D'un précieux plaidoyer "mamuphique" pour une pensée différentielle et intégrale de type nouveau
(*Modèles de faisceaux pour la pensée mathématique* [1] de Fernando Zalamea)

François NICOLAS
(séminaire *mamuphi* ; Ircam, 14 mai 2022)

Annonce 2
Introduction 2
Sept hypothèses de ce livre 3
1 - Les mathématiques formalisent ce que *penser* veut dire. 3
2 – La pensée mathématique moderne formalise *la manière moderne de penser*. 4
3 – La manière moderne de penser est « *étendue* ». 4
4 – La *philosophie* nomme de différentes manières cette manière moderne de penser. 5
5 - La manière mathématiquement moderne de penser dialectise des *dualités classiques*. 5
6 – La pensée mathématique moderne *étend* la raison générale par *adjonction* de gestes. 7
7 – La pensée moderne s'étend par *quatre* adjonctions-extensions cumulativement intriquées. 8
I – Théorie des faisceaux [H] 9
Le travail du négatif au principe de la constitution d'un faisceau 9
La huitième et décisive hypothèse d'une réduplication mathématicienne 9
Exemple de la correspondance de Galois 10
II – Modèles de Kripke [K→HK] 12
III – Topos de faisceaux [T→THK] 14
IV – Théorie riemannienne des variétés [R→RTHK] 15
Idée directrice 15
Raisonances musicales 16
Galois → Liszt : *Au bord d'une source* (extrait de l'*Album d'un voyageur*) 16
Riemann → Beethoven : Quatorzième quatuor en do # mineur op. 131 20
Vers une pensée différentielle et intégrale de type nouveau ? 21
Résumons… 21
Différences classique/moderne 22
Un nouveau calcul différentiel et intégral ? 23

***

[1] *Modelos en haces para el pensamiento matemático* (Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 2022)

Annonce

Cette intervention présentera ce récent livre à ceux qui n'auront pu en prendre connaissance, résumant ses grandes idées et exposant les grandes étapes de sa démarche.
Pour ce faire, l'intervention, s'accordant à l'esprit mamuphique de l'ouvrage, enchaînera trois parties :

- une partie *philosophique* qui dégagera huit hypothèses philosophiques au principe de l'intellectualité mathématicienne chez Zalamea, mettant en particulier l'accent sur celles-ci : *la pensée mathématique moderne formalise la manière moderne de penser* (ou hypothèse d'une mathématique moderne en avant-garde formalisante des modernités) ; *la réflexion mathématicienne sur la pensée mathématique doit épouser la méthode même de la pensée mathématique* (ou hypothèse d'une réduplication kierkegaardienne) ;
- une partie *mathématique* qui examinera les quatre théories mathématiques (théorie des faisceaux, modèles de Kripke, topos de Grothendieck et variétés de Riemann) ossaturant l'ouvrage - on examinera de plus près la manière zalaméenne de formaliser la correspondance de Galois selon la théorie des faisceaux ;
- une partie *musicale* qui analysera deux des exemples musicaux avancés dans l'ouvrage : celui de Liszt (*Au bord d'une source*) mis en raisonance avec Galois, et celui de Beethoven (14° quatuor) mis en raisonance avec Riemann.

On conclura en discutant la proposition qui synthétise *in fine* ce vaste parcours au sein des mathématiques modernes et contemporaines : celle d'un nouveau calcul différentiel et intégral.

[*Une version (pdf) de l'ouvrage en espagnol et/ou en français (traduction automatique) pourra être envoyée à qui en fera la demande*.]

Introduction

Ce livre extrêmement original est d'esprit profondément mamuphique puisqu'en sus des mathématiques, il y est largement question de philosophie et même, à différentes reprises, de musique via des œuvres de Liszt, Beethoven, Tchaïkovski et Mahler.

Mon exposé introductif s'affronte à une triple difficulté :

- il s'adresse à des gens qui a priori n'ont pas eu le loisir de prendre connaissance de ce récent ouvrage de 250 pages ;
- il traite d'un livre écrit en espagnol, langue que je ne pratique d'ailleurs pas (j'ai dû recourir à une traduction automatique de l'ouvrage pour cerner son propos) ;
- il traite d'un livre qui intrique de très diverses théories mathématiques modernes et contemporaines (de celle de Galois jusqu'à celles que Grothendieck a produites à Montpellier entre 1981 et 1991), théories que je connais de manières fort diverses.

D'où la nécessité de faire précéder la lecture que je vais vous en proposer par une présentation résumée des grands fils conducteurs qui sont à l'œuvre dans ce volume.

Je vais d'abord exposer les différentes hypothèses *intellectuelles ou philosophiques* qui m'apparaissent nourrir le propos de ce livre.

Je résumerai ensuite les quatre grands gestes *mathématiques* qui le scandent en m'attardant plus longtemps sur le premier (pour dégager ce que j'appellerai la méthode réduplicative de Zalamea) et sur le quatrième et dernier pour mieux examiner cette fois les raisonances *musicales* de ce travail puisque Zalamea a la générosité mamuphique de nous en déployer quatre).
Je conclurai en synthétisant ce que cet énorme effort intellectuel me semble apporter à la problématique de notre séminaire.

Ce livre nous donne ainsi l'occasion d'embrasser l'ensemble du spectre *mamuphi* :
- *philosophie* dans ma première partie (dégageant les hypothèses de travail de cet ouvrage) ;
- *mathématique* dans la partie centrale ;
- *musicale* dans la discussion des « entrelacements » entre pensées mathématique et musicale avancées en parachèvement de ce livre.

Sept hypothèses de ce livre

Au risque d'une simplification excessive, je distinguerai sept hypothèses au principe de ce travail.

1 - Les mathématiques formalisent ce que *penser* veut dire.

Première hypothèse de cet ouvrage : les mathématiques formalisent ce que *penser* veut dire (plutôt que la pensée de ceci ou cela).
Cette hypothèse très générale tend à disposer le livre sous le signe d'un Parménide déclarant – j'en donne plusieurs versions car le point en jeu est de prime abord un peu énigmatique :
- dans le fragment 3

> *« Le même, lui, est à la fois penser et être. »* (Jean Beaufret [2])
>
> *« C'est la même chose « penser "est" » et « être ». »* (Maurice Sachot [3])

- et dans le fragment 8 (vers 34)

> *« C'est le même, penser et ce à dessein de quoi il y a pensée. »* (Jean Beaufret)

L'idée parménidienne me semble celle-ci : l'être en tant qu'être ne peut être qu'un être de pensée (et non pas d'expérience phénoménale comme l'est par contre tout *être-là* ou tout *étant* qui, lui, existe en apparaissant dans un monde donné [4]). Autrement dit seule la pensée peut distinguer ce qu'être veut dire, indépendamment de toute existence spécifiable par quelque propriété immédiatement donnée, si bien que l'être en tant qu'être est indiscernablement idée de l'être et être de l'idée.
Ceci a une importante conséquence : si la mathématique est bien pensée de l'être en tant qu'être, donc pensée de cette propriété d'être que partagent tous les étants (en particuliers naturels c'est-à-dire physiques) [5], alors la mathématique est bien, comme le formule Zalamea, l'archétype de ce que penser veut dire, archétype que l'on peut comprendre comme une sorte de « distillation » [6] de toute pensée spécifiée par séparation du particulier qu'elle pense en propre, tout de même que l'être en tant qu'être

[2] Parménide, *Le poème* (PUF, coll. Épiméthée, 1984)
[3] *Parménide : enfin une clef ?* (Les Cahiers philosophiques de Strasbourg, 36 | 2014)
[4] J'inscris ici mes pas dans la philosophie badiousienne de *Logiques des mondes*.
[5] Ce qui au passage explique pourquoi la mathématique s'applique si immédiatement aux sciences physiques des étants naturels…
[6] p. 29 du volume en français

peut être conçu comme dégagé par distillation pour tout étant de ses propriétés phénoménologiques qui distinguent son existence spécifique dans une situation donnée.
Donc la mathématique, étant pensée de l'être universellement applicable à toutes les formes d'étants, est un être de pensée universellement pertinent pour toutes les modalités particulières de la pensée humaine.

Précisons : la mathématique pense l'être en le formalisant (l'expérimentation mathématique de l'être est formelle : la mathématique a pour protocole expérimental la démonstration axiomatique [7]).
Corollaire : la pensée mathématique, formalisant ce qu'être en tant qu'être veut dire, formalise tout de même ce que penser en tant que penser veut dire.

2 – La pensée mathématique moderne formalise *la manière moderne de penser*.

Deuxième hypothèse : depuis 1830 [8], la pensée mathématique (moderne et contemporaine [9]) formalise *la manière moderne de penser*.

> Cette hypothèse me semble capitale et d'une considérable acuité : comment une manière moderne de penser pourrait-elle en effet se passer d'interpréter pour elle-même la pensée mathématique moderne ?
>
> > Il me semble qu'en matière de pensée politique moderne (c'est-à-dire marxiste), cette directive est aujourd'hui essentielle. [10]
>
> La mathématique moderne opèrerait donc comme une sorte d'avant-garde pour la pensée moderne de l'humanité.
> Où l'on retrouve donc, dans ce livre, l'esprit mamuphique de notre slogan : « *Penser la modernité musicale à la lumière des mathématiques modernes !* ».

3 – La manière moderne de penser est « *étendue* ».

Troisième hypothèse : cette manière moderne de penser (que l'avant-garde mathématique dégage en premier) se caractérise par le fait d'être « élargie » [11] ou « étendue » [12].
On va longuement revenir sur ce point capital que je commenterai ainsi : la pensée moderne étend la pensée classique, plutôt qu'elle ne s'en détache ou ne l'abandonne pour explorer de nouveaux domaines, et plutôt qu'elle ne la détruit pour reconstruire sur une *tabula rasa*.

> À mon sens, les conséquences de cette conception sont immenses pour la pensée politique militante, pour la pensée musicale compositionnelle et pour la pensée amoureuse hétérosexuée [13].

---

[7] Comme tout autre science (voir Bachelard), la mathématique construit donc son propre protocole expérimental.
[8] p. 8
[9] Pour Zalemea, les mathématiques contemporaines commencent vers 1950 (p. 8).
[10] Pour la petite part qui me concerne, mon cycle en cours sur les mathématiques modernes précantoriennes vise précisément à dégager l'importance proprement militante de ce point !
Voir http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/mathsmodernes
[11] p. 8
[12] voir « l'extension » p. 29
[13] Entendons-nous bien : il y a également des pensées politiques non militantes (des pensées gestionnaires et étatiques plutôt qu'émancipatrices) tout de même qu'il y a des pensées non musicales des nouveaux arts sonores (plutôt que des pensées de l'art proprement musical) et des pensées amoureuses homosexuelles (qui

4 – La *philosophie* nomme de différentes manières cette manière moderne de penser.

Quatrième hypothèse : la *philosophie* a déjà avancé différents noms propres pour cette « raison étendue » proprement moderne.
L'introduction de ce livre est consacrée à ce point de la nomination philosophique.
Fernando Zalemea convoque ici huit philosophes, de Peirce à Bachelard en passant par Valéry et Benjamin, qui selon lui ont nommé cet « élargissement de la compréhension » qui caractérise cette manière moderne de pensée dont la mathématique est le paradigme.

> Cette problématique, nous proposant donc de « penser les modernités à la lumière des mathématiques modernes (et contemporaines) et à l'ombre des philosophies modernes », s'avère de part en part mamuphique !
> Mais je l'avoue : je ne suis pas sûr de suivre la manière dont Zalamea met en œuvre le travail de cette « ombre » philosophique car il nous délivre ici huit noms propres très différents (attachés à huit philosophies fort disparates) susceptibles de nommer philosophiquement la manière spécifiquement moderne pour la mathématique de penser depuis 1830.
> Or l'ensemble disparate de ces huit noms philosophiques (du *summum bonum* de Peirce au *surrationalisme* de Bachelard en passant par *la perspective inversée* de Florenski) me semble centrifuge plutôt que centripète : il n'est pas sûr qu'il soit possible d'en dégager un plus grand commun diviseur (comme le plus souvent en philosophie, le pgcd de différentes philosophies sur une même question est tout simplement l'ensemble vide) ; quant à leur plus petit commun multiple, il serait très vite menacé d'inconsistance (comme toute figure imaginaire de totalisation).
> Plus radicalement, faut-il un nom propre de nature philosophique pour désigner l'unité postulée d'une unique modernité de la pensée ? Je n'en suis pas sûr ; le livre, d'ailleurs, se déploie heureusement sous le signe d'une nécessaire pluralité des paradigmes mathématiques [14], pluralité que le livre vient sommer (en accolant les initiales [15] dans l'ordre vertical hiérarchique de son architecture [16]) sans qu'il soit pour cela besoin d'un unique concept philosophique venant les subsumer.
> On pourrait ici dire que « RTHK » est la colimite injective du paradigme mathématique examiné par ce livre. Mais rien n'indique alors qu'une telle colimite injective équivaille ipso facto à quelque limite projective fournie par tel ou tel concept philosophique.

5 - La manière mathématiquement moderne de penser dialectise des *dualités classiques*.

Cinquième hypothèse : la manière mathématiquement moderne de penser dialectise des *dualités classiques*.
Zalamea nous propose plusieurs dualités :

- celle de l'interne et de l'externe qu'épingle les deux préfixes « in » et « trans » [17] ;
- celle de la théorie des ensembles (plutôt *IN*terne et analytique) et de la théorie des catégories (plutôt *TRANS*férante et synthétique) ;

---

n'inscrivent donc pas la différence des deux sexes au cœur même de leur existence). Mais ce ne sont pas elles que je pratique.

[14] On va voir qu'il articule quatre paradigmes, soigneusement ordonnés : celui des faisceaux [H], celui des modèles logiques de Kripke [K], celui des topos de Grothendieck [T] et celui des variétés de Riemann [R].

[15] RTHK avec K=Kripke, H=faisceaux (*Haces* en espagnol), T=topos et R=Riemann.

[16] Voir ses schémas superposant de bas en haut R/T/H/K p. 148… : ici l'histoire (R) est devenue la base.

[17] p. 8

Il en avance bien d'autres (positif/négatif, libération/contrôle, imagination/rigueur, transit/obstruction…) où la dualité mathématique donne forme à l'unité *dialectique* de contraires (exemplairement celle du projectif et de l'injectif, celle de la limite et de la CO-limite).

Mais attention : cette dualité mathématique tend à symétriser à l'excès les deux contraires au principe de l'unité dialectique, et ce de deux manières :

- en raison du caractère fréquemment [18] involutif d'une telle dualité mathématique : le dual du dual de X est X lui-même (et non pas sa relève dialectique X' par double négation) – pensons par exemple à la dualité catégorielle des limites et colimites, produits et coproduits… ;
- en raison du caractère symétrique entre les deux termes d'une telle dualité : le dual de X est Y tout autant que le dual de Y est X (on perd ainsi le trait distinctif essentiel de toute unité dialectique des contraires : lequel des deux termes est *dominant* et lequel est *secondaire* ? [19])

Exemple paradigmatique de cette difficulté : la dualité de la raison et du cœur qui opère centralement dans cet ouvrage, dualité suggérée par l'espagnol qui nomme le *cœur* (*corasón*=CO-rasón), comme dual donc de la *raison* (*rasón*).

Pour ne pas risquer de s'engluer dans cette symétrisation involutive de la dualité (qui tend à aplatir toute unité des contraires), on peut prendre pour exemple la dialectique logico-mathématique des modèles et des théories, dialectique où l'unité de ces deux contraires est mise en œuvre par deux flèches de conversion : dans un sens, la *formalisation* (qui formalise théoriquement un modèle donné) et dans l'autre l'*interprétation* (qui interprète une théorie donnée dans un modèle). Ici l'obstruction à la symétrisation duale tient au fait de ne plus nommer d'un même nom le rapport de l'un à l'autre (de ne plus penser la théorie comme duale du modèle ou le modèle comme dual de la théorie) mais de dissymétriser nominalement le rapport de la théorie au modèle (sous le nom de *formalisation*) et le rapport du modèle à la théorie (sous le nom d'*interprétation*).

On peut toujours penser que formalisation et interprétation seraient alors duales sauf qu'un certain nombre de théorèmes vont venir faire obstruction à ce transit entre duaux (par exemple : la syntaxe de toute théorie cohérente engendre sa propre sémantique en un modèle ad hoc ; toute théorie cohérente admet un modèle pathologique et par là une infinité de modèles hétérogènes ; et bien sûr un modèle est formalisable selon une infinité de théories non homologues).

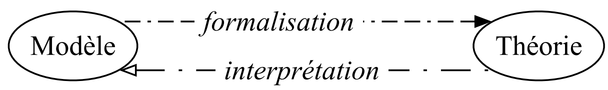
Où l'on pressent qu'il faut étendre la division dialectique non seulement aux deux termes qui en procèdent mais également aux deux relations dissymétriques qui en découlent : comme on distingue les deux contraires, il faut également distinguer, par des noms adéquats, les deux manières opposées mais non duales d'agir entre les deux termes : autrement dit, il faut scinder l'idée même d'unité et non pas seulement scinder les termes dialectiquement unis : si « un se divise en deux », ce n'est pas seulement que l'un se scinde en un rapport entre deux contraires mais c'est aussi qu'il se scinde lui-même en deux rapports contraires entre deux contraires !

On peut formaliser ainsi la distinction entre dualité et dialectique :

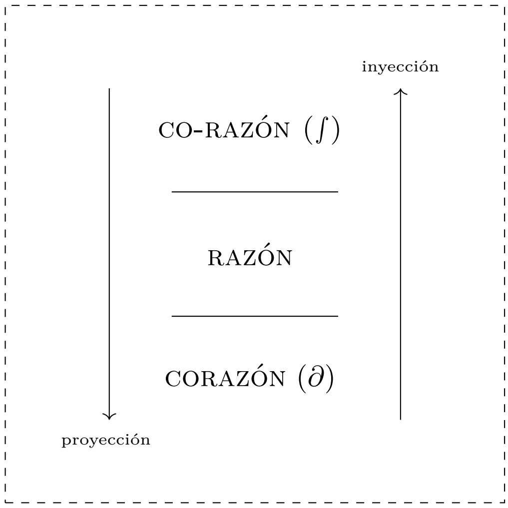
[18] La mathématique aime préciser qu'en général, cette involution opère « à une isomorphie canonique près »…

[19] L'unité *duale* (classique) est un équilibre mais l'unité *dialectique* (moderne) est un déséquilibre.

Par exemple



Comme on va le voir, Zalamea va très exactement opérer ainsi en distinguant [20] par exemple projections et injections dans l'unité dialectique du « cœur » [*corazón*] et de la « co-raison » [*co-razón*] via la « raison » [*razón*] :



6 – La pensée mathématique moderne *étend* la raison générale par *adjonction* de gestes.

Sixième hypothèse : la pensée mathématique moderne *étend* la raison générale par *adjonction* de gestes.
On le sait : c'est Galois qui invente l'extension par adjonction, en l'occurrence l'extension d'un corps de rationnels par adjonction d'un irrationnel, telle l'adjonction de $\sqrt{2}$ conduisant à l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
Dedekind viendra quelques décennies plus tard inventer l'extension par adjonction non plus d'un *élément* (comme Galois) mais d'une *opération* : dans son cas celle de « coupure » qui transforme globalement et d'un bloc le corps des rationnels en celui des réels : $\mathbb{Q}[\textit{coupure}]=\mathbb{R}$
Zalamea s'inscrit dans cette dernière manière de révolutionner un domaine par adjonction [21] d'une opération, désormais conçue, dans le prolongement explicite de la philosophie de Gilles Châtelet, comme celle d'un « geste de base ».
Ainsi, la mathématique moderne offre aux différentes pensées modernes le paradigme d'une nouvelle manière de révolutionner leur domaine propre : non plus en l'abandonnant, ni en le détruisant ou le déconstruisant mais en l'étendant par adjonction immanente d'un geste de type nouveau pour l'inscrire dans un espace infiniment plus étendu dans lequel l'ancien espace demeure préservé comme une réserve d'enfance classique.

---

[20] page 236 du volume original en espagnol
[21] p. 33

7 – La pensée moderne s'étend par *quatre* adjonctions-extensions cumulativement intriquées.

Septième hypothèse : la pensée moderne s'étend selon *quatre* adjonctions-extensions cumulativement intriquées.

C'est à partir d'ici que le travail de Zalamea se concrétise et se déploie : par caractérisation des « quatre gestes de base » [22] qui successivement vont s'adjoindre à la rationalité classique en sorte de l'agrandir, par étapes cumulatives, en une rationalité moderne « étendue ».

Ces quatre gestes sont :

1) celui de « *peser* la pensée en montant et descendant sur une échelle de poids » ; l'extension engendrée par l'adjonction de ce geste sera formalisée sous le signe de la théorie des faisceaux notée ici « H » puisqu'en espagnol *faisceaux* se disent *haces* ;
2) celui de « *dis-courir* pour dynamiser la pensée à travers l'histoire » ; cette deuxième extension sera formalisée par le recours aux modèles logiques de Kripke notés « K » ;
3) celui d'« *inverser* pour revenir en arrière » ; cette troisième extension sera formalisée selon la problématique grothendickienne des topos de faisceaux notée « T » ;
4) celui de « *se diversifier* en s'ouvrant à la multiplicité » ; cette quatrième et dernière extension sera formalisée selon la théorie riemannienne des variétés notée « R ».

L'intrication hiérarchisée de ces quatre adjonctions-extensions sera notée « RTHK » pour désigner au total des « *surfaces de Riemann sur des topos de faisceaux avec modèles de Kripke* ».

En l'état de ces énoncés, la nature exacte de ces quatre gestes – *peser, discourir, inverser et se multiplier* – reste encore énigmatique.

Chacune des quatre parties du livre va être consacrée à l'examen détaillé de chacun d'eux.

> Remarquons d'ores et déjà que, de ces quatre adjonctions-extensions de la pensée, l'une (la dernière : celle due à Riemann) relève, dans le lexique de Zalamea, de la mathématique moderne quand les trois autres (faisceaux, Kripke et topos) relèvent des mathématiques contemporaines, ce qui correspond au fait que chez Zalamea, la distinction mathématiques modernes/contemporaines à mon sens [23] relève me semble-t-il d'un partage plus empiriquement chronologique qu'essentiel.

Comme on va le voir, une huitième hypothèse – l'hypothèse que je nommerai celle de la *réduplication mathématicienne* – va venir sceller l'intrication générale de ces hypothèses de travail.

*

Ce cadre rapidement brossé, examinons maintenant ces quatre gestes en privilégiant ceux – *mamuphi oblige !* – qui se trouvent ici exemplifiés dans la pensée musicale moderne.

Commençons par détailler le premier de ces gestes – celui que la théorie des faisceaux formalise – pour mieux dégager la spécificité de cette manière zalaméenne de concevoir le travail de la pensée mathématique.

---

[22] p. 29

[23] Voir ma précédente intervention dans ce séminaire *mamuphi* sur le travail de Zalamea : [Du partage moderne/contemporain dans le livre de Zalamea](#) (17 novembre 2018)

I – Théorie des faisceaux [H]

Zalamea commence [24] par nous rappeler le travail de la dialectique local/global dans la théorie des faisceaux, inventée par Jean Leray pendant la seconde guerre mondiale.

Le travail du négatif au principe de la constitution d'un faisceau

Un faisceau met en rapport deux espaces topologiques – une *base* et son *déploiement* ou relèvement – selon deux rapports inverses : une *fibration* (de la base vers son déploiement) et une *projection* (de son déploiement vers la base).
L'enjeu de cette construction est la possibilité de relever la dispersion locale de la base en une cohésion globale du déploiement. Cette possibilité s'attache à l'examen spécifique, dans la base, des éventuels chevauchements entre différentes localisations : si un chevauchement atteste d'un transit entre deux localisations, alors la variation continue de la fibration assure l'existence d'un recollement que je propose de nommer *régional* (en adoptant pour définition topologique minimale du régional l'idée d'une partie qui unit topologiquement deux voisinages différents).
Ainsi la relève *globale* (dans les sections du déploiement) de la dispersion *locale* dans la base transite par l'affirmation d'une dimension *régionale* intermédiaire entre la dispersion locale et la cohésion globale.

Zalamea nous aide à discerner la dimension proprement dialectique de cette problématique des faisceaux :

- visant à « capturer la variation continue des fibres par recollement » [25], elle travaille l'unité des contraires d'une « variation continue » : la variation porte la dimension négative de la différence en acte et la continuité porte la dimension affirmative d'un maintien en acte (continuité qui, en un certain sens, procède ici d'une double négation puisque la variation différenciante n'est pas elle-même différenciée mais se poursuit continûment : « de la même manière ») ;
- la négativité de la base (dispersion locale) est relevée affirmativement par le déploiement globalisant des sections ;
- la projection de l'espace déployé dans l'espace princeps de la base réinscrit le travail du négatif au cœur même de la problématique des faisceaux.

Au total, on dira que le faisceau, relevant la dispersion locale, via une variation continue (*régionalisante*) de la fibration, selon un recollement global, circule d'une négativité à une affirmation via une double négation. [26]

La huitième et décisive hypothèse d'une réduplication mathématicienne

Zalamea va alors [27] ressaisir cette dialectique à l'œuvre dans la théorie des faisceaux comme paradigme de la dynamique moderne de la pensée mathématique, à partir de 1830 donc. Ce faisant, il passe d'un « comment les mathématiques pensent-elles ? » à un « comment penser les mathématiques, comment penser la pensée qu'elles sont ? ».

---

[24] § 1.2
[25] p. 36
[26] Je me permets de rappeler que cette notion mathématique de faisceau opère au cœur du second tome de *Le monde-Musique* pour formaliser l'œuvre musicale comme faisceau des exécutions basées sur une partition (la partition constitue l'espace littéral de base et ses différentes exécutions l'espace sonore de déploiement).
[27] Partie 1.3

C'est là l'hypothèse princeps de cet ouvrage, inscrite dans son titre même (*Modèles de faisceaux pour la pensée mathématique*) que Zalamea explicite ainsi : on peut comprendre « *la pensée mathématique comme un faisceau* » [28], et que je reformulerai pour ma part ainsi, usant cette fois du concept kierkegaardien de réduplication : la pensée mathématique des faisceaux est elle-même faisceautique (tout de même que, pour Pascal et Kierkegaard, seule une pensée humble peut vraiment penser l'humilité). Cette hypothèse de réduplication, je la dirai *mathématicienne* car elle me semble clairement relever d'une *réflexion* mathématicienne sur la *pensée* mathématique, autant dire de ce que j'appellerai une *intellectualité* mathématicienne.

Je dirai alors : l'hypothèse de Zalamea est que l'intellectualité mathématicienne doit réfléchir la pensée mathématique à la manière même dont cette mathématique pense ; autrement dit, la réflexion mathématicienne sur la mathématique doit épouser la méthode de pensée de la mathématique.

> Zalemea préfère la formuler comme dialectique entre mathématique et philosophie : « *la philosophie se plie en mathématiques et les mathématiques se déplient en philosophie* » [29]. Il thématise donc la réduplication faisceautique comme projection philosophique sur les mathématiques et fibration mathématique de la philosophie.
>
> J'ai des réserves sur une telle formulation, car elle tend de manière indifférenciée à nommer « philosophie » toute forme de réflexion, ce qui a pour grave inconvénient à mon sens de ne plus faire de la philosophie qu'une logique formelle de ce que réfléchir voudrait dire – soit une conception académique et scolaire où philosopher serait apprendre à réfléchir… [30] Il me semble préférable de distinguer intellectualiser et philosopher et donc de donner droit à une intellectualité spécifiquement mathématicienne.

Zalamea va ensuite [31] proposer cinq interprétations de cette manière mathématicienne de comprendre la pensée mathématique en examinant cinq théories mathématiques modernes : celles de Galois, Riemann, Poincaré, Cantor et Hilbert.

Je vais me contenter ici d'examiner comment Zalamea interprète *faisceautiquement* la première : la théorie de Galois.

Exemple de la correspondance de Galois

La *correspondance de Galois* peut être intellectuellement interprétée comme mode de pensée faisceautique, les extensions successives de corps (que je noterai ΔK) constituant la base d'un faisceau dont le déploiement consisterait en les décompositions successives de groupes (que je noterai ∇G).

L'idée directrice est donc d'interpréter la correspondance de Galois ΔK/∇G comme un faisceau où la correspondance ∇G→ΔK est interprétée comme *projection* d'une décomposition ∇G du groupe G en l'extension ΔK du corps K et où, inversement, la correspondance ΔK→∇G est interprétée comme *sectionnement* d'une extension ΔK du corps K selon la décomposition ∇G du groupe G.

Zalemea diagrammatise ainsi son interprétation faisceautique de la correspondance de Galois :

[28] p.

[29] p. 40

[30] Mais, pas plus que la logique n'est la base de la mathématique, la philosophie n'est la base de la pensée !

[31] § 1.4

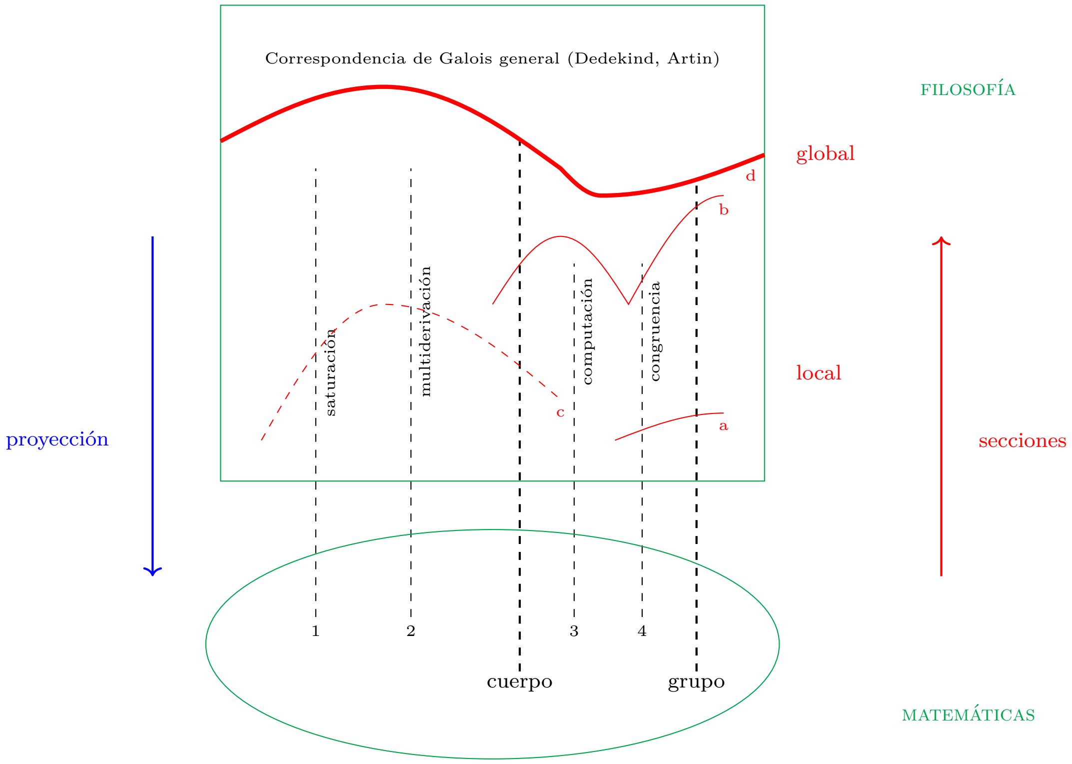
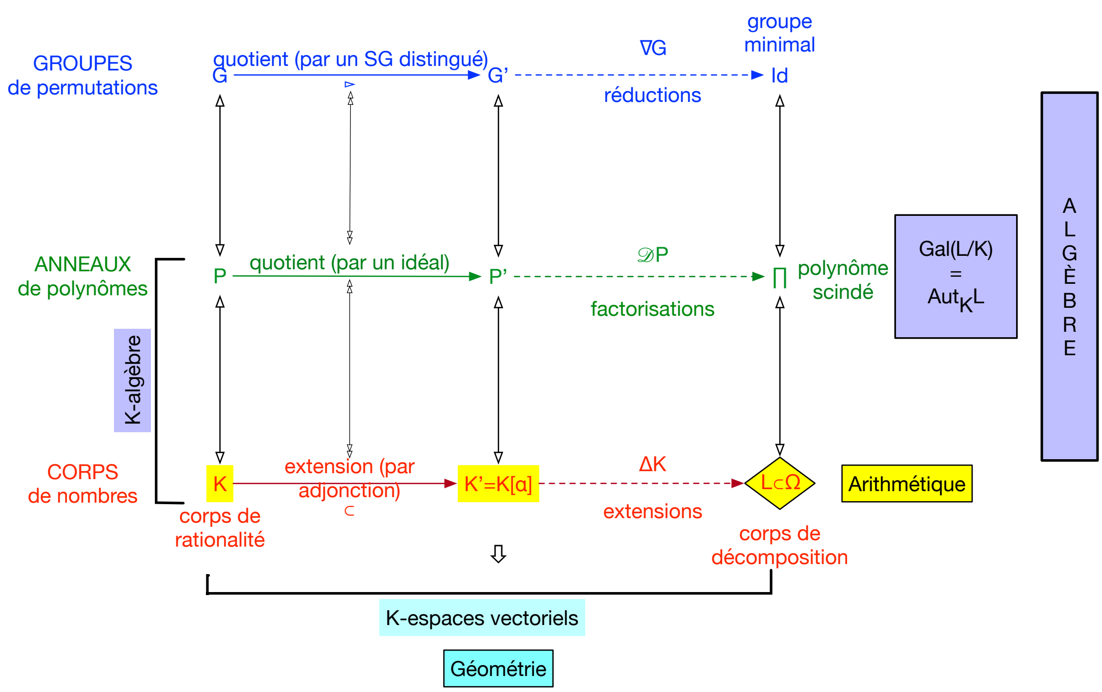


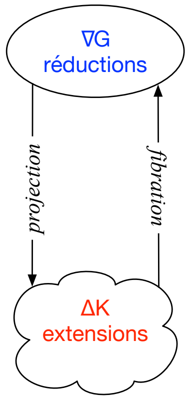
Fig. 1.3 – Galois (H). Haz de lo negativo y lo estructural en la *Primera Memoria*

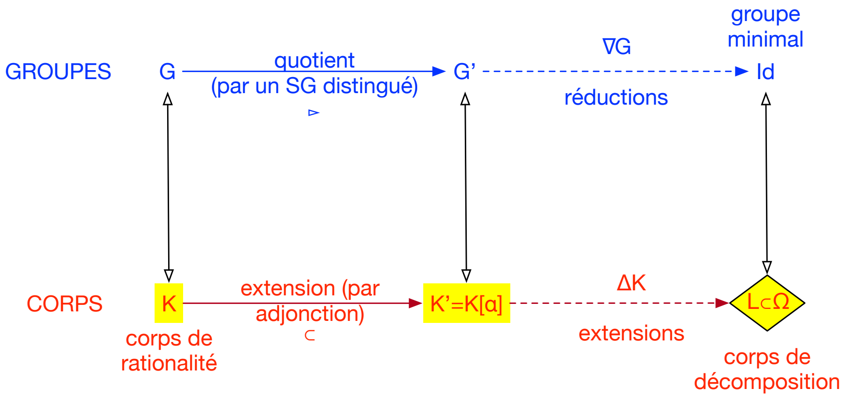
où « 1 » est *l'adjonction* de la racine α au corps K,
« 2 » est l'intervention d'une *équation auxiliaire* pour quotienter/décomposer le polynôme caractéristique,
« 3 » est la séquence des extensions K[α] du corps K résultant des adjonctions successives de racines α,
et « 4 » nomme les sous-groupes distingués ou *normaux* correspondant à ces extensions de corps.

On peut diagrammatiser ainsi la correspondance de Galois entre ΔK et ∇G en faisant apparaître la médiation polynomiale et sa factorisation propre $\mathcal{D}$P :



Simplifions ce dernier diagramme pour rehausser l'interprétation faisceautique qu'en propose Zalamea :





On a là une claire interprétation faisceautique de la théorie de Galois : ce que j'appelle une intellectualité mathématicienne rédupliquant l'importance faisceautique de toute la pensée mathématique moderne (je rappelle que la théorie de Galois se constitue autour de 1830 quand la théorie des faisceaux n'émerge que plus d'un siècle plus tard : autour de 1945).

L'intérêt de cette interprétation faisceautique me semble de mettre au jour le riche travail dialectique du négatif qui opère au principe de cette correspondance de Galois.
Résumons-le ainsi :

- la face « arithmétique » ΔK en constitue la face immédiatement affirmative qui opère par adjonction de racines et extension corrélative de corps ;
- la face « géométrique » [32] ∇G en constitue la face immédiatement négative qui opère par réduction ou décomposition de groupes ;
- le transit « algébrique » entre les deux faces opère négativement par factorisation de polynômes ;
- l'obstruction « algébrique » opère au terme de la scission du polynôme, terme qui va se déposer en une minimalité de groupe et une maximalité de corps ;
- la correspondance proprement dite est marquée de négativité car elle inverse extension ΔK et réduction ∇G - en quelque sorte, elle opère comme une multiplication de signes arithmétiques :
    - « -.+ = - » : $\mathcal{D}P.\Delta K \to \nabla G$
    - « -.- = + » : $\mathcal{D}P.\nabla G \to \Delta K$

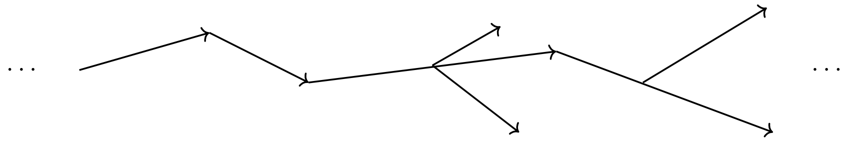
II – Modèles de Kripke [K→HK]

Faute de temps, je passe beaucoup plus rapidement sur les deux étapes suivantes.

En une acception assez courante, es modèles de Kripke [K] constituent une extension modale du concept de modèle que l'on peut interpréter, dans le vocabulaire des mondes possibles, comme la donnée d'une relation d'ordre entre différents modèles s'interprétant comme arbre chronologique d'accessibilité entre mondes successifs.

---

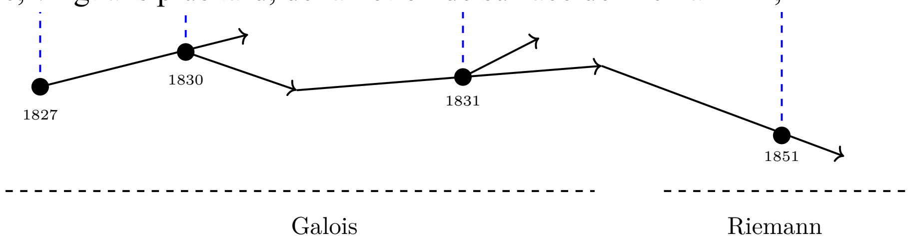
[32] Il s'agit en effet de groupe de *symétries* (par permutations des racines).
Pierre Cartier nous avait rappelé (*mamuphi*, 20 janvier 2018) l'importance de cette *Ur-géométrie* au principe de l'algèbre de Galois.



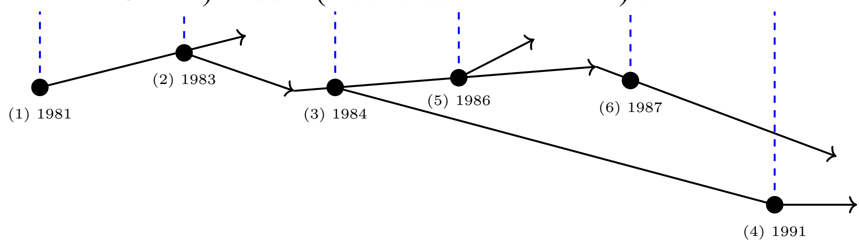
> Ceci permet par exemple de formaliser une dialectique du nécessaire (entendu comme ce qui est valide pour tout monde accessible) et du possible (entendu comme subordonné à l'existence d'un monde accessible qui le valide). [33]

Zalamea va utiliser cette extension - il est vrai selon des modèles intuitionnistes (plutôt que modaux) de Kripke [34] pour introduire une dimension historique dans une pensée mathématique jusque-là conçue en tant qu'unique faisceau (« phénoménologique »). Concevoir ainsi « la pensée mathématique comme un faisceau de faisceaux » [35] va lui permettre de formaliser mathématiquement l'évolution historique de différentes théories mathématiques [HK ou *faisceaux sur les modèles de Kripke*].
Zalamea en propose quatre exemples :

- conjonction des théories de Galois et de Riemann mettant en évidence d'un côté l'existence chez Galois d'« une pensée géométrique de la continuité, sous-jacente à sa pensée algébrique du discret et anticipant les surfaces de Riemann » [36] et de l'autre le rôle des fonctions algébriques dans l'émergence, vingt ans plus tard, de la notion de surface de Riemann [37] ;



- conjonction entre ensembles infinis de Cantor et topologie de Poincaré ;
- conjonction entre programme fondationnel de Hilbert et indécidabilité de Gödel ;
- évolution tardive de l'œuvre de Grothendieck – dix mille pages ! - de 1981 (*La longue marche à travers la théorie de Galois*) à 1991 (théorie des *dérivateurs*) :



---

[33] Je signale que René Lavendhomme utilise cette formalisation des modèles de Kripke pour y interpréter modalement les formules lacaniennes de la sexuation (voir *Lieux du sujet* ; Seuil, 2001 ; p. 184)

[34] p. 74

[35] P. 76

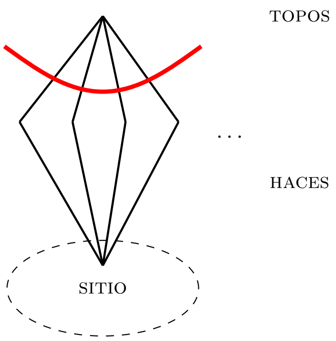
[36] p. 80

[37] p. 81

III – Topos de faisceaux [T→THK]

La théorie grothendickienne des topos de faisceaux [T] va permettre de doter les différentes chronologies intellectuelles (jusqu'ici formellement décrites comme faisceaux de faisceaux [HK]) d'une consistance de monde c'est-à-dire d'Œuvre centralement coordonnée.

> Notons qu'en ce point [38] la métaphore de Zalamea devient musicale : celle du chef d'orchestre qui, par sa gestuelle, synthétise l'exécution instrumentale d'une partition (espace topologique de base constituant le site du topos) apte à faire émerger l'espace topologique sonore propre à la musique.



On a désormais à faire à une formalisation de la pensée mathématique comme « topos de faisceaux sur des modèles de Kripke » [THK], formalisation que Zalamea choisit d'interpréter comme « métaphysique de la pensée mathématique » selon la métaphore suivante :

> « *Un exemple de l'utilisation analogique de THK est ce que nous avons appelé le "topos d'existence" : nous prenons comme base le temps de notre vie, et nous plaçons à chaque instant la fibre de nos croyances à cet instant. Nos expériences donnent naissance à des sections locales tout au long de notre existence ; souvent, les sections ne sont pas compatibles entre elles et nous entrons alors dans des contradictions incessantes qui défigurent notre personnalité. Avec un peu de recul, nous nous demandons si notre agitation constante, de l'enfance, l'adolescence, l'âge moyen ou la vieillesse, a un sens. En bref nous nous demandons si les sections locales de notre vie sont injectées sous une quelconque propriété globale, ce qui donne une perspective de transcendance à notre être. Une réponse positive ou négative peut nous imposer une satisfaction raisonnable ou une crise inquiétante.* » [39]

Zalamea ressaisit ensuite, selon ce schème réflexif, la dialectique mathématique interne à ses sept théories mathématiques canoniques (Galois, Riemann, Poincaré, Cantor, Hilbert, Gödel, Grothendieck), mettant ainsi en évidence quatre possibilités : l'existence, au sein d'une même Œuvre :

1) de « modes de répétition qui itèrent dans le temps » [40] ;
2) de « formes dialectiques qui entrelacent différentes fibres de la pensée » ;
3) d'« environnements structurels venant projeter leur permanence sur des variations sous-jacentes » ;
4) de véritables « points fixes ».

Je ne m'étends pas sur la riche complexité de cet éclairage mathématicien.

---

[38] p. 100
[39] p. 104
[40] p. 135

IV – Théorie riemannienne des variétés [R→RTHK]

Je vais maintenant m'étendre plus avant sur la quatrième et dernière composante, ne serait-ce que parce qu'elle nous expose des raisonances musicales tout à fait précieuses pour notre examen *mamuphique* de ce travail.

Idée directrice

L'idée directrice de cette dernière partie est la suivante : les trois parties précédentes ont permis de comprendre la pensée mathématique moderne et contemporaine comme constituée de différentes totalités synthétiques (T), globalement (H) et dynamiquement (K) constituées.

> Notons bien la pluralité ici en jeu : tout de même qu'il n'y a pas L'Ensemble de tous les ensembles, La Catégorie de toutes les catégories [41] ou Le Topos de tous les topos, il n'y a pas Une Totalisation synthétique et dynamique des mathématiques modernes et contemporaines mais un réseau ouvert de théories, réseau lui-même intotalisable selon les lois de totalisation présidant au découpage de chacune des régions théoriques qui trament ce que *mathématiques-modernes-et-contemporaines* veut dire.

Cette quatrième partie va s'appuyer sur une nouvelle théorie mathématique moderne (celle des variétés riemanniennes) pour compléter cette compréhension en montrant qu'une telle pensée mathématique est elle-même verticalement feuilletée et superpose donc, par le jeu de grandeurs complexes caractéristiques de la modernité, différents états simultanés.

> Ces différents états renvoient mathématiquement à différentes intrications entre variables réelles et imaginaires des grandeurs complexes, que j'interprèterai intellectuellement comme intrications variées entre les effectivités et les possibilités qui opèrent au principe de toute situation « complexe »

Ainsi chaque situation mathématiquement pensée s'avère l'être de manière multivoque, ramifiée, feuilletée et non plus univoque comme dans le dispositif classique.

Mais je vous rappelle que pour Zalamea ce que le mathématicien formule concernant la pensée mathématique vaut ipso facto paradigme de toute pensée moderne si bien que ce feuilletage intra-mathématique vaut également modèle d'un feuilletage entre les pensées modernes : la pensée mathématique moderne du feuilletage vaut feuilletage moderne non seulement de la pensée mathématique mais des pensées modernes.

D'où ce que Zalamea appelle « *une dialectique entre les invariants mathématiques et les variations culturelles* » [42], des « *ramifications entre la pensée mathématique et la créativité culturelle* » [43], « *une extension de la conceptualité mathématique projetée dans la culture* », « *un double mouvement entre les abstractions universelles des mathématiques et les particularités concrètes de la culture* ».

Zalamea précise : « *une de nos hypothèses de base (reflétée dans le quatrième chapitre) consiste à supposer une étroite symbiose entre la pensée mathématique et la pensée en général, comme si la première était une sorte d'archétype de distillation des différents alcools typiques de la culture* » [44].

Le chapitre en question (que nous sommes en train d'examiner) est donc consacré à ce que Zalamea appelle les « *entrelacements de la mathématique avec la culture* », entrelacements que je renommerai

---

[41] S'il y a une bien une catégorie de toutes les petites catégories, cette catégorie n'est pas elle-même petite !

[42] p. 144

[43] p. 145

[44] Version française réalisée par mes soins, page 29

comme étant les « raisonances de la pensée mathématique avec les pensées artistiques » (ici picturale, littéraire, musicale et cinématographique.
Je me permets en effet d'interpréter cette nouvelle dialectique sous le nom mamuphique de « raisonances », les résonances entre raisons différentes constituant l'équivalent métaphorique des correspondances riemanniennes entre différents feuillets d'une même variété.
Ainsi cette ultime intrication [R→RTHK] pointe les raisonances extra-mathématiques de la pensée mathématique, ces raisonances que le livre désigne comme « ramifications de la pensée mathématique » et « entrelacements avec la culture ».

> Notons que ce livre me semble privilégier les raisonances des mathématiques vers la culture plutôt qu'à l'inverse les conditions culturelles de possibilité pour qu'une autonomie relative de la pensée mathématique puisse se déployer [45].

Raisonances musicales

Dans les nombreux exemples que le livre nous donne ensuite de telles raisonances culturelles pour la pensée mathématique moderne, Zalamea avance quatre raisonances musicales inattendues :

- de Galois à Liszt,
- de Riemann à Beethoven,
- de Poincaré à Tchaïkovski,
- de Cantor à Mahler.

Prenons le temps de présenter et discuter plus en détail les deux premières.

Galois → Liszt : *Au bord d'une source* (extrait de l'*Album d'un voyageur*)

La raisonance va porter sur ce que Galois appelle sa « théorie de l'ambiguïté » et que Zalamea résume comme un passage du négatif au positif puisque l'indiscernabilité des racines (d'un polynôme quintique) s'avère l'envers négatif de l'existence affirmative d'un groupe *simple* (de permutations) [46].
Zalamea interprète métaphoriquement cette conversion (du négatif en l'affirmation d'un objet d'un type nouveau) comme « la prise de conscience que seule la pénombre laisse entrevoir la lumière ».
D'où les raisonances qu'il propose avec le sfumato de la peinture de Turner dans la période 1830-1850, avec la pensée poétique du sombre chez le premier Victor Hugo [47] et donc avec l'*Album du voyageur* du premier Liszt (1834-1836).

> Comme on le voit, Zalamea inscrit prudemment ces premières raisonances artistiques dans des œuvres partageant avec la théorie de Galois (1830-1832) une forte synchronisation historiale.

Examinons plus en détail ce qu'il en est dans la pièce de Liszt.
La voici pour commencer, dans l'interprétation d'André Laplante [48] que je sélectionne parce qu'elle est accompagnée de la partition (il s'agit ici d'une seconde version, un peu plus tardive, intégrée aux *Années de pèlerinage*) :

---

[45] Je me suis intéressé à ce point en examinant par exemple pourquoi la naissance de l'algèbre au début du IX° siècle a pu se faire dans le cadre de la langue arabe :

- *L'émergence arabe de l'algèbre (Bagdad, IX°-XII° siècles)* ; Al-Mukhatabat, n°7 (juillet 2013)
- *La langue arabe, berceau de l'algèbre* ; Al-Mukhatabat, n°11 (juillet 2014)

[46] Pour plus de détails, je me permets de renvoyer ici à ma troisième leçon de maths modernes sur la théorie de Galois (5 décembre 2021) : http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/mathsmodernes

[47] celui des *Feuillets d'automne* (1831)

[48] https://www.youtube.com/watch?v=fahsREaFkyU

Zalamea rehausse l'opposition entre « une sensation de douceur, de légèreté et de dépouillement dans l'évocation des eaux » [49] et ce que Leslie Howard appelle « de nombreuses complications techniques » (qui tiennent directement au fait qu'il s'agit ici de la première de douze études de vélocité). D'où que l'opposition entre main droite et main gauche, plus directement lisible dans la version initiale (celle de l'*Album d'un voyageur*), constitue pour Zalamea « un terrain de médiation entre la lumière et l'obscurité » [50].

(version de l'*Album d'un voyageur*)

Zalamea s'autorise d'un rapprochement historique entre le Galois révolutionnaire de 1830 et un Liszt se référant en 1831 au Lyon des colères ouvrières pour conforter l'idée qu'un « archétype galoisien, penché vers les frontières de la pénombre » est bien ici à l'œuvre.

Quelle que soit la vive sympathie que j'ai pour cette méthode des raisonances et pour ces rapprochements que la théorie galoisienne autorise en effet entre dialectiques politiques et musicales de la clarté consciente et de l'opacité inconsciente, je ne pense pas que cet exemple musical convienne vraiment : la dialectique galoisienne de l'ombre et de la lumière s'attache en effet à une opposition très spécifique entre la clarté formelle d'un polynôme et l'opacité indécelable du groupe de permutations qui sous-tend l'unité des racines de ce polynôme.

Ainsi qui pourrait « voir » que les cinq racines réelles de l'équation polynomiale

$$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$$

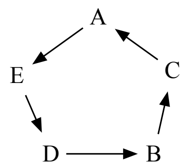
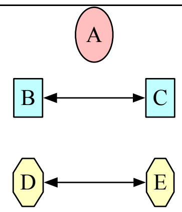
ne sont pas algébriquement distinguables quand celles de l'équation

$$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+2=0$$

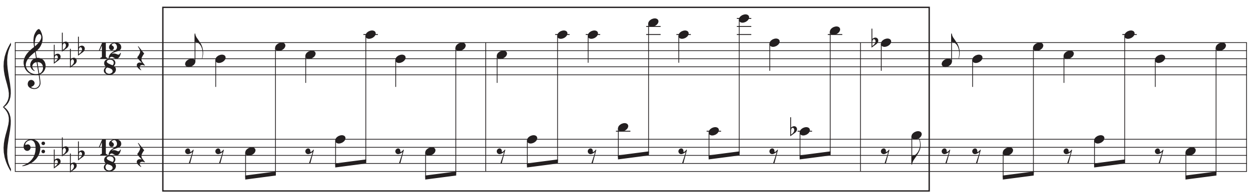
[49] p. 149-150

[50] p. 150

(qui ne diffère de la première que par le coefficient constant 1→2) sont formulables par radicaux ?

polynômes	$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+\mathbf{1}=0$	$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+\mathbf{2}=0$
(décomposition)	$\nexists$	$x(x^2-1)(x^2-x-1)$
racines réelles	{A=-1,9… ; B=-1,3… ; C=-0,2… ; D=0,8… ; E=1,6…}	$\{-2;\ \pm 1;\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\}$
groupe de Galois		

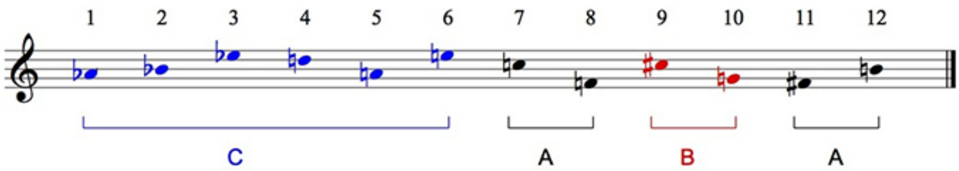
Si l’on cherche un équivalent de cette dialectique dans la composition musicale, on ne peut se contenter d’une opposition trop générale entre clarté polyphonique et ombre d’arpèges virtuoses comme le dispose à l’évidence cette étude de Liszt : le groupement polyphonique des deux voix mélodiques est en effet ici explicite (groupement sur la seule main droite dans la première version, mais réparti entre les deux mains dans la seconde) :



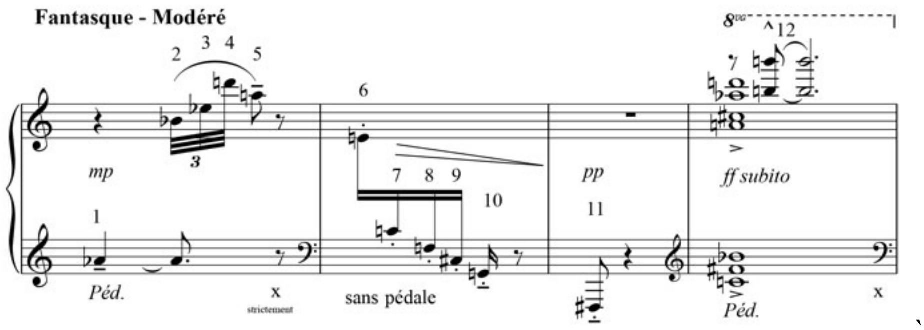
L’oreille ne peut d’ailleurs s’y tromper et sait sans difficultés suivre la variation de ce motif mélodique émergeant en une sorte de canopée enveloppant la prolifération virtuose, propre à toute étude de ce type.

Suggestion : si l’on voulait trouver une raisonance musicale plus exacte du jeu galoisien entre la conscience claire du polynôme et l’inconscience du groupe qui le sous-tend il faudrait me semble-t-il se tourner plutôt vers des œuvres sérielles où la série est à la fois déterminante du discours musical et inapparente à l’oreille : c’est la synthèse disjonctive de l’écriture et de la perception qui fait ici musicalement résonner/raisonner l’inconsciente conjonction galoisienne entre le polynôme et le groupe de symétrie entre ses racines.

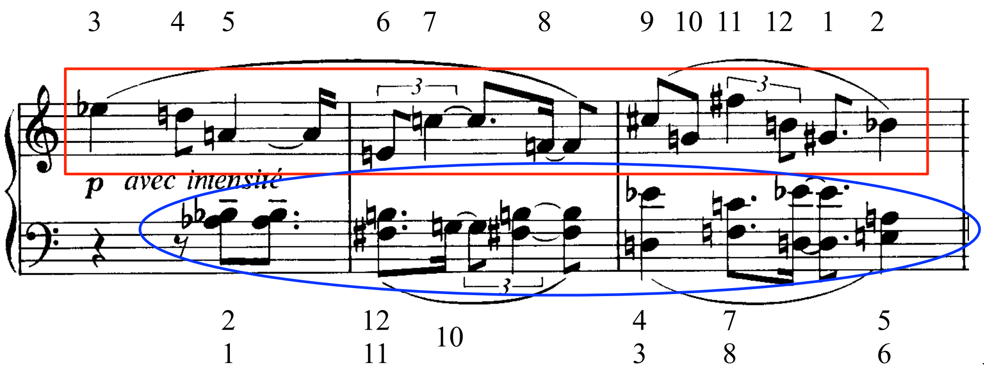
Pour donner un exemple très simple de cette disjonction sérielle entre calculs écrits et formes perçues, voici le tout premier travail sériel du jeune Boulez (1945) dans ses douze *Notations* pour piano : on peut « voir » comment une certaine clarté perceptive de la série dans sa première exposition s’enfonce progressivement dans l’épaisseur du discours musical en sorte que l’oreille est très vite entièrement incapable de l’entendre comme expression perceptible des permutations que la série groupe.



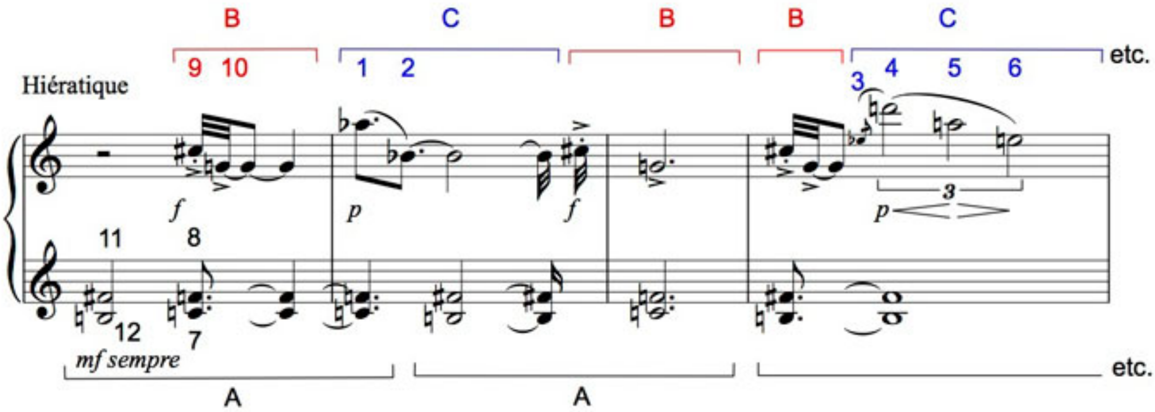
Notation 1



Notation 3



Notation 7



Riemann → Beethoven : Quatorzième quatuor en do # mineur op. 131

Dans ce second exemple, Riemann vient nommer la nécessité moderne de « comprendre le monde moderne et contemporain » [51] non comme combinaison de linéarités (variables réelles de $\mathbb{R}^n$) mais comme « incessantes multiplications et ramifications » autorisées par le jeu moderne des variables complexes. D'où l'idée proprement riemannienne de *variété* déployant une géométrie de la complexité (entendue au sens précis du corps $\mathbb{C}$ de grandeurs complexes intriquant effectivité réelle et possibilité imaginée).

Zalamea va privilégier ici des exemples *diachroniques* de raisonances artistiques et non plus *synchroniques* comme pour Galois [52] : celles de Novalis (ses *Hymnes à la nuit*) et de Beethoven qui précèdent Riemann, et celle de Rodin qui le suit (*Plâtre inachevé* vers 1900).

Dans ce livre, le développement concernant le Quatorzième quatuor de Beethoven (do # mineur opus 131 datant de 1826) est assez conséquent [53]. Il rehausse la composition comme travail d'unification d'une profusion multiple, comme synthèse opérée sur une diversification incessante du matériau musical, comme effort d'« équilibrage global minutieux sur des dizaines de sections locales » [54], comme discours constamment tressé de transitions, mutations et différenciations, discours s'attachant à faire converger cette prolifération locale vers quelque « centre tonal continu » [55] maintenu à travers l'incessant « contraste du continu et du discontinu » [56].

> Faute de temps, je ne vous fais pas entendre l'œuvre ni n'examine avec vous la partition mais ce qu'en dit ici Zalamea concorde très exactement avec l'analyse de la même œuvre par Charles Rosen dans son fameux *Le style classique* [57] où il montre comment le dernier Beethoven s'attache à maintenir les lois globales du style classique à l'intérieur même d'une discursivité devenant localement romantique (fragmentation, détente des liens tonaux diatoniques par chromatisation généralisée, privilège donné aux gestes déséquilibrant inscrivant la violence des affects au cœur même d'une rationalité classique des équilibres et donc des pondérations, etc.).

Si je m'accorde donc ici avec l'analyse zalaméenne du discours beethovenien, reste le point qui me semble crucial en matière de raisonance : à quel titre exact disposer cet impératif *classique* chez Beethoven (maintenir un discours se romantisant localement dans le cadre global d'une résolution classique) en raisonance précise avec la problématique *moderne* des variétés riemanniennes ?

Le problème n'est bien sûr pas que l'œuvre musicale de Beethoven précède d'une trentaine d'années l'invention mathématique de Riemann. Il est plutôt : à quel titre la dialectique beethovenienne entre unité globale classique et diversité locale préromantique d'un même discours musical préfigure-t-elle la dialectique riemannienne entre unité globale algébrique et diversité géométrique feuilletée d'une même variété mathématique ?

Cela ne me semble pas aller de soi pour une raison à la fois musicale et mathématique.

- Musicalement, assurer une unité globale de type classique d'un discours tendant localement à se romantiser implique un travail d'équilibre des tensions tonales plutôt qu'un travail d'unification

[51] p. 150

[52] Il s'en explique dans la longue note 368.

[53] p. 152-153

[54] p. 153

[55] note 374

[56] notes 375

[57] Gallimard

thématique. Métaphoriquement dit en langage riemannien, il se s'agit donc pas pour Beethoven de garantir une certaine homogénéité des feuillets mais plutôt d'assurer leur équilibre global sous une loi classique maintenue contre vents et marées romantiques (et non pas selon une éventuelle loi romantique de type nouveau). Or, de cela, la mathématique riemannienne ne me semble pas avoir l'équivalent exact [58].

- Inversement, mathématiquement donc, le passage riemannien des surfaces aux variétés s'alimente du passage algébrique des fonctions réelles aux fonctions complexes (et donc d'une transformation du corps des variables de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$). Mais, de son côté, Beethoven s'attache à maintenir une forme classique de l'unité discursive (unité précisément du centre tonal assurant une résolution ultimement équilibrée des forces centrifuges) plutôt qu'il ne cherche une nouvelle forme (romantique ?) d'unité. Autrement dit, il n'y a pas, dans les variables compositionnelles de Beethoven, l'équivalent du changement mathématique de corps.

Si j'avais un autre exemple de raisonance musicale à proposer en ce point des variétés riemanniennes, j'irais alors le chercher plutôt dans ces albums romantiques de lieder en les interrogeant pour voir de quelle manière l'unité globale, musicalement indiscutable, entre les différents feuillets-lieder, reste précisément assurée par une loi romantique d'unité de type nouveau - à ce titre, il pourrait être intéressant de revoir de près l'analyse qu'avait pu faire Henri Pousseur du cycle de Schumann *L'amour et la vie d'une femme* (*Frauenliebe und -leben*).

*

On m'aura, je l'espère, compris : cette discussion critique des deux premières raisonances musicales mamuphiquement offertes par ce livre veut rendre hommage à son libre courage de penser par lui-même les raisonances entre pensées mathématiques et artistiques. Ainsi cet ouvrage sème de fertiles graines, d'autant plus précieuses qu'elles sont aujourd'hui rares. Mes commentaires de musicien ne visaient qu'à prendre au sérieux leur proposition en sorte d'examiner comment les prolonger de la manière intellectuellement la plus fertile possible.

Passons maintenant à la conclusion de ce livre sur une très originale proposition : celle d'un nouveau calcul différentiel et intégral.

Vers une pensée différentielle et intégrale de type nouveau ?

Avant de nous approprier l'ultime proposition de Fernando Zalemea dans ce précieux ouvrage, celle d'un nouveau calcul différentiel et intégral, résumons d'abord l'intrication princeps (formalisée « RTHK ») dont elle procède.

Résumons…

Les mathématiques modernes (et contemporaines) se déploient selon quatre dimensions : elles pensent

H) des *régions* conçues comme médiations dialectiques du local et du global (modèle des faisceaux) ;

[58] Mais Zalamea suggère qu'il est possible d'en trouver un équivalent précis, via le théorème de Riemann-Roch sur les rapports entre fonctions méromorphes et holomorphes sur une surface de Riemann… Il faudrait donc examiner l'analogie proposée Riemann-Beethoven sous cet angle précis.

K) des *processus* intriquant les situations selon des enchaînements de type historique (modèles de Kripke) ;
T) des *situations* conçues comme totalisations infinies et cohérentes (modèle des topos de faisceaux) ;
R) des situations conçues comme *feuilletage effectif de possibilités* (modèle des variétés de Riemann liées aux grandeurs complexes).
Mieux, elles intriquent ces quatre dimensions si bien que l'interaction de ces mathématiques modernes (et contemporaines) pense dynamiquement (K) des situations (T) dont l'effectivité globale, assise sur un maillage régional (H), est feuilletée de possibilités et de potentialités (R).

Conformément à l'orientation intellectuelle de ce livre, dialectisons cet énoncé : cette pensée moderne de l'être constitue l'avant-garde d'un être moderne de la pensée, si bien qu'il convient de prendre mesure du fait que la pensée des régions de l'être constitue des *régions de pensée*, la pensée de situations feuilletées constitue des *situations feuilletées de pensée*, et la pensée des dynamiques situationnelles constituerait des *dynamiques situationnelles de pensée*.
Autrement dit, « à la lumière de mathématiques modernes (et contemporaines) pensant dynamiquement des situations feuilletées de possibilités à partir de leur maillage régional », les pensées modernes (et contemporaines) non mathématiques peuvent être elles-mêmes conçues comme l'intrication de quatre constitutions :
H) la constitution moderne de *régions de pensée* aptes à être globalement recollées – reconnaissons-là, concernant par exemple la pensée musicale, le travail qui conjoint plusieurs opus locaux en une Œuvre régionale (telles celles de Beethoven, Liszt, etc.) ainsi rendue apte à mailler globalement la modernité du monde-Musique ; mais reconnaissons tout aussi bien ici le travail d'une pensée mathématique qui conjoint les théorèmes locaux selon différentes Théories régionales (telles celles de Galois, de Riemann, de Cantor, etc.) ainsi rendues aptes à mailler globalement l'unité des mathématiques modernes (et contemporaines) ;
K) la constitution moderne de *processus de pensée* qui inscrivent une dynamique créatrice au cœur des différentes modernités : pour ces modernités, une Œuvre ou une Théorie devenue close est alors une Œuvre ou une Théorie morte ;
T) la constitution moderne de *différentes situations de pensée*, relativement autonomes et ne transitant pas entre elles : il n'y a de modernités de pensée qu'au pluriel, il n'y a pas plus La Modernité des différentes pensées modernes qu'il n'y a Le Topos des différents topos [59] ;
R) la constitution moderne de situations de pensée qui sont *feuilletées et multivoques* et non plus monovalentes et univoques : les situations modernes de pensée intriquent leurs effectivités à divers régimes de possibilités et potentialités – autrement dit, penser en moderne ce n'est pas se contenter de penser univoquement ce qu'il y a mais penser l'ouverture multivoque des situations modernement conçues sous le régime d'un « *il n'y a pas que ce qu'il y a !* ».

Différences classique/moderne

À cette lumière, on peut mieux distinguer classicisme et modernité des pensées en indexant la manière moderne de penser de quatre traits distinctifs :
H) *l'action régionale* (ou « restreinte ») comme médiation active (transit ?) vers le global ;
K) *la primauté donnée au processus* et donc au futur, sur l'état et le passé de la situation ;
T) *la découpe de totalisations autonomes* autorisant de tenir que s'il n'y a pas de Grand Tout, il y a bien cependant des situations ;

---

[59] À ce titre, les énoncés généraux que nous avançons concernant ces différentes situations modernes de pensée *caractérisent* leurs propriétés sans pour autant prétendre les *définir*.

R) *la prise en compte des possibilités d'une situation* sans la réduire à ce qu'elle comporte d'effectivités, sans la cantonner donc à sa factualité ; d'où l'inévitable multivocité des interventions créatrices dans une situation donnée.

A contrario, la manière classique de penser s'avèrera plutôt attachée à
1) une simple *dualité* local/global, un partage des tâches sans la médiation dialectique du régional ;
2) une *séparation* entre états statiques et dynamiques insaisissables [60] ;
3) l'hypothèse d'une *Totalisation* englobante dans lequel les situations se découperaient comme parties ;
4) *la réduction de ce qu'« il y a » aux effectivités factuellement attestables pour tous* sans prendre alors en compte rationnellement le champ des possibles inscrit au cœur même des situations, et renvoyant ainsi la prise en compte de ces possibles à un imaginaire disjoint d'une rationalité conçue comme calculatrice.

Un nouveau calcul différentiel et intégral ?

De tout ceci, Zalamea conclut la nécessité d'un nouveau calcul différentiel et intégral [61].
Il faut bien sûr entendre cette proposition non pas au sens étroit d'un nouveau calcul formel mais comme une nouvelle manière de dialectiser l'infinitésimal différentiel et l'infinité intégrale, manière de considérer donc que la dialectique différentielle/intégrale est engagée dans la dialectique faisceautique du local différencié et du global intégratif, la dialectique kripkienne du futur différentiellement ouvert et du passé intégralement fermé, la dialectique toposique de l'injection différenciante et de la projection intégrante, et la dialectique riemannienne de la variation différenciante et de l'invariance intégrante.
Finalement, « nouveau calcul différentiel et intégral » vient nommer pour Zalemea non seulement la nécessité de penser ensemble – dialectiquement – les deux pôles contraires mais la possibilité de penser leur unité selon un double mouvement (très exactement donc selon le schème dialectique que j'ai inscrit en début de cet exposé [62], contrepoint de la simple dualité mathématique) : celui des *injections* (qui procède des différentielles locales ∂ aux intégrales globales)

$$\int f' \, \partial x = f$$

et celui des *projections* (qui, à l'inverse, procède des intégrales globales F aux différentielles locales)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f$$

Même si la pensée de Zalamea n'est pas toujours facile à suivre dans cette dernière partie plus prospective, elle pointe un horizon intellectuellement fécond : si le travail moderne des pensées se dispose bien, depuis Mallarmé, sous le signe de « l'action restreinte » - entendue, comme je le crois, comme action régionale [63] corrélant deux localisations disjointes -, alors une telle action met bien en jeu un travail différentiel visant à capter d'un côté la singularité locale d'un point et de l'autre la possibilité intégrale de l'étendre à un autre point distinct, fût-il infiniment proche.
Il s'agit donc bien ce faisant de corréler, dans un mouvement rationnel unique, l'attention infinitésimale à ce qu'un point donné veut subjectivement dire (ici l'on part d'un écart Δx que l'on réduit

---

[60] entre repos et mouvement (dans les catégories du *Sophiste* de Platon)
[61] § 4.6
[62] Voir la fin de la cinquième hypothèse (page 7).
[63] Voir sur ce thème mon exposé mamuphi du 25 janvier 2020 qui s'appuie sur l'analyse complexe.

progressivement à un epsilon conçu comme $\partial x \rightarrow 0$) et, à l'inverse, l'attention intégrative portée à la possibilité de varier continûment cette extrême particularité jusqu'à atteindre quelque autre point, également doté de sa caractéristique propre.
Autant dire qu'on pourrait légitimement reconnaître l'« action restreinte » mallarméenne dans cette rationalité différentielle et intégrale de type nouveau que Zalemea appelle de ses vœux.
Remarquons alors, pour conclure cette intervention, qu'un tel « calcul » repose sur le symbole ∂ plutôt que sur le symbole $\int$. En effet, tout repose, dans l'action en question, sur la capacité de dégager des écarts effectifs constatés (Δ) une différentielle (∂) mettant minimalement en jeu une dimension subjective, c'est-à-dire un projet ou encore une Idée : en effet, nulle intégrale possible si ce n'est d'une Idée, nulle action globale et nulle transformation sérieuse de la situation si elles ne s'engagent pas sous le signe directeur d'une Idée, laquelle ne peut prendre d'autre forme que celle d'une différentielle en un point.

> Tout de même qu'Archimède demandait un seul point pour soulever la Terre, la réelle transformation intégrale d'un monde commence bien en un point d'autant plus difficile à discerner qu'il ne peut être qu'infinitésimal (quand, à l'inverse, la gestion conservatrice de l'ordre de ce qu'il y a déjà ne nécessite le point différentiel d'aucune Idée et s'ordonne mécaniquement à une conservation globale).

Rendons donc grâce à Fernando Zalamea de nous avoir ainsi conduit, par les chemins extrêmement instruits et enchevêtrés des mathématiques modernes et contemporaines, jusqu'à cette conclusion émancipatrice dont on mesure bien qu'elle concerne toutes les formes contemporaines de pensées modernes.
Merci donc pour le courage qu'il lui a fallu pour tracer ce chemin et ensuite nous le restituer !
À nous désormais d'en faire notre profit mamuphique !

***