

DE L'ŒUVRE AU NOIR ZALAMÉENNE AU *MAGNUS OPUS* MATHÉMATICO- CRITIQUE

Charles Alunni

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
45, rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05 • Tél : 01 33 43 29 73 69 • dho@ens.fr



Mamuphi 14 Mai 2022
Autour de Fernando Zalamea



« Les mathématiques, et surtout les mathématiques modernes, algèbre, théorie des groupes, topologie, nous ont paru raconter raconter, mêlée aux constructions auxquelles s'intéresse le mathématicien, **une autre histoire plus cachée, et faite pour le philosophe**. Une action dialectique se joue constamment à l'arrière plan. »

Albert Lautman, 1977, p. 28. *Les mathématiques les idées et le réel physique*, « La théorie mathématique des nombres », Paris, Vrin, 2006², p. 131.



« C'est dire que s'il y a une chose en mathématique qui (depuis toujours sans doute) me fascine plus que toute autre, ce n'est ni "le nombre", ni "la grandeur", mais toujours **la forme**. Et parmi les mille-et-un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que tout autre et continue à me fasciner, c'est **la structure cachée dans les choses mathématiques**. »

Alexandre Grothendieck, *Récoltes et semailles*, « Promenade à travers une œuvre ou l'Enfant et la Mère », 1985, p. 27/47 tapuscrit.

La science crée en effet de la philosophie. Le philosophe doit donc *infléchir son langage* pour traduire la pensée contemporaine *dans sa souplesse et sa mobilité*. Il doit aussi respecter *cette étrange ambiguïté* qui veut que toute pensée scientifique s'interprète à la fois dans le langage réaliste et dans le langage rationaliste. Peut-être alors devrait-on prendre comme une première leçon à méditer, comme un fait à expliquer, cette *impureté métaphysique* entraînée par le double sens de la preuve scientifique qui s'affirme dans l'expérience aussi bien que dans le raisonnement, à la fois dans un contact avec la réalité et dans une référence à la raison [...] *si elle expérimente, il faut raisonner ; si elle raisonne, il faut expérimenter.*

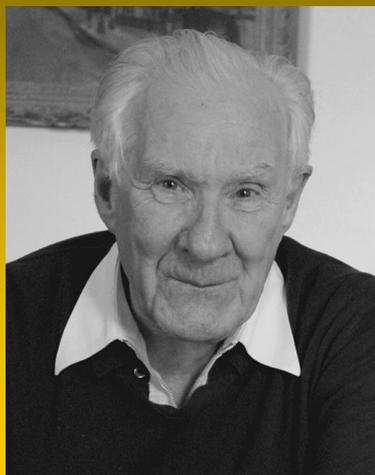
C'est à *une véritable synthèse des contradictions métaphysiques* qu'est occupée la science contemporaine [...] Nous essaierons donc de montrer [...] ce que nous appellerons *la réalisation du rationnel* ou plus généralement *la réalisation du mathématique*.

Dans les mathématiques mêmes, la réalité se manifeste en sa fonction essentielle : *faire penser*.

Gaston Bachelard, *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, Puf, 1968¹⁰, p. 3.

L'un des objectifs premiers qu'il faut appeler « philosophie synthétique » consiste à prendre en compte ce réseau d'ombres et de frontières oublié par les « courants normaux » de la philosophie analytique. La plus importante des « ombres » de l'histoire de la philosophie, exclue avec un orgueil douteux de la philosophie analytique, est sans doute **la Métaphysique.**

Fernando Zalamea, « La matematica è metafisica », *Il Foglio Quotidiano* du 23 décembre 2015, p. 2.



La démonstration mathématique constitue le chemin d'un voir.

Alain Badiou avec Gilles Haéri, *Éloge des mathématiques*, Paris, collection « Café Voltaire », Flammarion, 2015, p. 102.

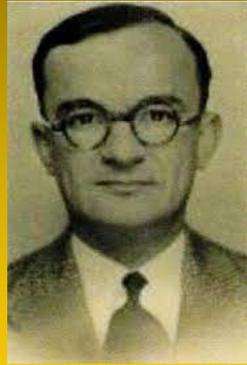
Plan

- A) L'Étude lautmanienne comme *πρωτότυπος*.
- B) La *Philosophie synthétique de la mathématique contemporaine* comme maillon intermédiaire.
- C) RTHK ou l'*Opus Magnum*.

Il est remarquable que les conceptions de Lautman puissent se préciser d'une façon pleine (c'est-à-dire théorématique, avec leur correspondant « cortège de précisions ») grâce à des concepts fondamentaux de la théorie des catégories.

Lautman décrit souvent le fonds conceptuel implicite dans certaines techniques de la théorie des catégories [...] Le langage lautmanien, avec ses idiosyncratiques « notions », « idées » et hiérarchies dialectiques, acquiert un support technique bien délimité dans la théorie des catégories. Les « notions » peuvent être précisées grâce aux constructions catégoriciennes universelles (diagrammes, limites, objets libres), les « idées » grâce à l'élévation de classes d'objets libres en paires de foncteurs adjoints, les hiérarchies dialectiques grâce aux échelles de niveaux dans les transformations naturelles.

Fernando Zalamea, *Préface à Albert Lautman, Les mathématiques les idées et le réel physique*, Paris, Vrin, 2006, p. 30-31.



Lautman détecte quelques traits *spécifiques* des mathématiques avancées qui ne se donnent pas à voir dans les mathématiques élémentaires [Note : Puisque l'énorme majorité des exemples mathématiques étudiés par la philosophie analytique se réduit à des cas triviaux arithmétiques ou ensemblistes (de façon frappante chez Wittgenstein), il est donc obligé de douter que cette approche orientée vers les *éléments* puisse construire une image fidèle de l'activité mathématique].

Tout au fond de son œuvre, lorsqu'il contemple le spectre dynamique de la technique mathématique, Lautman découvre quelques déplacements tectoniques dans les mathématiques nouvelles, qui vont les secouer jusqu'à la fin du vingtième siècle [...] (voir les géométries combinatoires de Zilber) [...] (voir les *reverse mathematics* de Friedman et Simpson) [...] (voir les théorèmes de représentation dans la théorie des allégories de Freyd). La réceptivité agile de Lautman permet ainsi de défricher quelques grands courants des mathématiques de son époque qui, encore aujourd'hui, ont beaucoup à nous apprendre.

Préface, p. 20-21

Trois catégories fondamentales d'une mathématique en acte :

1) mathématique *éidale* (ἰδεῖν, οἶδα, εἶδωλα)

2) mathématique *quidditale* (Quidditas, οὐσία, ὕπαρξις)

3) mathématique *archéale* (ἄρκω, ἀρκῆν)



De ses grandes orientations générales à ses concrétisations techniques les plus particulières, l'œuvre de Grothendieck livre un paradigme fondamental que nous aimerions appeler *pratique d'une mathématique relative*. Les stratégies de Grothendieck peuvent en effet être comprises, au sens conceptuel, comme proches des modulations relativistes qu'Einstein a introduites en physique. De manière technique, Einstein comme Grothendieck manipulent le cadre de l'observateur et la dynamique partielle de l'agent dans le processus de connaissance [...] Grothendieck produit en mathématique non seulement un « tournant copernicien », mais également un “tournant einsteinien” [...]. Nous avons affaire à *une vision qui se ramifie à travers toutes les mathématiques de l'époque*, et qui est aussi capable de donner lieu à *un fort tournant Einsteinien en philosophie des mathématiques*.

Une fois assumé le mouvement des observateurs, l'intérêt de la théorie de la relativité d'Einstein consiste à trouver des invariants appropriés (qui ne soient ni euclidiens, ni Galiléens) *derrière le mouvement*. De la même manière, une fois assumé le *transit* des objets mathématiques, l'intérêt de la *mathématique relative* de Grothendieck consiste à trouver des invariants appropriés (*ni élémentaires, ni classiques*) *derrière le transit* ».

Fernando ZALAMEA, *Philosophie synthétique de la mathématique contemporaine*, Paris, Hermann, coll. « Pensée des sciences », 2018, p. 100.

Le tissage mathématique serré entre le réel et l'idéal *ne peut être réduit à une seule de ses polarités* et mérite par conséquent d'être observé à travers la *conjonction de points de vue philosophiques complémentaires*. Nous pensons que toute réduction ou toute prise de parti préemptive empêche tout simplement la contemplation des spécificités du *transit* mathématique [...] Nous voulons montrer que l'une des motivations essentielles et fondamentales de ce travail est le désir d'élaborer, de manière à réfléchir sur les mathématiques, une sorte de *faisceau* qui nous permettrait de réintégrer et de "recoller" certains points de vue philosophiques complémentaires.

Comme cela apparaîtra clairement dans la Deuxième partie, la notion de *faisceau mathématique* est probablement le concept distinctif fondamental autour duquel l'élaboration des mathématiques contemporaines débute, avec un nouvel élan et tous ses instruments extraordinaires de *structurations*, de *géométrisation*, d'*assemblage*, de *transfert* et d'*universalisation* ; ainsi, la tentative de voir la mathématique à *partir d'un faisceau de perspectives également complexes* devient *naturelle*. Pour accomplir cette tâche, nous aurons à délimiter certaines "conditions de cohérence" entre perspectives philosophiques complémentaires, de manière à poursuivre avec quelques esquisses de "faisceutage" (*sheaving*) ou de "synthèse structurale".

Fernando ZALAMEA, *Philosophie synthétique*, op. cit., p. 15.

- chapitre 2.* « **La mathématique avancée dans les traités de philosophie mathématique** »
- chapitre 3.* « **Vers une philosophie synthétique des mathématiques contemporaines** »
- chapitre 5.* « **Mathématiques éidales** »
- chapitre 6.* « **Mathématique quidditale** »
- chapitre 7.* « **Mathématiques archéales** »
- chapitre 8.* « **Fragments d'ontologie transitoire** »
- chapitre 9.* « **Épistémologie comparative et faisceautisation** »
- chapitre 10.* « **Phénoménologie de la créativité mathématique** »
- chapitre 11.* « **Mathématique et circulation culturelle** ».

Fernando ZALAMEA, Philosophie synthétique.

Les « quatre modèles » de l'*Opus* mathématico-critique

1^{er} modèle « **Phénoménologie** » (H) Faisceau

2^{ème} modèle « **Histoire** » (HK) Kripke

3^{ème} modèle « **Métaphysique** » (THK) Topos

4^{ème} modèle « **Culture** » (RTHK) Riemann

H = Faisceau

HK = Faisceau Kripke

THK = Topos Faisceau Kripke

RTHK = Riemann Topos Faisceau Kripke

Soit quatre niveaux successivement intégratifs.

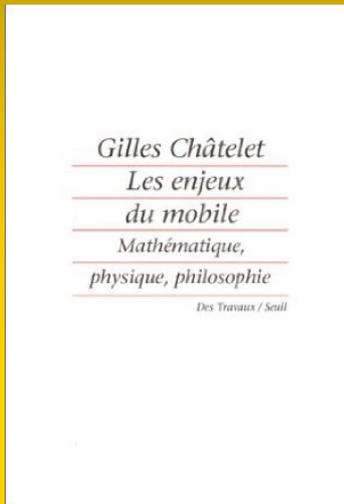
Procédures spécifiques (ternarité)

- la « **décomposition** » (*Philosophie Analytique*)
- la « **composition** » (*Philosophie synthétique*)
- la « **médiation** » (*Criticisme Mathématique*)

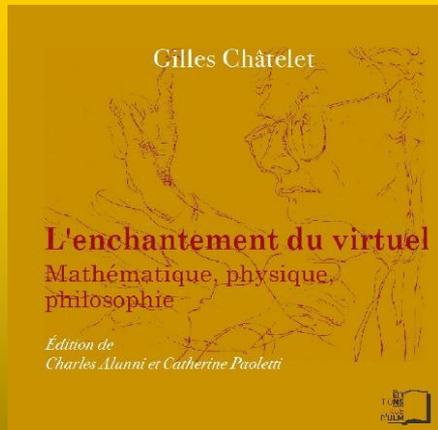
opérant au niveau d'une « Philosophie des Mathématiques Réelles ».

Opérations duales

- « **Fondations / Déduction** » (*Philosophie Analytique*)
- « **Structure / Abduction** » (*Philosophie synthétique*)
- « **Critique / Induction** » (*Criticisme Mathématique*)



Gilles CHÂTELET, *Les Enjeux du mobile.*
Mathématique, physique, philosophie, Paris,
éditions Rue d'Ulm, 2011.



Gilles CHÂTELET, *L'Enchantement du virtuel.*
Mathématique, physique, philosophie, Paris,
éditions Rue d'Ulm, 2011.

Manuscript du 29.7.1948

Lieber Onkel Wilhelm

Ich habe Deine letzten ausführlichen Briefe mit Freude erhalten, und danke Dir für Deine sorgfältigen Darstellungen. ^{Das ist meines objektiven und subjektiven} ~~Das ist meines objektiven und subjektiven~~ ^{ein kleiner Versuch} bezüglich der Definition, die ich für "objektives Urteil" vorschlage. Natürlich können die Wörter "unabhängig sein" vom logischen Handlungspunkt aus ausfallen werden. Aber wir erhebt, daß es sich bei der Definition vieler Begriffe nicht um die Suggestion ihres Sinnes handelt, als um eine regelrechte Definition - die oft nicht möglich ist, da es sich um zu Qualitativer, fluktuierendes handelt. Kann man von einer "Definition" der Begriffe: kalt, rot, hell, - wahr, gewiß, Objektiv, usw., sprechen? - Da mag es erlaubt sein, um den begrifflichen Inhalt ~~aus~~ ^{den} man einem Wort beilegt, dem Partner zu übermitteln, mit subjektiver Nuancierung vorgehen. - Das Wort "zufällig" kann (und von rechts wegen, muß) natürlich ausfallen werden.

*) Übrigens sollen die psychischen Zustände als "Erfahrungsmaterial" und nicht "Erfahrung-Urteil", benutzt werden. Da mag maner unbedeutliche Schrift ein Missverständnis verursacht haben.

*) Du sagst, daß ^{gemäß} der Definition die Begriffe und Subjektio sich gegenseitig ausschließen, aber nicht festzustellen sei, welche mit Urteil vor muß. Du aber zugeben, daß zumindest die eines Urteil niemals erweisen werden können.

1ère page manuscrite de la Lettre inédite de Grothendieck à l'oncle Wilhelm du 29.7.1948



Il serait trop hâtif de considérer les constructions mathématiques actuelles et leurs méthodes générales comme fondées sur une logique universellement contraignante et totalement intuitive. Un développement mental étendu et des études brillantes, une pénétration progressive dans l'« esprit des mathématiques » [*en français dans le texte*] sont nécessaires pour s'élever soi-même au point de vue actuel des mathématiques et maîtriser véritablement l'abstraction [...] Comme tu l'as vu, pour les mathématiciens ce fut un lent processus que de se frayer un chemin *vers les principes fondamentaux de leurs concepts* ; presque contre leur gré, ils se sont longtemps détournés du formalisme non résolu de l'algèbre classique et de l'analyse, de manière à briser leurs concepts, leurs théories et leurs résultats en leurs parties proprement élémentaires.

On peut affirmer qu'ils y ont réussi, et que certains d'entre eux ont finalement développé un état d'esprit qui les a conduits à rechercher les fondamentaux de chaque définition et, de là, à explorer les éléments formels essentiels à chaque théorie et à chaque théorème, ce qui a pu ainsi leur permettre de restructurer ce qui était observé d'une théorie déjà connue, ou de prolonger cette théorie grâce à des conclusions encore plus générales ».



Voir **Winfried SCHARLAU**, *Who is Alexander Grothendieck ? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude. A biography.* Part 1 : *Anarchy*, traduction de l'Allemand par Melissa Schneps, Norderstedt, Herstellung und Verlag, Books on Demand, GmbH, 2011, p. 161-163.