L'unité et l'identité des opposés adjoints selon Lawvere

Guillaume Laplante-Anfossi

Journée MaMuPhi *Lawvere & Hegel*, 9 octobre 2021*

J'aimerais débuter par une citation de Lawvere qui annonce bien son programme, tirée de son article *Catégories d'espace et de quantité* [Law92] :

> Je suis convaincu qu'au cours de la prochaine décennie et du prochain siècle, les progrès techniques réalisés par les théoriciens des catégories seront utiles à la philosophie dialectique, en donnant une forme précise, avec des modèles mathématiques sujets à débat, à d'anciennes distinctions philosophiques telles que l'opposition entre le général et le particulier, l'objectif et le subjectif, l'être et le devenir, l'espace et la quantité, l'égalité et la différence, le quantitatif et le qualitatif. En retour, l'attention explicite des mathématiciens à ces questions philosophiques est nécessaire pour atteindre l'objectif de rendre les mathématiques (et donc les autres sciences) plus largement accessibles et utilisables. Bien entendu, il faudra pour cela que les philosophes apprennent les mathématiques et que les mathématiciens apprennent la philosophie.

Mon but sera ici d'éclairer l'article de Lawvere intitulé *Unité et identité des opposés dans le calcul différentiel et la physique* [Law96], du point de vue d'un mathématicien qui veut aller vers la philosophie.

La situation d'UIAO La situation de départ est la suivante, un diagramme de la forme

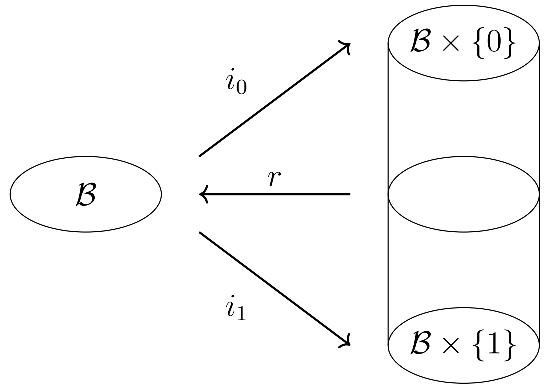
$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd} \quad \text{où} \quad r \circ i_0 = r \circ i_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \ . \tag{1}$$

On a ici trois flèches, deux "inclusions" i_0 et i_1, et une "rétraction" r. Lawvere appelle un tel diagrame "d'unité et identité" (UI) : il faut concevoir les deux flèches i_0 et i_1 comme déterminant deux sous-objets de $\mathcal{C}$ qui sont isomorphes (car tous deux issus de $\mathcal{B}$) et donc "identiques", "unis" par une rétraction commune r qui les ramène à leur point de départ. Une classe particulière de tels diagrammes est donnée par les "cylindres"

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & \mathcal{B} \times [0,1] \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd}$$

où i_0 et i_1 sont les inclusions des deux copies de $\mathcal{B}$ aux extrémités du cylindre, que l'on peut représenter comme suit :

*Un enregistrement de cet exposé est disponible à l'adresse `https://youtu.be/kqzqACntMyw`.



Ici, r représente l'oubli de la coordonnée entre 0 et 1.

Lawvere dit dans ce cas que les deux sous-objets associés à i_0 et i_1 sont non seulement unis et identiques, mais en même temps *opposés* car vivant chacun à une extrémité du cylindre.

L'analogue catégorique de cette opposition est représentée par des foncteurs *adjoints*. On a vu plus tôt dans l'exposé de Martin [Gon21] comment deux foncteurs adjoints expriment, tout en étant liés, un défaut d'homogénéité entre les catégories qu'ils relient.

Lawvere voit le passage d'une extrémité à l'autre du cylindre comme un enchaînement de deux adjonctions

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "r"', "\perp", "\perp"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

et il dit i_0 et i_1 "opposés adjoints". En effet, le foncteur r "oppose" i_0 et i_1 car il est tout à la fois adjoint à *droite* de i_0 et adjoint à *gauche* de i_1.

Lorsque de plus r "unit et identifie" i_0 et i_1 comme précédemment (1), c'est-à-dire si de plus $r \circ i_0 \simeq r \circ i_1 \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, alors Lawvere parle "d'unité et identité d'opposés adjoints" (UIAO). Un tel triplet de foncteurs représente pour lui l'*Aufhebung* de la dialectique hégélienne.

Plus précisément,

1. l'identité des sous-catégories $i_0(\mathcal{B})$ et $i_1(\mathcal{B})$ représente le moment unitaire ; le "même",
2. la relation de double adjonction dans des sens opposés (l'un à droite, l'autre à gauche) représente le moment négatif, qui vient contester la plénitude du moment unitaire ; "l'autre",
3. la rétraction commune r représente la réconciliation, qui par double négation du moment unitaire, établit la totalité : "l'auto-affirmation du même qui a cependant, suite à la rencontre avec l'altérité, a renoncé à sa particularité pour se présenter comme un tout" [Mar18, p.45].

L'exemple fondamental est donné par les objets initial et final d'une catégorie (ou plus précisément un topos). Prenons la catégorie des ensembles, et considérons l'unique foncteur à destination de la catégorie triviale

$$1 \xleftarrow{r} \mathrm{Ens} .$$

Ici, la catégorie 1 n'a qu'un seul objet et une seule flèche, l'identité, et le foncteur r envoie tout ensemble sur cet unique objet et tout fonction sur cette unique flèche.

On considère maintenant les foncteurs désignant l'ensemble vide et l'ensemble à un élément, qui vont dans l'autre sens

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "*"] \arrow[r, bend right, "\emptyset"'] & \mathrm{Ens} \arrow[l, "r"', "\perp", "\perp"'] \end{tikzcd}$$

L'ensemble vide est initial, c'est-à-dire qu'il admet une unique fonction vers tout ensemble et l'ensemble à un élément est final, c'est-à-dire qu'il reçoit une unique fonction depuis tout ensemble.

On obtient ainsi un UIAO au sens de Lawvere, et on nomme l'ensemble $*$ "être", l'ensemble $\emptyset$ "néant" et la rétraction r "devenir", qui à la fois unit, identifie et oppose l'être et le néant. On peut repenser à notre cylindre et à cette citation de Hegel :

> Il n'y a rien qui ne soit un état intermédiaire entre l'être et le néant. [Heg32, par. 179]

Cela est bien vrai pour les ensembles, qui sont caractérisés par la relation d'appartenance qui est elle-même déterminée par les fonctions vers les deux objets initial et final, soit encore par la *logique* usuelle, c'est-à-dire la logique dans les ensembles.

En d'autres mots, l'être et le néant sont les mêmes car ils sont tous deux singletons, ils sont opposés par leur ontologie (l'un est vide et l'autre est Un), et ils donnent par leur rapport dialectique naissance à tout ce qui *est* dans la catégorie Ens, c'est-à-dire les ensembles et leur logique, qui est précisément l'objet du livre de Hegel.

Mais comment, plus précisément, les deux entités "statiques" $\emptyset$ et $*$ engendrent-ils une entité "dynamique", le devenir ?

Autrement dit, comment la situation d'UIAO rend-t-elle compte du procédé dialectique décrit par Hegel ? Lawvere donne un exemple éclairant, celui du calcul différentiel.

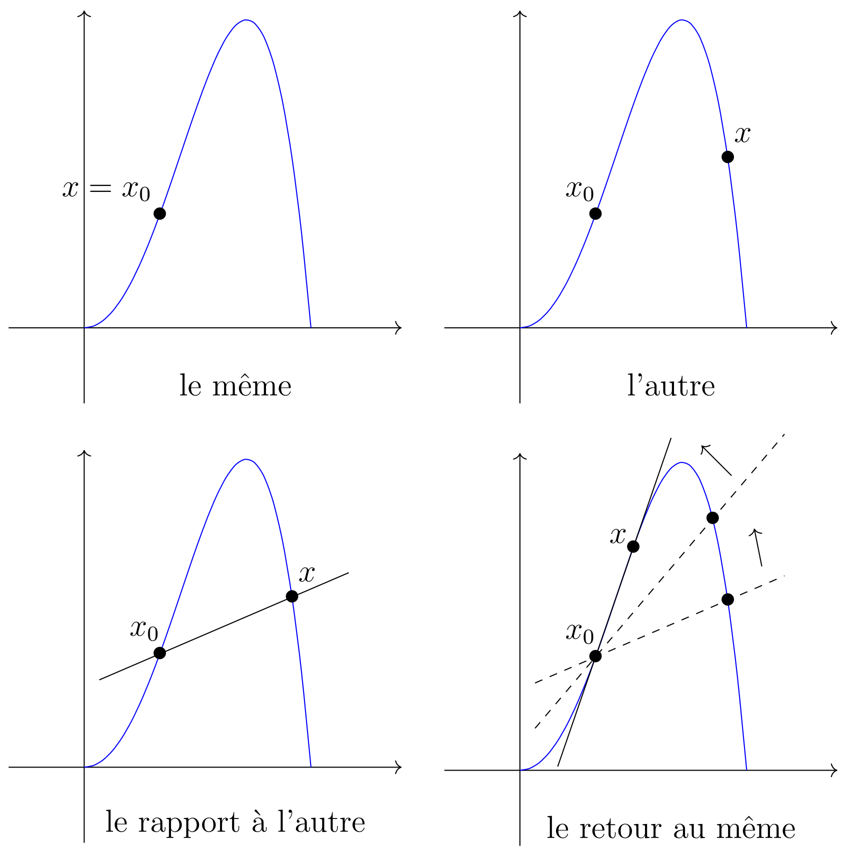
L'UIAO du calcul différentiel L'idée de base, que Lawvere fait remonter aux Manuscrits Mathématiques de Marx (MMM) [Mar81], est que la dialectique est à l'oeuvre au coeur même du calcul différentiel.

Rappelons que la *différentielle* d'une fonction (lisse) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point x_0 est définie par la limite
$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} .$$

En suivant la lecture de François Nicolas des MMM [Nic21], on peut interpréter l'opération de différentiation d'une fonction comme un double travail du négatif :

1. on part du point $x = x_0$, où $f(x) = f(x_0)$ est identique à elle-même,
2. on nie cette identité par un point $x \neq x_0$ où f devient autre, opposée, il y a alors apparition d'une *différence* $\Delta f := f(x) - f(x_0)$,
3. finalement, on nie cette négation, en réduisant la différence entre $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$ à néant :
$$\Delta x \to 0 \;\text{ et }\; \Delta f \to 0 .$$

Lors de cette dernière étape, la fonction f ne revient pas de manière tautologique à l'affirmation de son identité, mais entre en *rapport* (ici, au sens propre et au sens figuré) avec l'altérité pour se présenter comme un tout :
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} .$$
L'auto-affirmation du même incarné par le processus de limite, donne alors naissance à une nouvelle quantité, la *dérivée*, la "vitesse" de la fonction, son "devenir". En effet, si l'on interprète notre fonction comme la trajectoire d'une particule, la dérivée en un instant donne la direction et la quantité de mouvement.



Lawvere formalise cette pensée dans son cadre (accrochez-vous, on va faire un peu de maths, simples mais il faut suivre !).

Il reformule les enjeux de la manière suivante :

> En supposant les lois de l'algèbre qui sont vraies à la fois pour les quantités constantes et variables, quelle est la donnée supplémentaire nécessaire pour déterminer les dérivées des variables et établir les règles de dérivation ? [Law96, p.170]

La réponse, nous dit Lawvere, est "l'unité et l'identité des opposés qui permet à une seule variable de se séparer en deux variables analogues, puis de se réunir à nouveau plus tard en une seule".

Plus précisément, il considère une UIAO dans la catégorie des anneaux commutatifs

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & C \arrow[l, "r" description] \end{tikzcd}$$

Rappelons que dans un anneau B, on a

— une addition $a + b$ associative et commutative,

— une multiplication ab,

— compatibles dans le sens que la deuxième se distribue sur la première :

$$a(b + c) = ab + ac\ .$$

Un homomorphisme d'anneaux préserve cette structure :

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(ab) &= f(a)f(b)\ . \end{aligned}$$

Lawvere considère (à juste titre) cette catégorie comme incarnant les "lois de l'algèbre", qui sont valides à la fois pour les quantités constantes (les nombres) et variables (les fonctions).

Les deux homomorphismes i_0 et i_1 réalisent la négation par l'altérité :

— un élément $y \in B$ est envoyé sur *deux éléments* $i_0(y)$ et $i_1(y)$ que nous noterons y_0 et y_1.

— On peut alors considérer leur *différence* que nous noterons

$$\Delta y := y_1 - y_0 \ .$$

— Étant donné que $r(y_0) = r(y_1) = y$, on a $r(\Delta y) = r(y_1) - r(y_0) = 0$. On écrit suggestivement $\Delta y \to 0$ pour symboliser l'image de cet élément de C par r.

Le morphisme r incarne algébriquement, "synthétiquement" le processus de limite.

On a maintenant besoin de trois définitions formelles. On écrit $z \to x$ pour signifier que $r(z) = x$.

Définition 1. *Un élément $x \in B$ est appelé* variable *si* $\forall\ f \in C, f\Delta x = 0 \implies f \to 0$.

En d'autres mots, si x est variable, Δx n'est jamais 0 !

Définition 2. *Soit $x \in B$. On définit l'ensemble $A(x) := \{y \in B \mid \exists g \in C\ ,\ \Delta y = g\Delta x\}$.*

Définition 3. *Soit $y \in A(x)$. S'il existe, on note dy/dx l'élément de B tel que*

$$\forall g \in C, \Delta y = g\Delta x \implies g \to \frac{dy}{dx} \ .$$

On est maintenant en mesure de dériver formellement les lois du calcul différentiel.

Proposition 1. *Soit $x \in B$ une variable. Alors, $A(x)$ est un anneau,*

1. *$\frac{d}{dx}$ est bien défini sur $A(x)$, et*
2. *$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$ pour tous $u, v \in A(x)$.*

Démonstration. On montre chaque point séparément.

1. On veut montrer que $\frac{dy}{dx}$ existe pour tout $y \in A(x)$. Si x est variable et $y \in A(x)$, on a

$$\begin{cases} \Delta y = g_1\Delta x \\ \Delta y = g_2\Delta x \end{cases} \implies (g_1 - g_2)\Delta x = 0 \implies g_1 - g_2 \to 0 \implies r(g_1) = r(g_2) =: \frac{dy}{dx}$$

2. Supposons que $\Delta u = g\Delta x$ et $\Delta v = h\Delta x$ dans C. Alors, on a

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= u_1v_1 - u_0v_0 \\ &= u_1(v_1 - v_0) + (u_1 - v_0)v_1 \\ &= u_0\Delta v + (\Delta u)v_1 \\ &= (u_0h + gv_1)\Delta x \ . \end{aligned}$$

Mais par le premier point, $u_0h + gv_1 \to u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$, ce qui achève la démonstration.

□

Proposition 2. *Soit x une variable et soit $y \in A(x)$ également une variable. Alors, $A(y) \subset A(x)$ et pour tout $z \in A(y)$ on a*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \ .$$

Démonstration. Si $\Delta z = g\Delta y$ et $\Delta y = h\Delta x$, alors $\Delta z = (gh)\Delta x$. Mais $g \to \frac{dz}{dy}$ et $h \to \frac{dy}{dx}$, ce qui combiné aux fait que $r(gh) = r(g)r(h)$ achève la démonstration. □

Remarquons que dans la première proposition, on s'est servi de l'additivité de r, dans la deuxième on s'est servi de sa multiplicativité.

On est donc parvenu à établir, avec une grande économie de moyens, les lois fondamentales du calcul différentiel à partir de considérations *purement algébriques*.

Le moteur que l'on a dû fournir, ajouter aux lois de l'algèbre est (toujours selon Lawvere) l'incarnation de la dialectique hégélienne :

> l'unité et l'identité des opposés donne naissance par un double travail du négatif à l'opération de dérivation et à ses lois constitutives.

Cela constitue une formalisation mathématique rigoureuse de l'idée de Marx, dont on peut débattre à la fois sur les terrains mathématique et philosophique.

Lawvere attribue cette formalisation à Hadamard, ce qui paraît à première vue surprenant. En fait, Hadamard a prouvé le lemme suivant [Nes20, Lemme 2.8] :

Lemme 1. $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \exists g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *tel que* $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)g(x)$.

Il serait intéressant de savoir si Hadamard avait en tête Marx ou Hegel au moment de prouver ce lemme. Toujours est-il que ce dernier, d'apparence simple, a des conséquences profondes. Dans le cas qui nous préoccupe, en prenant

$$\begin{tikzcd} B = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \arrow[r, bend left, "i_0"] \arrow[r, bend right, "i_1"'] & C = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \arrow[l, "r"] \end{tikzcd}$$

où $f_0(x,y) := f(x)$, $f_1(x,y) := y$, $r(g) := g \circ \Delta$ pour $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \mapsto (x,x)$, le lemme d'Hadamard affirme que

$$A(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \Delta f = g\Delta x\} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ ,$$

et les propositions précédentes redonnent le calcul différentiel usuel.

Il apparaît donc comme la clef de voûte d'un développement formel du calcul différentiel sur l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

On peut se demander immédiatement dans quels contextes plus généraux pourrait tenir le lemme de Hadamard ; par exemple en remplaçant l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par un autre anneau.

Lawvere affirme que l'on tient là des outils pour l'enseignement, car les règles formelles précédentes capturent l'idée essentielle : les anneaux pour lesquels le lemme de Hadamard ewt vérifié sont ceux où la fonction "pente-de-la-sécante" existe toujours et se spécialise de manière non-ambigue en une fonction "pente-de-la-tangente".

On peut pousser plus loin et se demander s'il est possible, à l'aide de ce genre de pensée "catégorielle", d'étendre la géométrie différentielle à des contextes où elle ne peut d'ordinaire être définie.

Il s'avère que cela est possible, et c'est tout l'enjeu d'un domaine à part entière nommé "géométrie différentielle synthétique". Il s'agit en particulier d'un modèle alternatif pour les infinitésimaux par rapport à l'analyse non-standard. Il permet de parler de géométrie différentielle dans des topos analogues au topos des ensembles que nous avons étudié, où la trilogie être-néant-devenir est toujours à l'oeuvre, mais où la logique n'est plus celle que nous connaissons.

Voilà qui aurait sans doute intéressé Hegel.

Références

[Gon21] Martin GONZALEZ : De l'inauguration d'une intellectualité mathématique matérialiste codifiée catégoriquement. `http://www.entretemps.asso.fr/2021-2022/Gonzalez-Lawvere-texte.pdf`, `https://www.youtube.com/watch?v=u7G-mpWPJGA`, octobre 2021. Séminaire MaMuPhi.

[Heg32] Georg Wilhelm Friedrich HEGEL : *Science de la logique*. 1832. trad. Gwendoline Jarczyk et Pierre-Jean Labarrière, Aubier, 1972.

[Law92] F. William LAWVERE : Categories of space and of quantity. *In* Javier ECHEVERRIA, Andoni IBARRA et Thomas MORMANN, éditeurs : *The Space of Mathematics : Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations*, pages 14–30. De Gruyter, 1992.

[Law96] F. William LAWVERE : Unity and identity of opposites in calculus and physics. *Applied Categorical Structures*, 4(2):167–174, juin 1996.

[Mar81] Karl MARX : Manuscrits mathématiques, 1881. trad. Alain Alcouffe, Economica, 1985.

[Mar18] Gilles MARMASSE : *Hegel. Une philosophie de la réconciliation*. Ellipses, 2018.

[Nes20] Jet NESTRUEV : *Smooth Manifolds and Observables*, volume 220 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer International Publishing, Cham, 2020.

[Nic21] François NICOLAS : Les manuscrits mathématiques de Marx. `http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/MMM.pdf`, 2021.