \wedge dq_i$ such that $\omega^{ik} J_{kj} = \delta_{ij}$

Dissipative part of Metriplectic Model

- The 2nd part of a metriplectic vector field relative to dissipative part, is a flow in a metric space. A metric flow on a finite dimensional phase space manifold, has the following form in coordinates:

$$\frac{dz_i}{dt} = M_{ij}\frac{\partial S}{\partial z_j} = (z_i, S), \quad i = 1, \ldots, M$$

$$(f, g) = \frac{\partial f}{\partial z_j} M_{ij}(z) \frac{\partial g}{\partial z_j}, \quad i, j = 1, \ldots, M \quad \text{with} \quad (f, g) = (g, f)$$

- where S is an Entropy function. We should have the properties for the metric:

$$M \text{ positive semi-definite} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = (S, S) \geq 0$$

$$\text{Energy Conservation } H \text{ (Hamiltonian)} \Rightarrow (H, f) = 0, \quad \forall f$$

OPEN

THALES

Metriplectic Model

- **The symmetry condition is a generalization of the Onsager symmetry of linear irreversible thermodynamics to non-linear problems**, but classically in Metriplectic model, they don't consider the possibility of Casimir symmetry.
- In the Lie-Poisson framework, different dissipation Bracket $(.,.)$ that can be defined by the Lie algebra have been proposed in the literature for Metriplectic system: the double bracket, Cartan-Killing bracket, and Casimir dissipation bracket.
- For Lie-Poisson systems, Lie-Poisson bracket for two functions f, h is given by:

$$\{f,h\}(z)=\left\langle z,\left[\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial h}{\partial z}\right]\right\rangle=\left\langle z,-ad_{\frac{\partial h}{\partial z}}\frac{\partial f}{\partial z}\right\rangle=\left\langle ad^*_{\frac{\partial h}{\partial z}}z,\frac{\partial f}{\partial z}\right\rangle$$

- Hamiltonian dynamics is given by :

$$\frac{df}{dt}=\{f,h\}(z)=\left\langle ad^*_{\frac{\partial h}{\partial z}}z,\frac{\partial f}{\partial z}\right\rangle\Rightarrow\frac{dz}{dt}=ad^*_{\frac{\partial h}{\partial z}}z$$

THALES

Metriplectic Model

- In coordinate realization, with a coordinate chart (z_i), the Poisson bivector is represented by a set of coefficient function determining the Poisson bracket:

$$\{f,h\} = J_{ij}\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial h}{\partial z_j} \Rightarrow \frac{dz_i}{dt} = J_{ij}\frac{\partial h}{\partial z_j}$$

- **For Lie-Poisson structure defined on the dual of a finite dimensional Lie algebra, we can introduce structure constants** with an N dimensional Lie algebra admitting a basis $\{e_1,...,e_N\}$: $\left[e_i,e_j\right] = c_{ij}^k e_k$ (with summation convention over the repeated indices).
- The Lie-Poisson dynamics is given by:

$$J_{ij} = c_{ij}^k z_k \Rightarrow \frac{dz_j}{dt} = c_{ij}^k z_k \frac{\partial h}{\partial z_i}$$

METRIPLECTIC MODEL

Dissipation bracket as double bracket

- The double bracket is given by:

$$(f,h)=\sum_j J_{ij}J_{lj}\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial h}{\partial z_l}=\sum_j c_{ij}^k c_{lj}^r z_k z_r \frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial f}{\partial z_l}$$

- with the metriplectic dynamics :

$$\frac{dz_j}{dt}=c_{ij}^k z_k \frac{\partial h}{\partial z_i}+\sum_i c_{ji}^k c_{li}^r z_r z_n \frac{\partial h}{\partial z_l}$$

METRIPLECTIC MODEL

The symmetric dissipative metriplectic bracket as Euclidean metric tensor on the symplectic leaves foliated by the Casimir invariants

- ***Sato observed that the canonical form of the symmetric dissipative part of the metriplectic bracket is identified in terms of a 'canonical metric tensor' corresponding to an Euclidean metric tensor on the symplectic leaves foliated by the Casimir invariants.***
- It makes the link with Symplectic model of Lie groups Thermodynamics. A single generating function $\Phi = \langle \beta, Q \rangle - S$ is sufficient to generate the dynamics by the action of the metriplectic bracket:

$$\frac{dF}{dt} = \{\{F, \Phi\}\} = \beta^{-1}\{F, \Phi\} + (F, \Phi)$$

COQUINOT NON-EQUILIBRIUM THERMODYNAMIC THEORY OF DISSIPATIVE BRACKETS

- Baptiste Coquinot proves a **formal equivalence between the classical out-of-equilibrium thermodynamics and a subclass of metriplectic dynamical systems**, showing that the pseudometric nature of the dissipative bracket, usually an ad hoc hypothesis, is the **exact transcription of the well-known second law of thermodynamics and Onsager's relations** through this equivalence.
- Coquinot's construction shows that the dissipative brackets are completely natural for non-equilibrium thermodynamics, just as Poisson brackets are natural for Hamiltonian dynamics, **deriving a general dissipative bracket, for the first time, from basic thermodynamic first principles**.
- Baptiste Coquinot has considered **the role of entropy, a Casimir invariant, as counterpart to the role of the Hamiltonian in analytical mechanics**, the non-negativity of the pseudometric ensures the entropy growth, as given by the second law of thermodynamics.

THALES

Séminaire MAMUPHI
Avril 2023, IRCAM, sale Shannon

MAMUPHI
mathématiques - musique – philosophie
MAMUPHI

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Le « mouvement » d'Aristote, à Duhem et Souriau en passant par Pascal

Esprit de finesse et esprit de géométrie

Pour la théorie de la connaissance mais aussi pour les sciences est fondamentale la notion de perspective.
Or, les expériences faites dans la géométrie algébriques, dans la théorie des nombres, et dans l'algèbre abstraite m'induisent à tenter une formulation mathématique de cette notion ***pour surmonter ainsi au moyen de raisonnements d'origine géométrique la géométrie****. Il me semble en effet, que la tendance vers l'abstraction observée dans les mathématiques d'aujourd'hui, loin d'être l'ennemi de l'intuition ait le sens profond de quitter l'intuition pour la faire renaitre dans une alliance entre* ***« esprit de géométrie » et « esprit de finesse », alliance rendue possible par les réserves énormes des mathématiques pures dont Pascal et Goethe ne pouvaient pas encore se douter****.*
Erich Kähler – Sur la théorie des corps purement algébriques, 1952

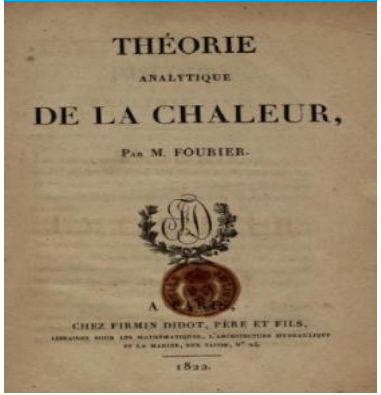
Finesse et géométrie dans le style raffiné de Joseph de Maistre

Si on ajoute que la critique qui accoutume l'esprit, surtout en matière de faits, à ***recevoir de simples probabilités pour des preuves****, est, par cet endroit, moins propre à le former, que ne le doit être la* ***géométrie qui lui fait contracter l'habitude de n'acquiescer qu'à l'évidence****; nous répliquerons qu'à la rigueur on pourrait conclure de cette différence même, que la critique donne, au contraire, plus d'exercice à l'esprit que la géométrie: parce que l'évidence, qui est une et absolue, le fixe au premier aspect sans lui laisser ni la liberté de douter, ni le mérite de choisir; au lieu que les probabilités étant susceptibles du plus et du moins, il faut, pour se mettre en état de prendre un parti, les comparer ensemble, les discuter et les peser. Un genre d'étude qui rompt, pour ainsi dire, l'esprit à cette opération, est certainement d'un usage plus étendu que celui où tout est soumis à l'évidence; parce que* ***les occasions de se déterminer sur des vraisemblances ou probabilités, sont plus fréquentes que celles qui exigent qu'on procède par démonstrations****: pourquoi ne dirions –nous pas que souvent elles tiennent aussi à des objets beaucoup plus importants ?*

Joseph de Maistre

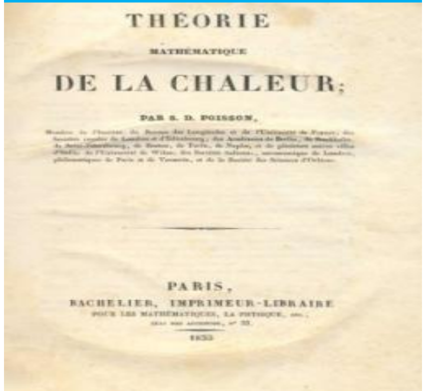
La théorie analytique, mécanique et mathématique de la chaleur

Fourier: Analytical Theory of Heat



Clausius: Mechanical Theory of Heat

Poisson: Mathematical Theory of Heat



Gaston Bachelard Book

- Étude sur l'évolution d'un problème de physique: La propagation thermique dans les solides; Vrin - Bibliothèque des Textes Philosophiques, 1973
- Evolution des idées: Biot, Fourier, Poisson, Lamé, Boussinesq
- http://www.vrin.fr/book.php?code=9782711600434&search_back=bachelard&editor_back=10

OPEN

THALES

Impossibilité de construite une théorie mécanique de la chaleur: « bon sens » paysan d'Henri Poincaré ou la fable du grain d'avoine et du tas de blé

333. Toutes les tentatives de cette nature doivent donc être abandonnées; les seules qui aient quelque chance de succès sont celles qui sont fondées sur l'intervention des *lois statistiques* comme, par exemple, la théorie cinétique des gaz.

Ce point de vue, que je ne puis développer ici, peut se résumer d'une façon un peu vulgaire comme il suit :

Supposons que nous voulions placer un grain d'avoine au milieu d'un tas de blé; cela sera facile; supposons que nous voulions ensuite l'y retrouver et l'en retirer; nous ne pourrons y parvenir. Tous les phénomènes irréversibles, d'après certains physiciens, seraient construits sur ce modèle.

FIN.

Conclusion du cours de Thermodynamique d'Henri Poincaré

La philosophie naturelle d'Aristote et l'épistémologie de Pascal

- “***Nous avons fait de la Dynamique un cas particulier de la Thermodynamique, une Science qui embrasse dans des principes communs tous les changements d’état des corps, aussi bien les changements de lieu que les changements de qualités physiques***” - Pierre Duhem, Sur les équations générales de la Thermodynamique, 1891
- “***Nous prenons le mot mouvement pour désigner non seulement un changement de position dans l’espace, mais encore un changement d’état quelconque, lors même qu’il ne serait accompagné d’aucun déplacement . . . De la sorte, le mot mouvement s’oppose non pas au mot repos, mais au mot équilibre.***” - Pierre Duhem, Commentaire aux principes de la Thermodynamique, 1894
- “***This theoretical design led Duhem to rediscover and reinterpret the tradition of Aristotle’s natural philosophy and Pascal’s epistemology . . . This outcome was surprising and clearly echoed the Aristotelian language and concept of motion as change and transformation: within the framework of Aristotelian natural philosophy, motion in the modern physical sense was actually a special case of the general concept of motion… Pascal had criticised Descartes’s mechanism and had stressed the need for a theoretical practice, a synthetic and intuitive one, besides the geometric formalisation***” – S. Bordoni, From thermodynamics to philosophical tradition: Pierre Duhem’s research between 1891 and 1896. Lettera Matematica 2017, 5, 261–266.

Mouvement et philosophie naturelle d'Aristote

STANLEY L. JAKI

UNEASY GENIUS:
THE LIFE AND WORK OF
PIERRE DUHEM

At fourteen

At seventeen

At nineteen

Duhem, P. (1894), Commentaire aux principes de la Thermodynamique – Troisième partie, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, tome 10, 207-285.

- *"Il nous semble qu'une conclusion générale se dégage de cette étude: si la science des mouvements cesse d'être, dans l'ordre logique, la première des Sciences physiques, pour devenir seulement un cas particulier* ***d'une science plus générale embrassant dans ses formules toutes les modifications des corps****, la tentation sera moindre, pensons-nous, de ramener l'étude de tous les phénomènes physiques à l'étude du mouvement; on comprendra mieux que* ***le changement de lieu dans l'espace n'est pas une modification plus simple que le changement de température ou de quelque autre qualité physique****; on fuira dès lors plus volontiers ce qui a été jusqu'ici le plus dangereux écueil de la Physique théorique, la recherche d'une explication mécanique de l'Univers."*

Pierre Duhem: La théorie Physique: son objet, sa structure

Pierre Duhem

- *« Il est une Cosmologie avec laquelle la Thermodynamique générale présente une analogie non-méconnaissable; cette Cosmologie,* ***c'est la Physique péripatéticienne*** *… Parmi les attributs de la substance, la Physique péripatéticienne confère une* ***égale importance à la catégorie de la quantité et à la catégorie de la qualité****; or, par ses symboles numériques, la Thermodynamique générale représente également les diverses grandeurs des quantités et les diverses intensités des qualités.* ***Le mouvement local n'est, pour Aristote, qu'une des formes du mouvement général****, tandis que les Cosmologies cartésienne, atomistique et newtonienne concordent en ceci que le seul mouvement possible est le changement de lieu dans l'espace. Et voici que la Thermodynamique générale traite, en ses formules, d'une* ***foule de modifications telles que les variations de températures, les changements d'état électrique ou d'aimantation, sans chercher le moins du monde à réduire ces variations au mouvement local*** *»*

THALES

Mouvement et philosophie naturelle d'Aristote

FROM THERMODYNAMIC POTENTIALS TO "GENERAL EQUATIONS", S. Bordoni

- *"As Monica Ugaglia pointed out some years ago, the Aristotelian theory of motion dealt originally with processes taking place through some kind of medium: **it was not a "kinematic" theory in the modern sense, but rather a "hydrostatic" one**. In the Aristotelian tradition after Johannes Philoponus, a **"hybrid kinematic-hydrostatic system"** emerged. According to Ugaglia, in the sixteenth and seventeenth century, Tartaglia, Benedetti and Galileo had to re-discover Aristotle's hydrostatic beneath that hybrid kinematics, in order to overcome it. See Ugaglia M. 2004, pp. 8-13. [Ugaglia M. 2004, Modelli idrostatici del moto da Aristotele a Galileo, Lateran University Press, Roma.]"*

From Theoretical Physics to Meta-theoretical Commitments, S. Bordoni

- *"In 1922 the French mathematician Émile Picard had claimed that Pascal was the most meaningful reference for Duhem's theory of knowledge. He also stressed how important Pascal was for Duhem in the specific context of physics of continuous media. See Picard É. 1922, pp. CXXXVCXXXVII, and CXXX"*

Mouvement et philosophie naturelle d'Aristote

From Theoretical Physics to Meta-theoretical Commitments, S. Bordoni

- ***Duhem transformed "dynamics into a specific instance of thermodynamics"****; in other words, "under the name of thermodynamics" he had put forward a more general theory that encompassed within common principles* ***"every transformation of a body." Both changes of place and changes of physical qualities found room in that generalized mechanics.*** *The traditional science of motion became a specific instance of a more general science: it had to be understood that* ***the change of position in space was not "a simpler modification than the change of temperature or any other physical quality."*** *This generalization could bypass "the most dangerous stumbling block on the path of theoretical physics," namely "the search for a mechanical explanation of the universe." From the mathematical point of view, his design corresponded to a reduction of physics to the language of analytical mechanics, but from the theoretical point of view it was an anti-reductionist design that involved a generalisation of that language.* ***In Duhem's "more general science" we find the coexistence of a mechanical approach, in the sense of a generalization of Lagrange's mathematical physics, and the rejection of mechanical models and mechanical explications in the sense of the traditional mechanistic worldview*** *[Duhem 1894a, pp. 284-5].*

Epistémologie de Pascal

PICARD, Émile (1921) - La vie et l'oeuvre de Pierre Duhem

- *« Non, ce n'est pas de Kant, mais de Pascal que relève Duhem, de Pascal qu'il cite constamment, et dont il sait entièrement par coeur le livre des Pensées »*

JEAN-FRANÇOIS STOFFEL - Pierre Duhem: Un savant-philosophe dans le sillage de Blaise Pascal -

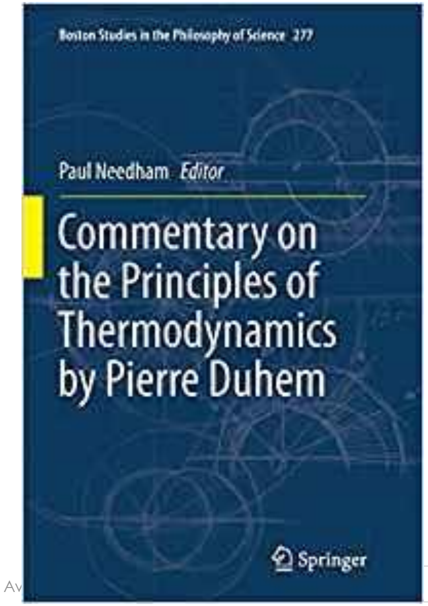
- *« Interrogeons tout d'abord les proches de Duhem, ceux qui l'ont connu intimement, et nous remarquerons qu'ils attestent tous que Pascal constituait l'une de ses lectures favorites et que notre auteur en connaissait d'ailleurs les Pensées presque par cœur. Parmi ces familiers, il convient bien sûr d'évoquer en premier lieu sa fille unique, Hélène Pierre-Duhem (1891-1974). Dans la biographie que celle-ci a consacrée à son père, biographie qui s'ouvre d'ailleurs de manière symptomatique par une citation des Pensées, Hélène nous présente son papa **comme "un disciple de Pascal"** , nous rapporte qu'il connaissait presque par coeur les Pensées et nous informe qu'il s'était attaché à modeler son propre esprit sur l'esprit de finesse si bien décrit par le grand penseur. Le professeur de lettres André Chevrillon (1864-1957), qui avait été un collègue de Duhem à Lille et qu'Hélène nous présente comme "l'un des meilleurs de ses amis" , nous confirme que notre physicien, **"pénétré de Pascal",** semblait avoir fait "une étude spéciale" de celui-ci. »*

Pierre Duhem: Equations générales de la thermodynamique

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THERMODYNAMIQUE,

PAR P. DUHEM,

CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.



THALES

Potentiels de Duhem-Massieu

Potentiels thermodynamique de Pierre Duhem

$$\Omega = G(E - TS) + W$$

- Duhem P., « Sur les équations générales de la Thermodynamique », Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3e série, tome VIII, p. 231, 1891
  - "***Nous avons fait de la Dynamique un cas particulier de la Thermodynamique, une Science qui embrasse dans des principes communs tous les changements d'état des corps, aussi bien les changements de lieu que les changements de qualités physiques***"
- quatre scientifiques ont été crédités par Duhem d'avoir effectué "les recherches les plus importantes sur ce sujet":
  - **F. Massieu** avait réussi à dériver la Thermodynamique d'une "fonction caractéristique et de ses dérivées partielles"
  - **J. W. Gibbs** avait montré que les fonctions de Massieu « pouvaient jouer le rôle de potentiels dans la détermination des états d'équilibre » dans un système donné.
  - **H. von Helmholtz** avait avancé des "idées similaires"
  - **A. von Oettingen** avait donné "une exposition de la thermodynamique d'une généralité remarquable" basée sur le concept général de dualité dans "Die thermodynamischen Beziehungen antithetisch entwickelt", Saint-Pétersbourg 1885

Arthur Joachim Von Oettingen DUALITY in Thermodynamic/Music

Harmonic Dualism: Categories of music-theoretical work that accept the absolute structutal equality of major and minor triads as objects derived from a single, unitary process that structurally contains the potential for twofold, or binary, articulation.

The tonic fundamental of the major triad is the structural parralel of the phonic overtone of the minor triad: in each case these tones are consonant with their respective chord. The Phonic overtone of the major triad and the tonic fundamental of the minor triad are dissonant with their respective chord.

Oettingen Topographic version of major-minor opposition:

« **All pure consonant triads stand in the form of right triangles, whose hypotenuses all form a diagonal minor third. In the major klang, the right angle is oriented to the top (of the diagram); in the minor klang, the right angle is oriented to the bottom** ».


ML
3815
.O30

Harmoniesystem

in

dualer Entwickelung.

Studien

zur Theorie der Musik

von

Dr. Arthur von Oettingen,

ausserord. Professor der Physik an der Kaiserl. Universität Dorpat.

Dorpat und Leipzig.

Verlag von W. Gläse

1866.

Harmoniesystem in dualer Entwicklung. Studien zur Theorie der Musik, Dorpat und Leipzig 1866

Das duale System der Harmonie“, in: Annalen der Naturphilosophie 1 (1902), S. 62-75; 2 (1903/4), S. 375-403; 3 (1904), S. 241-269; 4 (1905), S. 116-152 und 301-338; 5 (1906), S. 449-503.

Das duale Harmoniesystem, Leipzig 1913

Die Grundlagen der Musikwissenschaft und das duale Reinistrument“, in: Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 34 (1917), S. I-XVI und 155-361.

D'Alembert, Jean le Rond. Élemens de musique, théorique et pratique, suivant les principes de M. Rameau. Paris

Rameau, Jean-Philippe. Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels. Paris: Ballard, 1722

Nouveau système de musique théorique. Paris: Ballard, 1726

Pierre Duhem (1861-1916):
Les équations générales de la thermodynamique

Publications de Pierre Duhem:

- Duhem, P. **Sur les équations générales de la thermodynamique**. In Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure; Volume 8, pp. 231–266.
- Duhem, P. **Commentaire aux principes de la Thermodynamique—Première partie**. J. Math. Appl. 1892, 8, 269–330.
- Duhem, P. **Commentaire aux principes de la Thermodynamique—Troisième partie**. J. Math. Appl. 1894, 10, 207–286.
- Duhem, P. **Les théories de la chaleur**. Revue des deux Mondes 1895, 130, 851–868.

http://www.duhem2016.info/

Pierre Duhem: Les équation générales de la thermodynamique

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THERMODYNAMIQUE,

Par P. DUHEM,

CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

Au premier rang, il convient de citer M. F. Massieu (²); il a obtenu un résultat capital, à savoir que toutes les équations de la Thermodynamique peuvent être écrites au moyen d'une seule *fonction caractéristique* et de ses dérivées partielles, cette fonction changeant d'ailleurs avec les variables indépendantes adoptées.

M. Gibbs (³), dans le Travail célèbre où il a démontré que les fonctions caractéristiques de M. Massieu pouvaient jouer le rôle de potentiels dans la détermination des états d'équilibre du système, a fourni également de profondes idées sur les équations de la Thermodynamique prises sous la forme la plus générale.

M. H. von Helmholtz (¹) a développé de son côté des idées analogues.

Enfin, M. Arthur von Oettingen (²) a donné un exposé de la Thermodynamique d'une remarquable généralité; il a cherché, dans cet exposé, à mettre nettement en évidence le caractère dualistique que présente le développement de la Thermodynamique, caractère déjà marqué par M. Massieu.

(¹) R. Clausius, *Sur diverses formes des équations fondamentales de la Thermodynamique, qui sont commodes dans l'application* (*Théorie mécanique de la chaleur*. Trad. Folie, Mémoire IX).

(²) F. Massieu, *Sur les fonctions caractéristiques* (*Comptes rendus*, t. LXIX, p. 858 et 1057; 1869). — *Mémoire sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et sur la théorie des vapeurs* (*Savants étrangers*, t. XXII; 1876).

(³) J. Willard Gibbs, *On the equilibrium of heterogeneous substances* (*Transactions of the Connecticut Academy*, t. III; 1875-1876).

(¹) H. von Helmholtz, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge* (*Sitzungsber. der Berl. Akademie*, t. I, p. 23; 1882).

(²) Arthur von Oettingen, *Die thermodynamischen Beziehungen, antithetisch entwickelt* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XXIII; 1885).

Duhem développe une théorie générale et étend le concept de « capacité calorifique »
(Souriau géométrisera cette capacité).
Les théories de Duhem et Souriau sont cohérentes entre elles

Pierre Duhem: Les équations générales de la thermodynamiques

- P. DUHEM. Commentaire aux principes de la Thermodynamique (Troisième Partie). Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 207-286.

Le potentiel thermodynamique interne. — Soient

$$U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta) \quad \text{et} \quad S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$$

l'énergie interne et l'entropie d'un système.

Posons

$$(1) \quad \mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta) = E[U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta) - F(\vartheta) S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)].$$

Seconde restriction. — Imaginons qu'à partir d'un certain état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ du système, on lui impose une modification virtuelle

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \ldots, \quad \delta\lambda, \quad \delta\vartheta.$$

Les actions des corps extérieurs qui le maintiendraient en équilibre en l'état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ effectuent un travail virtuel

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\vartheta.$$

$$\left\{\begin{aligned} A &= f_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ B &= f_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L &= f_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \Theta &= f_\vartheta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta). \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} R_\alpha &= \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{f_\alpha}{E}, \\ R_\beta &= \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{f_\beta}{E}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda &= \frac{\partial U}{\partial \lambda} - \frac{f_\lambda}{E}, \\ C &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \frac{f_\vartheta}{E}. \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} R_\alpha &= \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{A}{E}, \\ R_\beta &= \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{B}{E}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda &= \frac{\partial U}{\partial \lambda} - \frac{L}{E}, \\ C &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \frac{\Theta}{E}. \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} R_\alpha &= F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ R_\beta &= F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda &= F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ C &= F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \vartheta}. \end{aligned}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}, \\ B &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ L &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}, \\ \Theta &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} + ES \frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}. \end{aligned}\right.$$

$$ES = \frac{1}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\Theta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}\right) \qquad EU = \mathcal{F} + \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\Theta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}\right)$$

$$\left\{\begin{aligned} R_\alpha &= \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta\, \partial \alpha}\right), \\ R_\beta &= \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta\, \partial \beta}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda &= \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta\, \partial \lambda}\right), \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{C = \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta^2}\right) - \frac{F(\vartheta) F''(\vartheta)}{[F'(\vartheta)]^2} \left(\Theta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}\right)}$$

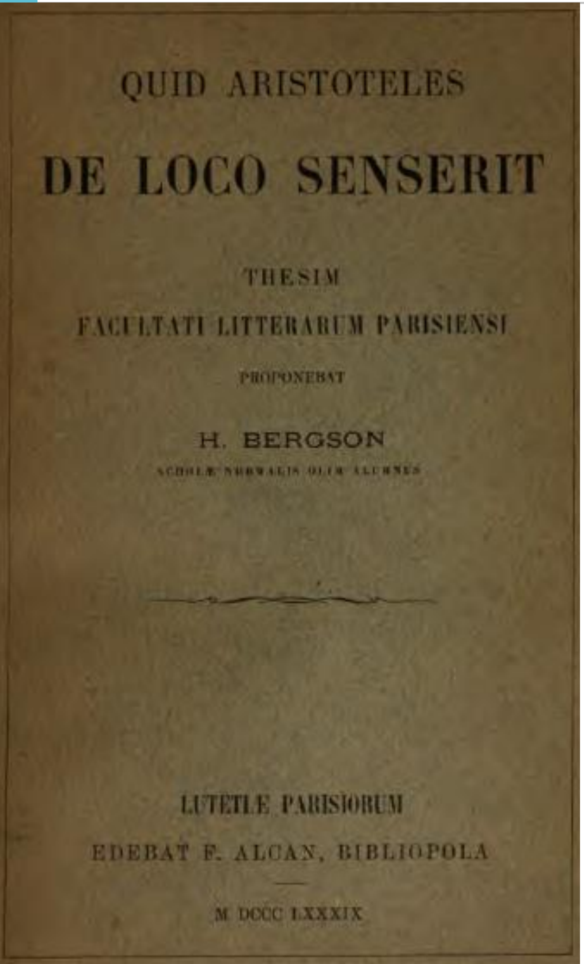
1° L'expression du potentiel thermodynamique interne du système;
2° L'expression

$$\Theta = f_\vartheta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$$

de la quantité Θ relative au système en équilibre,
On peut déterminer :
1° L'énergie interne et l'entropie du système dans un état quelconque;
2° Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système;
3° Les coefficients calorifiques du système en équilibre.
C'est la généralisation d'une proposition bien connue de M. Massieu.

Référence à Massieu

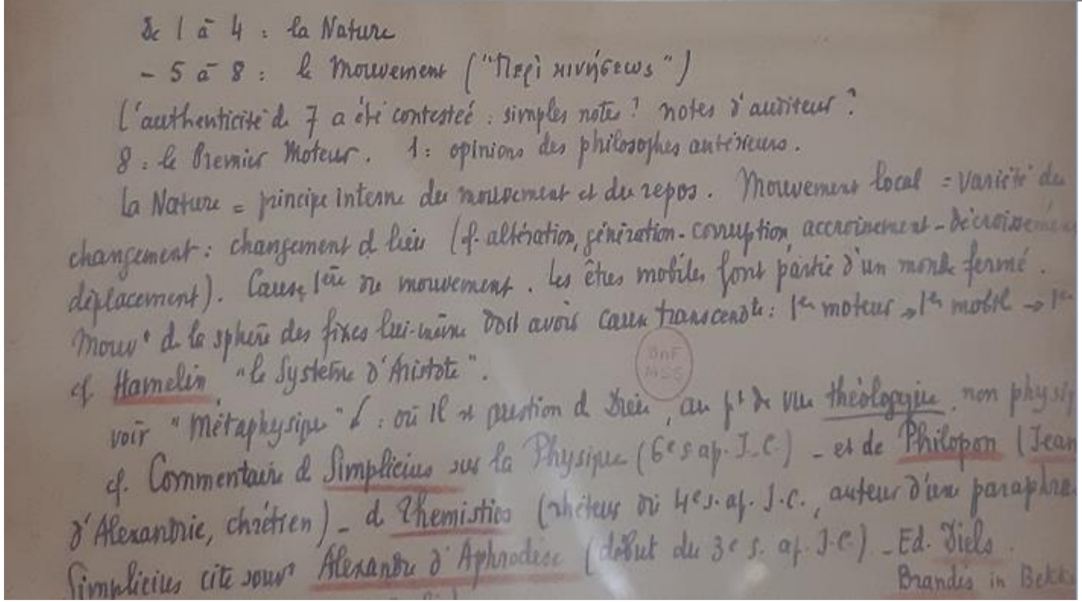
2nd Thèse de Bergson sur Aristote (L'idée de lieu chez Aristote)



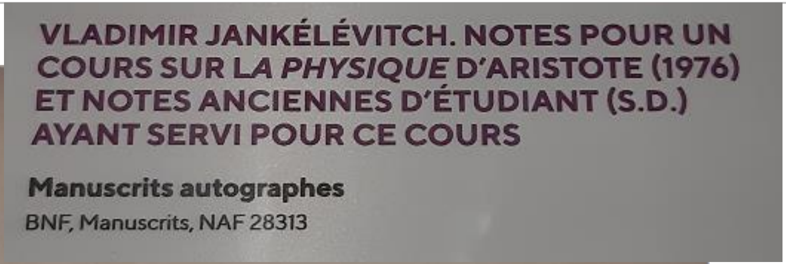
L'inspiration aristotélicienne de la métaphysique de Bergson - Romuald Waszkinel

- L'idée d'un «mouvement-longueur», inévitable selon lui dans **l'analyse quantitative du mouvement, devient «contraire à l'expérience et grosse d'absurdités»**. Pourquoi pensait-il ainsi? Parce que, pour lui, **l'analyse quantitative n'énonce que des relations spatiales**. Le mouvement ainsi considéré ne s'entend pas dans son changement, dans son devenir, mais **se limite à la trajectoire** que suit un corps en mouvement. Un mathématicien (par exemple B. Russell) prétend en revanche qu'il faut écarter la notion de changement comme dépourvue de sens. Cependant Bergson maintient que **le mouvement perçu dans son devenir est avant tout changement** et c'est pourquoi il considère que la question du changement est fondamentale.
- Presque chacun de ses travaux évoque les apories d'un Éléate en vue de démontrer qu'elles sont imputables à **la confusion du mouvement et de l'espace traversé par un corps en mouvement**.
- pour Bergson, **toute conception quantitative n'exprime pas le mouvement, mais délimite la trajectoire tracée dans l'espace construit, homogène. Tout mouvement, tout changement sont absolument indivisibles** selon lui. D'où vient que la «durée réelle» soit perçue comme indivisible ?

Vladimir Jankélévitch & la Physique d'Aristote

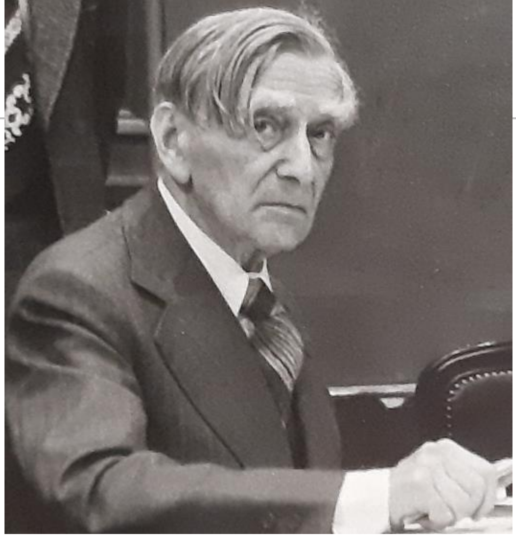

Aristote, "Physique".

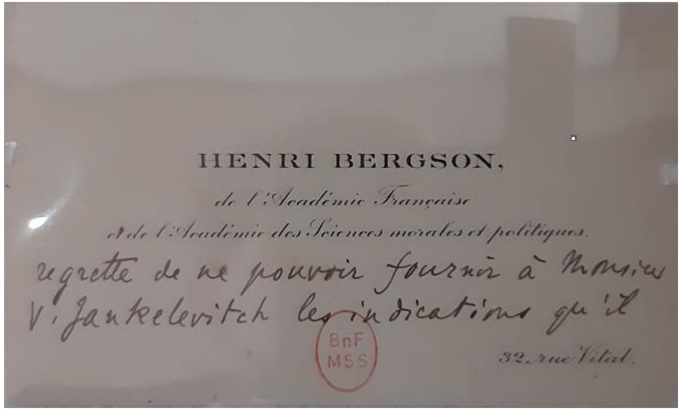
8 1 à 4 : la Nature
– 5 à 8 : le mouvement ("Περὶ κινήσεως")
(l'authenticité de 7 a été contestée : simples notes ? notes d'auditeur ?
8 : le Premier Moteur. 1 : opinions des philosophes antérieurs.
la Nature = principe interne du mouvement et du repos. Mouvement local = variété du
changement : changement de lieu (cf. altération, génération-corruption, accroissement-décroisseme[nt]
déplacement). Cause 1ère du mouvement. les êtres mobiles font partie d'un monde fermé.
Mouvt de la sphère des fixes lui-même doit avoir cause transcendante : 1er moteur → 1er mobile → 1er
cf. Hamelin "le Système d'Aristote".
voir "Métaphysique" Λ : où il est question de Dieu, au pt de vue théologique, non physi[que]
cf. Commentaire de Simplicius sur la Physique (6e s ap. J.-C.) – et de Philopon (Jean
d'Alexandrie, chrétien) – de Themistius (rhéteur du 4e s. ap. J.C., auteur d'une paraphra[se]
Simplicius cite souvent Alexandre d'Aphrodise (début du 3e s. ap. J-C) – Ed. Diels
Brandis in Bekk[er]


VLADIMIR JANKÉLÉVITCH. NOTES POUR UN COURS SUR LA *PHYSIQUE* D'ARISTOTE (1976) ET NOTES ANCIENNES D'ÉTUDIANT (S.D.) AYANT SERVI POUR CE COURS

Manuscrits autographes

BNF, Manuscrits, NAF 28313




HENRI BERGSON,
de l'Académie Française
et de l'Académie des Sciences morales et politiques,
regrette de ne pouvoir fournir à Monsieur
V. Jankelevitch les indications qu'il
32, rue Vital.

Bibliothèque François-Mitterrand – Exposition Vladimir Jankelevitch - 2019

La notion de groupe dans l’espistémologie de Bachelard

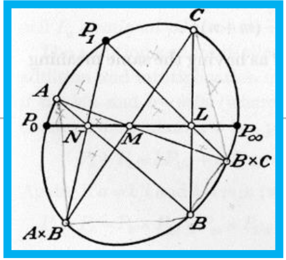
- *« La Physique mathématique, en incorporant à sa base la notion de groupe, marque la suprématie rationnelle…Chaque géométrie – et sans doute plus généralement chaque organisation mathématique de l’expérience – est caractérisée par un groupe spécial de transformations… Le groupe apporte la preuve d’une mathématique fermée sur elle-même. Sa découverte clôt l’ère des conventions, plus ou moins indépendantes, plus ou moins cohérentes »*

Gaston Bachelard, Le nouvel esprit scientifique, 1934

Chateaubriand dessine un Pascal romantique avant l'heure

- Il y avait un homme qui, à douze ans, avec des barres et des ronds, avait créé les mathématiques ; qui, à seize, avait fait le plus savant traité des coniques qu'on eût vu depuis l'antiquité ; qui, à dix-neuf, réduisit en machine une science qui existe toute entière dans l'entendement ; qui, à vingt-trois, démontra les phénomènes de la pesanteur de l'air, et détruisit une des grandes erreurs de l'ancienne physique ; qui, à cet âge où les autres hommes commencent à peine de naître, ayant achevé de parcourir le cercle des sciences humaines, s'aperçut de leur néant, et tourna toutes ses pensées vers la religion ; qui, depuis ce moment jusqu'à sa mort, arrivée dans sa trente-neuvième année, toujours infirme et souffrant, fixa la langue qu'ont parlée Bossuet et Racine, donna le modèle de la plus parfaite plaisanterie, comme du raisonnement le plus fort ; enfin qui, dans les courts intervalles de ses maux, résolut, en se privant de tout secours, un des plus hauts problèmes de géométrie, et jeta sur le papier, des pensées qui tiennent autant du Dieu que de l'homme : cet effrayant génie se nommait Blaise Pascal.
- Les sentiments de Pascal sont remarquables surtout par la profondeur de leur tristesse, et par je ne sais quelle immensité : on est suspendu au milieu de ces sentiments comme dans l'infini. Voltaire a dit : " Pascal, fou sublime, né un siècle trop tôt. "

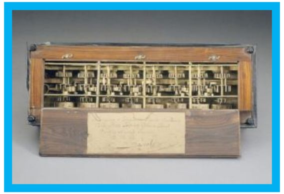
Duality



Blaise Pascal and DUALITY

Pascal's **Hexagrammum Mysticum Theorem**, and its **dual Brianchon's Theorem**. In 1639 Blaise Pascal discovered, at age sixteen, the famous hexagon theorem, also developed in "Essay pour les Coniques", printed in 1640, declaring his intention of writing a treatise on conics in which he would derive the major theorems of Apollonius from his new theorem.

Pascaline



Blaise Pascal and COMPUTER

Pascaline marks the beginning of the development of mechanical calculus in Europe, followed by Charles Babbage analytical machine from 1834 to 1837, a programmable calculating machine combining the inventions of Blaise Pascal and Jacquard's machine, with instructions written on perforated cards.

Thermodynamics

Blaise Pascal and THERMODYNAMICS

Pascal's Experiment in the Puy de Dôme to Test the **Relation between Atmospheric Pressure and Altitude**. In 1647, Blaise Pascal suggests to raise Torricelli's mercury barometer at the top of the Puy de Dome Mountain (France) in order to test the "weight of air" assumption

Probability

Blaise Pascal and PROBABILITY

The "calculation of probabilities" began in a correspondence between Blaise Pascal and Pierre Fermat. In 1654, Blaise Pascal submitted a short paper to "Celeberrimae matheseos Academiae Parisiensi" with the title **"Aleae Geometria" (Geometry of Chance)**, that was the seminal paper founding Probability as a new discipline in Science.

Blaise Pascal: ALEA GEOMETRIA / Geometry of Chance

In 1654, Blaise Pascal submitted a paper to « *Celeberrimae matheseos Academiae Parisiensi* » entitled « ***ALEAE GEOMETRIA : De compositione aleae in ludis ipsi subjectis*** »

- « … *et sic matheseos demonstrationes cum aleae incertitudine jugendo, et quae contraria videntur conciliando, ab utraque nominationem suam accipiens, stupendum hunc titulum jure sibi arrogat:* ***Aleae Geometria*** »
- « … *par l'union ainsi réalisée entre les démonstrations des mathématiques et l'incertitude du hasard, et par la conciliation entre les contraires apparents, elle peut tirer son nom de part et d'autre et s'arroger à bon droit ce titre étonnant:* ***Géométrie du Hasard*** »
- « … *by the union thus achieved between the demonstrations of mathematics and the uncertainty of chance, and by the conciliation between apparent opposites, it can take its name from both sides and arrogate to right this amazing title:* ***Geometry of Chance*** »

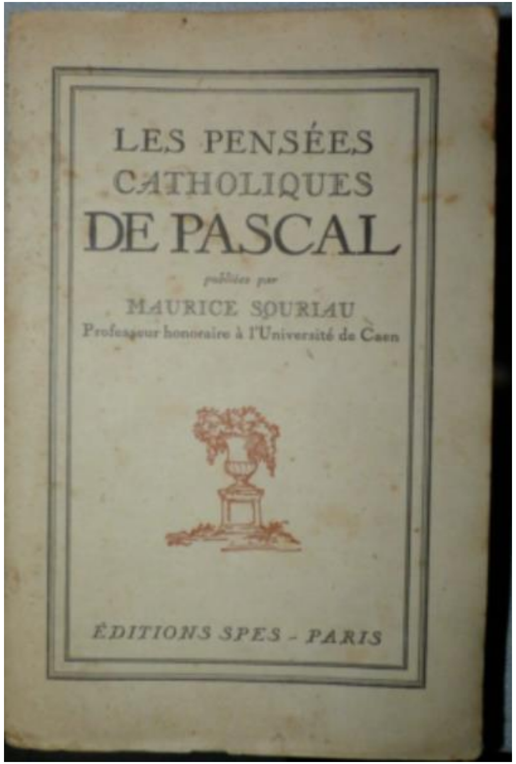
(1) « Novissima autem ac penitus intractatae materiae tractatio, « scilicet de compositione aleae in ludis ipsi subjectis (quod « gallico nostro idiomate dicitur *faire les partis des jeux*) : ubi « anceps fortuna aequitate rationis ita reprimitur ut utrique « lusorum *quod jure competit* exacte semper assignetur. Quod « quidem eo fortius ratiocinando quaerendum, *quo minus tentando* « *investigari possit* : ambigui enim sortis eventus fortuitae contin- « gentiae potius quam naturali necessitati merito tribuuntur. Ideo « res hactenus erravit incerta; nunc autem quae *experimento* « *rebellis fuerat*, rationis dominium effugere non potuit : eam « quippe tanta securitate in artem per geometriam reduximus, « ut, certitudinis ejus particeps facta, jam audacter prodeat; et « sic, matheseos demonstrationes cum aleae incertitudine jungendo, « et quae contraria videntur conciliando, ab utraque nominationem « suam accipiens, stupendum hunc titulum jure sibi arrogat : « *aleae geometria.* » (*OEuvres de Pascal*, t. IV, p. 358 de l'édition de 1819.)

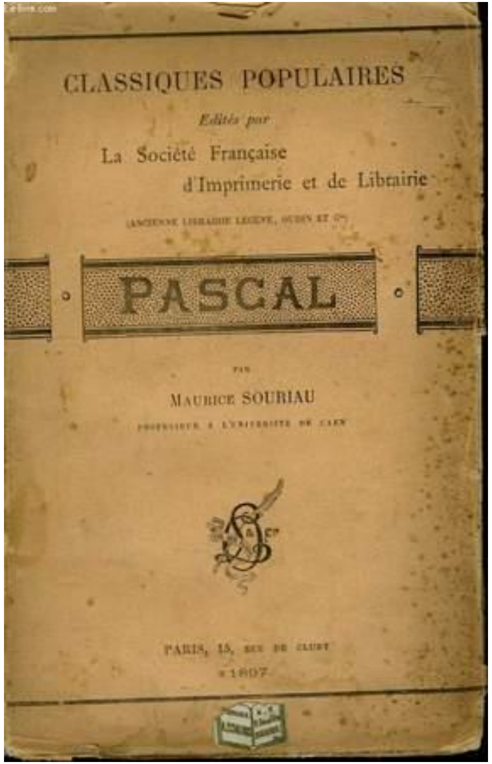
Blaise Pascal: ALEAE GEOMETRIA

Saint-Étienne-du-Mont

Peinture à La Sorbonne: Desargues, Mersenne, Pascal et Descartes

PASCAL par Maurice SOURIAU





Milieu et structures affines par Souriau

Citation de Souriau:

- *« Il est évident que l'on ne peut définir de* ***valeurs moyennes que sur des objets appartenant à un espace vectoriel (ou affine)****; donc - si bourbakiste que puisse sembler cette affirmation - que l'on n'observera et ne mesurera de valeurs moyennes que sur des grandeurs appartenant à un ensemble possédant physiquement une structure affine. Il est clair que cette structure est nécessairement unique - sinon les valeurs moyennes ne seraient pas bien définies. »*

Citation de Pascal:

- *« C'est sortir de l'humanité que de sortir du milieu. La grandeur de l'âme humaine consiste à savoir s'y tenir. Tant s'en faut que la grandeur soit à en sortir, qu'elle est à n'en point sortir. »*

« Juste Milieu » (μεσότης) et « médiété » par Aristote

Le juste milieu n´est-il qu´une moyenne ?

- La **μεσότης**, également traduite par « **juste milieu** » ou « juste mesure », est ce point d'équilibre entre deux facteurs rivaux, établi en fonction de nous-mêmes ; Aristote insiste sur le fait qu'il s'agit d'un « moyen par rapport à nous ». Mais s'il est vrai que la vertu soit une **médiété**, une mesure, il n'y a en elle, cependant, aucune mesure ni excès.
- La vertu est une sorte de **médiété** en ce qu'elle vise le milieu… Ainsi tout homme averti fuit l'excès et le défaut, recherche la bonne moyenne et lui donne la préférence, moyenne établie non relativement à l'objet, mais par rapport à nous. De même toute connaissance remplit bien son office, à condition d'avoir les yeux sur **une juste moyenne** et de s'y référer pour ses actes. … La vertu est donc une sorte de moyenne, puisque le but qu'elle se propose est un équilibre entre deux extrêmes. [...] La vertu est donc une disposition acquise volontaire, consistant par rapport à nous, dans la mesure, définie par la raison conformément à la conduite d'un homme réfléchi. Elle tient la juste moyenne entre deux extrémités fâcheuses, l'une par excès, l'autre par défaut. **ARISTOTE, Ethique à Nicomaque**

Souriau Invention of « Moment map »: Geometrization of Noether Theorem (1/2)

As explained in by Thomas Delzant at 2010 CIRM conference "Action Hamiltoniennes: invariants et classification", organized with Michel Brion:

- *"The definition of the moment map is due to Jean-Marie Souriau…. In the book of Souriau, we find a proof of the proposition: the map J is equivariant for an* ***affine action of G on g**** *whose linear part is Ad *…. In Souriau's book, we can also find a* ***study of the non-equivariant case*** *and its applications to classical and quantum mechanics. In the case of the Galileo group operating in the phase space of space-time,* ***obstruction to equivariance (a class of cohomology****) is interpreted as the inert mass of the object under study".*
- We can uniquely define the moment map up to an additive constant of integration, that can always be chosen to make the moment map equivariant (a moment map is G-equivariant, when G acts on g_* via the coadjoint action) if the group is compact or semi-simple. In 1969, Souriau has considered ***the <u>non-equivariant case</u> where the coadjoint action must be modified to make the map equivariant by a 1-cocycle on the group with values in dual Lie algebra g_*.***

Que faut-il retenir après avoir tout oublié

Devant une bonne choucroute au jambon, ils oublièrent le pudding de graisse de phoque farci aux myrtilles ! — (Jean-Baptiste Charcot, Dans la mer du Groenland, 1928)

- **Jean-Marie Souriau a géométrisé le théorème de Noether avec l'application moment, application de la variété symplectique vers les orbites coadjointes, action du groupe sur le dual de l'algèbre de Lie (les composantes de l'application moment sont les invariants de Noether)**

- **Jean-Marie Souriau a généralisé la structure de la géométrie de l'Information dans le cas d'une variété homogène en introduisant une « Thermodynamique des groupes de Lie ».**

- **La Densité de Gibbs y est covariante et la métrique de Fisher-Souriau est invariante sous l'action du groupe. La métrique de Fisher-Souriau est lié à la 2-forme de Kirillov-Kostant-Souriau.**

- **L'Entropie est une fonction de Casimir sur les feuilles symplectiques (générées par les orbites coadjointes et l'application moment, courbe de niveau de l'Entropie). Les phénomènes non-dissipatifs sont décrits par la dynamique donnée par les crochets de Poisson sur les feuilles symplectiques (à Entropie constante).**

- **Les phénomènes dissipatifs sont décrits par des flots métriplectiques. Un crochet métrique lié au hessien de l'Entropie décrit la dynamique suivant la structure de Poisson transverse. Le feuilletage transverse est un feuilletage métrique**

- **Le 2nd principe de la thermodynamique s'explique par l'orientation du feuilletage symplectique et la définie positivité du tenseur de Fisher-Souriau**

Référence: Libermann & Marle

Symplectic Geometry and Analytical Mechanics

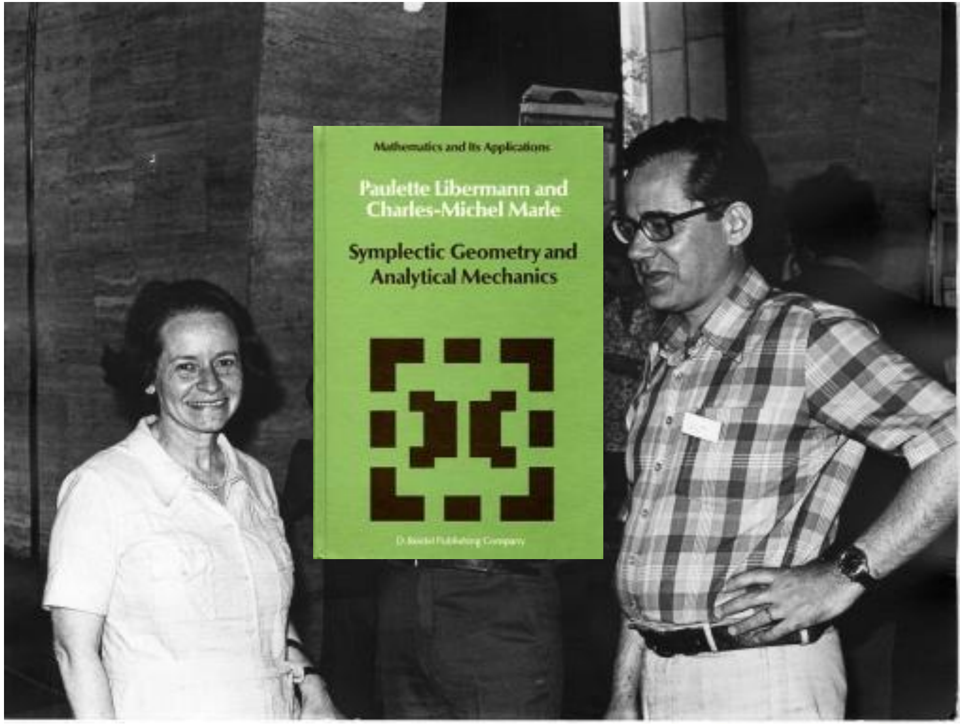
- Paulette Libermann & Charles-Michel Marle

https://www.agnesscott.edu/lriddle/WOMEN/abstracts/libermann_abstract.htm

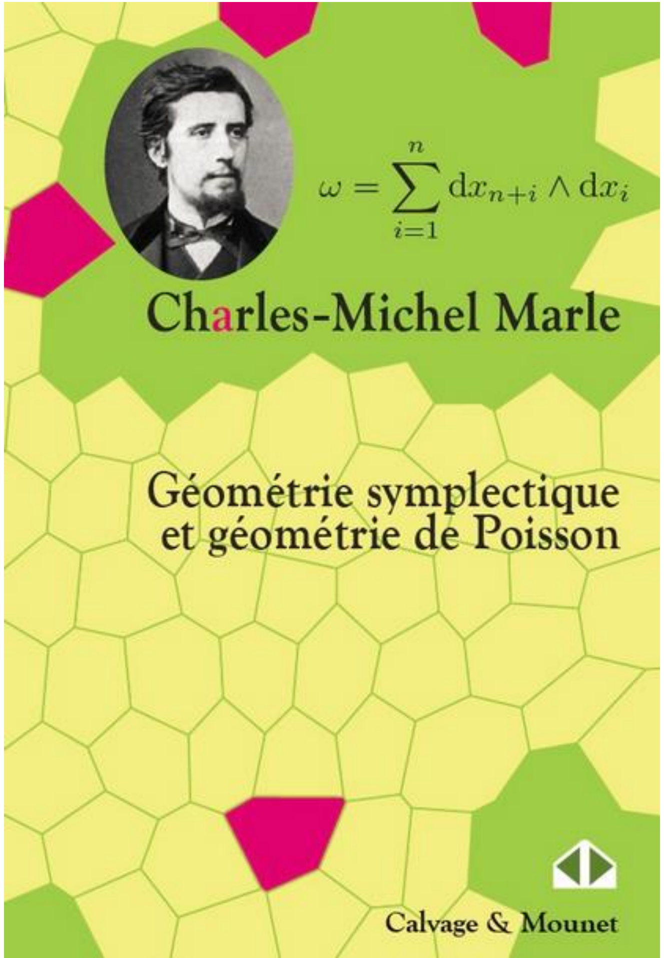
Paulette Libermann, Legendre foliations on contact manifolds, Differential Geometry and Its Applications, n°1, pp.57-76, 1991

See also:

- Marle, C.-M. From Tools in Symplectic and Poisson Geometry to J.-M. Souriau's Theories of Statistical Mechanics and Thermodynamics. Entropy 2016, 18, 370.
- http://www.mdpi.com/1099-4300/18/10/370



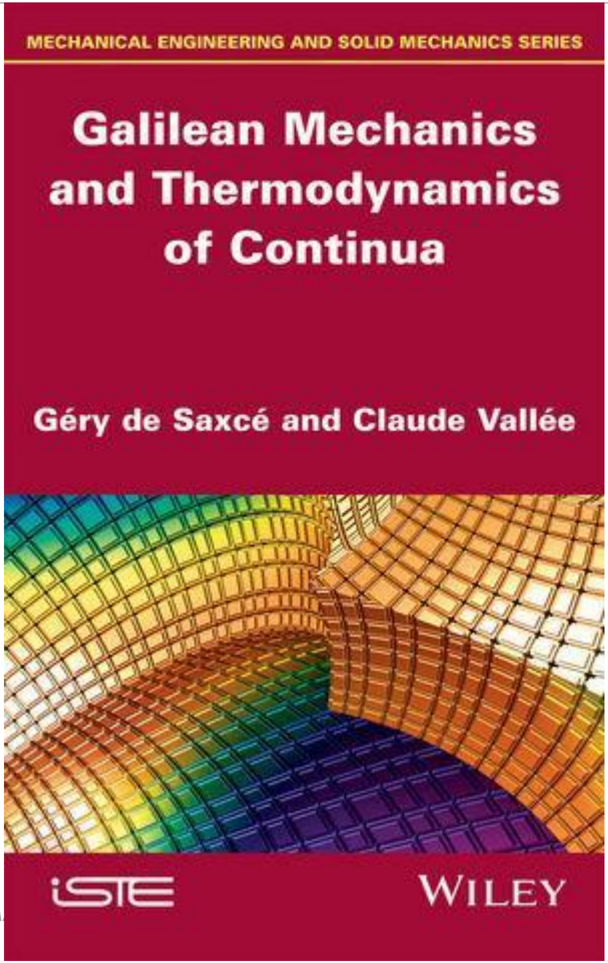
Référence: 2018 Charles-Michel Marle Book



https://www.amazon.fr/gp/product/2916352708/ref=dbs_a_def_rwt_bibl_vppi_i0

https://webusers.imj-prg.fr/~rached.mneimne/CM/spip.php?article71

Référence : Gery de Saxcé & Claude Vallée

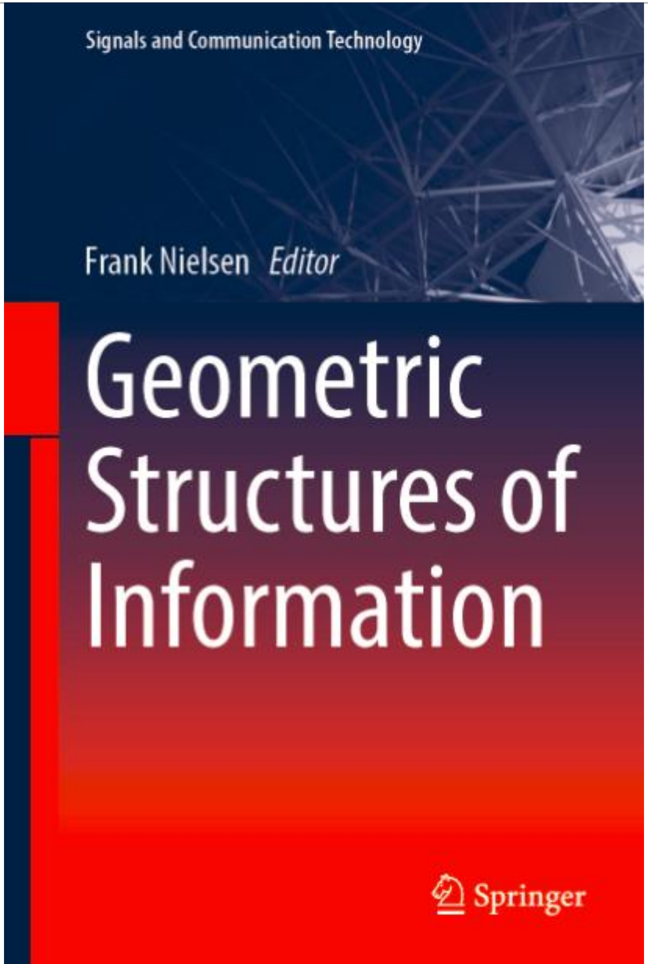


This title proposes a unified approach to continuum mechanics which is consistent with Galilean relativity. Based on the notion of affine tensors, a simple generalization of the classical tensors, this approach allows gathering the usual mechanical entities — mass, energy, force, moment, stresses, linear and angular momentum — in a single tensor.

Starting with the basic subjects, and continuing through to the most advanced topics, the authors' presentation is progressive, inductive and bottom-up. They begin with the concept of an affine tensor, a natural extension of the classical tensors. The simplest types of affine tensors are the points of an affine space and the affine functions on this space, but there are more complex ones which are relevant for mechanics – torsors and momenta. The essential point is to derive the balance equations of a continuum from a unique principle which claims that these tensors are affine-divergence free.

https://www.wiley.com/en-us/Galilean+Mechanics+and+Thermodynamics+of+Continua-p-9781848216426

Geometric Structures of Information, SPRINGER



Geometric Structures of Information

- https://www.springer.com/us/book/9783030025199

Paper on Jean-Louis Koszul

- Barbaresco, F. , Jean-Louis Koszul and the Elementary Structures of Information Geometry, Geometric Structures of Information, pp 333-392, SPRINGER, 2018
- https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-02520-5_12

References

1. Frédéric Barbaresco, Symplectic theory of heat and information geometry, chapter 4, Handbook of Statistics, Volume 46, Pages 107-143, Elsevier, 2022, https://doi.org/10.1016/bs.host.2022.02.003 https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0169716122000062
2. Symplectic Foliation Structures of Non-Equilibrium Thermodynamics as Dissipation Model: Application to Metriplectic Non-Linear Lindblad Quantum Master Equation, submitted to MDPI special Issue "Geometric Structure of Thermodynamics: Theory and Applications", 2022
3. Jean-Marie Souriau, 1969. Structure des systèmes dynamiques. Dunod. http://www.jmsouriau.com/structure_des_systemes_dynamiques.htm
4. Elías Cueto and Francisco Chinesta, Thermodynamics of Learning of Physical Phenomena, arXiv:2207.12749v1 [cs.LG] 26 Jul 2022
5. European COST network CA21109 : CaLISTA - Cartan geometry, Lie, Integrable Systems, quantum group Theories for Applications ; https://www.cost.eu/actions/CA21109/ ; https://e-services.cost.eu/files/domain_files/CA/Action_CA21109/mou/CA21109-e.pdf
6. European HORIZON-MSCA-2021-SE-01-01 project CaLIGOLA - Cartan geometry, Lie and representation theory, Integrable Systems, quantum Groups and quantum computing towards the understanding of the geometry of deep Learning and its Applications; https://ec.europa.eu/info/funding-tenders/opportunities/portal/screen/opportunities/topic-details/horizon-msca-2021-se-01-01