Mathématique Moderne de(s) Papy où l'éloge d'une rationalité mathématique émancipée

par Martin Gonzalez

Université du Luxembourg

Séminaire Mamuphi 11/12/2021

1

Ensembles

1 — L'idée **d'ensemble** est fort courante.

Avec des nuances diverses elle est évoquée par les mots suivants : classe, ensemble, groupe, groupement, collection, collectivité, troupe, équipe, famille, troupeau, tribu, clan, escadrille, essaim, meute, régiment, foule, association, société, école.

EXERCICE — Donne d'autres mots qui évoquent l'idée d'ensemble.

2 — EXEMPLES

E1 Un ensemble deux-pièces formé de cette jupe et de cette blouse.
E2 Cet essaim d'abeilles.
E3 Cette troupe de soldats.
E4 Cette classe d'élèves.
E5 Cette paire de chaussures.
E6 Ce troupeau de moutons.
E7 Cette escadrille d'avions.
E8 L'ensemble des classes (locaux) de notre école.
E9 L'ensemble des tables du petit réfectoire.
E10 L'ensemble des pieds des tables du petit réfectoire.
E11 L'ensemble des chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
E12 L'ensemble des théorèmes de tel cours de géométrie.
E13 Cette botte de carottes (ensemble de carottes).
E14 Cet ensemble de bottes de carottes.
E15 Ce bouquet de fleurs (ensemble de fleurs).
E16 L'ensemble des atomes de cette molécule d'acide sulfurique
E17 L'ensemble des wagons de ce train.
E18 L'ensemble des tables et des pieds des tables du petit réfectoire.
E19 L'ensemble des prénoms des élèves de notre classe.
E20 L'ensemble des élèves de notre classe.

3 — ***Un ensemble est déterminé quand on sait quels objets le constituent; quels sont ses éléments.***

Le mot **objet** est employé ici dans un sens très large.

Dans l'exemple E1, jupe et blouse sont des objets.
Dans l'exemple E2, les abeilles sont des objets.
Dans l'exemple E12, chaque théorème est un objet.
Dans l'exemple E13, les carottes sont des objets.
Dans l'exemple E14, les bottes de carottes sont des objets.

Ce dernier exemple montre que nous considérons des ensembles comme des objets.

Tout ensemble est un objet.

4 — ÉLÉMENTS

Dans l'exemple E2, nous dirons que chaque abeille est un élément de l'essaim.

De manière générale nous dirons qu'un objet d'un ensemble **est un élément** de cet ensemble. Nous dirons que l'ensemble **comprend** chacun de ses éléments. Ceci est conforme au langage courant:

„Combien de membres comprend votre famille?"
„La suite du cortège royal comprenait trente-sept personnes".

Au lieu de dire qu'un objet est **élément d'un ensemble**, on dit encore que cet objet **appartient** à cet ensemble.

Ainsi dirons-nous, dans le cas de l'exemple E6, que ce mouton **appartient** à tel troupeau.

Dans l'exemple E1, une jupe bien déterminée et une blouse bien déterminée sont les seuls objets de l'ensemble. Un bouton cousu à la blouse, n'est pas un élément de l'ensemble.

Dans l'exemple E2, les ailes des abeilles ne sont pas des éléments de l'essaim.

Dans l'exemple E9, les pieds des tables ne sont pas des éléments de l'ensemble.

Dans l'exemple E10, les tables ne sont pas des éléments de l'ensemble.

Dans l'exemple E18, les tables du petit réfectoire et leurs pieds sont les seuls éléments de l'ensemble.

Dans l'exemple E6, ni les têtes, ni les pattes des moutons n'appartiennent au troupeau.

5 — TERMES — ÉGALITÉ

En mathématique, les objets sont souvent représentés par des **termes** qui sont des signes ou des assemblages de signes.

Ainsi

$$2\,,\ 27\,,\ 9 \times 3\,,\ 54 : 2\,,\ 6 + 6\,,\ 2 + 3 - 5 + 4\,,\ 1/2$$

sont des termes qui représentent respectivement les objets suivants

„le nombre deux"
„le nombre vingt-sept"
„le nombre vingt-sept"
„le nombre vingt-sept"
„le nombre douze"
„le nombre quatre"
„le nombre un demi".

Si deux termes désignent le même objet, on dit qu'ils sont égaux, et on signale ce fait au moyen du signe $=$ de la manière bien connue

$$27 = 9 \times 3$$
$$54 : 2 = 9 \times 3$$

Dans le cas contraire, on utilise le signe $\neq$. Ainsi

$$2 \neq 54 : 2$$
$$27 \neq 2 + 3 - 5 + 4$$
$$6 + 6 \neq 1/2$$

Les ensembles seront souvent désignés par des lettres.

Si A désigne l'ensemble comprenant les seuls éléments 1, 3, 5, 7 et 9,

si B désigne l'ensemble des nombres entiers plus grands que 0 et plus petits que 10,

si C désigne l'ensemble des entiers impairs plus grands que 0 et plus petits que 10,

on aura

$$A \neq B$$
$$B \neq C$$
$$A = C$$

ce que l'on écrira de manière condensée

$$B \neq A = C$$

6 — PROPRIÉTÉS DE L'ÉGALITÉ

Si a, b, c, désignent chacun un objet, on a les propriétés suivantes

1. Pour tout objet a : $a = a$ (**Réflexivité** de l'égalité)
2. **Si** $a = b$ **Alors** $b = a$ (**Symétrie** de l'égalité)
3. **Si** $a = b$ et $b = c$ **Alors** $a = c$ (**Transitivité** de l'égalité)

EXERCICE — a, b, c, désignent chacun un objet

Si $a = b$ et $b = c$ **Alors** $c = a$ (**Circularité** de l'égalité)

7 — LE SIGNE D'APPARTENANCE

Supposons que a désigne un objet et que E désigne un ensemble.
Si l'objet a appartient à l'ensemble E, on écrit

$$a \in E \tag{1}$$

Dans le cas contraire, on écrit

$$a \notin E \tag{2}$$

Ainsi, si nous désignons notre classe par C et notre condisciple Monique par m, nous écrirons

$$m \in C \tag{3}$$

Si nous désignons par g l'objet „Gagarine", nous devrons écrire

$$g \notin C \tag{4}$$

Si E est un ensemble, on a, pour tout objet x, une et une seule des éventualités
$x \in E$ ou $x \notin E$.

8 — FABRIQUONS DES ENSEMBLES SELON NOTRE FANTAISIE !

Nous aurons défini un ensemble E, si pour tout objet t, il est clair que l'on a une et une seule des éventualités

$$t \in E \qquad \text{ou} \qquad t \notin E$$

On donne parfois un ensemble en énumérant ses éléments. (C'est ce que l'on appelle une définition en *extension*).

Nous sommes maîtres de former tout ensemble qu'il nous plait en mettant ensemble les objets que notre bon plaisir désire mettre ensemble.

Exemples d'ensembles (Noter la notation qui se comprend d'elle-même!)

E21 : H = { Charlie Chaplin, Walt Disney, Victor Hugo }

E22 : A = { cet agent de police, ce cornichon, cette pincée de sel }

E23 : B = { cette fleur, cette casserole }

EXERCICES

1. Aucun pétale n'est élément de l'ensemble B (de l'exemple E23).
2. Le nez de l'agent de police n'est pas élément de l'ensemble A (de l'exemple E22).

9 — SCHÉMAS

Les élèves ont présenté l'ensemble suivant :

E = { le tableau noir (sur pieds), une assiette, notre condisciple Simone }

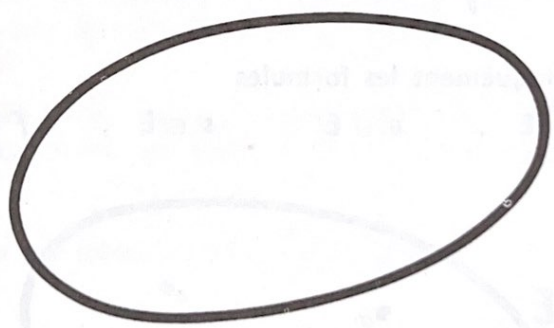
Désignons le tableau noir par t, l'assiette par a et Simone par s.
On a donc

$$E = \{ t, a, s \}$$

Rien ne permettait de deviner qu'un ensemble avait été constitué par a, s et t. Pour nous rappeler que nous avions fabriqué un ensemble comprenant ces seuls objets, nous les avons encerclés au moyen d'une longue corde nouée.

Ce procédé sera souvent utilisé pour *représenter graphiquement les ensembles*. On ne cherche ni à représenter ni à situer les objets, on se borne à dessiner la corde.

Ainsi, l'ensemble E sera simplement représenté par le dessin



E

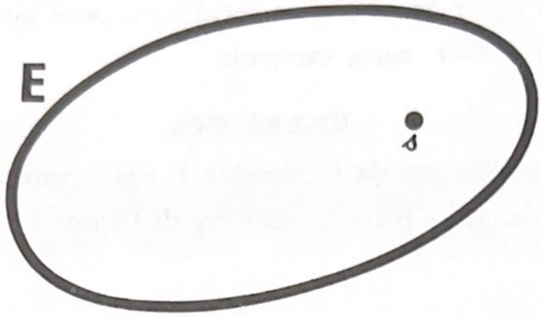
Nous conviendrons de représenter tout objet par un point. Les éléments de l'ensemble seront représentés par des points à l'intérieur de la corde; les objets qui n'appartiennent pas à l'ensemble seront représentés par des points situés à l'extérieur de la corde.

Tout objet est donc représenté par un point situé soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la corde. Aucun objet n'est représenté par un point situé sur la corde.

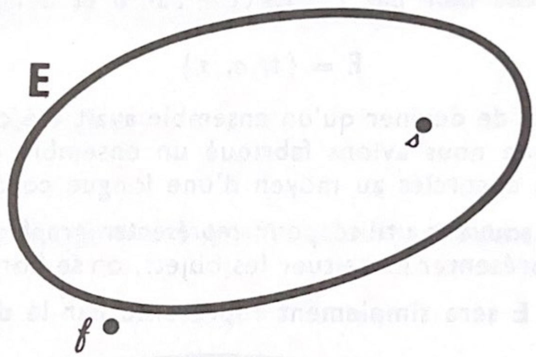
Nous ne marquerons que les points des objets sur lesquels nous désirons attirer l'attention.

Ainsi, le dessin ci-dessus représente parfaitement l'ensemble E.

Si nous voulons signaler que Simone est élément de l'ensemble E, nous maquerons un point représentant Simone.

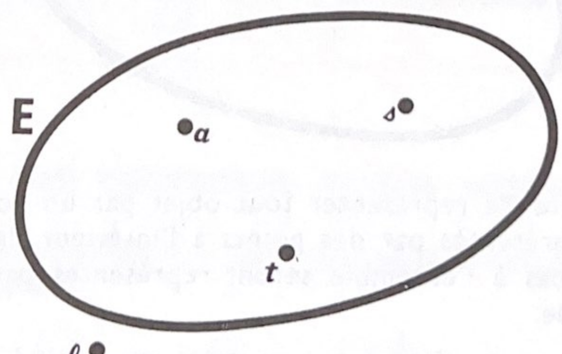


Exprimons graphiquement que la Tour Eiffel, notée *f*, n'est pas élément de E.



Traduisons graphiquement les formules

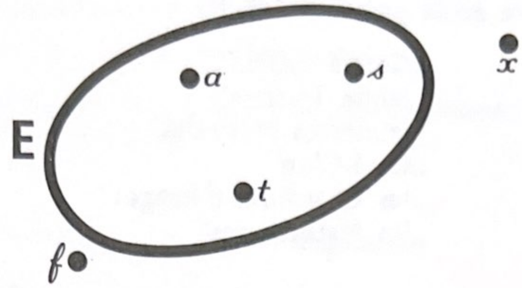
$$t \in \mathrm{E}\ , \quad a \in \mathrm{E}\ , \quad s \in \mathrm{E}\ , \quad f \notin \mathrm{E}$$



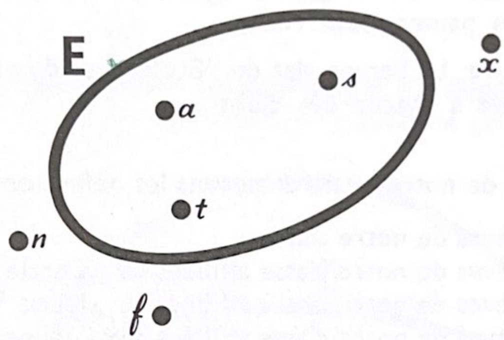
Nous savons que *t*, *a*, *s* sont les seuls éléments de l'ensemble E. Pour tout autre objet *x*, on aura la formule

$$x \notin \mathrm{E}$$

Portons cette information sur le graphique



Si *n* désigne le nez de Simone $n \notin E$



10 — DÉFINITION EN COMPRÉHENSION

On définit souvent un ensemble en énonçant une propriété *caractéristique* de ses éléments, c'est-à-dire une propriété que possèdent tous ses éléments et qu'ils sont seuls à posséder.

E24 — L'ensemble C des élèves de notre classe qui portent des lunettes (La propriété est ici: „être élève de notre classe et porter des lunettes").

Nous écrivons

$$C = \{ x \mid x \text{ est élève de notre classe et porte des lunettes} \}$$

ce qui se lit :

„*C est l'ensemble des* x **tels que** x *est élève de notre classe et porte des lunettes.*"

Il importe de se méfier et d'écarter les propriétés peu claires. La phrase: „les élèves de notre classe qui ont des yeux bleus" ne permet pas de définir un ensemble. En effet, deux de nos condisciples, — l'une aux yeux brun foncé et l'autre aux yeux bleu clair — ont été chargées indépendamment de déterminer „ *l*es élèves de notre classe qui — *à leur avis* — ont les yeux bleus". La première de nos camarades a trouvé 10 élèves aux yeux bleus et la seconde en a dénombré 3!

La propriété choisie était de nature *subjective* (elle semble dépendre notamment de la couleur des yeux de celle qui opère le choix!) et ne définit pas un ensemble au sens de la mathématique.

11 — PAIRES — SINGLETONS — ENSEMBLE VIDE

Les élèves de notre école peuvent s'affilier aux clubs que voici :

„Cercle Sportif"
„Jeune Théâtre"
„Jeunesses Musicales"
„Ciné-Club"
„les Chasseurs d'Images"
„les Naturalistes".

Aucune élève ne peut s'affilier à plus de deux clubs, ni s'affilier simultanément au Jeune Théâtre et au Ciné-Club.

Les élèves ont toutes remis un papier signé par le chef de famille et indiquant les choix faits. Tous les papiers sont remis.

La situation est claire. Le Secrétariat de l'Ecole peut dire quelles sont les élèves de chaque classe affiliées à chacun des clubs.

Considérons le cas de notre classe et posons les définitions suivantes :

K = ensemble des élèves de notre classe.
S = ensemble des élèves de notre classe affiliées au „Cercle Sportif".
T = ensemble des élèves de notre classe affiliées au „Jeune Théâtre".
M = ensemble des élèves de notre classe affiliées aux „Jeunesses Musicales".
C = ensemble des élèves de notre classe affiliées au „Ciné-Club".
I = ensemble des élèves de notre classe affiliées au club „les Chasseurs d'Images".
N = ensemble des élèves de notre classe affiliées au club „les Naturalistes".

Chacune des élèves de notre classe sera désignée par une minuscule latine différente.

Nous avons ainsi

$$K = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, v, w, x\}.$$

Presque toutes les élèves de notre classe se sont affiliées au cercle sportif; de manière plus précise:

$$S = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, t, v, x\}.$$

La plupart des élèves ont également opté, soit pour le Jeune Théâtre, soit pour le Ciné-Club. C'est ce que révèlent les formules

$$T = \{a, d, h, n\}$$
$$C = \{b, g, k, m, p, q, r, t, v, w, x\}.$$

Les trois autres Clubs ont eu beaucoup moins de succès.
Seules les élèves f et w ont décidé d'élever des têtards!

Nous écrivons

$$N = \{f, w\}$$

et nous dirons que l'ensemble N est ***une paire.***

Les Jeunesses Musicales ont eu moins de succès encore: *c* est notre seule mélomane. Nous persisterons à écrire

$$M = \{ c \}$$

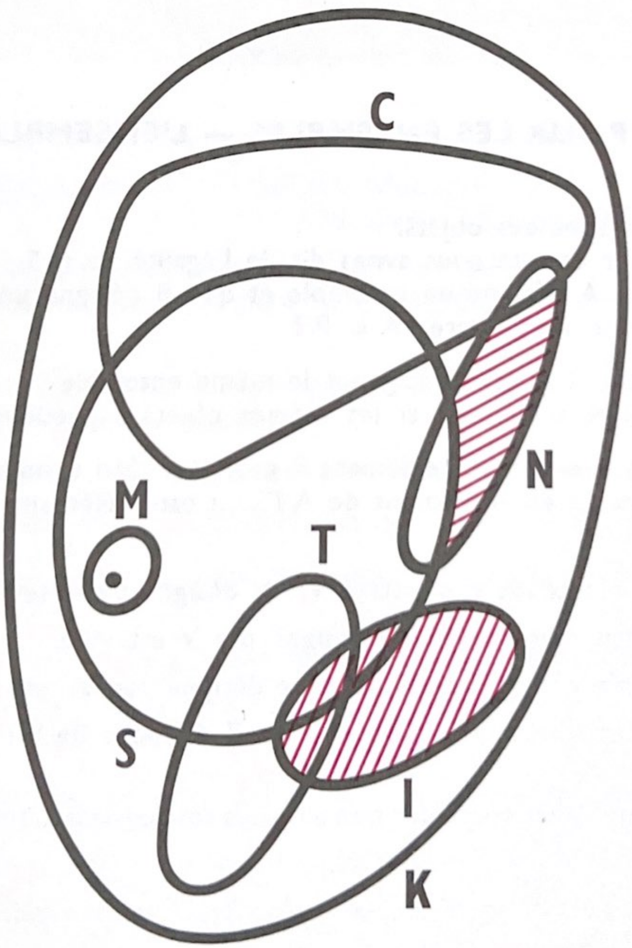
et nous dirons que l'ensemble M est **un singleton.**

Aucune de nos condisciples ne s'est affiliée au cercle „les Chasseurs d'Images". N'est-il pas naturel de révéler ce fait en écrivant

$$I = \{ \quad \}$$

Nous dirons que I est **vide.**

Représentons la situation dans notre classe par un diagramme dans lequel nous hachurons les régions ou plages où il ne peut y avoir de points figurant une élève.



EXERCICES

1. On demande de placer les points représentatifs des élèves dans le schéma ci-dessus.

2. Désignons par X l'ensemble des élèves de notre classe qui ne se sont affiliées à aucun club, par Y l'ensemble de celles qui se sont affiliées à un et un seul club, par Z l'ensemble de celles qui se sont affiliées à deux clubs, par T l'ensemble de celles qui se sont affiliées à trois clubs. On demande de définir X, Y, Z, T en extension, c'est à dire de compléter les formules ci-dessous :

$$X = \{ \dots \}$$
$$Y = \{ \dots \}$$
$$Z = \{ \dots \}$$
$$T = \{ \dots \}$$

On demande de tracer sur le dessin de la page 9, un diagramme pour X, un diagramme pour Y et un diagramme pour T.

Veux-tu hachurer tout ce que tu peux hachurer sur ce dessin?

12 — ÉGALITÉ POUR LES ENSEMBLES — L'ENSEMBLE ϕ

— Les ensembles sont des objets.
Appliquons-leur ce que nous avons dit de l'égalité au § 5.
Supposons que A désigne un ensemble et que B désigne un ensemble.
Quand pourrons-nous écrire $A = B$?

— Si et seulement si A et B désignent le même ensemble.
C'est-à-dire si et seulement si les mêmes objets appartiennent à A et à B.

— On aura donc $A = B$ si et seulement si *pour tout objet t*, on a la même réponse aux deux questions „*t* est-il élément de A ?", „*t* est-il élément de B ?"

Supposons que chacune des lettres V, W désigne un ensemble.

On nous avertit que l'ensemble désigné par V est vide.

On nous signale encore que l'ensemble désigné par W est vide.

Posons-nous les questions: „l'objet *t* est-il élément de V ?"; „l'objet *t* est-il élément de W ?".

Nous voyons qu'il faut répondre ***non*** à toutes ces questions, quel que soit l'objet *t*.

Donc $V = W$.

Nous venons d'établir qu'*il n'existe qu'un seul ensemble vide*.

On le désigne par le symbole ϕ.

Si a et b désignent des objets distincts, il existe un et un seul ensemble comprenant a et b comme seuls éléments. On le désigne par $\{a, b\}$. Un tel ensemble s'appelle une paire.

Il existe un et un seul ensemble comprenant a comme seul élément. On le désigne par $\{a\}$. Un tel ensemble s'appelle un singleton.

Il existe un et un seul ensemble ne comprenant aucun élément. C'est l'ensemble vide désigné par ϕ.

Il existe un ensemble comprenant les seuls nombres naturels 0, 1, 2, ... On le désigne par ω.

Ainsi $\omega = \{x \,\blacksquare\, x$ est un nombre naturel$\}$.

On écrira encore

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

EXERCICES

1. Donne plusieurs termes qui représentent l'objet ,,le nombre vingt-huit''.
2. On a { Monique, Gilbert } = { Gilbert, Monique } = { Monique, Monique, Monique, Gilbert }.
3. Si $a \neq b$, on dit que l'ensemble $\{a, b\}$ est une paire.
L'ensemble { Gilbert Bécaud, le père du fils de Gilbert Bécaud } est-il une paire?
4. La phrase
,,les élèves de notre classe qui ont des cheveux blonds''
permet-elle de définir un ensemble?
5. Définis en extension l'ensemble des naturels pairs compris entre 17 et 83.
6. Donne une définition en compréhension de l'ensemble { 1, 2, 8 }.
7. Quel est l'ensemble des naturels plus petits que 100 et divisibles à la fois par 13 et 17?
8. Nous désignerons par *div* 12 l'ensemble des diviseurs de 12. On a donc

$$div\ 12 = \{x \,\blacksquare\, x \text{ est un diviseur de } 12\}$$
$$div\ 12 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

La première de ces formules définit *div* 12 *en compréhension*. La seconde définit *div* 12 *en extension*.
Veux-tu définir en extension *div* 20, *div* 72, *div* 100, *div* 13, *div* 7, *div* 19, *div* 29, *div* 2, *div* 97, *div* 1.024?
Commente les résultats obtenus!
Montre que *div* 1 = { 1 } et que *div* 0 = ω.

9. On a $\{x \in \omega \mid 6 \text{ est un diviseur de } x\} = \{0, 6, 12, \ldots\}$
Cet ensemble est encore noté $6\,\omega$.
De manière analogue, donne quatre désignations de l'ensemble des multiples de 15.

10. Un nombre naturel p est dit **premier** si et seulement si *div* p est une paire.
En abrégé

$$\boxed{p \text{ premier} \iff \mathit{div}\ p \text{ est une paire}}$$

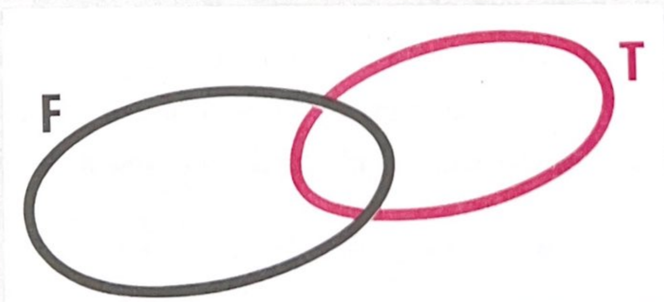
Montre que 1 n'est pas premier.
Que peux-tu dire de *div* 1?

11. Veux-tu définir en extension l'ensemble des nombres premiers qui divisent 18?
Question analogue pour 1024, 100, 7.
Commente les résultats obtenus.

12. Représente par des points la montre de ton professeur, le chef de l'établissement, l'éponge de ta classe, la lune.
Trace un diagramme de l'ensemble F admettant ces seuls objets comme éléments.
Représente par un point la grande aiguille de la montre de ton professeur.

13. Veux-tu porter sur un schéma l'ensemble C des élèves de ta classe, l'ensemble T des élèves de ta classe portant un tablier, l'ensemble L des élèves de ta classe portant des lunettes?

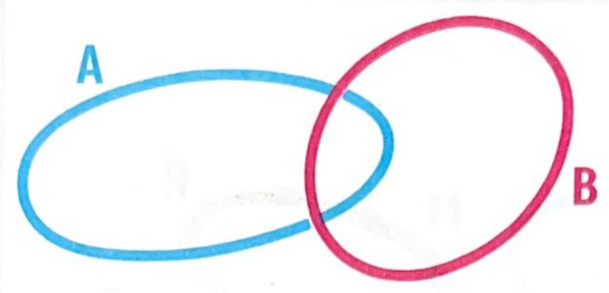
14. Désigne par F l'ensemble des fleurs d'un magasin et par T l'ensemble des tulipes de ce magasin.
Veux-tu représenter ces ensembles sur un même dessin?
Veux-tu représenter un muguet du magasin, une tulipe d'un autre magasin.
Le schéma ci-dessous eût-il été irrémédiablement mauvais?



Améliore ce schéma en hachurant les plages vides.

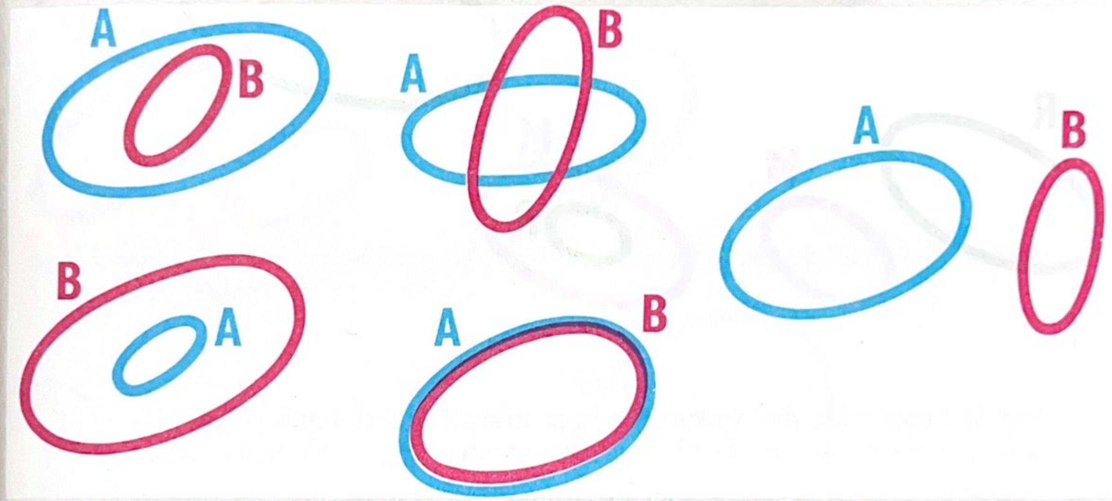
15. On demande de porter sur un schéma l'ensemble des voitures immatriculées dans notre pays, l'ensemble des VW immatriculées dans notre pays, l'ensemble des Citroën immatriculées dans notre pays, l'ensemble des Citroën 2 CV immatriculées dans notre pays, l'ensemble des voitures immatriculées dans notre pays et n'ayant pas de refroidissement à eau.

16. On nous présente le schéma que voici



On nous signale que A = B. Quelles plages peux-tu hâchurer?

Même question pour les schémas suivants



Que peux-tu dire de plus dans le cas du schéma de droite?

17. Ce cultivateur arrive au marché avec un complet chargement de carottes : un ensemble C de carottes que l'on représentera par un diagramme. Chaque botte de carottes définit un ensemble que nous appellerons simplement botte.

Soit B une botte (= ensemble de carottes). Veux-tu tracer un diagramme de B ?

Quels sont les objets représentés par des points situés à l'intérieur de la corde de B ?

Quels sont les objets représentés par des points situés à l'intérieur de la corde de C ?

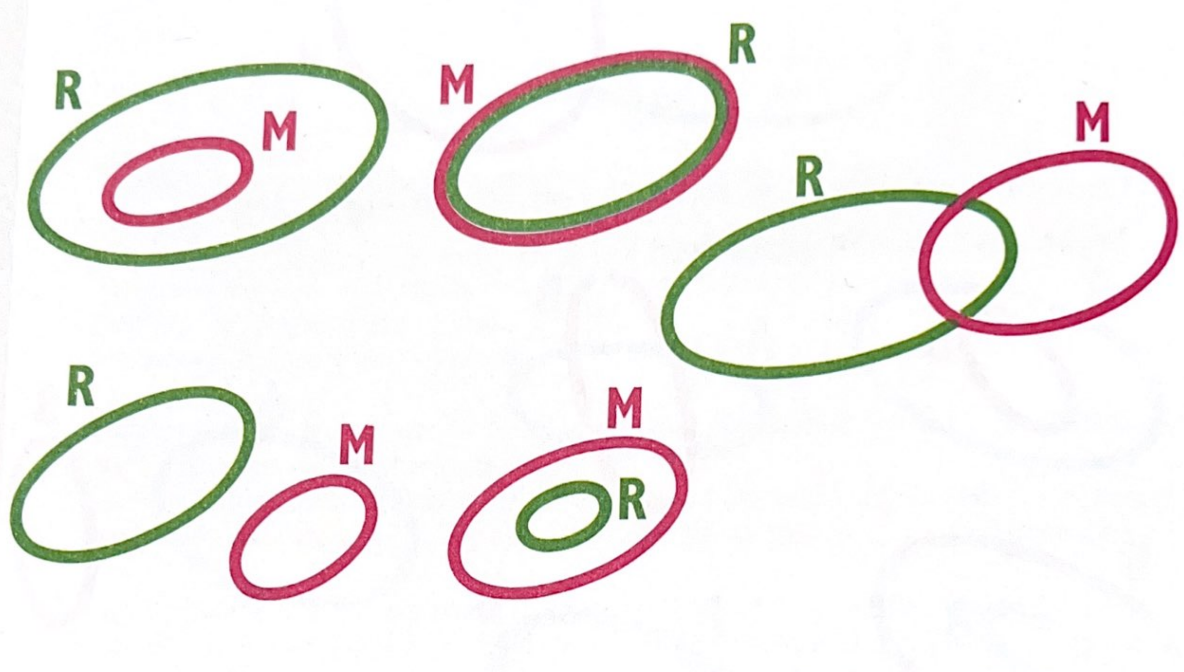
Tout objet est représentable par un point situé soit à l'intérieur de la corde C, soit à l'extérieur de cette corde.

La botte B est un objet. Où placer un point représentatif de B ?

On demande de représenter l'ensemble des bottes de carottes.

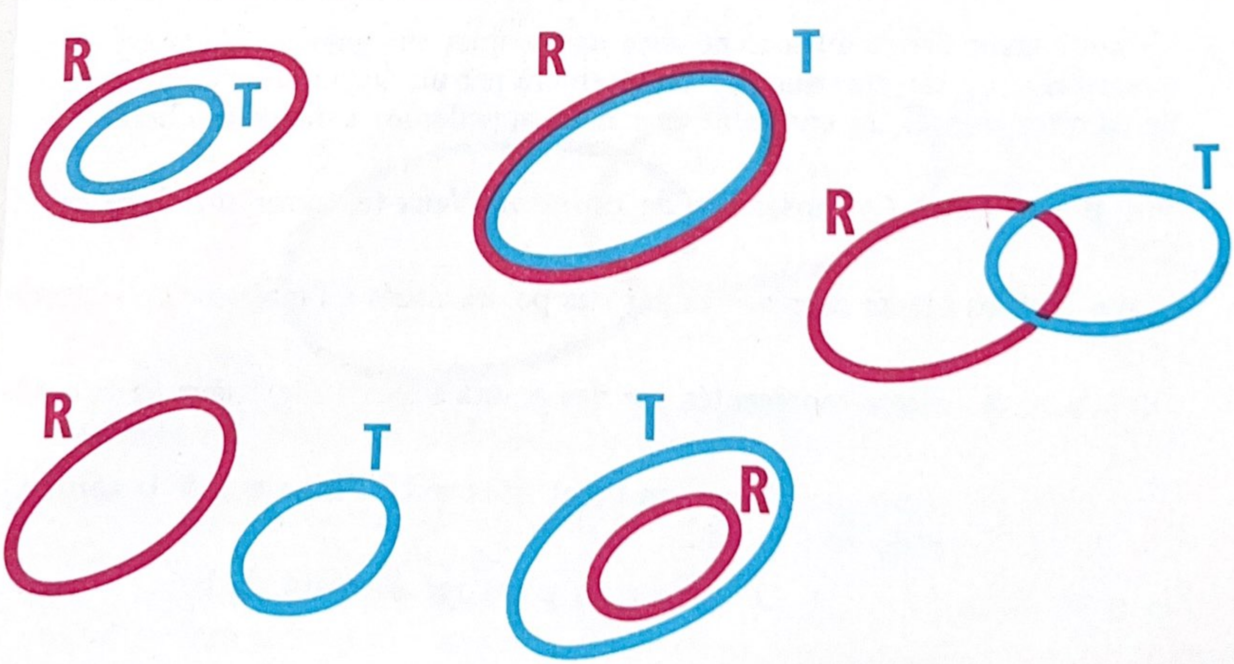
18. Désignons par M l'ensemble des mammifères et par R l'ensemble des ruminants.

On demande d'indiquer ceux des schémas ci-dessous qui peuvent servir à représenter M et R. Hachure les plages vides!

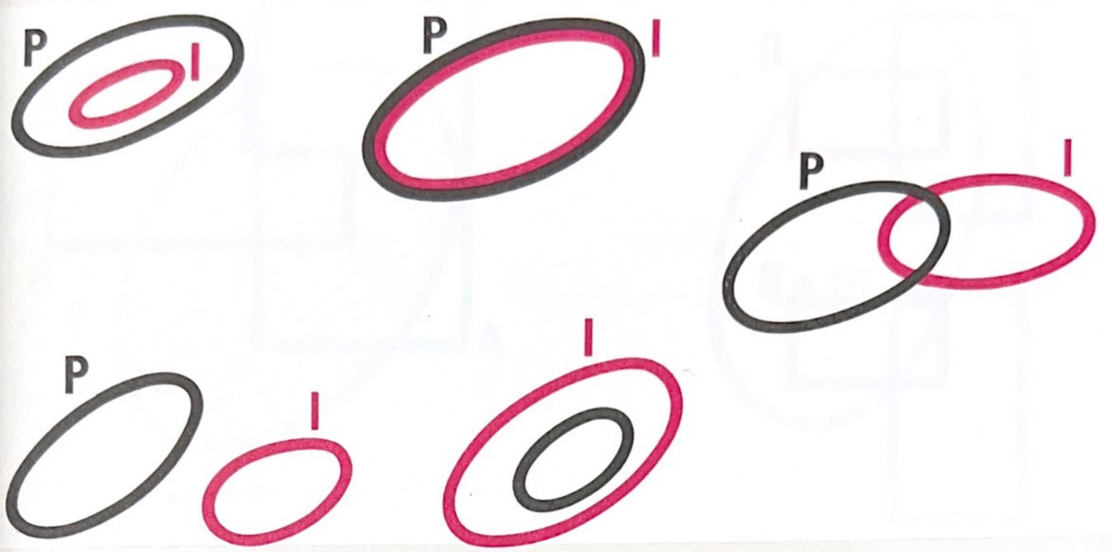


19. Soit R l'ensemble des voitures rouges immatriculées dans notre pays.
Soit T l'ensemble des Ford Taunus immatriculées dans notre pays.

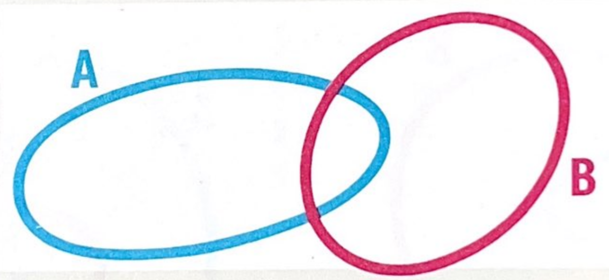
Quels sont les schémas ci-dessous qui peuvent servir à représenter R et T? Hachure les plages vides.



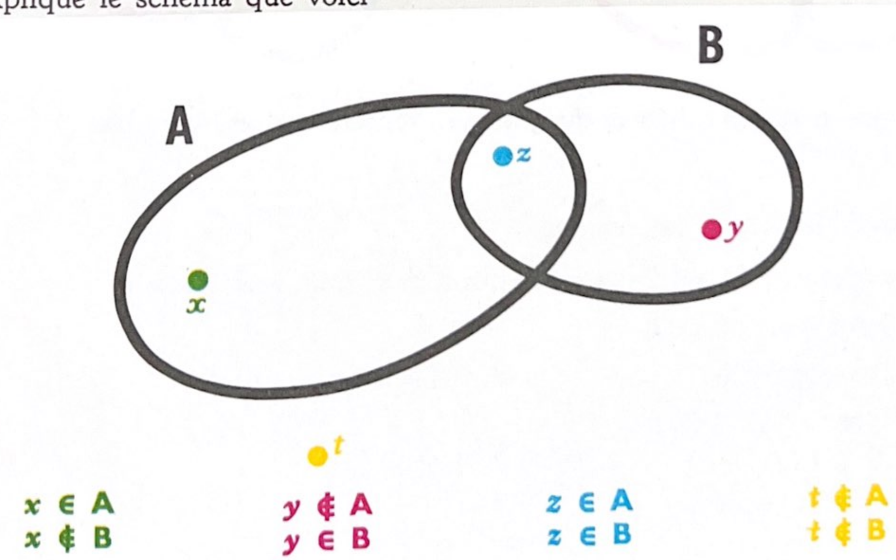
20. Soient P l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs. Quels sont les schémas ci-dessous qui peuvent servir à représenter P et I ? Hachure les plages vides.



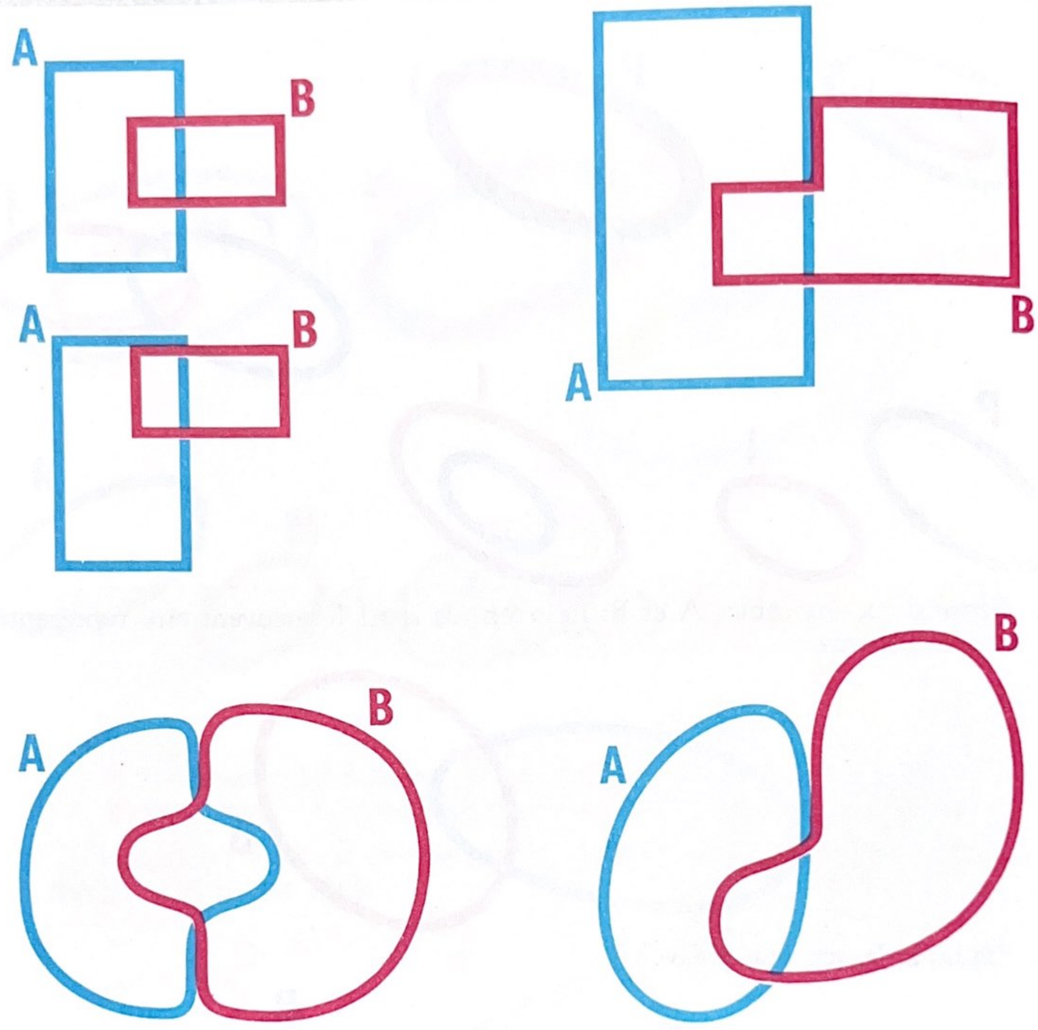
21. Pense deux ensembles A et B; ne m'en dis rien! Ils peuvent être représentés par ce schéma



22. Explique le schéma que voici



23. Pense un ensemble A et un ensemble B. Ils sont représentables par chacun des schémas ci-dessous



Imagine d'autres schémas qui puissent représenter les ensembles A et B, *quels qu'ils soient!*

24. L'ensemble vide ϕ est un objet.

Le singleton $\{\phi\}$ est l'ensemble qui a ϕ comme seul élément.

Pour tout objet t : $\qquad t \notin \phi$

Au contraire $\qquad \phi \in \{\phi\}$

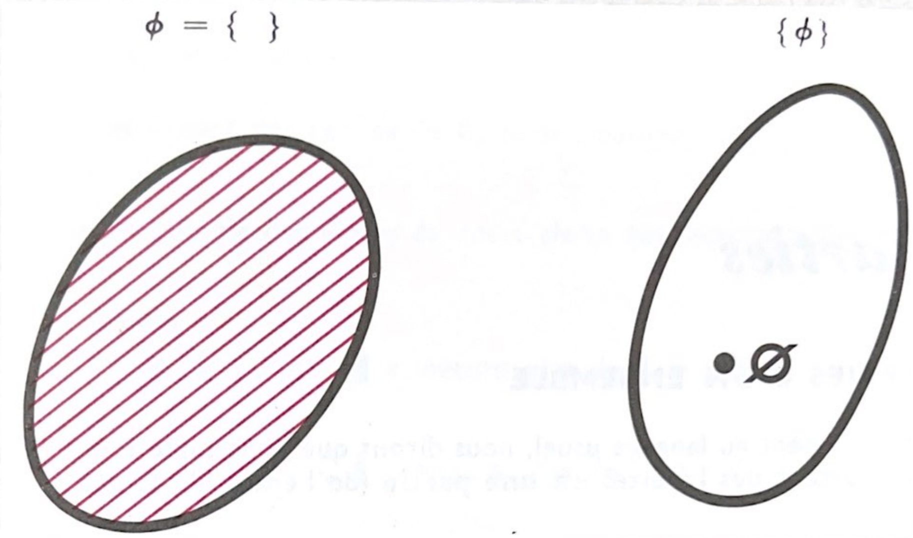
Donc

$$\phi \notin \phi \text{ et } \phi \in \{\phi\}$$

Explique la formule

$$\phi = \{\ \} \neq \{\phi\}$$

Justifie le schéma



On a la formule $\{\{\ \}\} = \{\phi\}$

25. Vérifie les formules

$$\phi = \{\ \} = \{x \,|\, x \neq x\}$$
$$\phi = \{\ \} = \{x \,|\, x = 1 \text{ et } x = 2\}$$
$$\{1\ ,\ 2\} = \{x \,|\, x = 1 \text{ ou } x = 2\}$$
$$\{9\} = \{x \,|\, x = 9\}$$

2

Parties

1 — PARTIES D'UN ENSEMBLE

Conformément au langage usuel, nous dirons que l'ensemble L des élèves de la classe qui portent des lunettes est **une partie** (de l'ensemble C des élèves) de la classe.

On signale ce fait en écrivant

$$L \subset C$$

De même, l'ensemble R des ruminants est une partie de l'ensemble M des mammifères, ce qui se note

$$R \subset M$$

De manière générale, *on appelle **partie d'un ensemble E** tout ensemble P d'éléments de E.*

On signale que P est une partie de E par la formule $P \subset E$

Comme E est un ensemble d'éléments de E, on a la formule $E \subset E$

Toute partie de E différente de E est dite **propre**.

Comme ϕ est un ensemble vide d'éléments de E, on a la formule

$$\phi \subset E$$

On peut obtenir les parties d'un ensemble en considérant les éléments de cet ensemble qui satisfont à une propriété supplémentaire.

Ainsi, dans l'ensemble C des élèves de notre classe, pouvons-nous distinguer la partie L formée par les élèves de notre classe qui portent des lunettes.

C'est ce que nous signalerons de manière abrégée par la formule

$$L = \{x \in C \,\rule{0.4em}{1em}\, x \text{ porte des lunettes}\}$$

qui se lit

„*L égale l'ensemble des x appartenant à C tels que x porte des lunettes.*".

De même

$$T = \{ x \in C \mid x \text{ porte un tablier} \}$$

est la partie de C formée des élèves qui portent un tablier.

Comme L et T sont des parties de C, nous écrivons

$$T \subset C, \quad L \subset C$$

De même, l'ensemble des élèves de notre classe qui mesurent plus de 2 m est une partie de C.

On a clairement

$$\phi = \{ x \in C \mid x \text{ mesure plus de 2 m} \} \subset C$$

De même,

$$C = \{ x \in C \mid x \text{ mesure plus de 1 m} \} \subset C$$

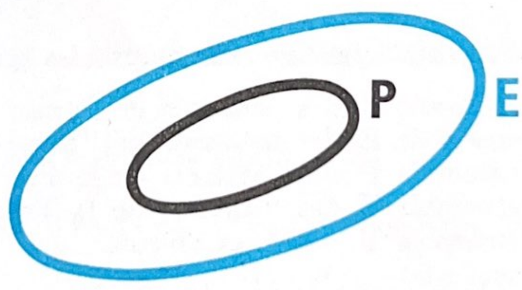
Nous venons de retrouver les formules

$$C \subset C \quad \text{et} \quad \phi \subset C$$

On exprime encore que A est une partie de B en disant que A est **inclus** dans B. Le signe $\subset$ est appelé le *signe d'inclusion.*

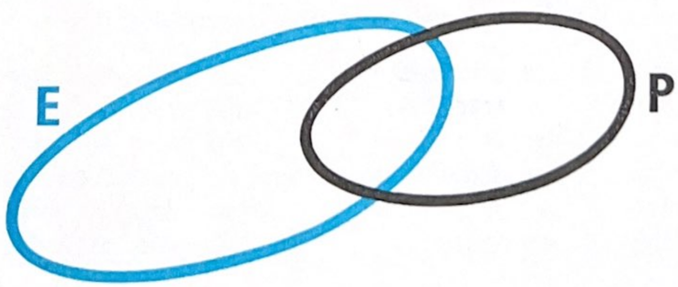
Au lieu d'écrire $A \subset B$, on écrit encore de manière équivalente $B \supset A$ ce qui se lit **„B contient A"**.

Si P est une partie de l'ensemble E, nous pourrons représenter cette situation par le schéma que voici

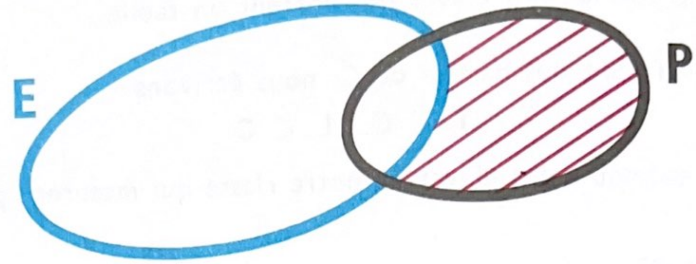


$P \subset E$

Le schéma général



n'est pas incompatible avec $P \subset E$. Si l'on sait que P est une partie de E, on connaît une plage vide: il convient de la hachurer.



$P \subset E$

EXERCICES

1. Établis les formules suivantes

$$div\ 18 \subset div\ 36 \subset div\ 108 \subset \omega$$
$$\omega \supset 2\,\omega \supset 6\,\omega \supset 60\,\omega \supset \{0\}$$
$$\{a, b, c\} = \{a, a, c, b\} \supset \{b, c\} \supset \{b\} = \{b, b\}$$

2. Si V désigne l'ensemble des oiseaux et P l'ensemble des poules, on a $P \subset V$

3. Écris les formules d'inclusion relatives aux ensembles que voici

L'ensemble P des habitants de Paris.
L'ensemble E des habitants de l'Europe.
L'ensemble F des habitants de la France.
L'ensemble T des habitants de la Terre.
L'ensemble V des êtres vivants.

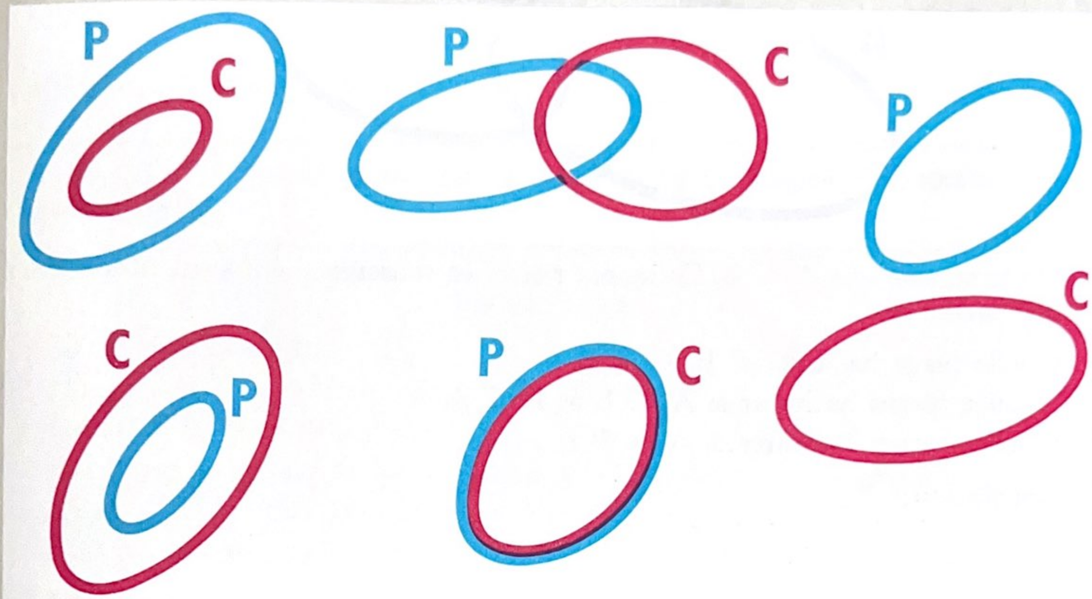
Je te désigne par t. Quels sont les ensembles ci-dessus auxquels t appartient?

4. Écris les formules d'inclusion relatives aux ensembles que voici

L'ensemble Q des quadrilatères (du plan du tableau).
L'ensemble T des trapèzes (du plan du tableau).
L'ensemble C des carrés (du plan du tableau).
L'ensemble P des parallélogrammes (du plan du tableau).
L'ensemble R des rectangles (du plan du tableau).
L'ensemble L des losanges (du plan du tableau).

Fais un schéma.

5. Soient C l'ensemble des élèves de notre classe et P l'ensemble des élèves de notre classe qui pèsent plus de 100 kg. Quels sont parmi les diagrammes ci-dessous ceux qui peuvent servir à représenter C et P ? Dans chacun des cas, hachure les plages vides.



6. Même exercice que le précédent mais en désignant par P l'ensemble des élèves de notre classe qui pèsent plus de 10 kg.

7. Même problème lorsque P désigne l'ensemble des élèves dont le poids est compris entre 25 et 35 kg.

2 — PROPRIÉTÉS DE L'INCLUSION

Si chacune des lettres A, B, C désigne un ensemble, on a les formules

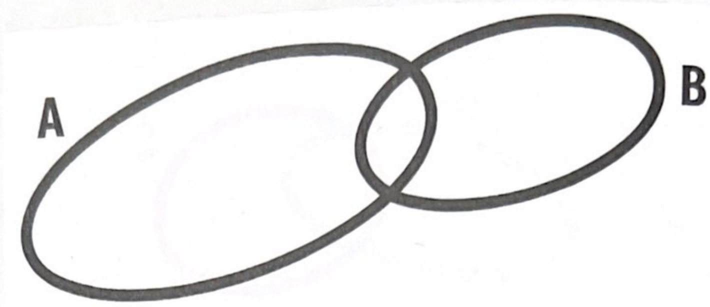
		$A \subset A$	(**réflexivité** de l'inclusion)
Si $A \subset B$ et $B \subset C$,	**Alors**	$A \subset C$	(**transitivité** de l'inclusion)
Si $A \subset B$ et $B \subset A$,	**Alors**	$A = B$	(**antisymétrie** de l'inclusion)

EXERCICES

1. Toute partie de l'ensemble des élèves de notre classe est une partie de l'ensemble des élèves de l'école.

   Montre en maniant des formules que cette proposition résulte de la transitivité de l'inclusion.

2. Si A et B désignent chacun un ensemble, nous savons que ceux-ci peuvent être représentés par le schéma



On te signale que $A \subset B$. Comment porter ce renseignement sur le dessin (par des hachures)?

Quelle plage hachurer si $B \subset A$?
Quelles plages hachurer si $A \subset B$ et $B \subset A$?
Quelles plages hachurer si $A = B$?

Conclusion?

3 — ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Soient a, b, c, d des objets distincts:

$$a \neq b, \quad a \neq c, \quad a \neq d, \quad b \neq c, \quad b \neq d, \quad c \neq d$$

Considérons l'ensemble E formé de ces objets.

Donc $$E = \{a, b, c, d\}$$

On peut énumérer toutes les parties de E en procédant comme suit:

On sait que ϕ est une partie de E $\{\ \}$
a entre en jeu $\{a\}$
b entre en jeu $\{b\}, \{a, b\}$
c entre en jeu $\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$
d ... $\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$

Nous savons que chacune des parties de E est un objet et nous pouvons considérer l'ensemble formé de ces objets.

On désigne par $\mathcal{P}$**E** *l'ensemble des parties de E.*

$$\mathcal{P}E = \{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, E\}$$

Pour tout ensemble X, nous désignerons par $\mathcal{P}X$ l'ensemble des parties de X. Donc

$$\mathcal{P}X = \{P \mid P \subset X\}$$

ce qui se lit, rappelons-le,

$\mathcal{P}X$ est l'ensemble des P tels que $P \subset X$

... c'est-à-dire l'ensemble des parties de X.

Toute partie d'un ensemble est un objet et $\mathcal{P}E$ désigne l'ensemble des parties de E.

EXERCICES

1. Soit E un ensemble.

Que signifie $A \subset E$?
Que signifie $A \in \mathcal{P}E$?

Pour tout ensemble A, les formules $A \subset E$ et $A \in \mathcal{P}E$ signifient la même chose. C'est ce que nous exprimerons en abrégé :

Pour tout ensemble A : $A \subset E \iff A \in \mathcal{P}E$

Le signe $\iff$ se lit ,,*si et seulement si*'' et s'écrit encore *ssi*.

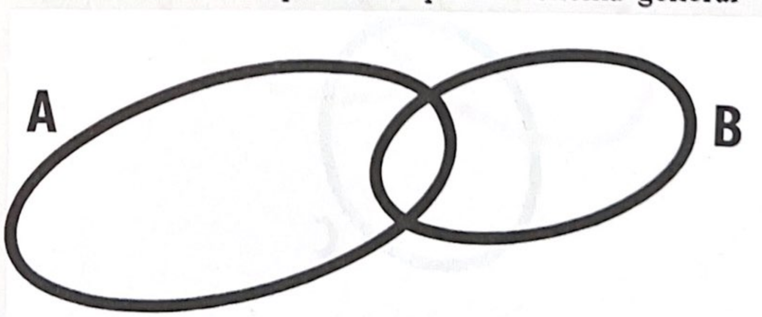
2. Définis en extension (c'est-à-dire en énumérant les éléments) les ensembles $\mathcal{P}\{a, b\}$, $\mathcal{P}\{a, b, c\}$, $\mathcal{P}\{a\}$, $\mathcal{P}\,\phi$

3. Si A et B sont des ensembles,

ou bien A est une partie de B ce qui se note $A \subset B$
ou bien A n'est pas une partie de B ce qui se note $A \not\subset B$

La formule $A \not\subset B$ n'entraîne pas nécessairement $B \subset A$
Si $b \neq c$ Alors $\{a, b\} \not\subset \{a, c\} \not\subset \{a, b\}$

4. Les ensembles A et B sont représentés par le schéma général



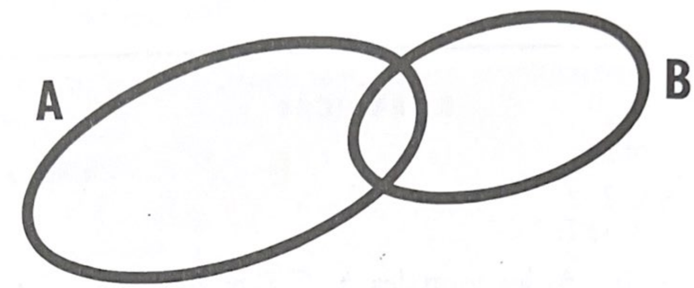
On nous révèle que $A \not\subset B \not\subset A$.
Porte ce renseignement sur le schéma en y dessinant exactement deux points.

5. Soient E un ensemble et a, b, c, d des objets.

On a alors les *équivalences*

$$(a \in E \text{ et } b \in E) \iff \{a, b\} \subset E$$
$$(a \in E \text{ et } b \in E \text{ et } c \in E \text{ et } d \in E) \iff \{a, b, c, d\} \subset E$$
$$a \in E \iff \{a\} \subset E$$

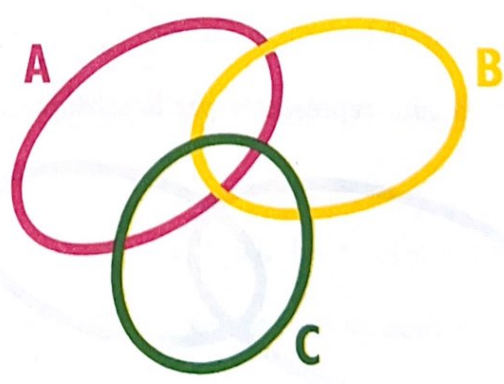
6. Reproduis à 6 exemplaires le schéma général



Par des hachures ou en marquant certains points, portes-y les renseignements que voici

1er schéma : $A \subset B$
2nd schéma : $A \subset B$ et $A \neq B$
3ème schéma : $A \not\subset B$
4ème schéma : $A \subset B$ et $B \not\subset A$
5ème schéma : $A = B$
6éme schéma : $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

7. Les ensembles A, B, C sont représentés par le schéma



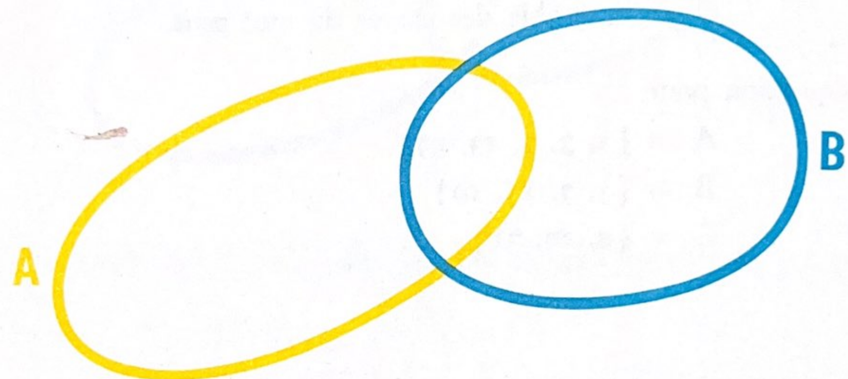
Quelles plages peux-tu hachurer sachant que A est l'ensemble des vaches, B l'ensemble des ruminants et C l'ensemble des mammifères? Propose un schéma plus frappant.

3

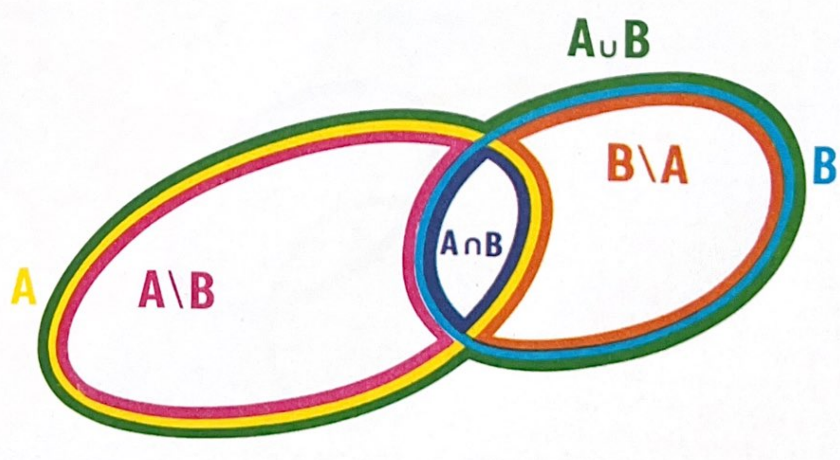
Intersection - Réunion - Différence

∩ ∪ \

Voici des ensembles A et B. Nous savons qu'ils peuvent être représentés par le schéma



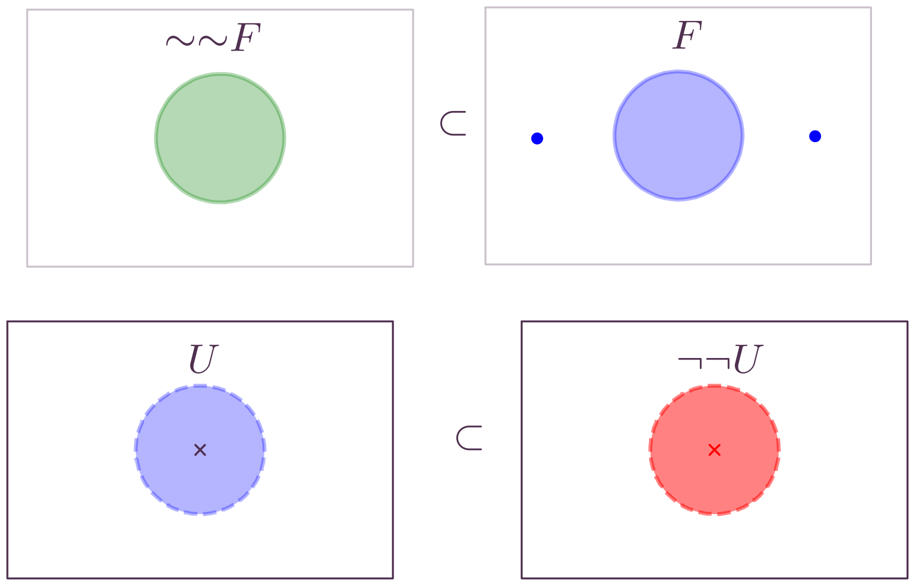
Ce schéma met en évidence de nouveaux ensembles.



Sur la logique idéographique:

Soient U un ouvert et F un fermé d'un espace topologique X. On note $\mathrm{cl}(U)$ l'adhérence de U et $i(F)$ l'intérieur de F. On définit alors

- $\neg U := X - \mathrm{cl}(U)$ de sorte que $\neg\neg U = i(\mathrm{cl}(U))$ et donc $U \subseteq \neg\neg U$
- $\sim F := X - i(F)$ de sorte que $\sim\sim F = \mathrm{cl}(i(F))$ et donc $\sim\sim F \subseteq F$



Quelques propriétés:

- On formalise notre treillis: $X = 1$, $\emptyset = 0$, $\wedge = \cap$ et $\vee = \cup$.
- $U \cup \neg U = X - \partial U$:

  Définit le bord d'un ouvert de manière extrinsèque.

Donc $\neg$ ne satisfait pas en général le principe du tiers exclu.

- $U \cap \neg U = \emptyset$:

  donc $\neg$ satisfait le principe de non contradiction

  il traduit le fait qu'un point dans la corde ne peut pas être à la fois inclus et exclus de X

- $F \cup \sim F = X$:

  donc $\sim$ satisfait le principe du tiers exclu

  il traduit le fait qu'un point est soit à l'intérieur de la corde, soit à l'extérieur

- $F \cap \sim F = \partial F$:

  définit le bord d'un fermé de manière intrinsèque

  donc $\sim$ ne satisfait pas en général le principe de non contradiction.

- - Si A ouvert et fermé:

    1. $\partial A = \emptyset$
    2. $\neg\neg A = A = \sim\sim A$

- Dans $\mathcal{P}X$ on a $\neg = \sim$

Papy assure la compossibilité de la négation $\sim$ manifeste dans ses idéogrammes avec celle de l'algèbre de Boole des ensembles précisément en écartant les cordes définissant l'idéogramme de toute représentabilité.

Pour F, G fermés de X l'opérateur de bord satisfait les lois de Leibniz

1. $\partial(F \cap G) = (\partial F \cap G) \cup (F \cap \partial G)$
2. $\partial(F \cap G) \cup \partial(F \cup G) = \partial F \cup \partial G$
3. $\partial(F) \cap G = \emptyset = F \cap \partial G \Longrightarrow \partial(F \cup G) = \partial F \cup \partial G$

DÉFINITIONS

*L'**intersection** $A \cap B$ est l'ensemble des objets qui sont **à la fois** éléments de A et de B.*

*La **réunion** $A \cup B$ est l'ensemble des objets qui sont éléments de l'**un au moins** des ensembles A, B.*

*La **différence** $A \setminus B$ est l'ensemble des objets qui sont éléments de A et non de B.*

Le terme $A \cap B$ se lit „A inter B".
Le terme $A \cup B$ se lit „A u B".
Le terme $A \setminus B$ se lit „A moins B".

On a donc

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et non } x \in B\}$$

L'emploi de la conjonction **et**, dans la première formule, est absolument conforme à l'usage courant.

L'emploi de **ou**, dans la seconde formule, est plus précis que dans l'usage courant.

La formule „$x \in A$ **ou** $x \in B$" signifie, **ici**, que *l'une au moins* des formules $x \in A$, $x \in B$ *est vraie* (il se peut donc que les deux formules soient vraies!)

On a encore la formule

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

EXEMPLE — Si A est l'ensemble des tulipes de ce magasin et B l'ensemble des fleurs jaunes de ce magasin,

$A \cap B$ est l'ensemble des tulipes jaunes (de ce magasin)
$A \cup B$ est l'ensemble des fleurs du magasin qui satisfont à l'**une au moins** des 2 conditions: être une tulipe **ou** être jaune.
$A \setminus B$ est l'ensemble des tulipes (du magasin) qui ne sont pas jaunes.
$B \setminus A$ est l'ensemble des fleurs jaunes (du magasin) qui ne sont pas des tulipes.

S'il n'y a pas de tulipes jaunes en magasin,

$$A \cap B = \phi$$

On dit alors que les ensembles A et B sont **disjoints.**

Il se pourrait que toutes les tulipes du magasin soient jaunes. Cette situation se traduit immédiatement de deux manières différentes mais équivalentes.

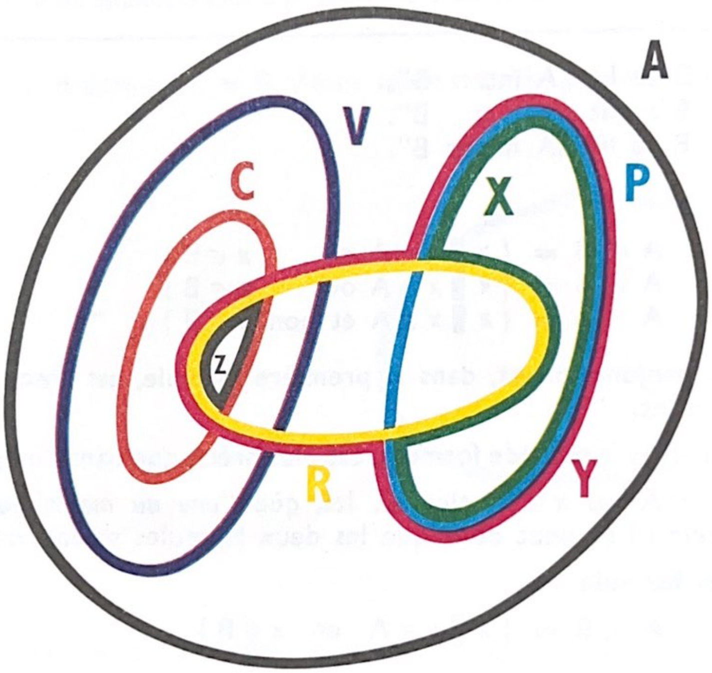
$$A \subset B \iff A \setminus B = \phi$$

Nous verrons plus loin d'autres formules décrivant cette situation.

Comment exprimerais-tu que toutes les fleurs jaunes du magasin sont des tulipes?

EXERCICES

1. On demande de présenter sur un schéma l'ensemble A des automobiles immatriculées dans notre pays, l'ensemble V des Volkswagen immatriculées dans notre pays, l'ensemble P des Peugeot immatriculées dans notre pays, l'ensemble R des automobiles rouges immatriculées dans notre pays et l'ensemble C des camionnettes Volkswagen immatriculées dans notre pays.



On demande de montrer une 4 CV rouge immatriculée dans notre pays, une camionnette Volkswagen noire immatriculée dans notre pays, une camionnette Citroën bleue immatriculée dans notre pays, une Peugeot beige immatriculée dans notre pays, une camionnette Volkswagen rouge immatriculée dans notre pays, la voiture personnelle de John Glenn, une fleur, le volant d'une Volkswagen bleue immatriculée dans notre pays.

Par quel terme désigneras-tu l'ensemble des camionnettes Volkswagen immatriculées dans notre pays et qui ne sont pas de couleur rouge? Dessine un diagramme de cet ensemble sur la figure.

Même question pour l'ensemble des Peugeot rouges immatriculées dans notre pays ainsi que pour l'ensemble de toutes les automobiles immatriculées dans notre pays qui ont l'une au moins des deux qualités suivantes : être une Volkswagen ou être de couleur rouge.

On demande de caractériser chacun des ensembles X, Y, Z (qui sont représentés sur le schéma précédent) et d'en donner la définition par une formule :

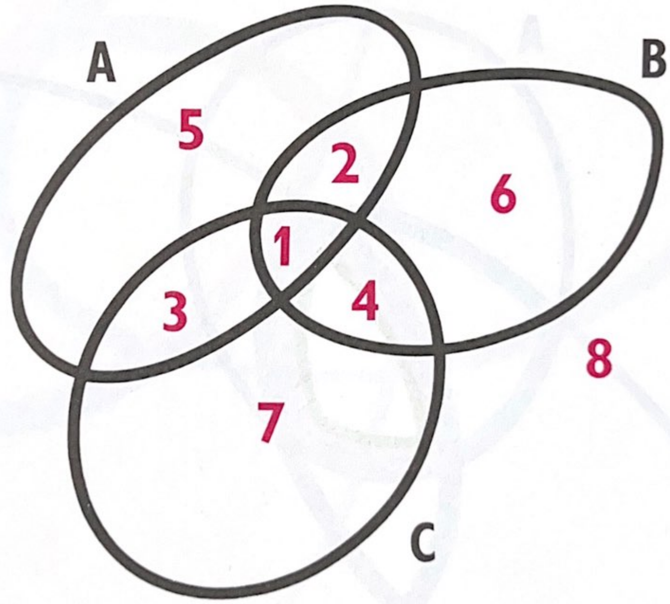
$X = P \setminus R$; $Y =$; $Z =$

4

Algèbre des Ensembles

1 — LE DIAGRAMME „FEUILLE DE TREFLE"

Pense 3 ensembles A, B, C. Sans que tu ne m'aies rien dit au sujet de ces ensembles, je sais que je pourrai les représenter par le diagramme en feuille de trèfle que voici



En effet, je sais que pour tout objet x, il y a 8 réponses possibles à la triple question „x appartient-il à A, x appartient-il à B, x appartient-il à C ?" :

1 oui, oui, oui
2 oui, oui, non
3 oui, non, oui
4 non, oui, oui
5 oui, non, non
6 non, oui, non
7 non, non, oui
8 non, non, non

Or notre schéma nous permet de placer x, quelle que soit la réponse donnée. Ce diagramme convient donc dans tous les cas.

Si tu me donnes des informations supplémentaires au sujet de tes ensembles, nous pourrons peut-être hachurer certaines plages, tout en continuant à utiliser le schéma.

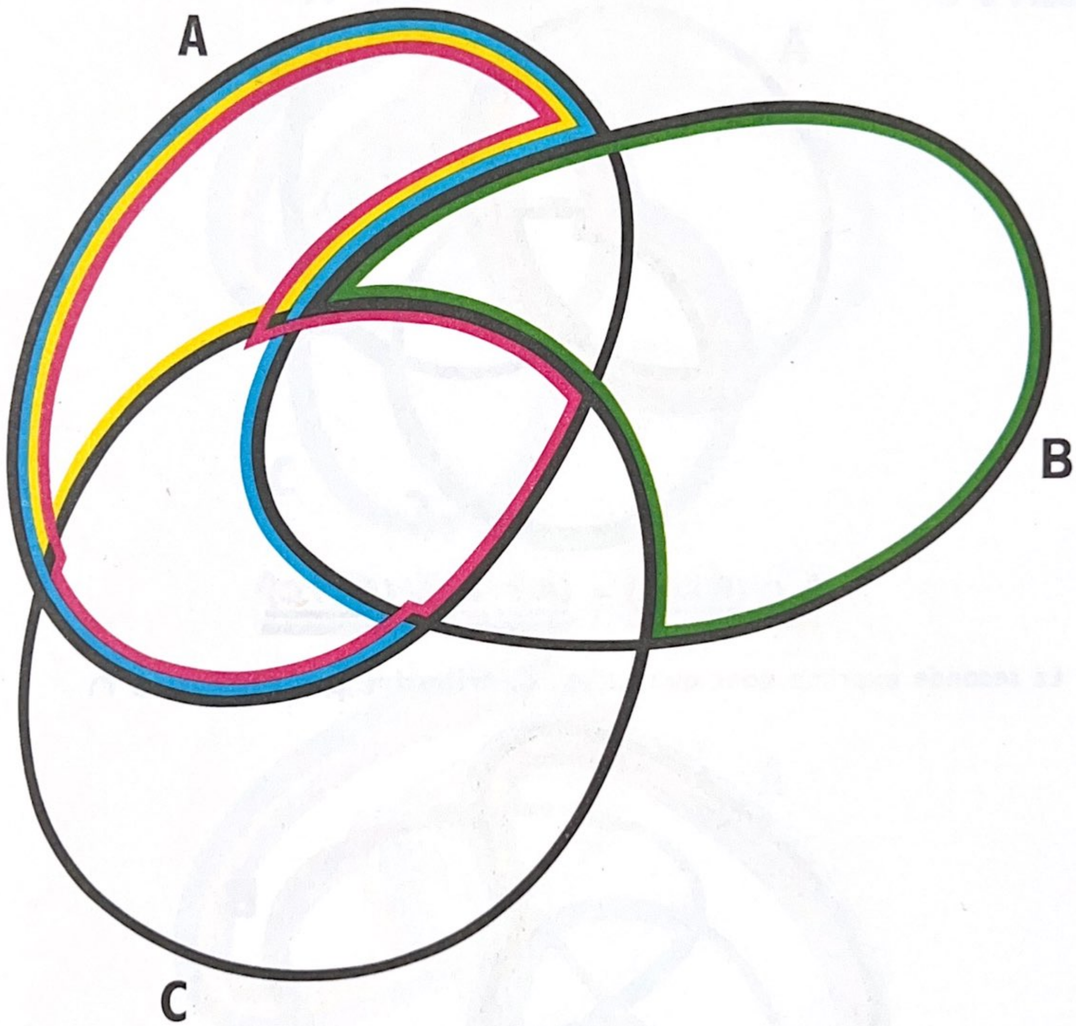
Si tu ne me dis rien au sujet de A, B, C, je pourrai m'aider du schéma sans me préoccuper de l'existence éventuelle de plages vides.

3 — NON ASSOCIATIVITÉ DE LA DIFFÉRENCE

Nous venons de voir que les **lois** $\cap$ et $\cup$ sont associatives.

Proposons-nous de comparer

$$(A \setminus B) \setminus C \text{ et } A \setminus (B \setminus C)$$



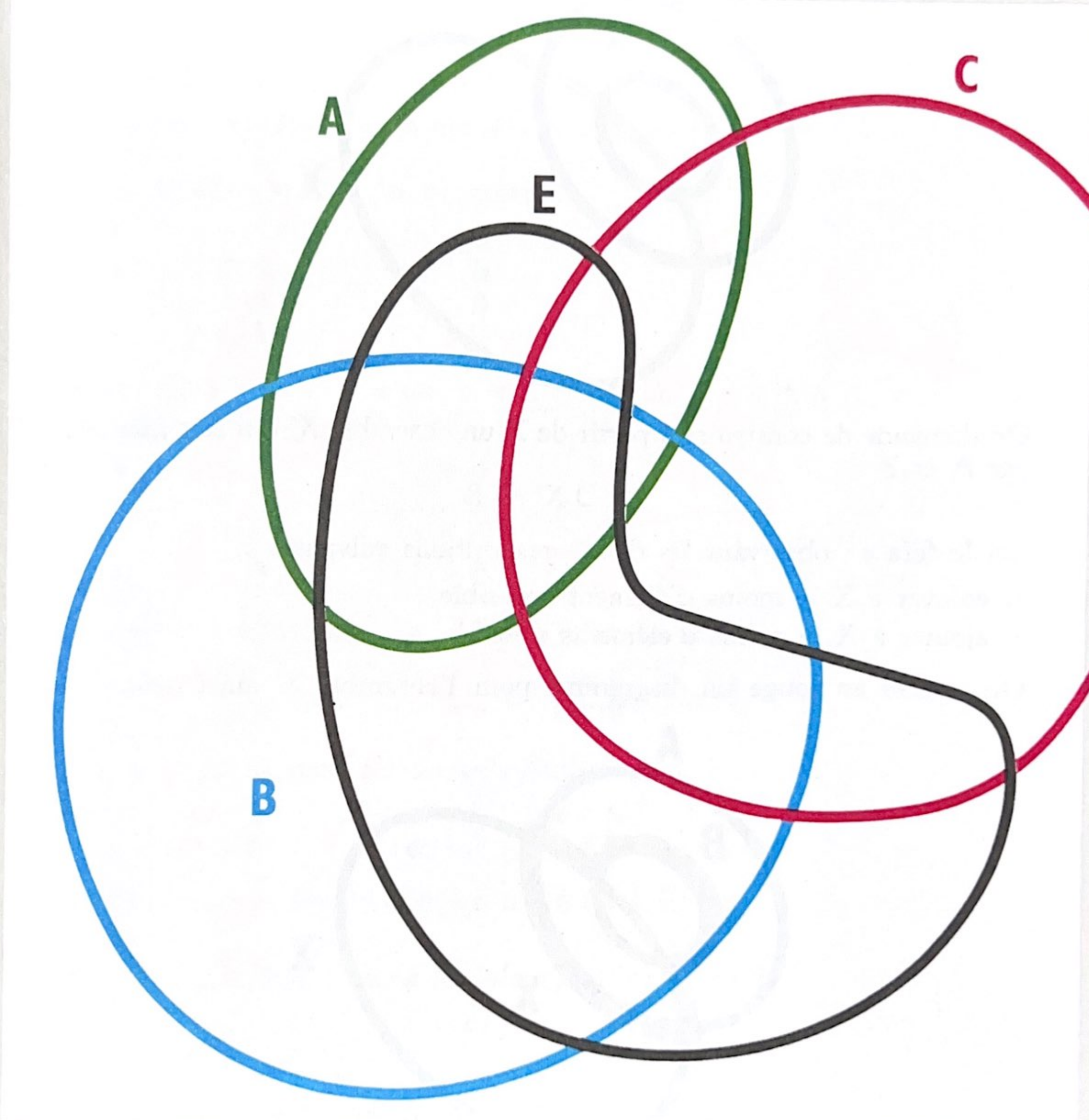
$(A \setminus B) \setminus C$ $\qquad$ $A \setminus (B \setminus C)$

Nous voyons que la loi $\setminus$ n'est **pas associative.**

Veux-tu établir la formule

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

12. Si tu penses 4 ensembles, A, B, C, E, je pourrai, sans que tu me dises rien, les représenter par le diagramme ci-dessous



13. Reproduis à 3 exemplaires le diagramme précédent

a) Sur le premier exemplaire, porte l'information

$$E = A \cup B \cup C$$

b) Sur le deuxième, porte l'information : ,,les ensembles A, B, C sont disjoints 2 à 2'' qui traduit la formule

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \phi$$

c) Sur le troisième, porte l'information :

$$A \neq \phi \text{ , } B \neq \phi \text{ , } C \neq \phi$$

15. Différence symétrique.

On appelle* différence symétrique *des ensembles A, B l'ensemble, noté A Δ B, des objets qui appartiennent à un et à un seul des ensembles A, B.

On a clairement $A \Delta B = B \Delta A$

La différence symétrique est commutative

Pour tout objet x on a les éventualités

1.	$x \in A$	$x \in B$
2.	$x \in A$	$x \notin B$
3.	$x \notin A$	$x \in B$
4.	$x \notin A$	$x \notin B$

Indique dans chacun des cas si $x \in A \Delta B$ ou si $x \notin A \Delta B$.
As-tu bien obtenu ce résultat?

1.	$x \in A$	$x \in B$	:	$x \notin A \Delta B$
2.	$x \in A$	$x \notin B$	:	$x \in A \Delta B$
3.	$x \notin A$	$x \in B$	:	$x \in A \Delta B$
4.	$x \notin A$	$x \notin B$	:	$x \notin A \Delta B$

On a donc $x \in A \Delta B$ dans les seules éventualités

2.	$x \in A$	et	$x \notin B$
3.	$x \notin A$	et	$x \in B$

On a $x \notin A \Delta B$, dans les seules éventualités

1.	$x \in A$	et	$x \in B$
4.	$x \notin A$	et	$x \notin B$

Vois dans quelles éventualités on a $x \in (A \Delta B) \Delta C$.

On a $x \in (A \Delta B) \Delta C$ dans les éventualités que voici

I.	$x \in A \Delta B$	et	$x \notin C$
II.	$x \notin A \Delta B$	et	$x \in C$

Nous avons vu, plus haut, dans quelles éventualités on a les formules

$$x \in A \Delta B \quad \text{et} \quad x \notin A \Delta B$$

Ainsi, $x \in (A \Delta B) \Delta C$ dans les seules éventualités que voici

I.		$x \in A \Delta B$	et	$x \notin C$
	a)	$x \in A$ et $x \notin B$	et	$x \notin C$
	b)	$x \notin A$ et $x \in B$	et	$x \notin C$
II.		$x \notin A \Delta B$	et	$x \in C$
	c)	$x \in A$ et $x \in B$	et	$x \in C$
	d)	$x \notin A$ et $x \notin B$	et	$x \in C$

Finalement $x \in (A \Delta B) \Delta C$ dans les seules éventualités

a) $x \in A$ et $x \notin B$ et $x \notin C$
b) $x \notin A$ et $x \in B$ et $x \notin C$
d) $x \notin A$ et $x \notin B$ et $x \in C$
c) $x \in A$ et $x \in B$ et $x \in C$

On peut donc dire que $(A \Delta B) \Delta C$ est l'ensemble des objets x pour lesquels une ou trois des formules $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ sont vraies.

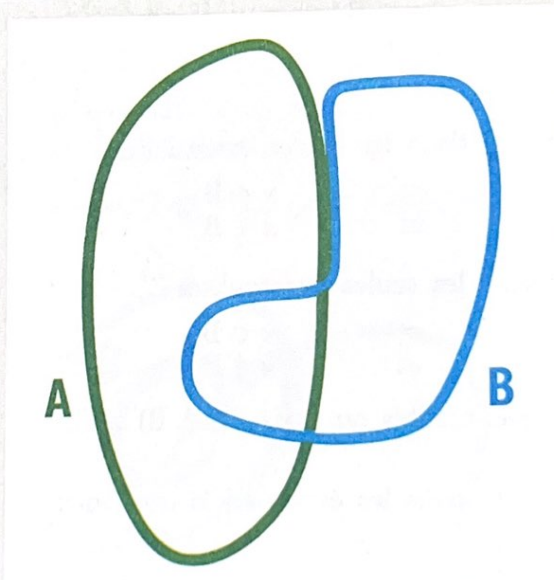
Donne une caractérisation analogue de $C \Delta (A \Delta B)$.

Or $$C \Delta (A \Delta B) = (A \Delta B) \Delta C$$

On en déduit $$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

La différence symétrique Δ est a s s o c i a t i v e .

16. Trace un diagramme de la différence symétrique des ensembles A et B représentés ci-dessous



17. Si A est un ensemble quelconque, on a les formules

$$A \Delta A = \phi \quad \text{et} \quad A \Delta \phi = A$$

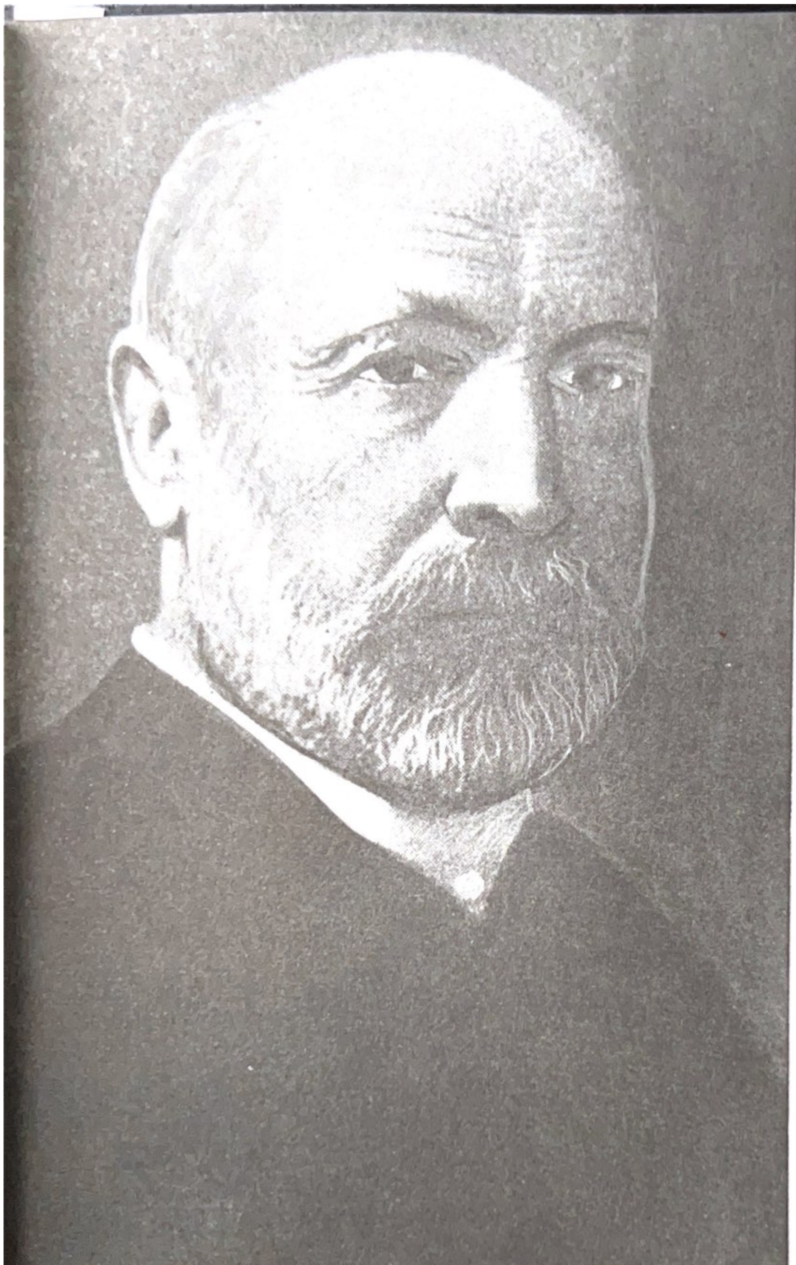
18. Si chacune des lettres A, B, C désigne un ensemble, on a

$$A \Delta B = C \iff A \Delta C = B \iff B \Delta C = A$$

19. Si chacune des lettres A, B désigne un ensemble, il existe un et un seul ensemble X tel que

$$A \Delta X = B$$

(*Réponse* : $X = A \Delta B$)



CANTOR Georg (1845-1918)

Au cours de l'histoire de l'humanité, l'homme s'est peu à peu libéré des conditions physiques qui semblaient restreindre son univers.

Tes arrière-grand-parents ont encore connu l'ère des grands explorateurs.

Tes grand-parents ont connu les progrès de l'automobile et les débuts de l'aviation.

Tes parents ont connu les progrès de la radio et les débuts de la télévision.

Toi-même, tu as suivi les exploits des premiers cosmonautes.

Ce sont les progrès de la science et de la technique qui ont permis à l'homme d'élargir son univers et d'allonger la durée de sa vie.

Aujourd'hui toutes les sciences et les techniques utilisent constamment la mathématique et sont liées aux progrès de celle-ci.

Si tu veux participer efficacement à la vie dans le monde de demain, tu dois t'initier à la science et aux techniques et donc à la mathématique d'aujourd'hui.

Tu devras parvenir le plus rapidement possible aux notions fondamentales de la mathématique moderne qui est utilisée dans toutes les sciences.

C'est pourquoi, nous ne pouvons plus t'apprendre la mathématique comme elle fut enseignée à tes parents ou à tes arrière-grand-parents.

Nous retrouverons cependant, sous un autre éclairage, tous les résultats fondamentaux qui leur ont été exposés.

Cela a été rendu possible, en particulier, grâce au génie de Georg Cantor qui a été l'un des premiers à souligner l'importance de la notion d'**ensemble** en mathématique.

Il est d'usage de regarder la naissance de la théorie des ensembles comme le début de la mathématique moderne.

Georg Cantor était le fils d'un marchand danois. Il est né en Russie en 1845 et a passé presque toute sa vie dans les universités allemandes de Göttingen, Berlin et Halle.

Ses premières études sur la théorie des ensembles datent de 1879.

Il est mort en 1918.

5

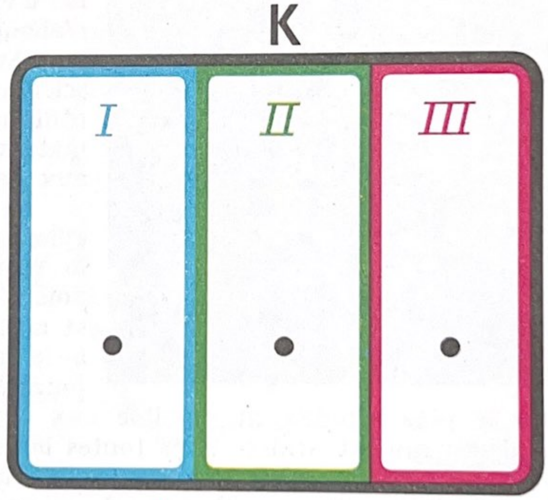
Partitions

Les élèves de notre classe se répartissent en trois rangées.

Désignons par I l'ensemble des élèves de la première rangée; par II l'ensemble des élèves de la seconde rangée; par III l'ensemble des élèves de la troisième rangée et par K l'ensemble des élèves de notre classe.

Aucun des ensembles I, II, III n'est vide et toute élève de la classe appartient à un et à un seul des ensembles I, II, III: c'est ce que nous exprimons en disant que **l'ensemble d'ensembles** $\{I, II, III\}$ est une **partition** de K.

On a donc le schéma



Décrivons la situation précédente par des formules.

Aucun des ensembles I, II, III n'est vide:

$$I \neq \phi \quad , \quad II \neq \phi \quad , \quad III \neq \phi \tag{1}$$

Aucune élève n'appartient à deux des ensembles I, II, III. C'est ce que l'on exprime encore en disant que ces ensembles sont disjoints deux à deux:

$$I \cap II = I \cap III = II \cap III = \phi \tag{2}$$

Toute élève de la classe appartient à l'un des ensembles I, II, III.

$$I \cup II \cup III = K \tag{3}$$

Récapitulons :

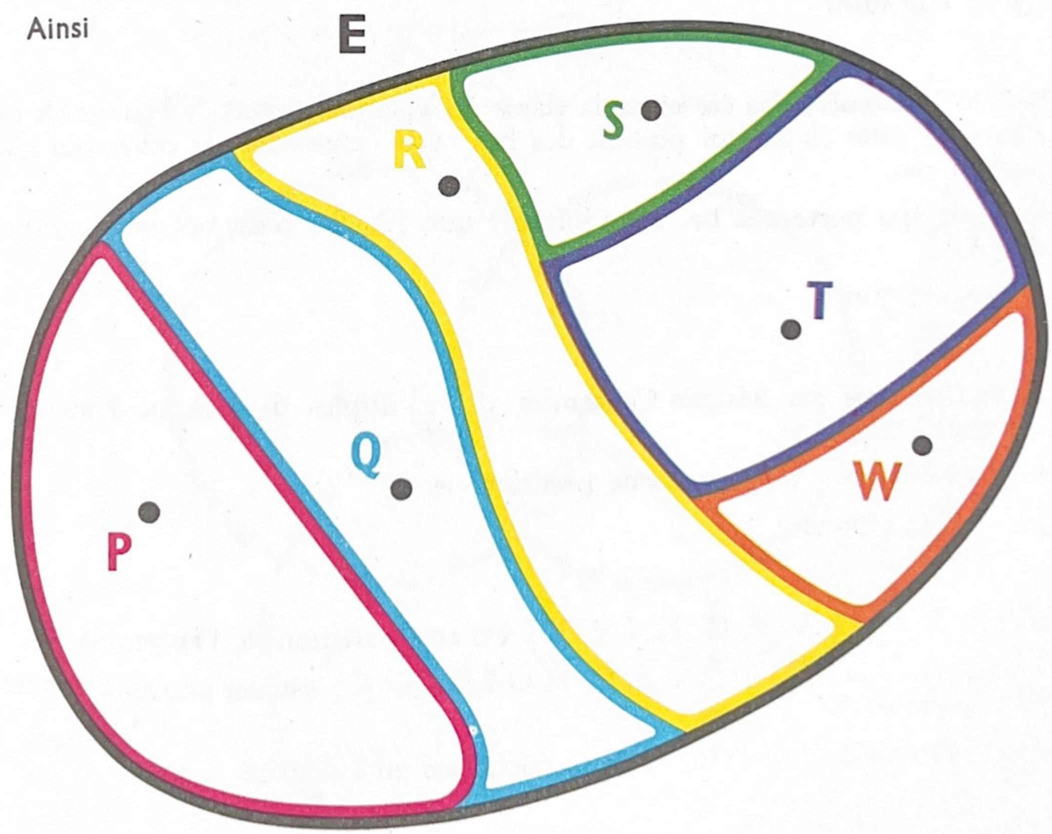
$$\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\} \text{ est une } \textbf{partition} \text{ de } K \iff \begin{cases} \mathrm{I} \neq \phi,\ \mathrm{II} \neq \phi,\ \mathrm{III} \neq \phi & (1) \\ \mathrm{I} \cap \mathrm{II} = \mathrm{I} \cap \mathrm{III} = \mathrm{II} \cap \mathrm{III} = \phi & (2) \\ K = \mathrm{I} \cup \mathrm{II} \cup \mathrm{III} & (3) \end{cases}$$

DÉFINITION — ***Un ensemble $\mathcal{P}$ de parties non vides de E est une partition de l'ensemble E ssi tout élément de E appartient à un et un seul ensemble de $\mathcal{P}$.***

Les ensembles éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés les *classes* de la partition. On peut énoncer une définition équivalente.

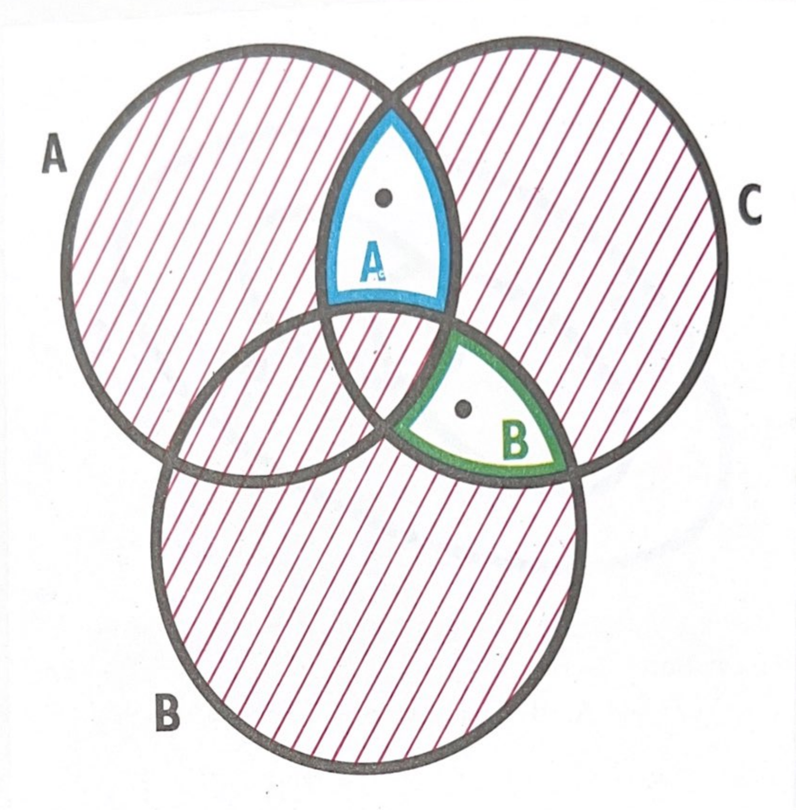
DÉFINITION — ***On appelle partition de E tout ensemble $\mathcal{P}$ de parties non vides de E, disjointes deux à deux et dont la réunion égale E.***

Ainsi



$\{P, Q, R, S, T, W\}$ EST UNE PARTITION DE **E**.

Solution :



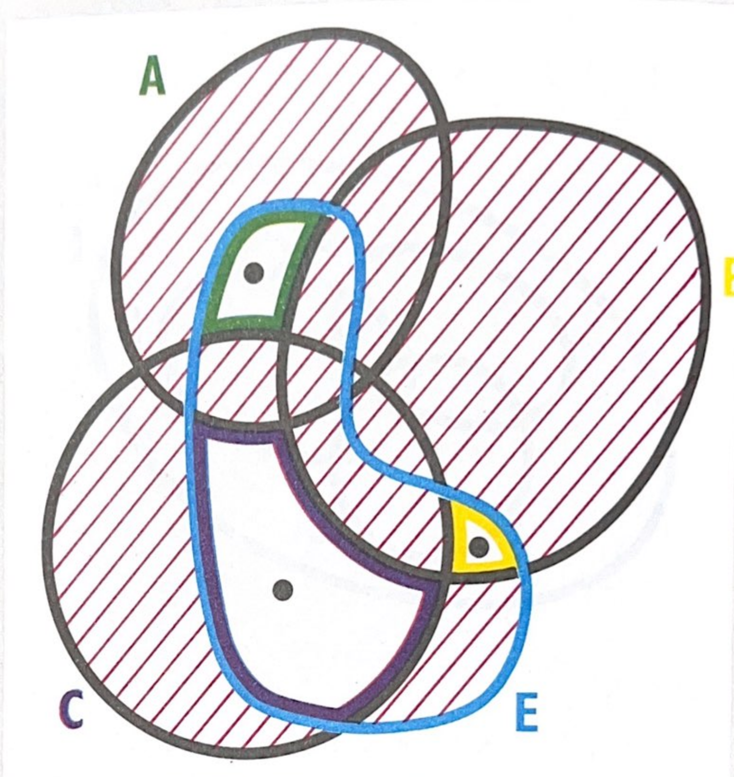
{**A, B**} EST UNE PARTITION DE **C**.

10. Que conclure au sujet de A, B si l'on fournit l'information suivar
$\{A \cap B, A \setminus B, B \setminus A\}$ est une partition de $A \cup B$.
Même question pour les informations :
$\{A \cap B, B \setminus A\}$ est une partition de $A \cup B$;
$\{A \setminus B, B \setminus A\}$ est une partition de $A \cup B$;
$\{A \cap B\}$ est une partition de $A \cup B$;
$\{A \setminus B\}$ est une partition de $A \cup B$.

11. Désignons par P_n l'ensemble des nombres naturels de n chiffres (en numération décimale).
Donc
$$P_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$
$$P_2 = \{10, 11, 12, \ldots, 99\}$$
$$P_3 = \{100, 101, 102, \ldots, 999\}$$
$$P_4 = \{1000, 1001, 1002, \ldots, 9999\} \quad \text{etc...}$$

Montre que $\{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ est une partition de ω.

Solution:



14. **Si** $\{A, B, C, D\}$ est une partition de X,
$\{A_1, A_2\}$ une partition de A,
$\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ une partition de C,
et $\{D_1, D_2, D_3\}$ une partition de D.

Alors $\{A_1, A_2, B, C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3\}$ est une partition de X.
Trace un schéma mettant ces 5 partitions en évidence.

15. **Si** $\{A, B, C, D, E\}$ est une partition de X
et si chacune des intersections $A \cap Y$, $B \cap Y$, $C \cap Y$, $D \cap Y$, $E \cap Y$ est non vide,

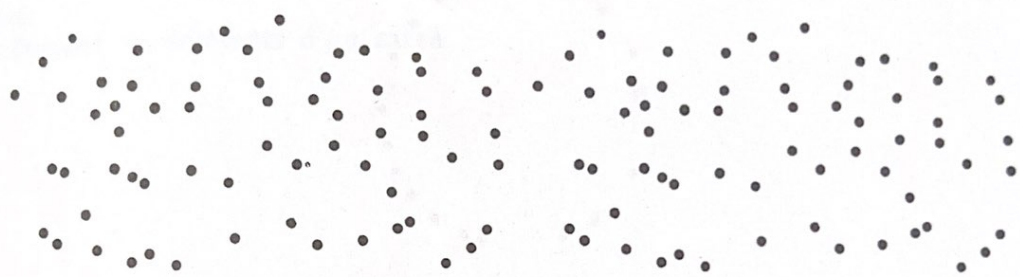
Alors $\{A \cap Y, B \cap Y, C \cap Y, D \cap Y, E \cap Y\}$ est une partition de $X \cap Y$.
Trace un schéma mettant cette proposition en évidence.

6

Premiers éléments de Géométrie

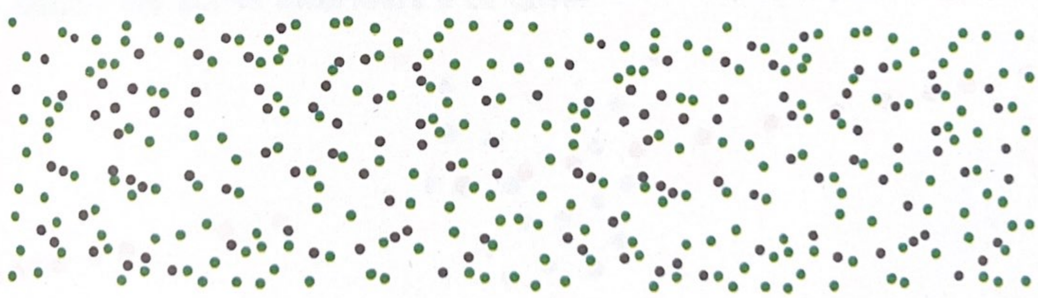
1 — ENSEMBLES DE POINTS

— Dessine des points sur le tableau



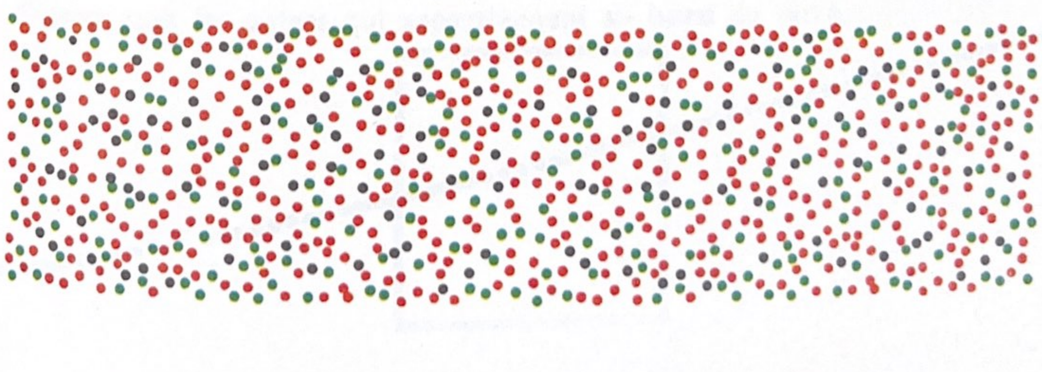
— Peux-tu en dessiner davantage?

— Je marque de nouveaux points en vert.

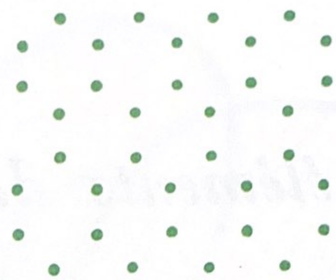


— Peux-tu encore en dessiner davantage?

— Je le ferai en orange.

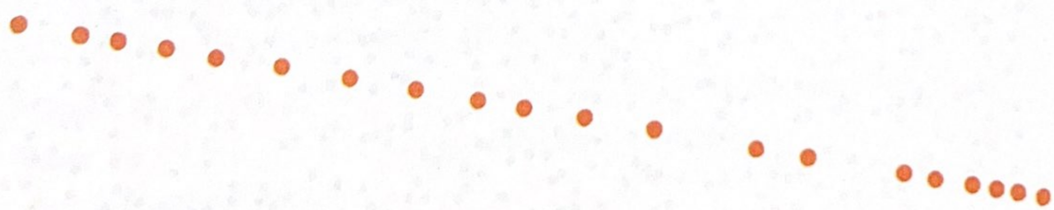


— Dessine un joli ensemble de points au tableau.

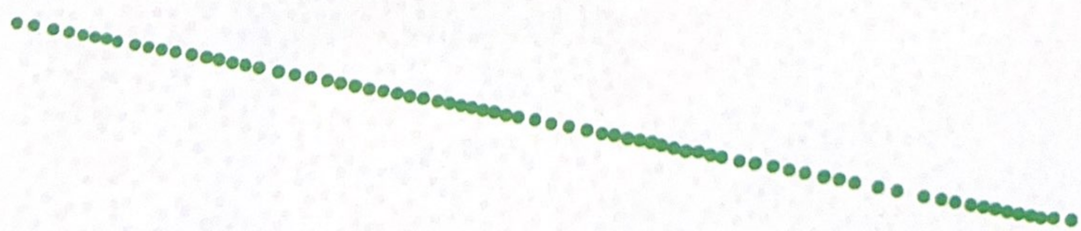


— Dessine un ensemble de points qui sont en cercle.

— As-tu dessiné tous les points du cercle?
— ...
— Dessine des points qui sont **alignés** (ou en ligne droite).

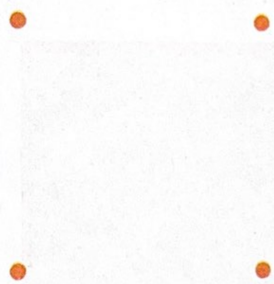


— Dessine un ensemble de points alignés plus serrés.

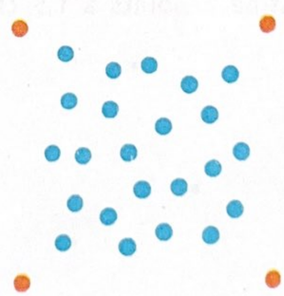


— Pourrais-tu dessiner de nouveaux points de cette *droite*?
— ...
— Dessine *tous* les points d'une *droite*.

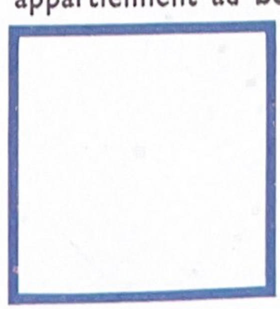
— As-tu bien dessiné tous les points de la droite?
— La droite est illimitée dans les deux sens, nous ne pouvons en dessiner qu'une partie.
— Dessine les sommets d'un carré.



— Dessine des points **intérieurs** à ce carré.



— Peux-tu dessiner de nouveaux points **intérieurs** à ce carré?
— ...
— Dessine tous les points qui appartiennent au **bord** du carré.



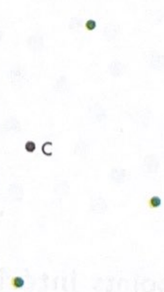
— Dessine l'ensemble des points du **bord** du carré ou **intérieurs** au carré.

— Je voudrais que tu dessines cette fois l'ensemble des points **intérieurs** au carré. (Les points du bord n'appartiennent donc *pas* à cet ensemble).

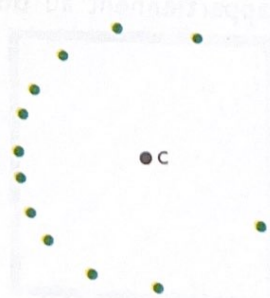
— Comment indiquer que les points du bord n'appartiennent pas à l'ensemble?

— Nous ferons une **convention**. Pour indiquer que les points du bord n'appartiennent pas à l'ensemble, nous dessinerons en vert les points intérieurs du carré et en rouge les points du bord.

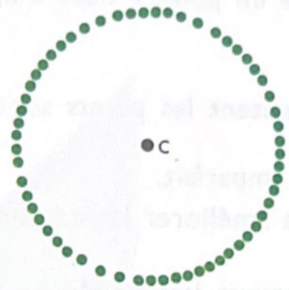
— Dessine un point c et dessine 3 points à 1,5 cm de c



— Dessine 12 points à 1,5 cm de c



— Dessine beaucoup de points situés à 1,5 cm de *c*.

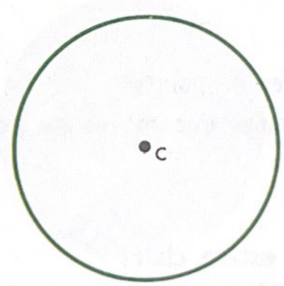


— Existe-t-il encore d'autres points situés à 1,5 cm de *c* ?

— ...

— Dessine l'ensemble de tous les points situés à 1,5 cm de *c*.

— C'est **le cercle de centre *c* et de rayon 1,5 cm.**



— Trace un cercle *c* de centre *o* et de rayon 3 cm.
Veux-tu dessiner trois points situés à 2 cm de *o*.
Dessine un point à 2,5 cm de *o*.
Un autre point à 2,9 cm de *o*.
Est-ce facile à dessiner?

— Ces points se trouvent de plus en plus près du cercle *c*.
La grosseur des taches d'encre ou de couleur par lesquelles nous *représentons* les points rend le dessin malaisé.

On aurait pu représenter les points par de plus fines taches.

— Cela est vrai.
Dessine avec plus de précision, avec des traits fins et de fines taches pour les points un cercle de centre *a* et de 7 cm de rayon.

Dessine un point b situé à 6 cm de a.

Dessine entre b et le cercle un point d situé à 6,9 cm de a.

Dessine entre d et le cercle un point f situé à 6,99 cm de a.

Cela est-il commode?

— Non, les taches qui représentent les points sont à nouveau trop grosses.

— Tout dessin est un schéma imparfait.

Tout au plus, pouvons-nous améliorer la précision du dessin par des traits plus fins et des taches plus fines.

Il nous sera toujours finalement impossible de représenter correctement tous les points.

Entre le centre et le cercle, il existe des points distincts situés à 6 cm, à 6,9 cm à 6,99 cm, à 6,999 cm, à 6,999 999 cm du centre.

Quelle que soit la précision du dessin, certaines taches représentatives de points distincts se toucheront. *Les points, eux, ne se touchent pas.*

Entre deux points distincts, il existe toujours une infinité d'autres points.

Il existe des points aussi près que tu veux du cercle.

Il n'existe pas de dernier point avant le cercle.

N'oublie jamais cela!

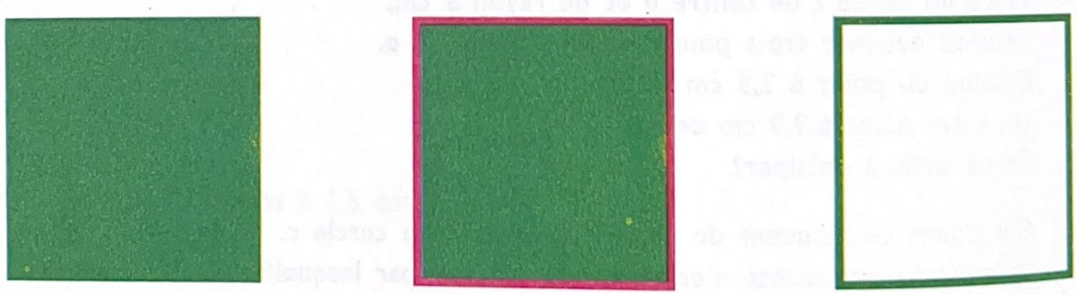
— *Les cercles sont des ensembles de points.*

Avons-nous rencontré d'autres ensembles de points?

— Les droites, les carrés ...

— Quand tu parles de carré, est-ce clair?

N'avons-nous pas rencontré trois sortes d'ensembles que nous aurions pu appeler **carrés** ?

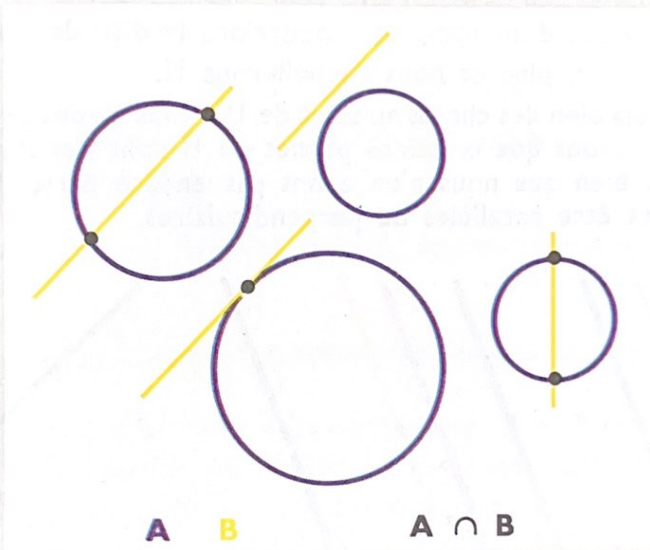


CARRÉ FERMÉ — CARRÉ OUVERT — BORD DE CARRÉ

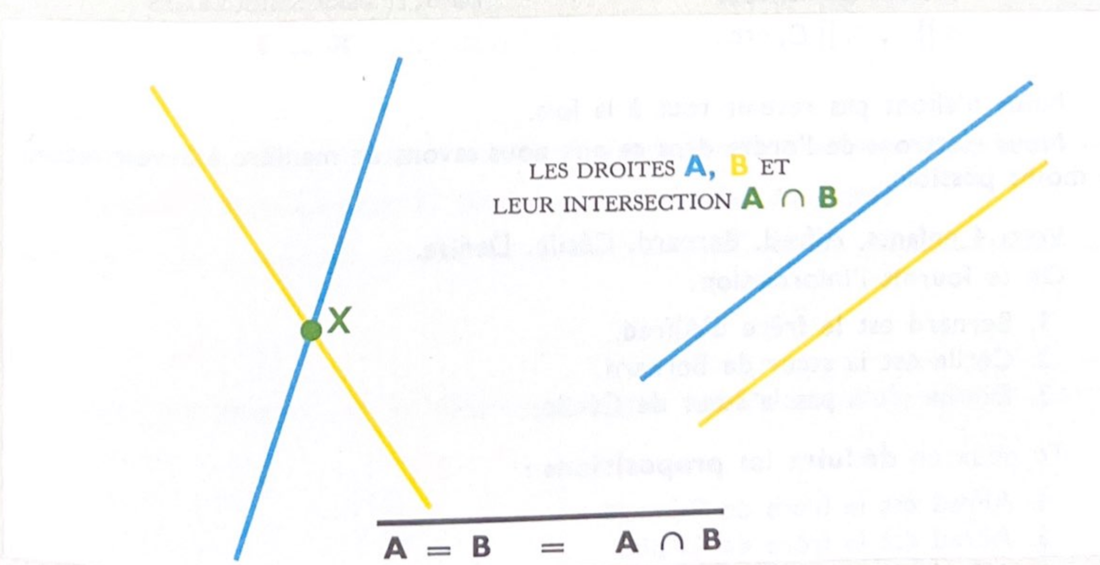
Pour être bien clair, nous appellerons **carré fermé** l'ensemble des points appartenant au bord du carré ou intérieurs à celui-ci.

Nous appellerons **carré ouvert**, l'ensemble des points intérieurs au carré.

3. Un disque ouvert et son cercle forment une **partition** d'un disque fermé.
4. Un cercle de rayon nul est un **singleton.**
5. Quel est l'ensemble $A \cap B$ lorsque A est un cercle et B une droite? Tu remarqueras que cette intersection est soit une paire, soit un singleton, soit l'ensemble vide.



6. Si A et B sont des droites, quelle peut-être l'intersection $A \cap B$?
Si $A = B$, on a $A \cap B = A = B$.
Si $A \neq B$, l'intersection $A \cap B$ est soit un singleton, soit l'ensemble vide.



7. Si A, B et C désignent des droites, que représentent les ensembles suivants

$$A \setminus B$$
$$A \cup B$$
$$(A \cup B) \cap C$$

Envisage tous les cas de figure.

2 — PLAN ET AXIOMES

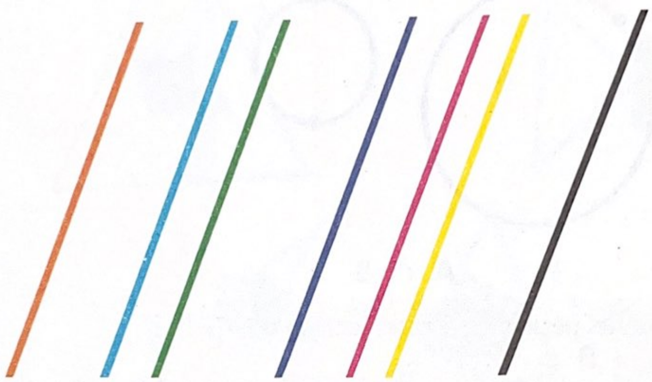
L'ensemble de tous les points du tableau et de tous ceux que l'on obtient en prolongeant les parties de droites du tableau est appelé **plan du tableau.**

Nous aurions pu parler de même de plan du plancher, de plan du plafond, de plan du cahier.

Ce que nous dirons d'un plan, nous pourrions le dire de tout autre plan.

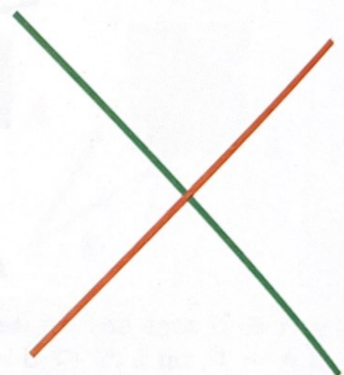
Nous étudierons un plan et nous l'appellerons Π.

Nous savons déjà bien des choses au sujet de Π. Nous savons ce qu'est la distance de 2 points. Nous savons que certaines parties de Π sont des cercles, des droites. Nous savons aussi, bien que nous n'en ayons pas encore parlé dans ce livre que des droites peuvent être parallèles ou perpendiculaires.



DROITES PARALLÈLES

A || B, C || D, etc.



DROITES PERPENDICULAIRES

X ⊥ Y

Nous n'allons pas retenir tout à la fois.

Nous mettrons de l'ordre dans ce que nous savons de manière à devoir retenir le moins possible.

Voici 4 enfants, Alfred, Bernard, Cécile, Denise.

On te fournit l'information :

1. Bernard est le frère d'Alfred.
2. Cécile est la sœur de Bernard.
3. Denise n'est pas la sœur de Cécile.

Tu peux en **déduire** les **propositions :**

4. Alfred est le frère de Bernard.
5. Alfred est le frère de Cécile.
6. Alfred n'est pas le frère de Denise.
7. Bernard est le frère de Cécile.
8. Bernard n'est pas le frère de Denise.
9. Cécile est la sœur d'Alfred.

10. Cécile n'est pas la sœur de Denise.
11. Denise n'est pas la sœur d'Alfred.
12. Denise n'est pas la sœur de Bernard.

Nous venons d'énoncer 12 **propositions**. Tu sais tout ce qu'elles t'apprennent en ne retenant que les propositions 1, 2, 3.

— Peut-être préférerais-tu choisir d'autres propositions à retenir?

Quelles propositions pourrais-tu retenir pour conserver la même information?

— Les propositions 7, 9 et 12.

— Trouve encore d'autres manières de nous fournir la même information.

— ...

— Tu vois que l'on peut obtenir la même information en énonçant des propositions différentes.

„1 et 2 et 3" donne la même information que „7 et 9 et 12".

En géométrie, la situation est plus compliquée que dans l'exemple précédent.

Tu comprendras donc que l'on ait beaucoup plus de liberté dans le choix des propositions initiales à retenir. Pendant des millénaires, des géomètres ont travaillé pour trouver *des ensembles de propositions initiales* qui soient *commodes*. Nous espérons que notre choix facilitera ton étude.

On appelle **axiomes** les propositions initiales à retenir.

Notre premier axiome sera fort simple.

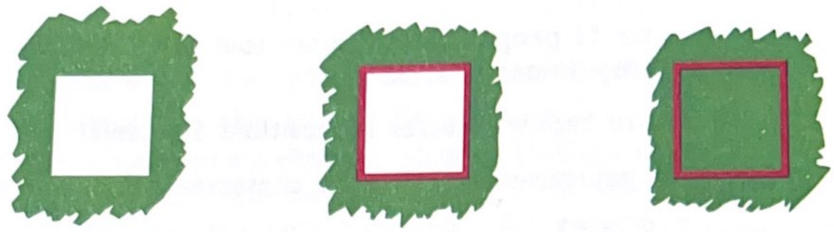
> AXIOME Π**1** — ***Le plan*** Π ***est un ensemble infini de points.***

Que voulons-nous dire en disant que le plan est un ensemble infini de points?

Il existe $p_1 \in \Pi$.
Il existe $p_2 \in \Pi \setminus \{p_1\}$.
Il existe $p_3 \in \Pi \setminus \{p_1, p_2\}$.
Il existe $p_4 \in \Pi \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$.
...
Il existe $p_{84} \in \Pi \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_{83}\}$.
...

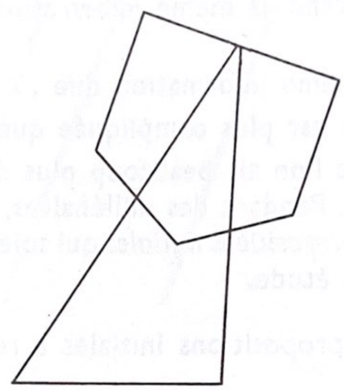
EXERCICES

1. Soit A un carré ouvert, B un carré fermé et C un bord de carré. Représente par coloriage en vert et rouge $\Pi \setminus A$, $\Pi \setminus B$, $\Pi \setminus C$.



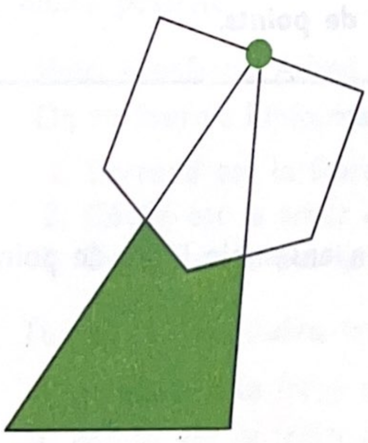
$\Pi \setminus \mathbf{A}$ $\Pi \setminus \mathbf{B}$ $\Pi \setminus \mathbf{C}$

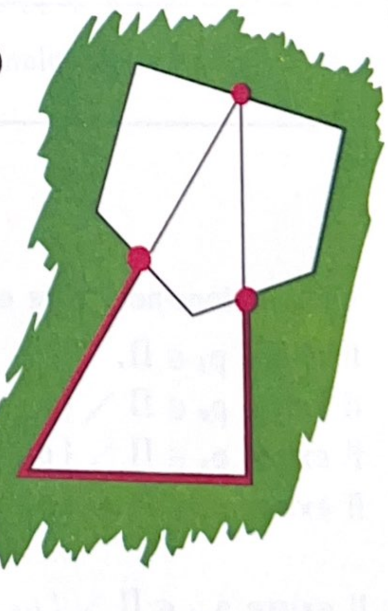
2. Le dessin ci-dessous représente un bord de triangle et un bord de polygone.



Soit P le polygone ouvert et T le triangle fermé définis par ces bords. Veux-tu représenter (en vert et rouge)

$$(\Pi \setminus P) \cap T$$
$$(\Pi \setminus P) \cap (\Pi \setminus T)$$
$$(\Pi \setminus T) \cap P$$





$(\Pi \setminus \mathbf{P}) \cap \mathbf{T}$ $(\Pi \setminus \mathbf{P}) \cap (\Pi \setminus \mathbf{T})$

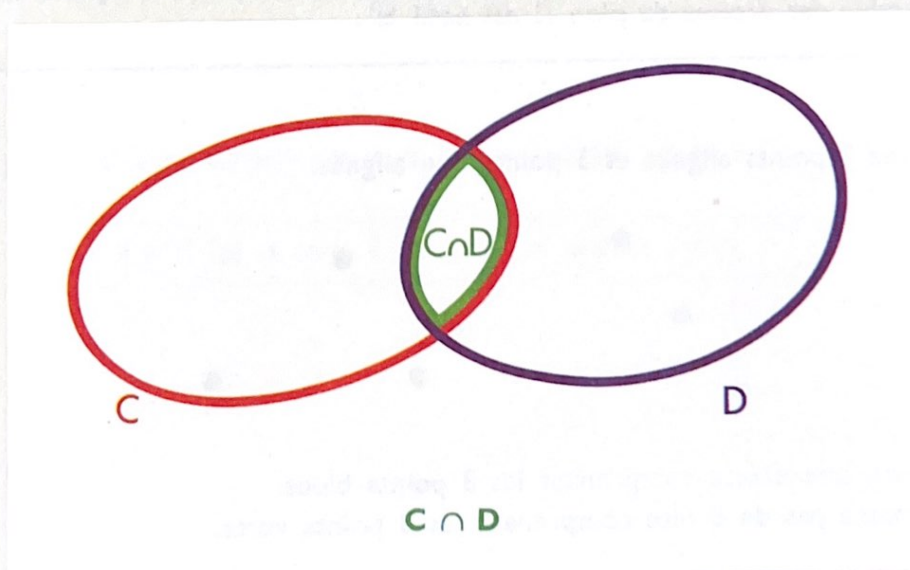
3. Soient A et B des carrés fermés.

Posons $C = \Pi \setminus A$, $D = \Pi \setminus B$
Vérifie la formule :

$$C \cap D = \Pi \setminus (A \cup B)$$

Fais une figure et représente $C \cap D$ en vert et rouge.

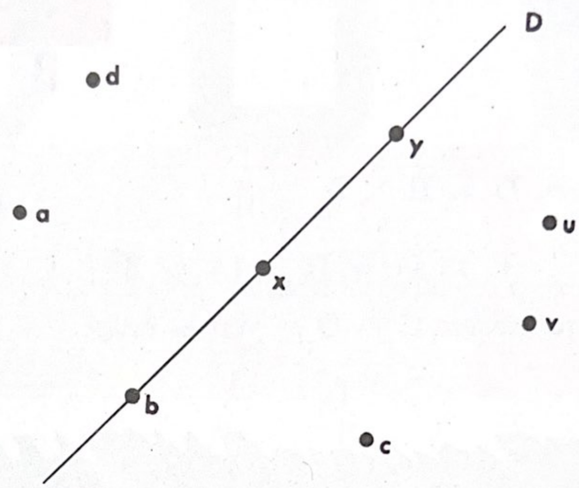
Dessine ensuite les *diagrammes* des ensembles C, D, $C \cap D$.



3 — DROITES

Nous avons vu que les droites du plan Π sont des parties infinies de Π.

Si D est une droite, il existe des points de Π n'appartenant pas à D: **toute droite est une partie propre du plan**



$a \notin D$, $b \in D$, $c \notin D$, $d \notin D$, $x \in D$, $y \in D$, $u \notin D$, $v \notin D$

Comme les droites sont des parties fort importantes du plan, il sera commode de désigner toujours par la même lettre $\mathfrak{D}$ l'ensemble des droites de Π.

Nous rassemblons les renseignements précédents dans l'axiome Π *2*.

AXIOME Π *2* — ***Les droites du plan*** Π ***sont des parties propres infinies de*** Π. ***L'ensemble des droites du plan*** Π ***est noté*** $\mathfrak{D}$.

— Dessine 3 points alignés et 3 points non alignés.

Il existe une droite comprenant les 3 points bleus.

Il n'existe pas de droite comprenant les 3 points verts.

La droite B comprend au moins deux points distincts $x \neq y$.
Les points x, y appartiennent à la droite A.
Or il n'existe qu'une seule droite comprenant x et y.
Donc $A = B$.

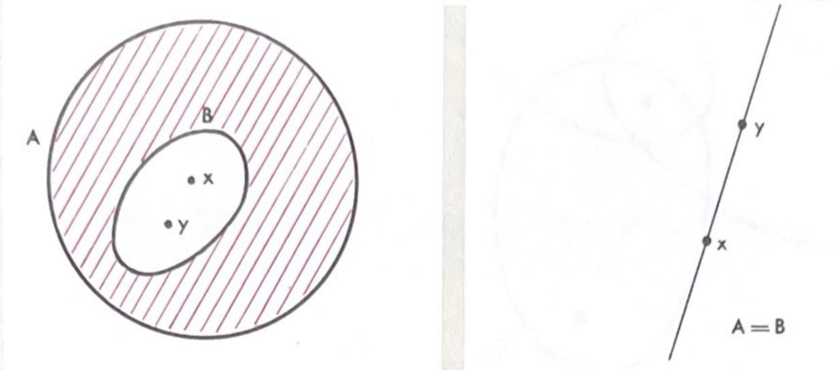
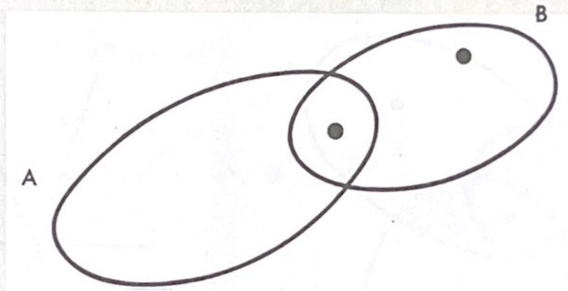


DIAGRAMME | DANS LE PLAN Π

3. Mêmes questions pour le diagramme que voici, où A et B désignent encore des droites.



Il existe un point (appelons-le b) qui appartient à B et non à A.
Donc $A \neq B$.
Dès lors $A \cap B$ ne peut comprendre plus d'un point.

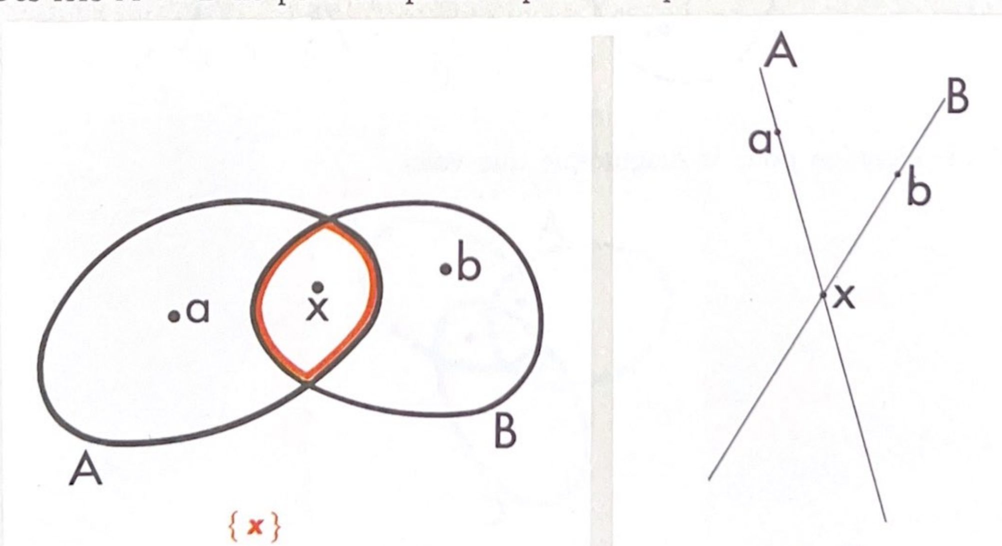
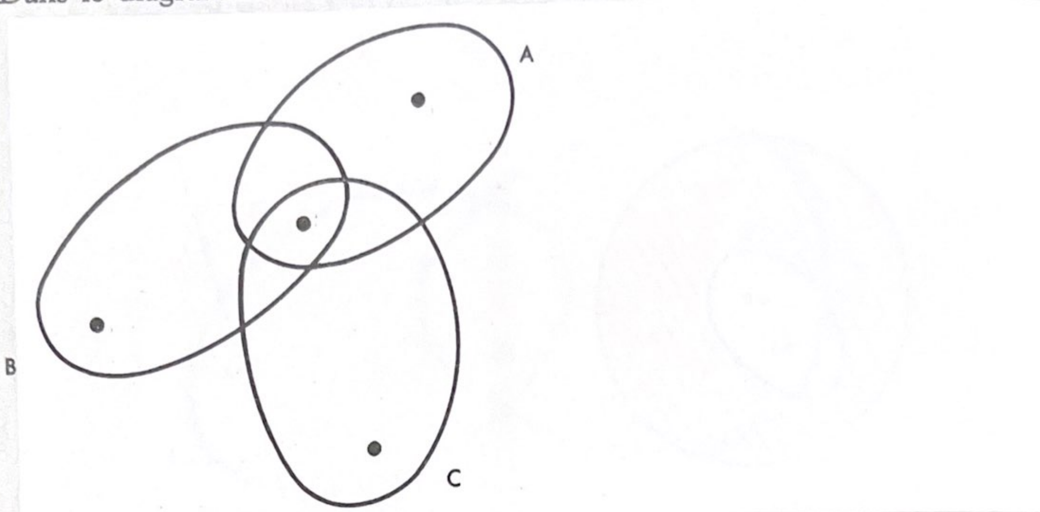
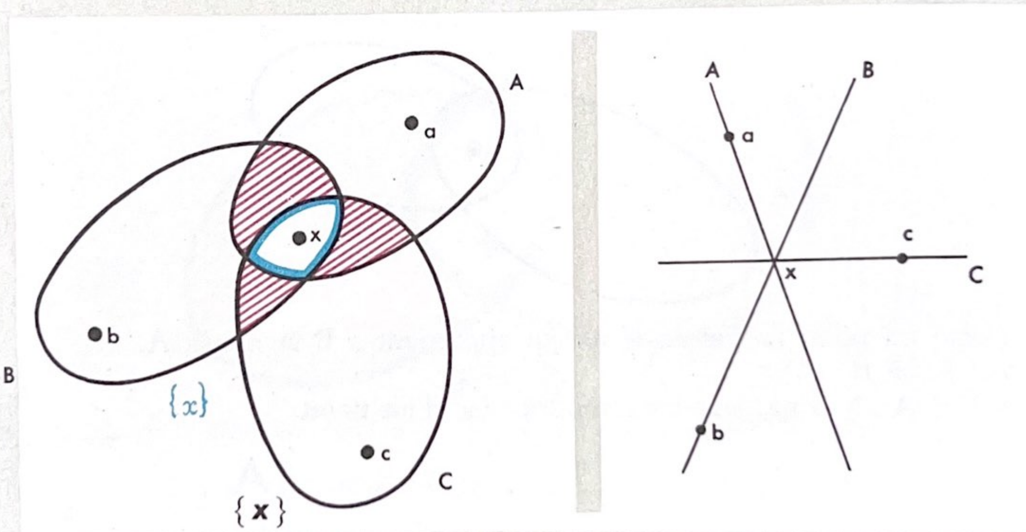


DIAGRAMME | DANS LE PLAN Π

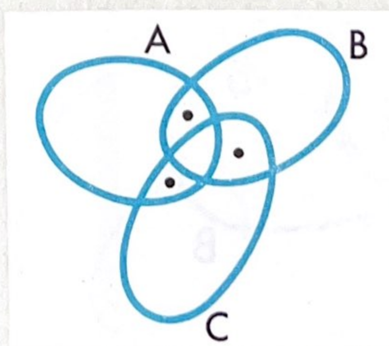
4. Dans le diagramme ci-dessous, on a A, B, C ∈ $\mathfrak{D}$.



Porte des renseignements supplémentaires sur le diagramme.
Restitue la situation dans le plan du cahier.



Même question pour le diagramme que voici



A, B, C ∈ $\mathfrak{D}$

4 — PARALLELISME

Chacune des lettres A, B désigne une droite.

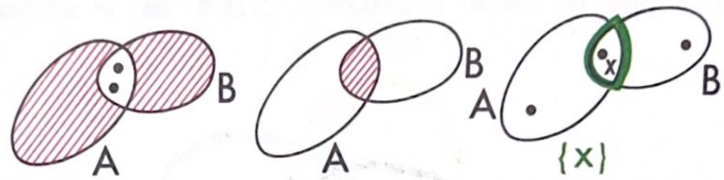
Examinons ce que peut être l'intersection $A \cap B$.

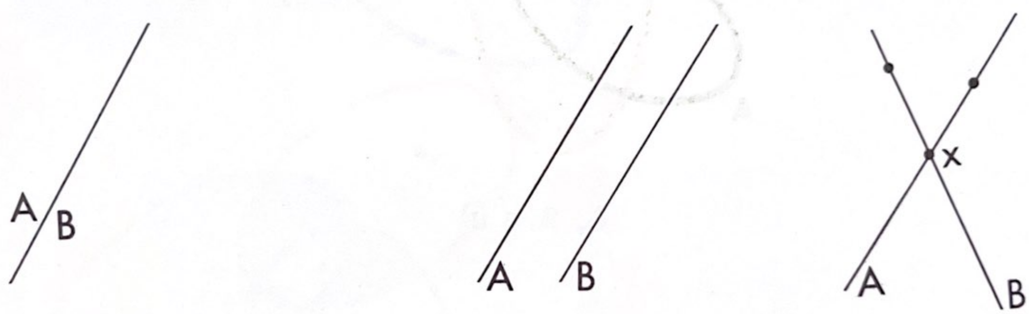
Si $A \cap B$ comprend (au moins) deux points, l'axiome 3 nous apprend que $A = B$.

— Quelles sont donc les éventualités restantes lorsque $A \neq B$?

Si $A \neq B$, l'intersection $A \cap B$ est l'ensemble vide ou un singleton.

Représentons ces différents cas par des diagrammes et dans le plan du cahier.





$\mathbf{A = B}$ $\qquad$ $\mathbf{A \cap B = \phi}$ $\qquad$ $\mathbf{A \cap B = \{x\}}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathbf{A \parallel B}}$ $\qquad$ **A** COUPE **B**

Récapitulons ces résultats.

PROPOSITION 1. — *L'intersection de deux droites* ***distinctes*** *est un singleton ou l'ensemble vide,*

> DÉFINITION 1. — *Deux droites sont dites* ***sécantes ssi*** *leur intersection est un singleton.*
> *Deux droites non sécantes sont dites* ***parallèles.***

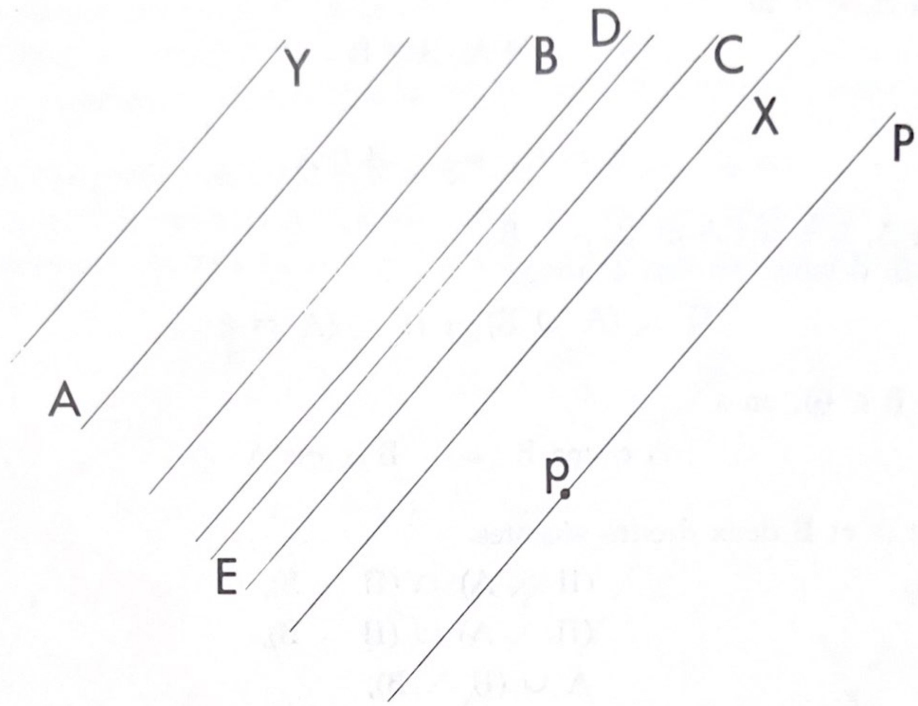
Si $A, B \in \mathfrak{D}$

$$A \text{ et } B \text{ sécantes} \iff A \text{ et } B \text{ non parallèles.}$$

On signale que A et B sont parallèles par la notation $A \| B$.
On signale que A et B sont sécantes en écrivant $A \nparallel B$.
Tu ne perdras pas de vue que si $A, B \in \mathfrak{D}$

$$A \| B \iff (A = B \text{ ou } A \cap B = \phi)$$

Nous appellerons **direction de D** l'ensemble des parallèles à D. Nous désignerons cet ensemble par *dir* D.



QUELQUES ÉLÉMENTS DE *dir* **D**

DÉFINITION 2 — *On appelle* ***direction d'une droite*** *l'ensemble des parallèles à cette droite.*

Une direction est un ensemble de droites, c'est-à-dire de parties *non vides* de Π, et tout point de Π appartient à une et une seule de ces droites.

Toute direction est donc une partition du plan Π.

Cette importante information constituera notre axiome $\Pi 4$.

AXIOME $\Pi 4$ — ***Toute direction est une partition du plan.***

EUCLIDE

— Que peux-tu dire de 2 éléments distincts X et Y de *dir* D ?

— Ce sont des droites disjointes et donc parallèles.

PROPOSITION 2 — *Toutes les droites d'une direction sont parallèles entre elles.*

— Chacune des lettres A, B, C désigne une droite de Π.
On nous fournit les renseignements $A \parallel B$ et $B \parallel C$.
Que peux-tu conclure?

— A et C appartiennent à *dir* B et sont donc parallèles,

PROPOSITION 3 — **Si** *chacune des droites A, C est parallèle à la droite B.*
Alors *les droites A et C sont parallèles.*

En d'autres termes :

PROPOSITION 3 — *Pour tout* A, B, C $\in \mathfrak{D}$:

$$\boxed{A \parallel B \parallel C \quad \Rightarrow \quad A \parallel C}$$

PROPOSITION 4 — **Si** *deux droites sont parallèles*
Alors *toute droite qui coupe l'une, coupe l'autre.*

Autrement dit :

PROPOSITION 4 — *Pour tout* A, B, C $\in \mathfrak{D}$

$$\boxed{A \parallel B \nparallel C \quad \Rightarrow \quad A \nparallel C}$$

DÉMONSTRATION :

Chacune des lettres A, B, C désigne une droite de Π.
On nous fournit les renseignements $A \parallel B$ et $B \nparallel C$.
Est-il possible que l'on ait, de plus $A \parallel C$
Les formules $A \parallel B$ et $A \parallel C$ entraineraient $B \parallel C$.
Or on nous a signalé que $B \nparallel C$.
On ne peut donc avoir $A \parallel C$.

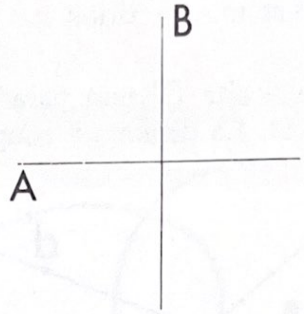
6 — PERPENDICULARITE

Plions une feuille de papier en deux.

Plions une seconde fois la feuille ainsi pliée en appliquant le premier pli sur lui-même.

Ouvrons ensuite la feuille.

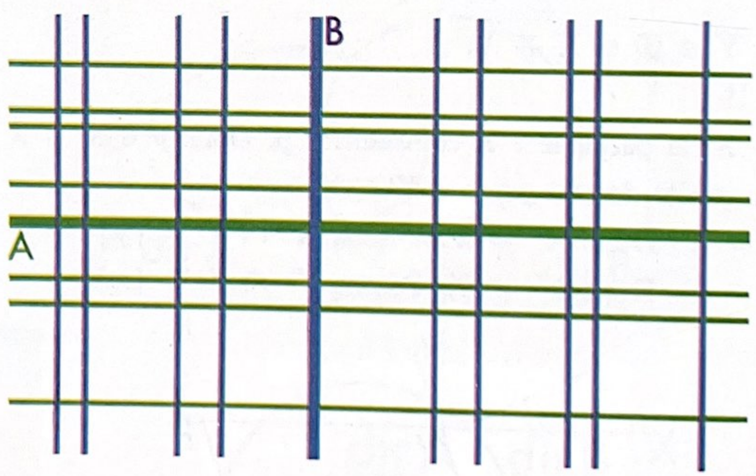
Les plis y font apparaître le dessin que voici



$A \perp B$

Les droites A et B ainsi dessinées sont dites perpendiculaires et l'on écrit alors $A \perp B$ (ou $B \perp A$).

Dessine un grand nombre de droites appartenant à *dir* A et un grand nombre de droites appartenant à *dir* B.

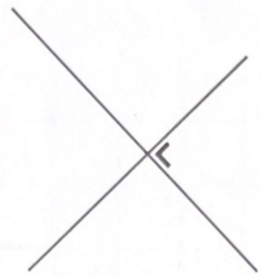


— Choisis un élément de *dir* A et un élément de *dir* B.
Que peux-tu dire de ces droites ?

— Elles sont perpendiculaires.

— Toute droite appartenant à *dir* A est perpendiculaire à toute droite appartenant à *dir* B.

Nous dirons que **ces directions sont perpendiculaires.**



— On indique souvent que deux droites A et B sont perpendiculaires en plaçant sur la figure une petite équerre comme ci-dessus.

$$X \perp Y \perp Z \perp T \quad \Rightarrow \quad X \perp T$$

EXERCICES

1. Nous portons l'information $X \perp Y \perp Z \perp T$ dans le tableau

	X	Y	Z	T	
X		$\perp$			
Y			$\perp$		
Z				$\perp$.	
T					

7

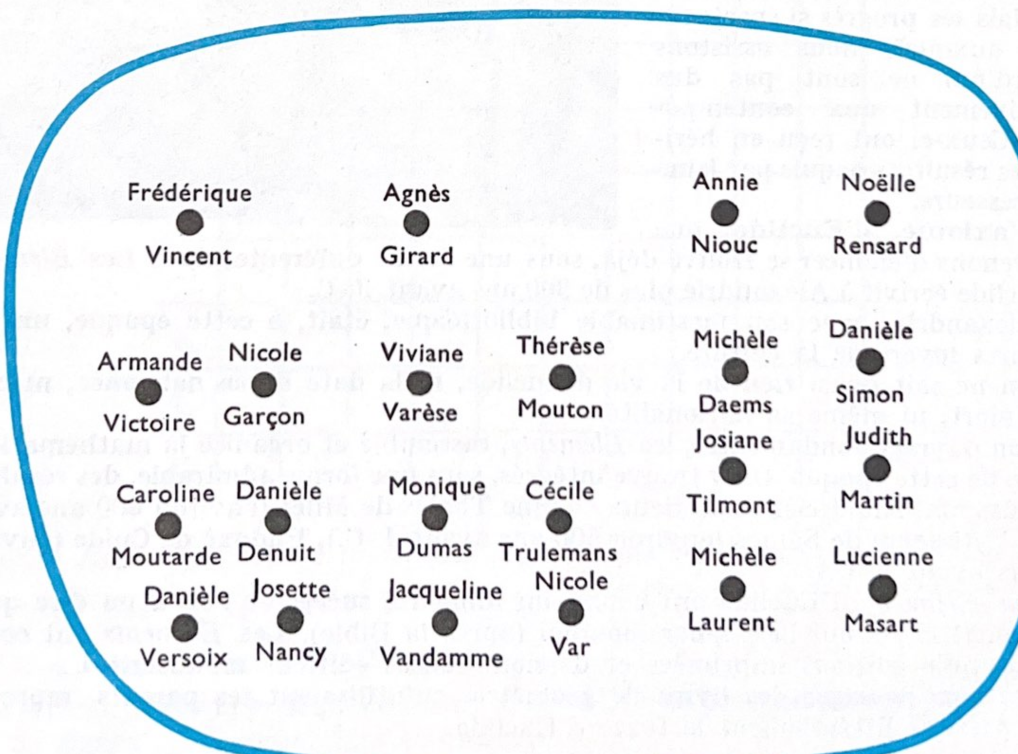
Relations

1 — LE JEU „PRÉNOM/NOM"

On a demandé à chaque élève de notre classe de montrer toute élève de notre classe dont le nom commence par la même lettre que son prénom à elle.

Ainsi **M**ichèle	Daems	montrera	Thérèse	**M**outon
Michèle	Daems	montrera	Judith	**M**artin
Michèle	Daems	montrera	Caroline	**M**outarde
Danièle	Denuit	montrera	Monique	**D**umas
Danièle	Denuit	montrera	Michèle	**D**aems
Danièle	Denuit	montrera	Danièle	**D**enuit

Au lieu de compléter cette litanie, décrivons cette situation par un dessin. Représentons chaque élève de notre classe par un point.



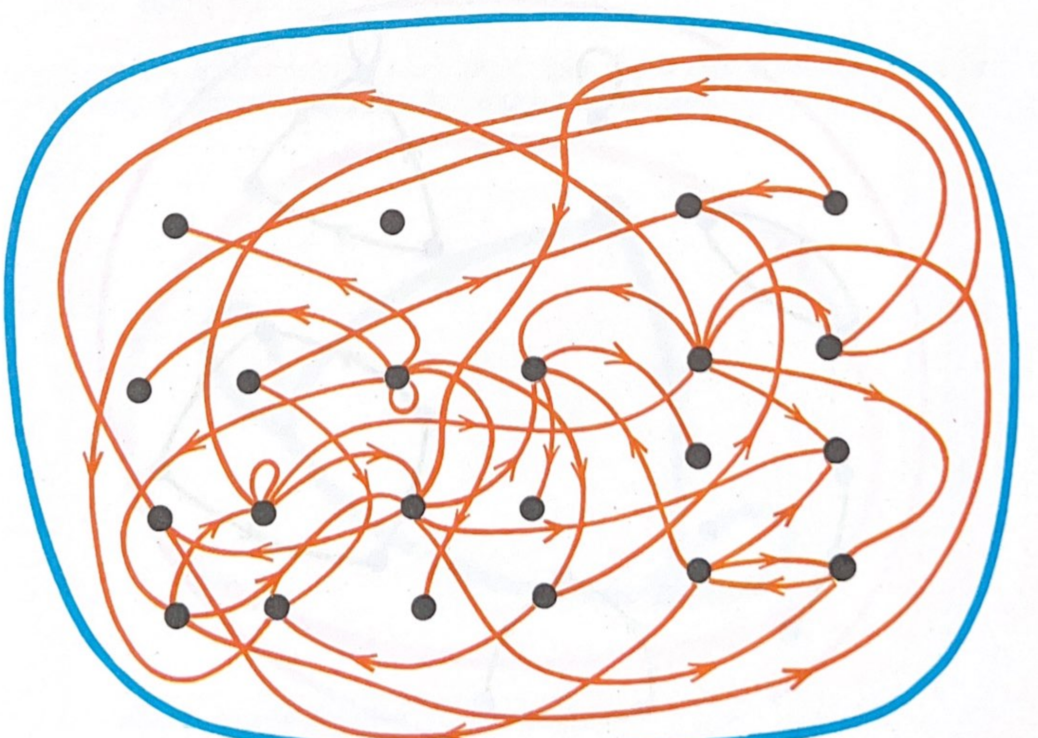
Chaque fois qu'une élève *a* doit montrer une élève *b*, trace une flèche allant de *a* vers *b*.

Certaines élèves, comme Danièle Denuit, doivent se montrer elles-mêmes. Dans ce dernier cas, la flèche est superflue : une boucle suffit.

Il sera commode d'appeler cette boucle, ,,*une flèche allant de c vers c*''.

Dis pourquoi dans le cas des points *a* et *b* distincts, nous étions obligés de mettre une flèche.

Mets-toi au travail : tu obtiendras finalement le **graphe** que voici



GRAPHE 1

Ce graphe représente une **relation** dans l'ensemble des élèves de notre classe.

Lorsqu'une flèche part de *a* et aboutit en *b*, nous dirons que le **couple** (*a*, *b*) est un élément de la relation.

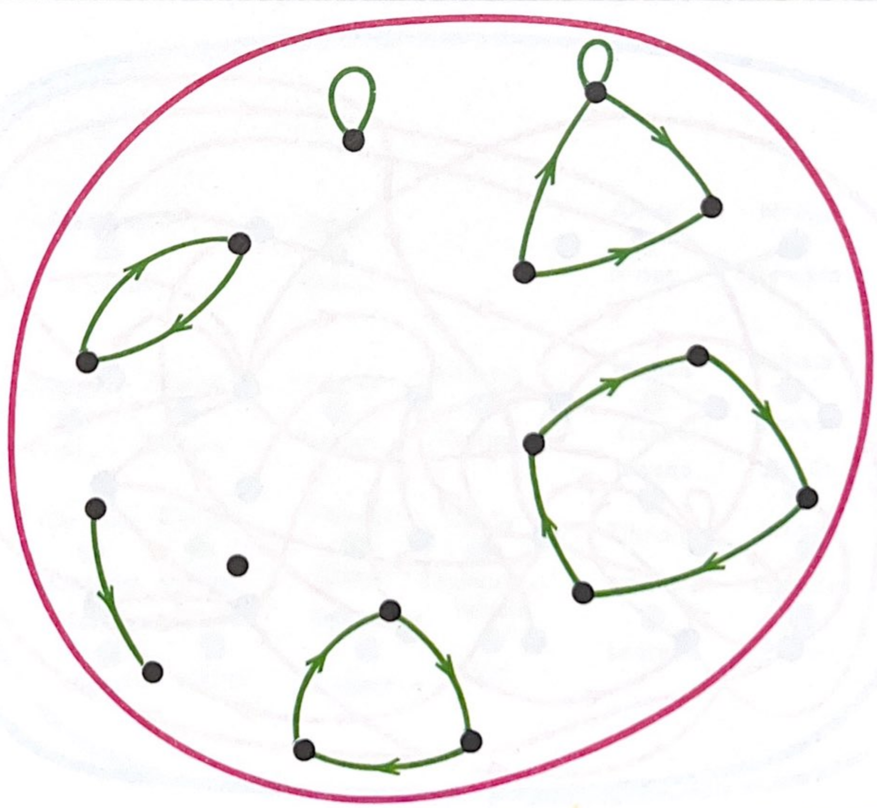
Un couple tel que (*a*, *a*) est appelé **couple identique**.

DÉFINITION — ***On appelle relation tout ensemble de couples.***

Comme il suffit d'indiquer une seule fois que le couple (*a*, *b*) appartient à la relation, *on ne dessinera jamais plus d'une flèche de a vers b (dans un même graphe).*

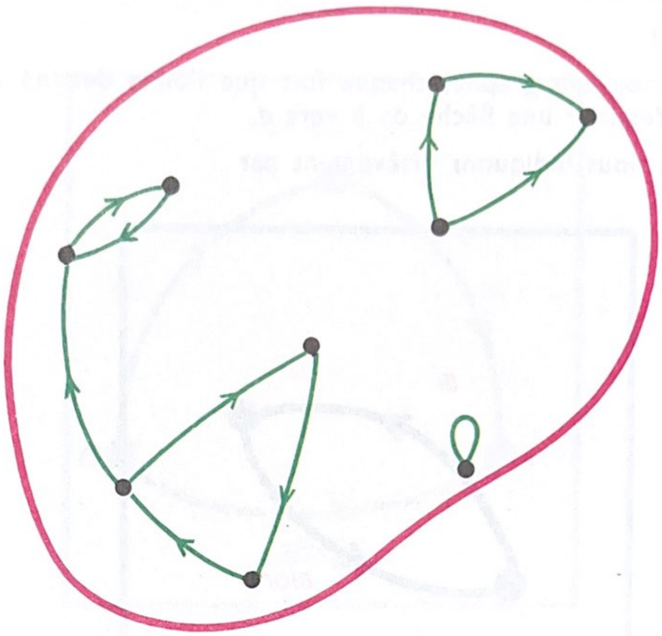
EXERCICES

1. Le même jeu a été proposé à d'autres classes. Dans l'une de celles-ci, nous avons obtenu le curieux graphe que voici.
Imagine pour ces élèves des noms *compatibles* avec ce graphe



GRAPHE 2

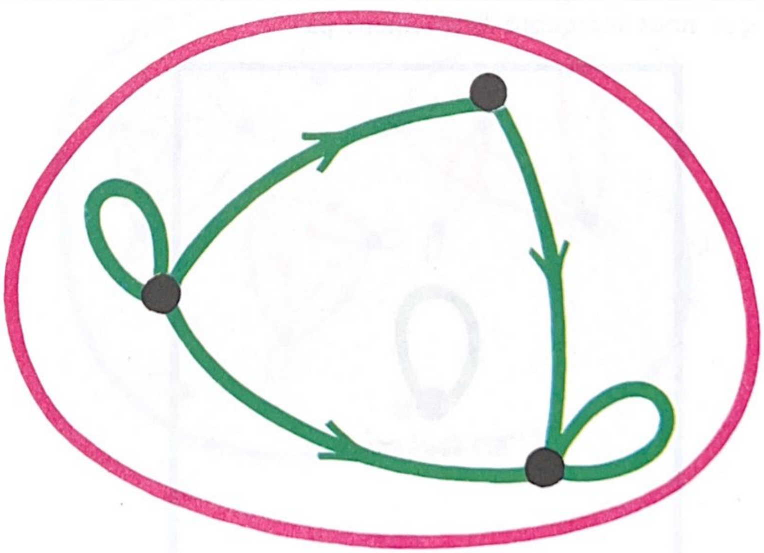
2. Quelques enfants ont joué à notre jeu. Ils remettent le graphe que voici à un professeur qui ne les connaît pas.



GRAPHE 3

Après un examen de moins d'une demi-seconde, ce professeur a déclaré : ,,ce graphe est faux''. Et pourtant, il ignore le nom des élèves.
Comment est-ce possible?

3. La sonnerie a interrompu le tracé du graphe de la même relation dans une de nos classes. Voici un fragment de ce graphe inachevé.



GRAPHE 4

Sans connaître le nom des élèves, tu es à même de compléter ce fragment. Justifie chaque tracé nouveau.

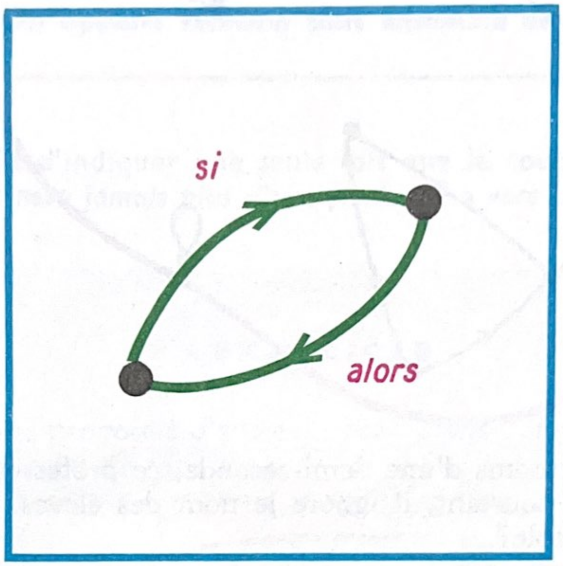
2 — LE JEU „PRÉNOM/PRÉNOM"

— Le graphe du jeu analogue „prénom-prénom" est plus facile à tracer!

— Pourquoi?

— Dans ce nouveau graphe, chaque fois que l'on a dessiné une flèche de *a* vers *b*, on doit dessiner une flèche de *b* vers *a*.

C'est ce que nous indiquons brièvement par

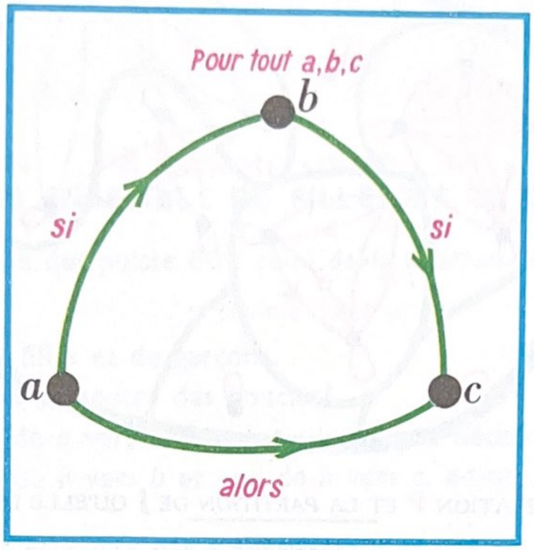


— En tout point du nouveau graphe, on doit dessiner une boucle.

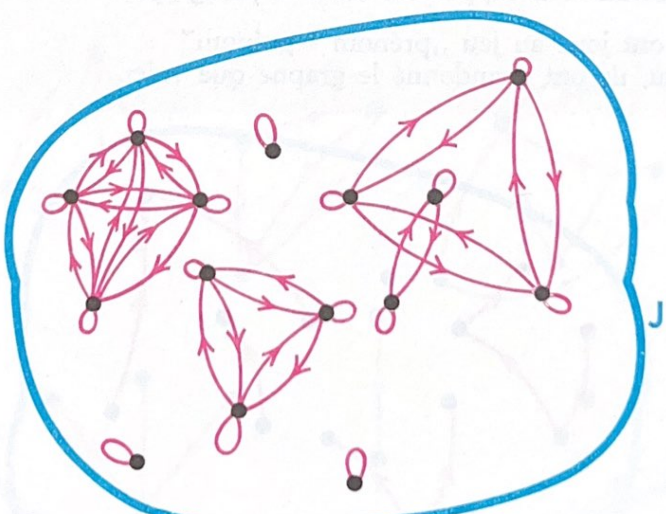
C'est ce que nous indiquons brièvement par

— Dans le nouveau graphe, si une flèche va de a vers b et une flèche de b vers c, on doit tracer une flèche de a vers c.

C'est ce que nous exprimons brièvement par



— Dessinons un graphe qui puisse décrire la relation P que définit le jeu „prénom-prénom" dans un ensemble J de joueurs.

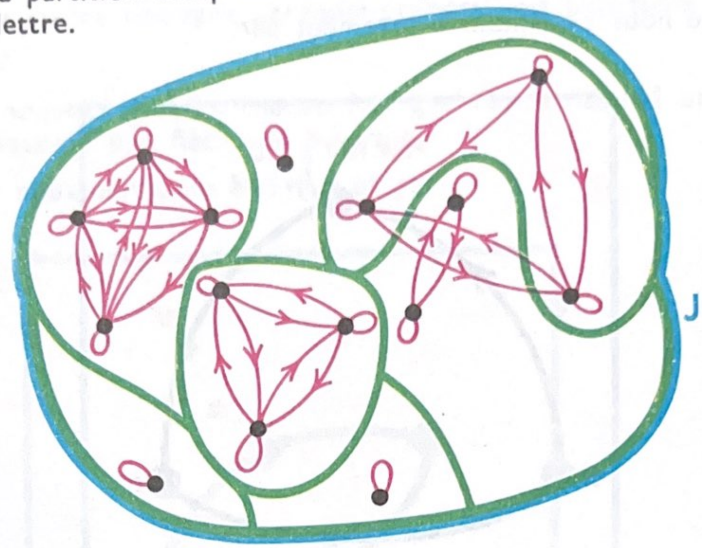


LA RELATION **P** :

... a un prénom qui commence par la même lettre que le prénom de ...

GRAPHE 5

Ce graphe fait apparaître une partition de l'ensemble J des joueurs. Chacune des classes de la partition comprend tous les joueurs dont le prénom commence par une même lettre.

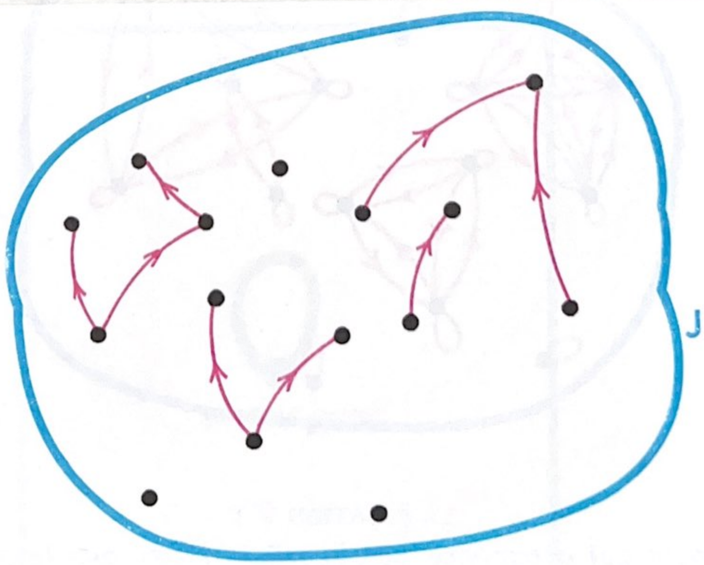


LA RELATION P ET LA PARTITION DE J QU'ELLE DÉFINIT

GRAPHE 6

EXERCIÇES

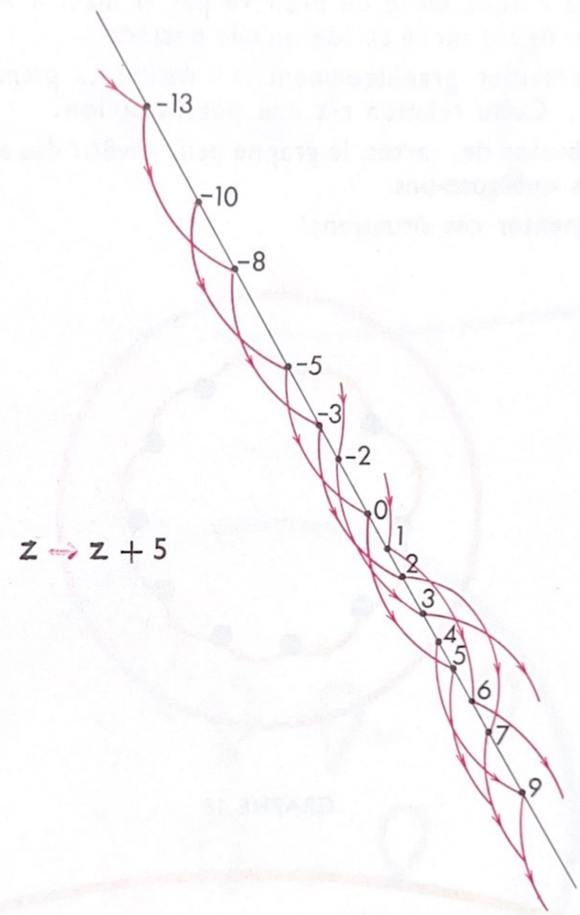
1. Justifie les affirmations rapportées dans ce paragraphe.
2. Des enfants ont joué au jeu ,,prénom - prénom''.
   Sur le tableau, ils ont abandonné le graphe que voici.



GRAPHE 7

Quelles flèches (et boucles) devaient-ils *certainement* ajouter?

Nous ne pouvons représenter simultanément tous les entiers rationnels par des points sur le dessin. On se borne à en marquer quelques-uns. On indiquera les flèches relatives à ces seuls points.



GRAPHE 17

En tout point de **Z** aboutit et part une et une seule flèche de la relation.

C'est ce que l'on exprime brièvement en disant que la relation considérée est une **permutation** de **Z**.

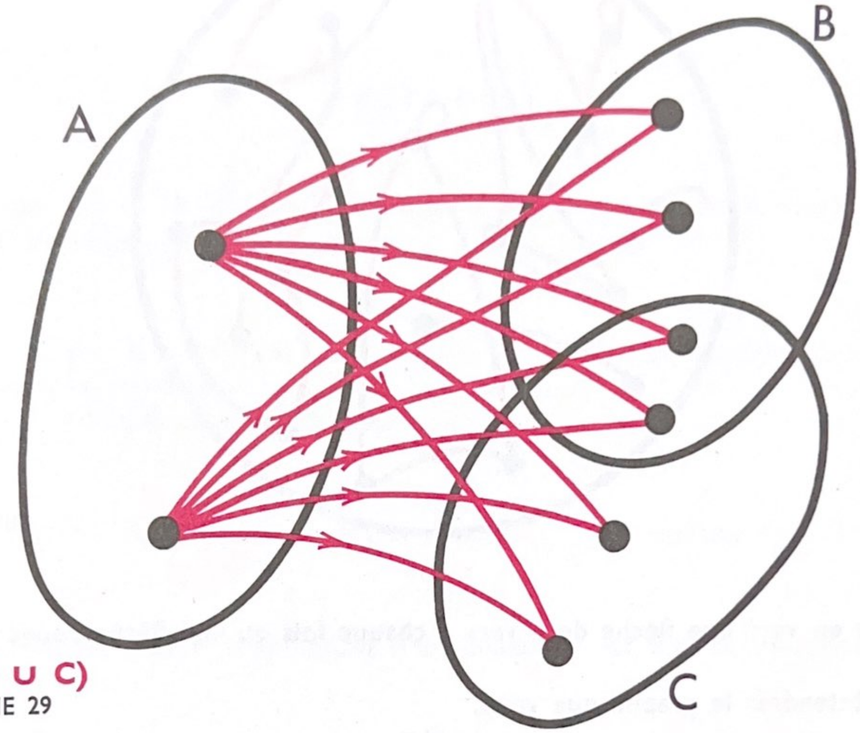
EXERCICE

On aurait pu noter la relation $\mathcal{C}$ ci-dessus en écrivant

$$\mathcal{C} = \{ (z,\ z + 5) \,\|\, z \in Z \}$$

11 — DISTRIBUTIVITÉ DE × PAR RAPPORT A ∪

> *Si chacune des lettres A, B, C désigne un ensemble,*
> $$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$



A × (B ∪ C)
GRAPHE 29

Montre l'ensemble des flèches de $A \times B$,
l'ensemble des flèches de $A \times C$,
l'ensemble des flèches de $A \times (B \cup C)$.
l'ensemble des flèches de $(A \times B) \cup (A \times C)$.

Chacun des termes $A \times (B \cup C)$ et $(A \times B) \cup (A \times C)$ désigne l'ensemble des couples dont l'origine appartient à A et dont l'extrémité appartient à $B \cup C$.

La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $\cup$

Si chacune des lettres A, B, C désigne un ensemble, on a les formules de distributivité :

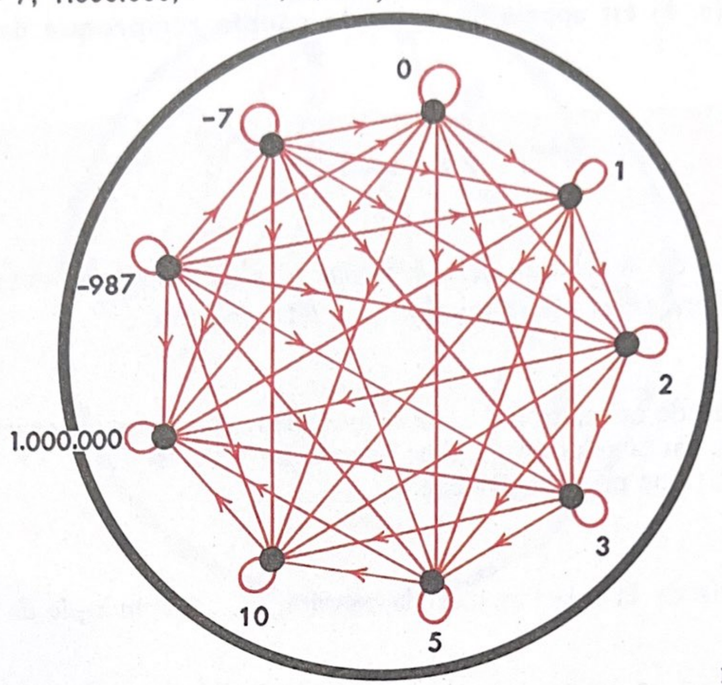
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $\quad$ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ $\quad$ $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ $\quad$ $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

EXERCICE

Justifie les formules précédentes.

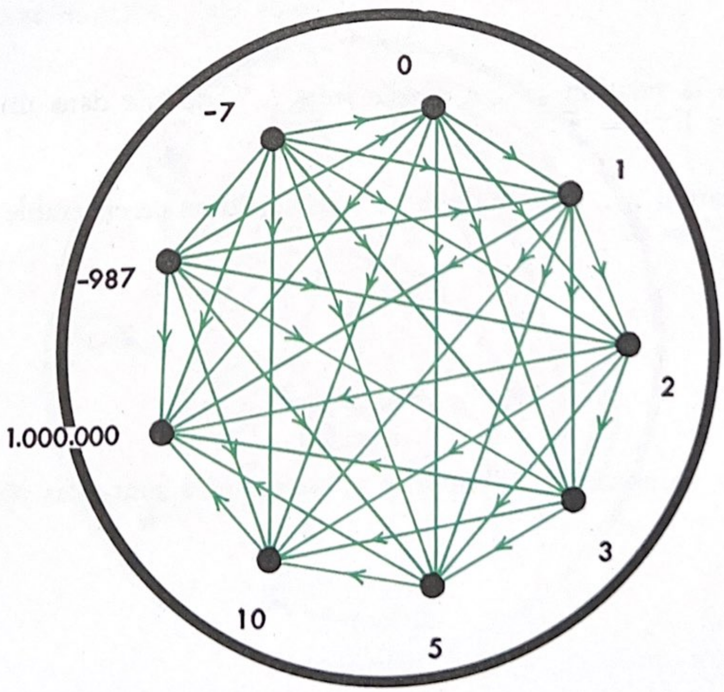
13 — RELATIONS $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$

Trace les graphes des relations $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ définies dans l'ensemble $\{5, 0, 2, 1, -7, 1.000.000, -987, 3, 10\}$



LA RELATION $\leqslant$

GRAPHE 32

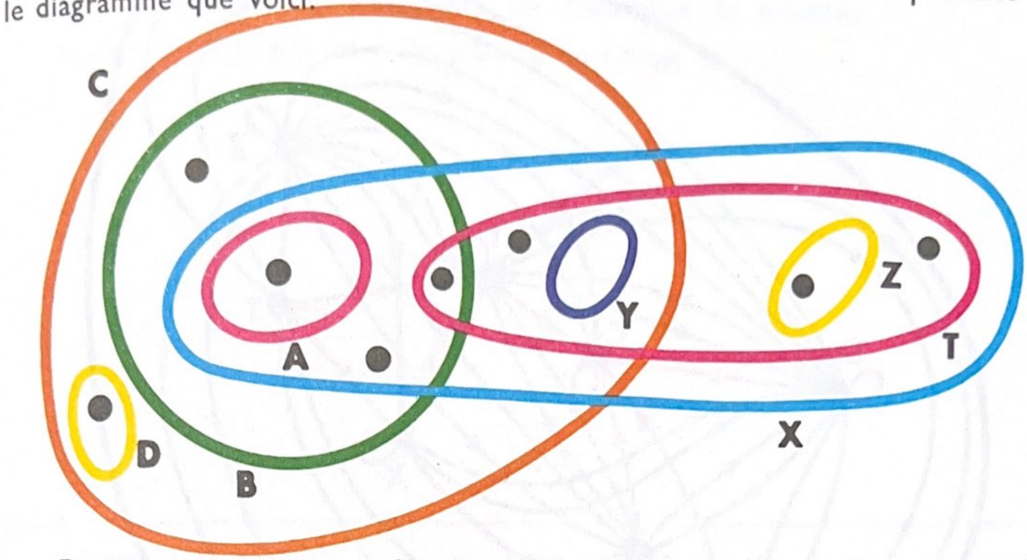


LA RELATION $<$

GRAPHE 33

14 — RELATIONS DANS UN ENSEMBLE D'ENSEMBLES

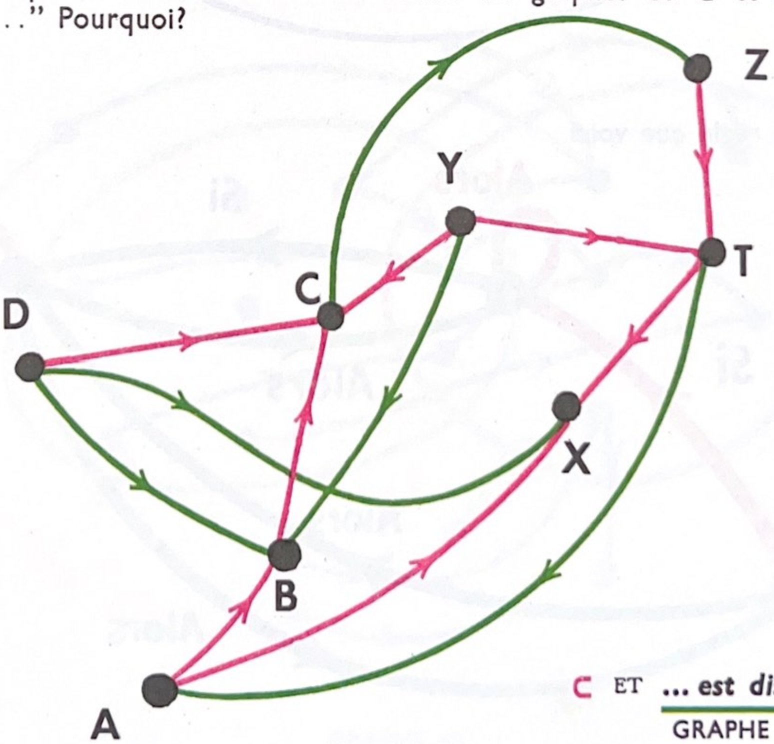
Soit $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, X, Y, Z, T\}$ un ensemble d'ensembles représenté par le diagramme que voici.



Dessine en rouge un graphe de la relation $\subset$ définie dans $\mathcal{E}$ et en vert (sur le même dessin) un graphe de la relation ... *est disjoint de* ... définie dans $\mathcal{E}$.

Achève ce travail avant de lire ce qui suit.

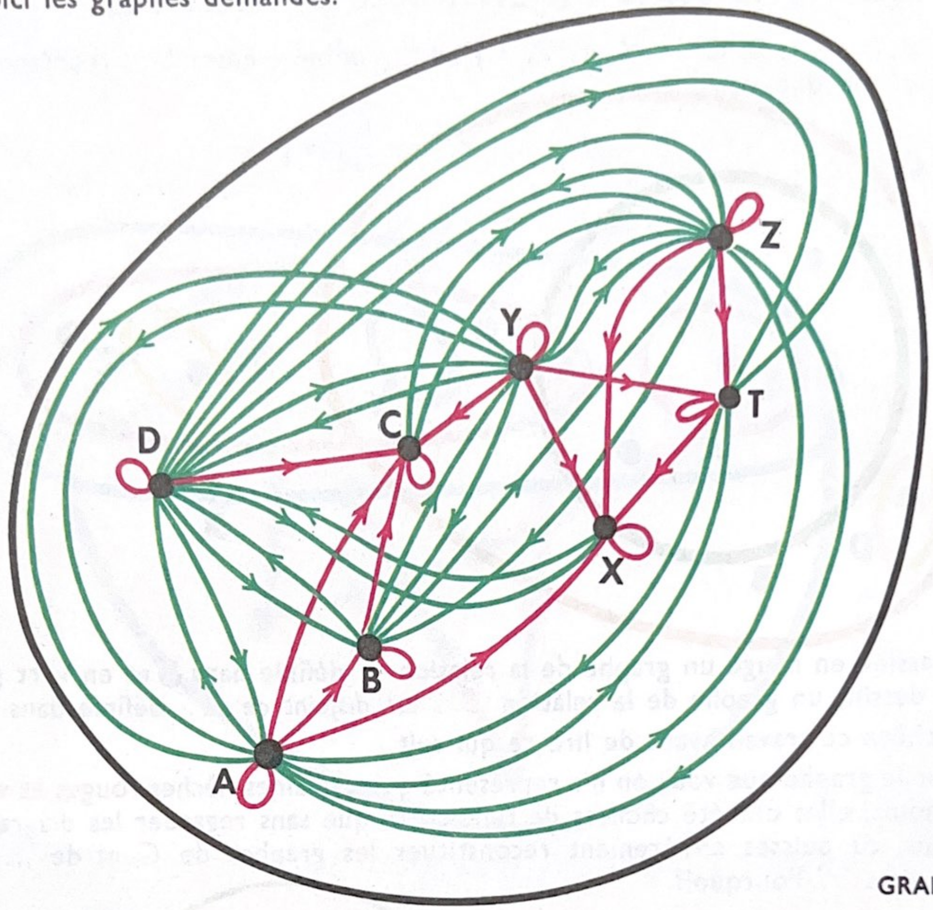
Sur le graphe que voici on n'a représenté que certaines flèches rouges et vertes. Néanmoins, elles ont été choisies de telle sorte que sans regarder les diagrammes ci-dessus, tu puisses entièrement reconstituer les graphes de $\subset$ et de „... est *disjoint de* ..." Pourquoi?



$\subset$ ET **... est *disjoint de* ...**

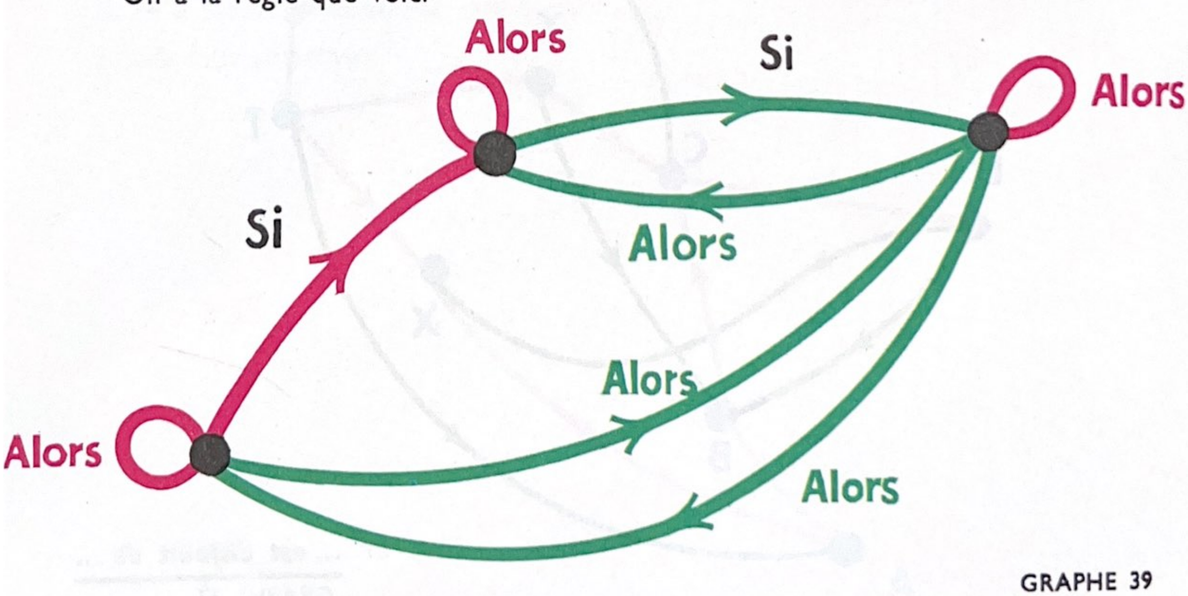
GRAPHE 37

Voici les graphes demandés.



GRAPHE 38

On a la règle que voici

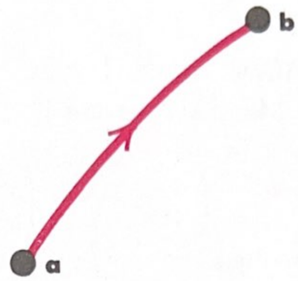


GRAPHE 39

15 — IMAGE D'UN ENSEMBLE PAR UNE RELATION

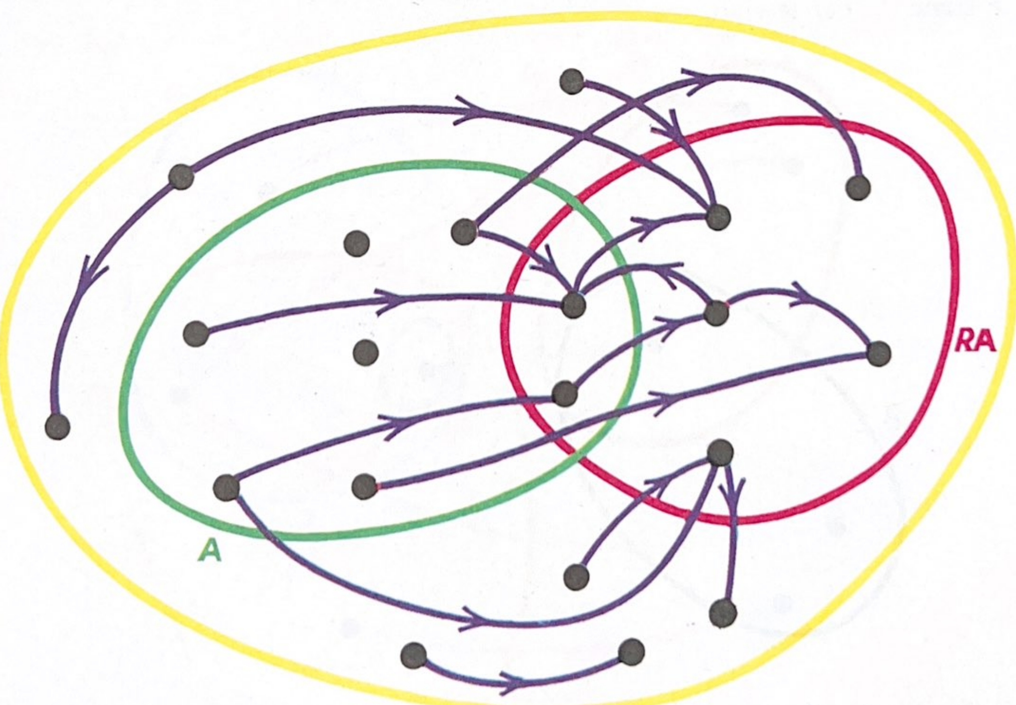
Soit R une **relation** c'est-à-dire **un ensemble de couples.**

Appelons a l'origine et b l'extrémité du couple (a, b).



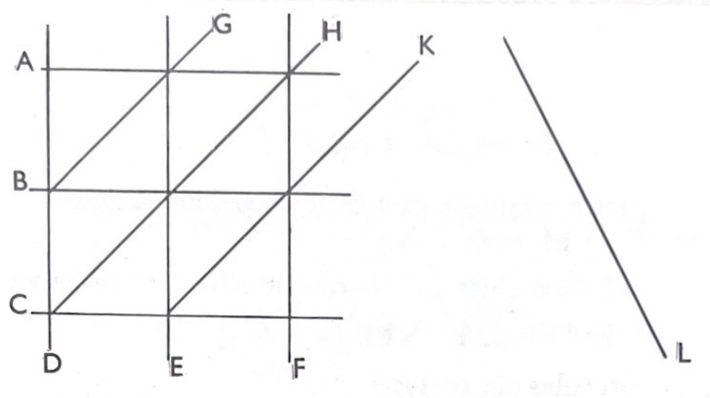
(a, b)

> DÉFINITION — *Nous désignerons par RA* ***l'ensemble des extrémités*** *des couples (ou flèches) de R qui ont leur origine dans l'ensemble A.*
>
> *L'ensemble RA est appelé* ***l'image de A par R.***

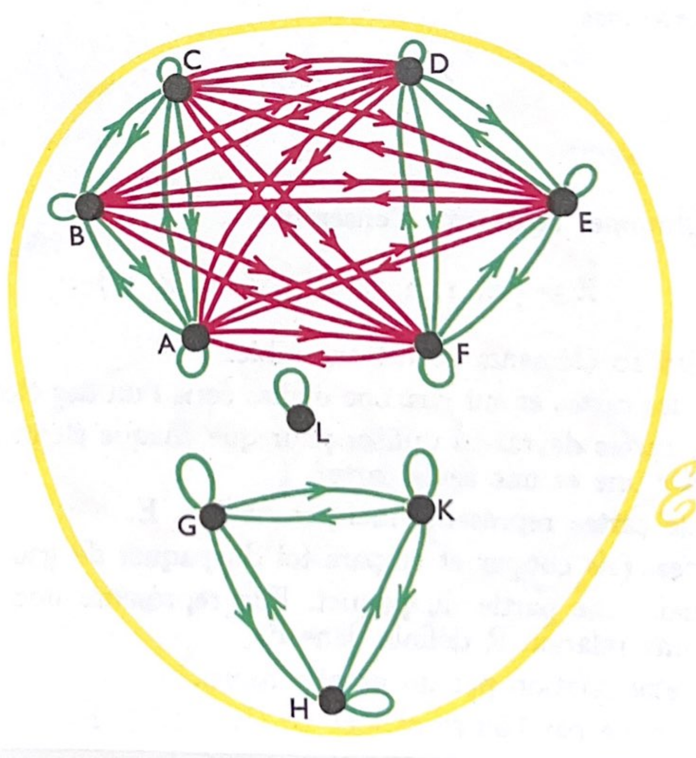


GRAPHE 40

3. $||$ et $\perp$ sont des relations définies dans l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites du plan Π. Voici un ensemble $\mathscr{E} = \{ A, B, C, D, E, F, G, K, L \}$ de droites de ce plan. Veux-tu dessiner en vert et rouge des graphes pour les relations $||$ et $\perp$ définies dans $\mathscr{E}$.



DANS LE PLAN Π



$\perp$ $||$

GRAPHE 42

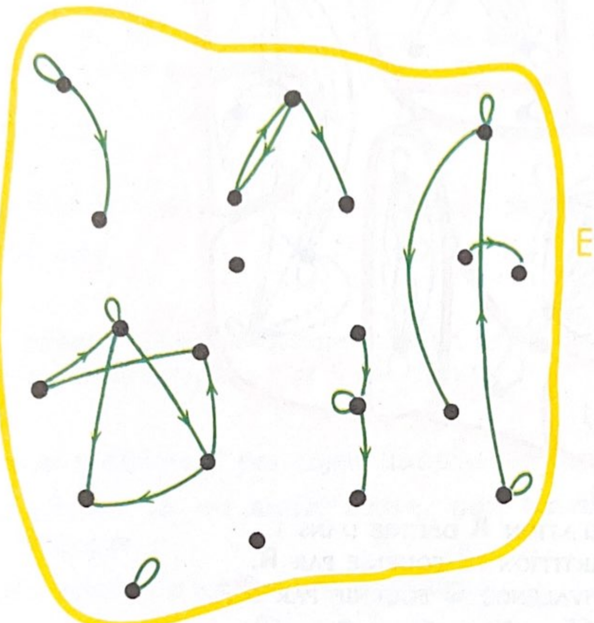
2 — PARTITION DÉFINIE PAR UNE RELATION

Soit R une relation définie dans un ensemble E.

Pense à son graphe.

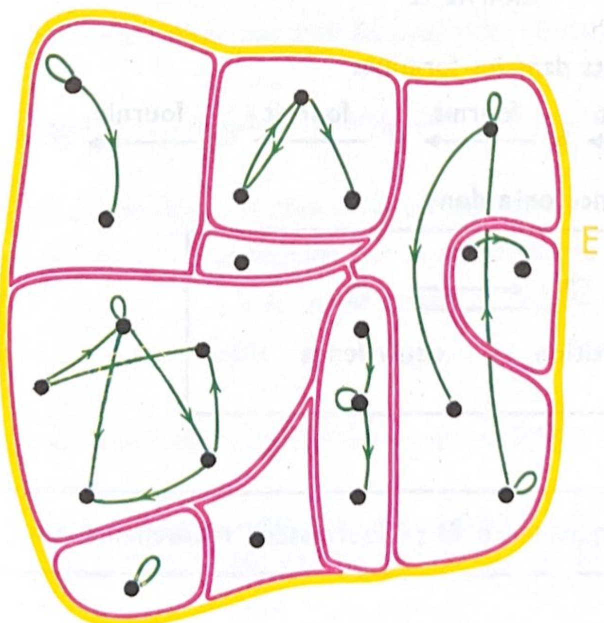
Celui-ci fait apparaître une partition de E.

Tu mettras deux points distincts de E dans une même classe de la partition, ss'ils sont reliés par une ligne du graphe, c'est-à-dire ssi l'on peut aller d'un de ces points à l'autre en suivant les lignes du graphe, mais sans faire attention au sens des flèches.



UNE REDUCTION **R**
DÉFINIE DANS L'ENSEMBLE **E**

GRAPHE 70



LA RELATION **R**
DÉFINIE DANS L'ENSEMBLE **E**

LA PARTITION $\mathcal{P}$
FOURNIE PAR **R**

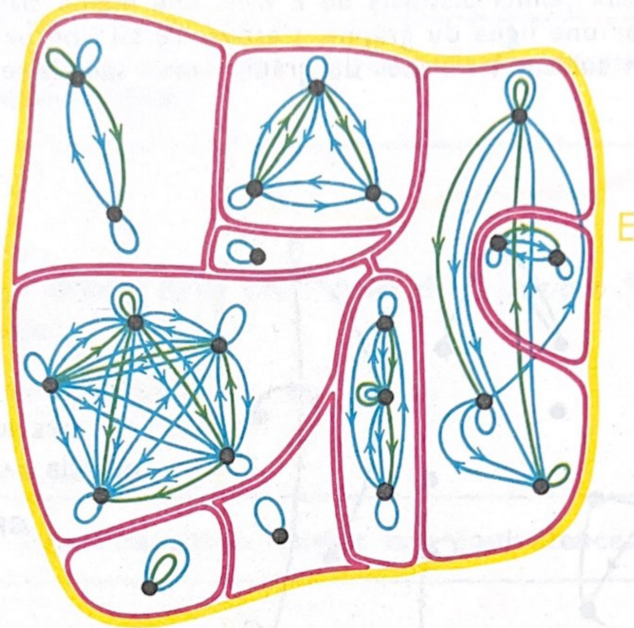
R → $\mathcal{P}$

GRAPHE 71

Au paragraphe précédent, nous avons vu qu'une partition fournissait une équivalence. Pourrais-tu tracer l'équivalence Q définie par $\mathcal{P}$?

Cette équivalence s'obtient en prenant tous les couples de R et en y ajoutant quelques-uns (Donc R $\subset$ Q).

Si R avait été une équivalence, nous n'aurions rien dû ajouter (voir graphe 69).



LA RELATION R DÉFINIE DANS E.
LA PARTITION $\mathcal{P}$ FOURNIE PAR R.
L'ÉQUIVALENCE Q FOURNIE PAR $\mathcal{P}$.
R $\to$ $\mathcal{P}$ $\to$ Q $\to$ $\mathcal{P}$ $\to$ Q $\to$ $\mathcal{P}$

GRAPHE 72

Nous résumons ces résultats dans les formules

$$R \xrightarrow{\text{fournit}} \mathcal{P} \xrightarrow{\text{fournit}} Q \xrightarrow{\text{fournit}} \mathcal{P} \xrightarrow{\text{fournit}} Q \xrightarrow{\text{fournit}} \mathcal{P}$$

Dans le cas d'une équivalence on a donc

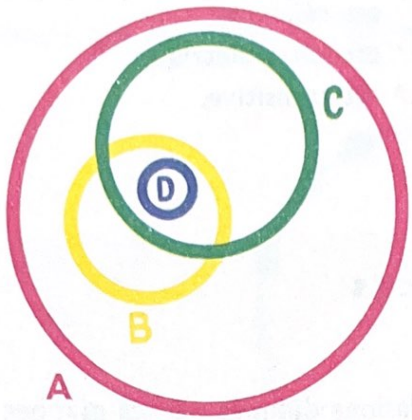
$$\boxed{\underset{\text{partition}}{\mathcal{P}} \rightleftarrows \underset{\text{équivalence}}{Q}}$$

En bref

La partition $\mathcal{P}$ et l'équivalence Q se fournissent mutuellement.

5. Voici deux situations

Un ensemble E d'ensembles



Dans cet ensemble E, se trouve définie la relation $\subset$.

Un ensemble E de nombres naturels

A = 24

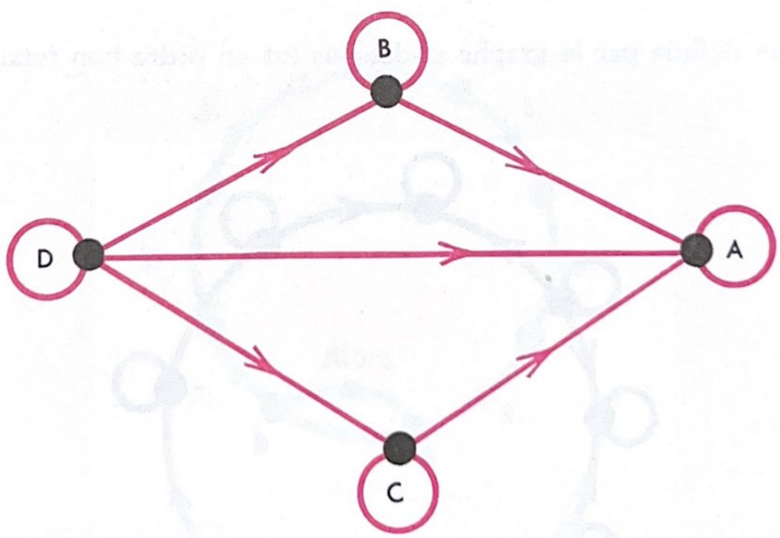
B = 6

C = 8

D = 2

Dans cet ensemble E, se trouve définie la relation $|$.

Les deux situations précédentes donnent lieu au même graphe.



GRAPHE 80

Les relations $\subset$ et $|$ sont des ordres.

Aucune flèche ne lie les points B et C du graphe.

Ces ordres ne sont pas totaux!

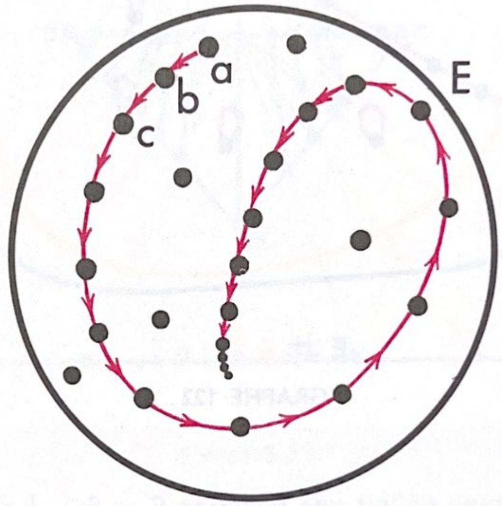
5 — THÉORÈME DE DEDEKIND

Soit E un ensemble.

Si $E = \phi$, alors E est fini.
Si $E \neq \phi$, soit $a \in E$.
Si $E \setminus \{ a \} = \phi$, alors $E = \{ a \}$ et E est fini.
Si $E \setminus \{ a \} \neq \phi$, soit $b \in E \setminus \{ a \}$.
Si $E \setminus \{ a, b \} = \phi$, alors $E = \{ a, b \}$ et E est fini.
Si $E \setminus \{ a, b \} \neq \phi$, soit $c \in E \setminus \{ a, b \}$.
... etc. ...

Nous voyons qu'un ensemble est **infini** ssi on peut y définir une **ribambelle**

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \dots$$



RIBAMBELLE

GRAPHE 121

> DÉFINITION 2 — *On appelle* ***ribambelle*** *d'origine* x_0 *définie dans l'ensemble* E *toute relation satisfaisant aux conditions que voici :*
>
> *De* x_0 *part une seule flèche qui aboutit en* $x_1 \neq x_0 \in E$
> *de* x_1 *part une seule flèche qui aboutit en* $x_2 \notin \{x_0, x_1\} \subset E$
> *de* x_2 *part une seule flèche qui aboutit en* $x_3 \notin \{x_0, x_1, x_2\} \subset E$
> *... etc. ...*

D'où cette nouvelle définition des ensembles infinis :

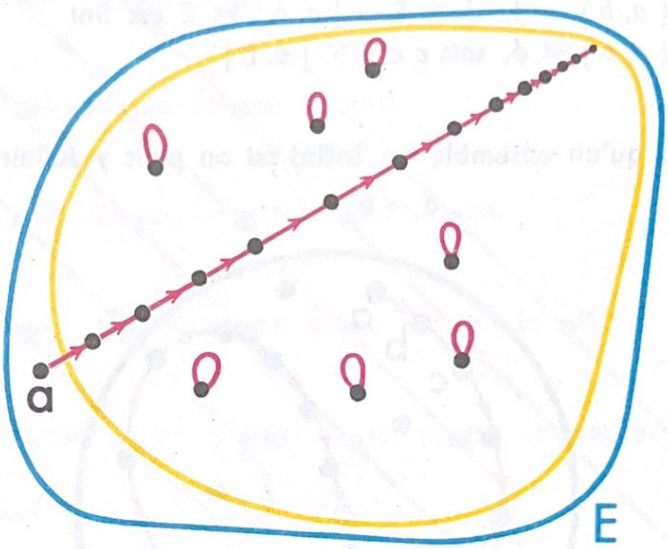
> DÉFINITION 3 — *Un ensemble est* ***infini*** *ssi on peut y définir une ribambelle.*

PROPOSITION 1 — *Tout ensemble infini est équipotent à l'une de ses parties propres.*

DÉMONSTRATION : Soit E un ensemble infini.

Définissons une ribambelle dans E et soit a son premier élément.

Ornons d'une boucle tout point (éventuel) de E d'où ne part aucune flèche de la ribambelle.



$E \# E \setminus \{a\}$

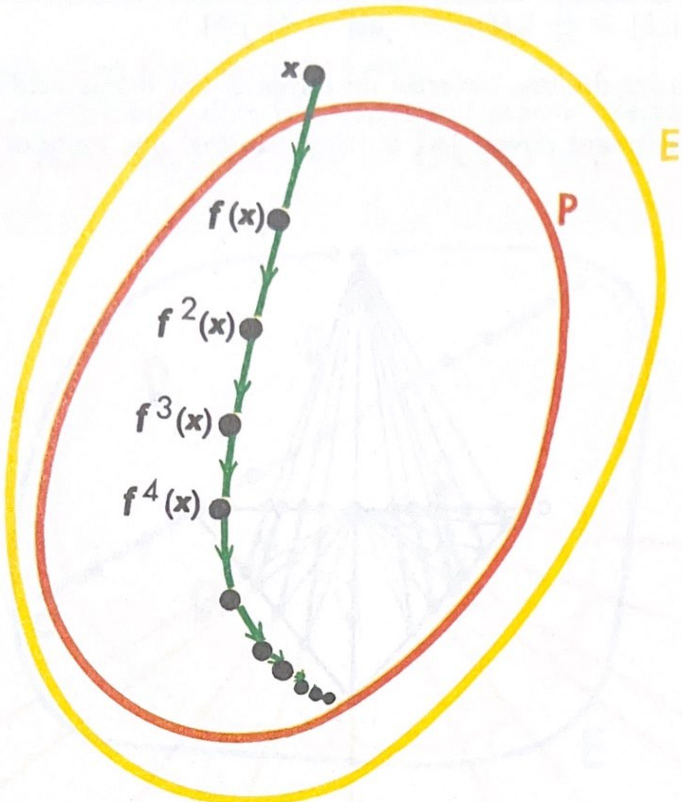
GRAPHE 122

Le graphe ainsi obtenu définit une bijection $E \to E \setminus \{a\}$, ce qui prouve que E est équipotent à sa partie propre $E \setminus \{a\}$.

EXERCICES

1. Définis une ribambelle dans ω.
2. Définis une ribambelle dans $E \setminus \{a\}$ (voir graphe n° 122).
3. Si E est infini et $a \in E$: $\# E = \# (E \setminus \{a\})$.
4. Si E est infini et $a, b, c \in E$: $\# E = \# (E \setminus \{a, b, c\})$.
5. Définis une ribambelle dans le plan Π.
6. Définis une ribambelle dans la droite D.
7. Définis une ribambelle dans *dir* D.

Nous avons construit une ribambelle dans E, donc E est infini.



GRAPHE 124

Réunissant les propositions 1 et 2, nous obtenons le

> THÉORÈME 2 (**Dedekind**) — **Un ensemble est infini ss'il est équipotent à l'une de ses parties propres.**

Il résulte du théorème de Dedekind que *si* F *est un ensemble fini, toute* **injection** F → F *est une* **permutation** *de* F. En effet :

Si l'injection *i* : F → F *n'est pas surjective*,

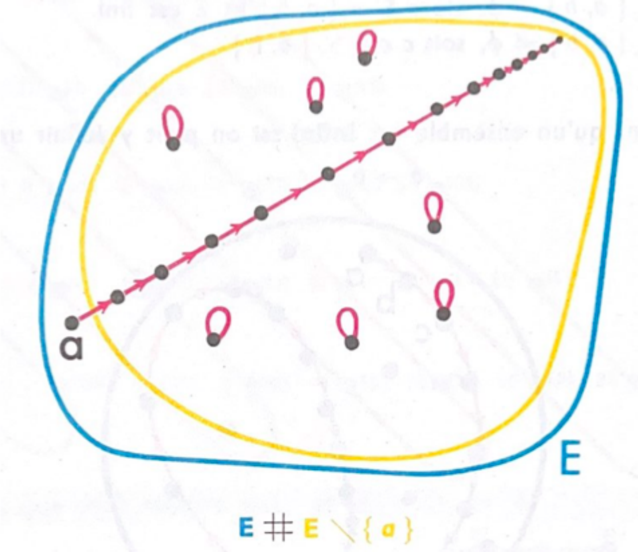
Alors F est équipotent à sa partie propre *i* F et en vertu du théorème 2, F est infini.

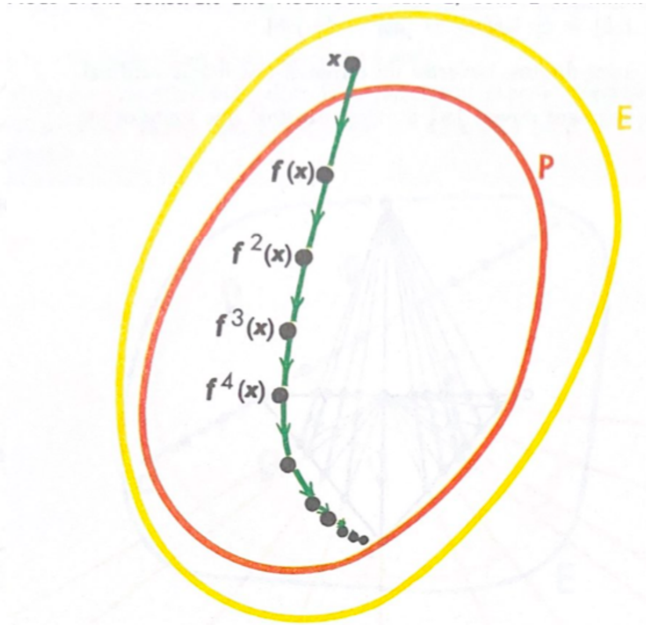
Comme F est fini, l'injection *i* : F → F doit être **surjective**.

La fonction *i* est alors une **permutation** de F.

THÉORÈME 3 — **Si F est un ensemble fini, toute injection F → F est une permutation de F.**

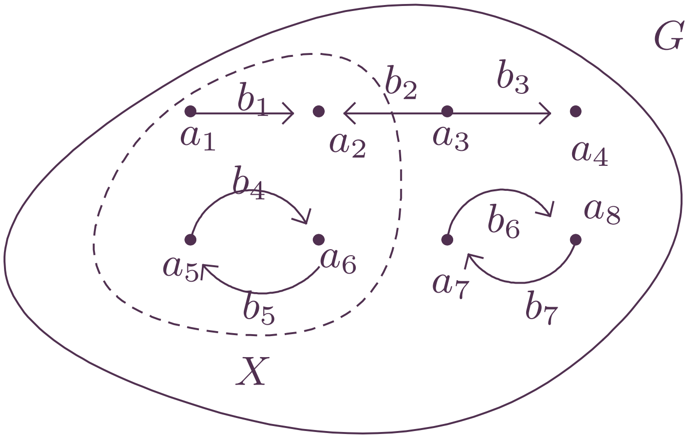
Théorème 1. *Soit E un ensemble. Alors E est infini ssi E équipotent à l'une de ses parties propres.*





Quelle logique aux graphes relationnels?

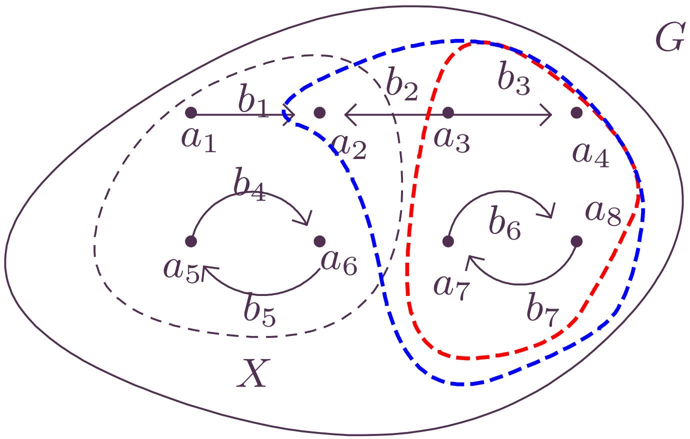
Prenons par exemple le sous graphe X de G comme suit



- $X = \{a_1, b_1, a_2, a_5, b_4, a_6, b_5\}$ et $G - X$ n'est pas un graphe
- $\partial X = X \cap \sim X = \{a_2\}$; ensemble des sommets de X, extrémités d'une arrête dont l'autre

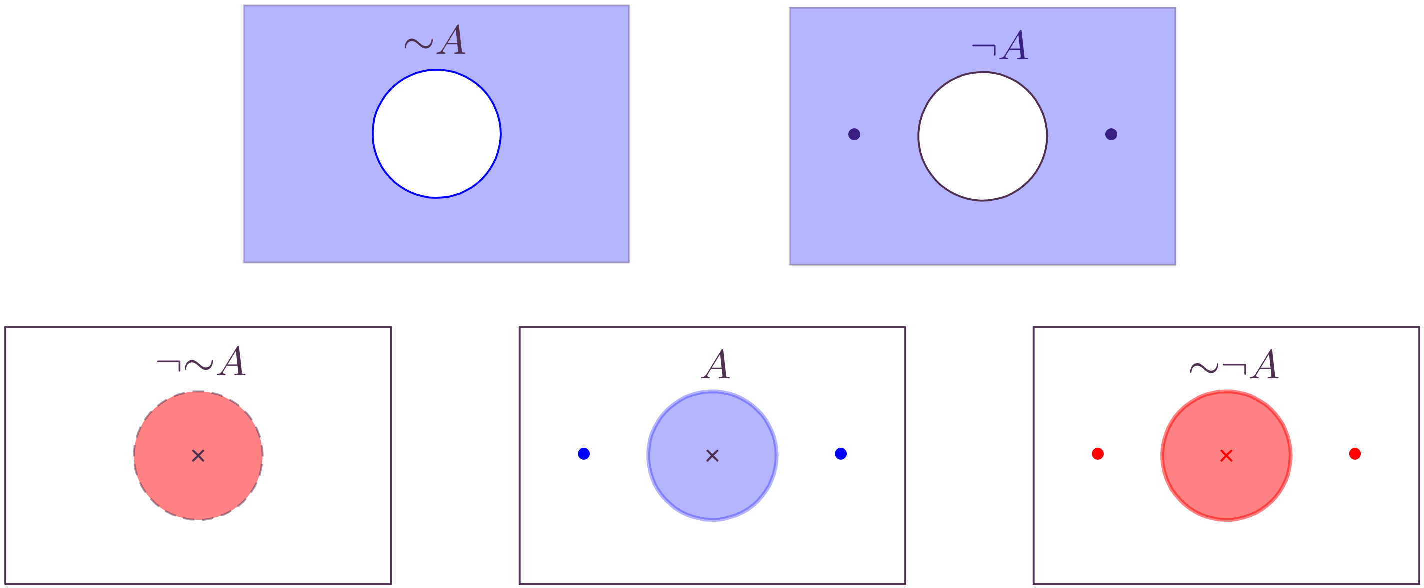
extrémité n'est pas dans X

- $\neg X$ le plus grand sous-graphe disjoint de X (en rouge)
- $\sim X$ le plus petit sous-graphe dont la réunion avec X donne G (en bleu)



Soit A réunion de deux points et d'un disque fermé mais épointé au centre. Alors on a deux inclusions

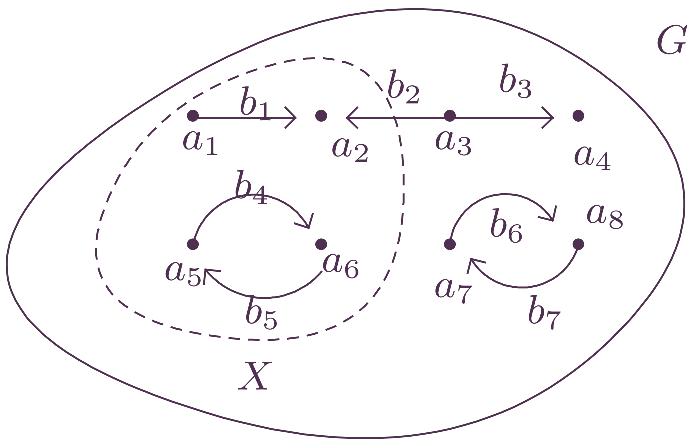
$$\neg{\sim}A \subseteq A \subseteq {\sim}\neg A$$



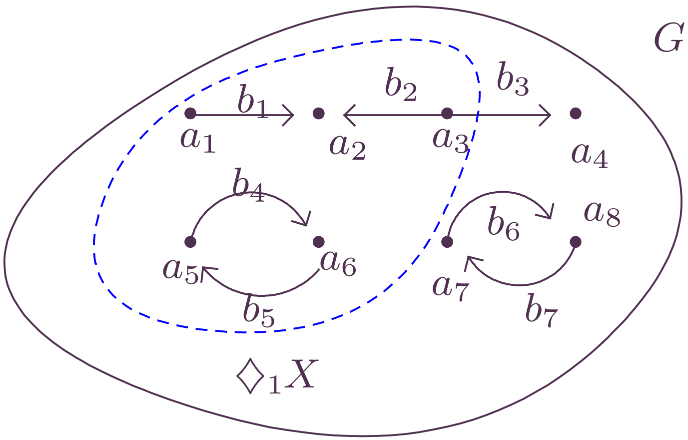
On définit $\Box_0 = \Diamond_0 = \mathrm{Id}$ et tant que nos objets de base ne soient pas bien complémentés, on définit:

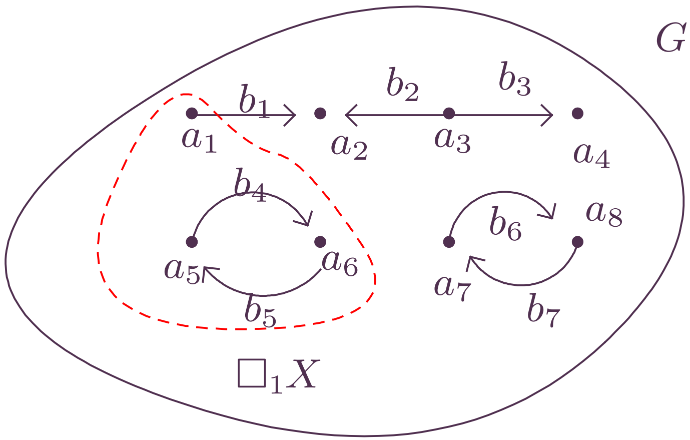
$$\Box_{n+1} = \neg{\sim}\Box_n \qquad \Diamond_{n+1} = {\sim}\neg\Diamond_n.$$

Le graphe G et son sous-graphe X

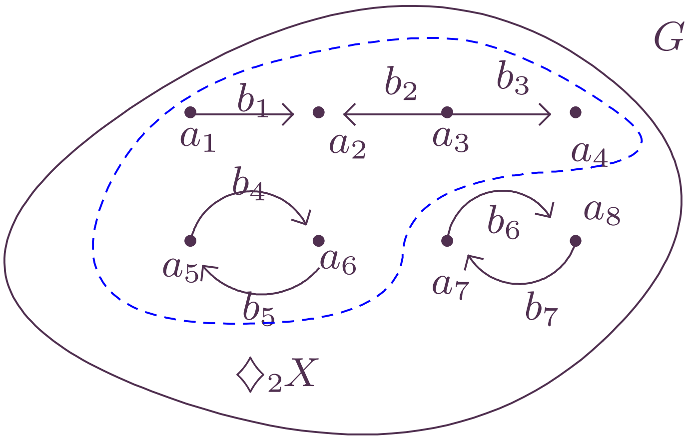


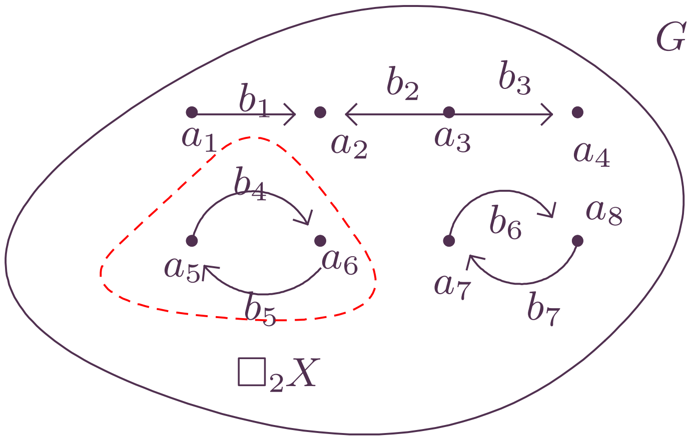
Premier étage:



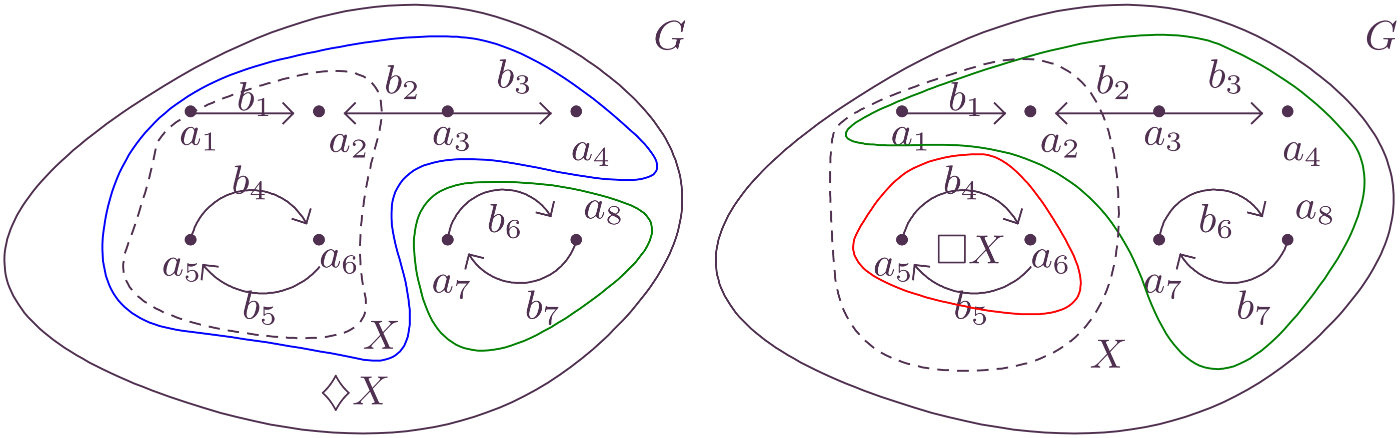


Deuxième étage





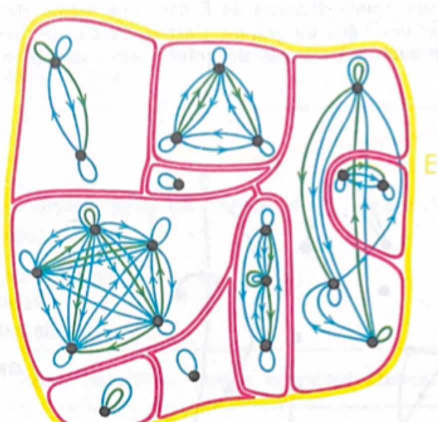
On remarque que $\Diamond_2 X$ et $\Box_2 X$ sont bien complémentés: ils n'ont plus de bord



Ainsi

- $\Box X$ est le plus grand élément complémenté tel que $\Box X \leqslant X$
- $\Diamond X$ est le plus petit complémenté tel que $X \leqslant \Diamond X$
- Si X est complémenté alors $\Diamond X = X = \Box X$

Si R avait été une équivalence, nous n'aurions rien dû ajouter (voir graphe 69).

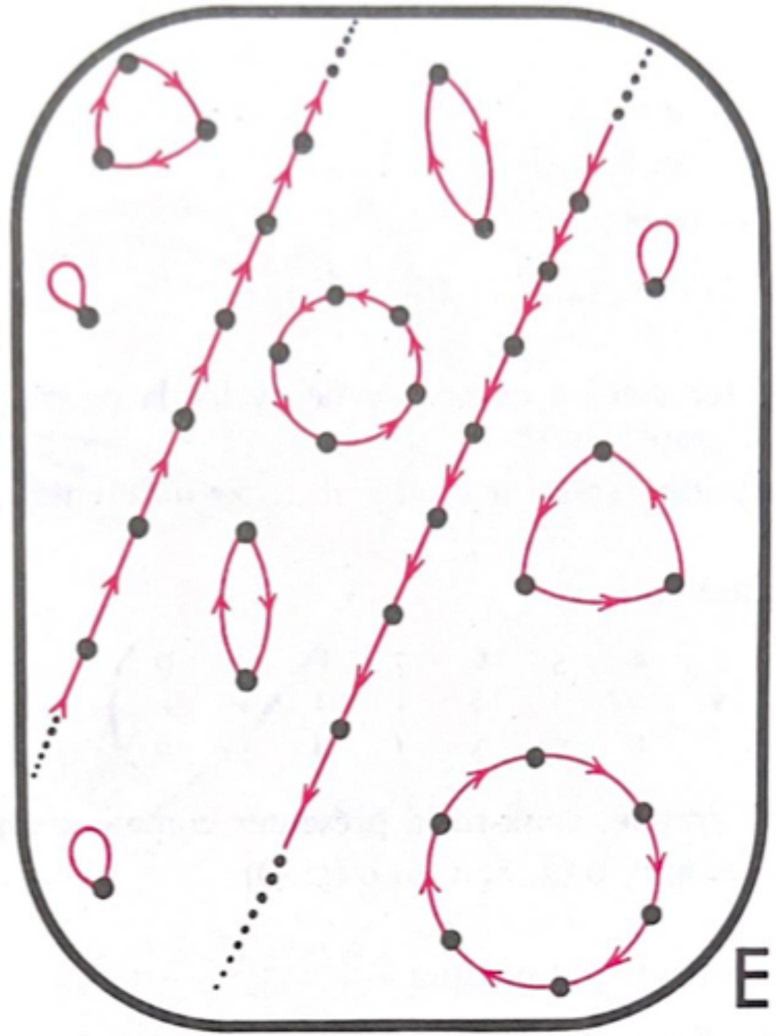


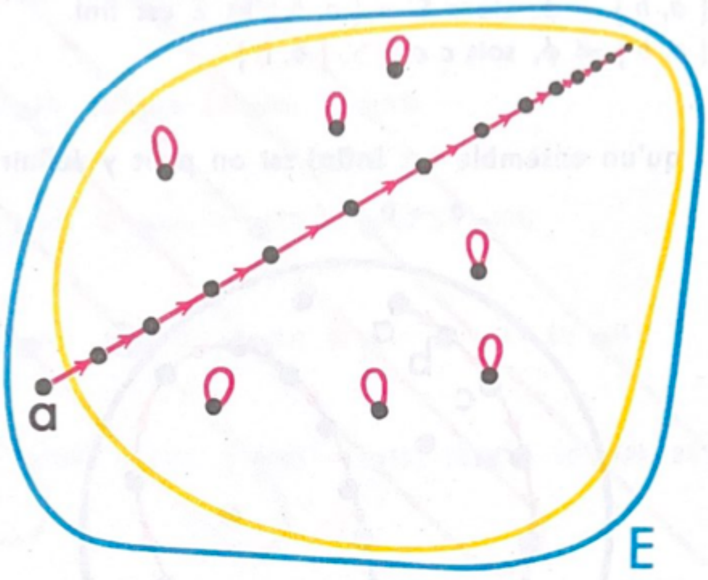
LA RELATION R DÉFINIE DANS E.
LA PARTITION $\mathcal{P}$ FOURNIE PAR R.
L'ÉQUIVALENCE Q FOURNIE PAR $\mathcal{P}$.
$R \to \mathcal{P} \to Q \to \mathcal{P} \to Q \to \mathcal{P}$

GRAPHE 72

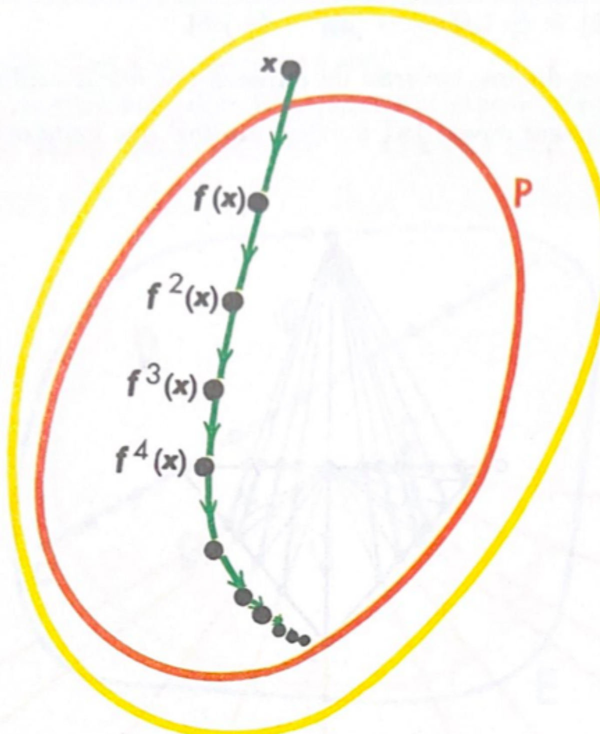
Nous résumons ces résultats dans les formules

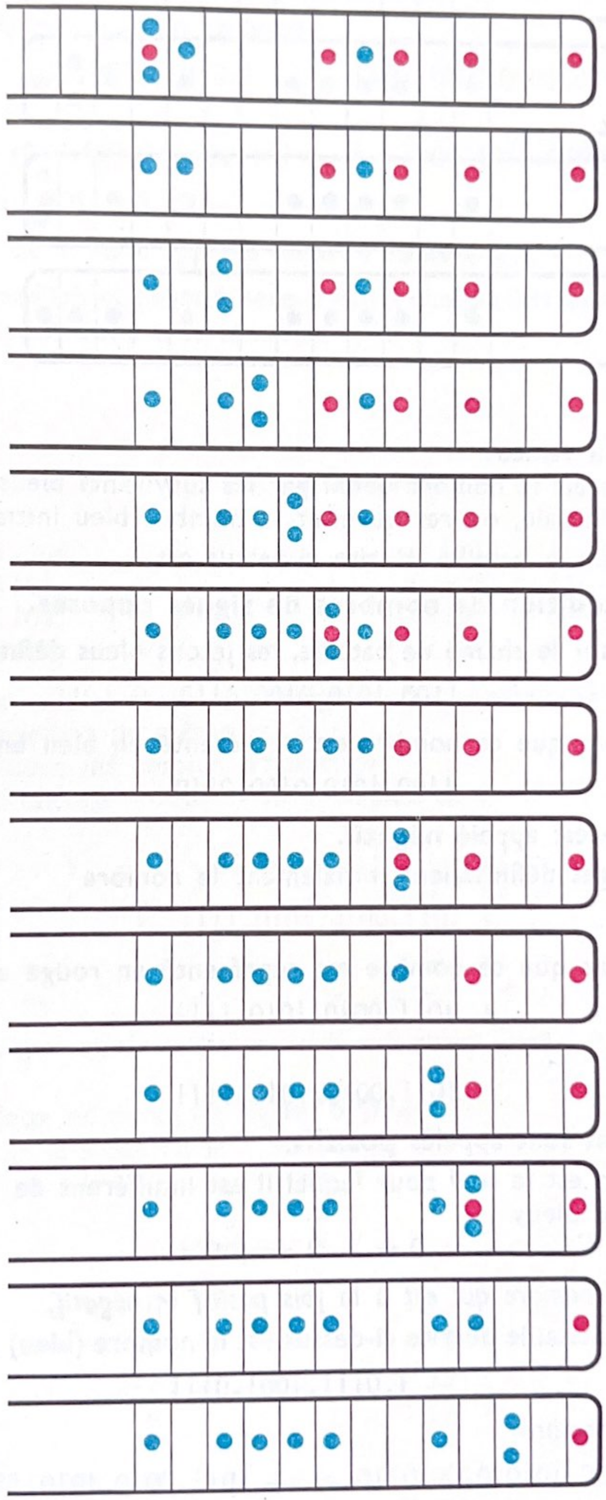
$$R \xrightarrow{\text{fournit}} \mathcal{P} \xrightarrow{\text{fournit}} Q \xrightarrow{\text{fournit}} \mathcal{P} \xrightarrow{\text{fournit}} Q \xrightarrow{\text{fournit}} \mathcal{P}$$



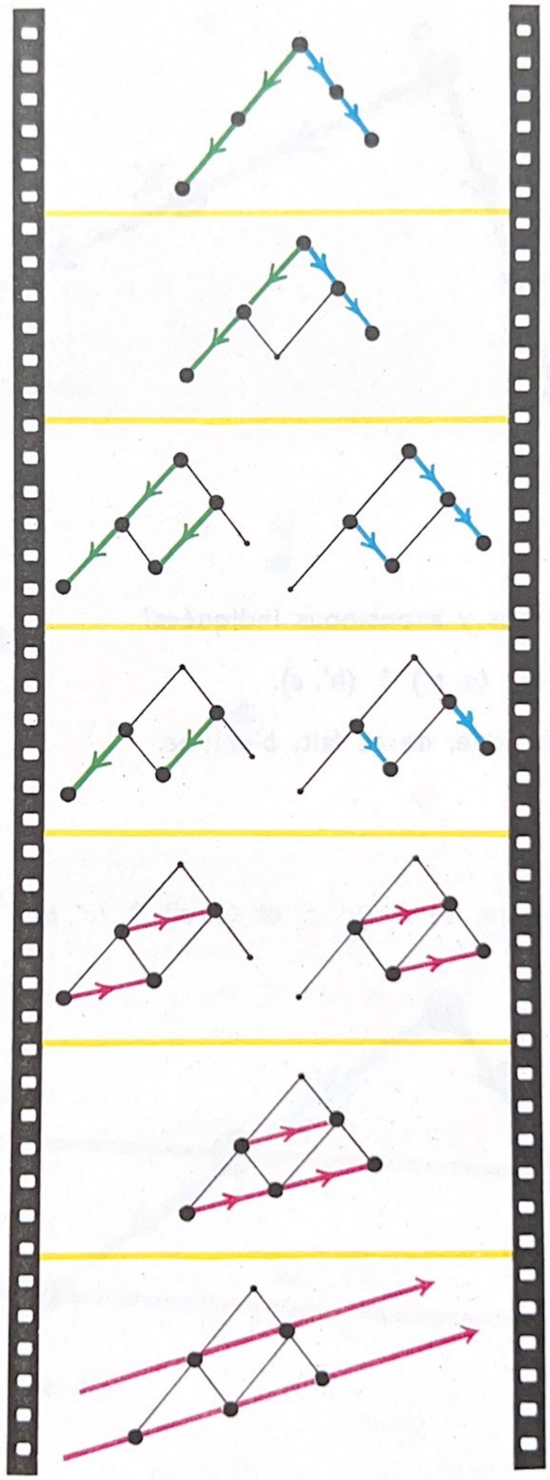


$E \# E \setminus \{a\}$





Voici le film de la démonstration.
Explique-la!



24

Groupes

1 — DÉFINITION DES GROUPES

— Veux-tu nous rappeler des exemples de groupes que nous avons déjà rencontrés?

— $\mathbf{Z}, +$

$\mathcal{T}, \circ$ $\quad$ $V, +$ $\quad$ $\Pi_o, +$

$\mathcal{S}E, \circ$

$\mathcal{P}E, \Delta$

— Que peux-tu dire des groupes $\mathcal{T}, \circ$; $\quad V, +$ $\quad$ et $\quad \Pi_o, +$?

— Ils représentent le même groupe au moyen de notations différentes.

— Veux-tu nous rappeler la définition des groupes?

G, $*$ est un groupe

ssi

1. Pour tout $x, y \in G$: $\quad x * y \in G$
2. Pour tout $x, y, z \in G$: $\quad (x * y) * z = x * (y * z)$
3. Il existe $\nu \in G$ tel que pour tout $x \in G$: $\quad x * \nu = x = \nu * x$
4. Pour tout $x \in G$, il existe $\overline{x} \in G$ tel que : $\quad x * \overline{x} = \nu = \overline{x} * x$

— Autrement dit, un groupe G, $*$ est un ensemble G muni d'une loi $*$

1. interne et partout définie
2. associative
3. admettant le neutre ν
4. et telle que tout élément $x \in G$ possède un symétrique $\overline{x}$.

— Quel est le neutre dans chacun des exemples que tu nous as donnés?

— Le neutre de Z, + est le nombre 0.
Le neutre de $\mathfrak{T}$, o est la transformation identique 1_Π.
Le neutre de V, + est le vecteur nul $\vec{o} = \vec{aa}$.
Le neutre de Π_o, + est le point o.
Le neutre de $\mathcal{S}$E, o est la transformation identique 1_E.
Le neutre de $\mathcal{P}$E, Δ est l'ensemble vide ϕ.

— Veux-tu, dans chacun de ces exemples, décrire le symétrique d'un élément quelconque?

— Dans Z, +, le symétrique de l'entier rationnel a est l'entier rationnel $-a$.
Dans $\mathfrak{T}$, o, le symétrique de la translation t est la translation réciproque t^{-1}. (On l'obtient en retournant toutes les flèches de t).
Dans V, +, le symétrique du vecteur $\vec{ab}$ est le vecteur $-\vec{ab} = \vec{ba}$.
Dans Π_o, +, le symétrique d'un point a est le symétrique de ce point par rapport à o. On le note $-a$. (Nous pouvons écrire $-a = s_o(a)$).
Dans $\mathcal{S}$E, o, la symétrique de la permutation $f \in \mathcal{S}E$ est la permutation réciproque f^{-1}. (On l'obtient en retournant toutes les flèches de f).
Dans $\mathcal{P}$E, Δ, toute partie A de E est sa propre symétrique.

— Veux-tu retrouver dans le livre les passages qui justifient tes réponses?

	groupe	loi	neutre	un élement et son symétrique	
Un groupe en général	G, $*$	$*$	ν	g	$\bar{g}$
Le groupe des entiers rationnels	Z, +	+	0	z	$-z$
Le groupe des translations	$\mathfrak{T}$, o	o	1_Π	t	t^{-1}
Le groupe des vecteurs	V, +	+	o	$\vec{v}$	$-\vec{v}$
Le groupe du plan pointé	Π_o, +	+	o	a	$-a$
Le groupe symétrique de E	$\mathcal{S}$E, o	o	1_E	f	f^{-1}
Le groupe $\mathcal{P}$E, Δ	$\mathcal{P}$E, Δ	Δ	ϕ	A	A

6 — EQUATIONS DANS UN GROUPE

Nous nous plaçons dans un groupe G, $*$.

Si chacune des lettres a, b, c désigne un élément de G, nous allons montrer qu'il existe un et un seul élément $x \in G$ tel que

$$\boxed{a * x * b = c}$$

Voici un film de cette démonstration.

$$a * x * b = c$$
$$\Updownarrow$$
$$\bar{a} * a * x * b * \bar{b} = \bar{a} * c * \bar{b}$$
$$\Updownarrow$$
$$\nu * x * \nu = \bar{a} * c * \bar{b}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

THÉORÈME 2 — **Si chacune des lettres *a*, *b*, *c* désigne un élément du groupe G, $*$, l'équation**

$$\boxed{a * x * b = c}$$

admet, dans G, $*$, l'unique solution

$$\boxed{x = \bar{a} * c * \bar{b}}$$

Les formules

$$a * x * b = c \qquad \text{et} \qquad x = \bar{a} * c * \bar{b}$$

sont **équivalentes** : elles fournissent exactement la même information

$$\underset{\textbf{EQUATION}}{\boxed{a * x * b = c}} \iff \underset{\textbf{SOLUTION}}{\boxed{x = \bar{a} * c * \bar{b}}}$$

« Catégories et ordinateurs sont des graphes de flèches qui revendiquent le statut géométrique d'un dessin effectivement tracé, à peine esquissé, ou totalement imaginé. [...] son coloriage (celui du graphe), variable au cours du temps, est de la pensée. »

Il y a un quart de siècle, les premiers frémissements annonciateurs d'une ère nouvelle en éducation mathématique proclamaient déjà l'impérieuse nécessité de comprendre et connaître l'ordinateur, afin de n'en pas devenir l'esclave.

Quand un élève – spontanément, ou à la suite d'une question – énonce une affirmation mathématique, il est tout naturel de lui demander pourquoi? et de le prier de nous convaincre de sa vérité. Entre gens civilisés, il nous répondra en partant de nos convictions communes et en tenant compte de nos intelligences et psychologies respectives.

[...]L'ordinateur et sa mathématique moderne ne sont pas nihilistes. C'est l'une des branches ou des tendances de la mathématique de toujours qui s'y trouve magnifiée.

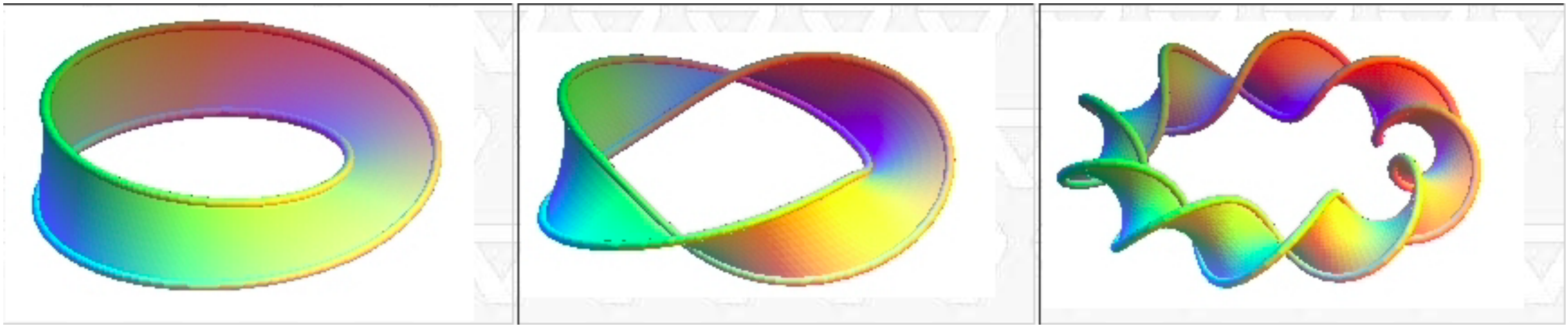
Papy, L'éducation mathématique (1984).

« L'oeuvre doit être considérée comme un symptôme au sens freudien du terme, mais un symptôme de soi-même, à la fois suffisant et nécessaire pour exemplariser l'unité des quatre pôles de la psyché : le voeu et son surmoi, le moi et sa réalité. » et que « L'œuvre inauthentique n'a pas d'inconscient. Elle n'est solution exemplaire d'aucun problème qui lui soit intrinsèque » N. Abraham

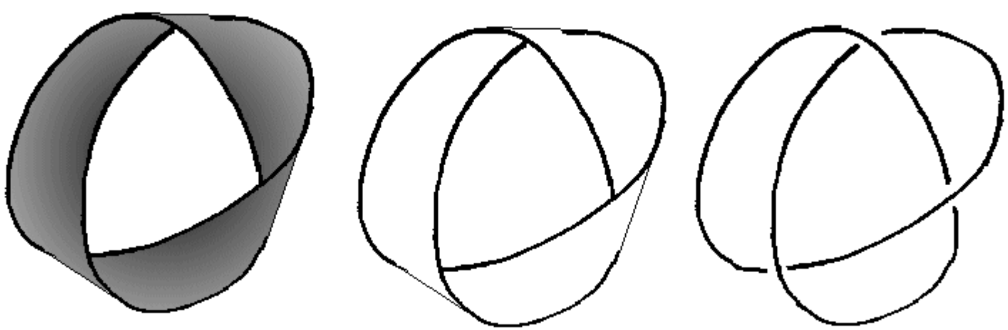
- Si l'oeuvre est symptôme, elle traverse alors les trois anneaux borroméens représentant les registres Réel, Imaginaire et Symbolique.
- L'oeuvre authentique, ayant un inconscient, traverse donc le noeud de façon inorientable - sous la forme d'un ruban de Moebius.
- L'oeuvre authentique, étant solution exemplaire de problèmes qui lui sont intrinsèques, laisse une trace de cette résolution dans son propre fil: en quelque sorte, elle *se noue*.

Idéogramme synthétique

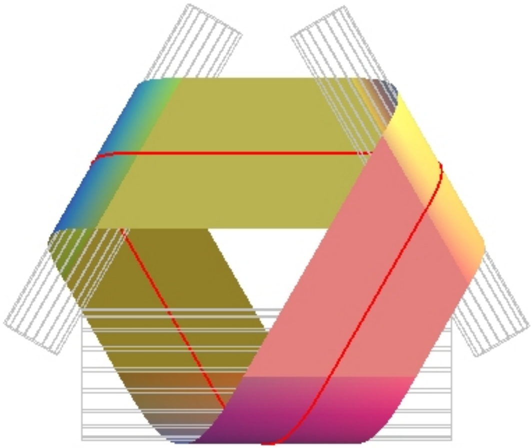
Le ruban de Mobius peut compter $1, 3, 5\ldots$ demi-torsions.

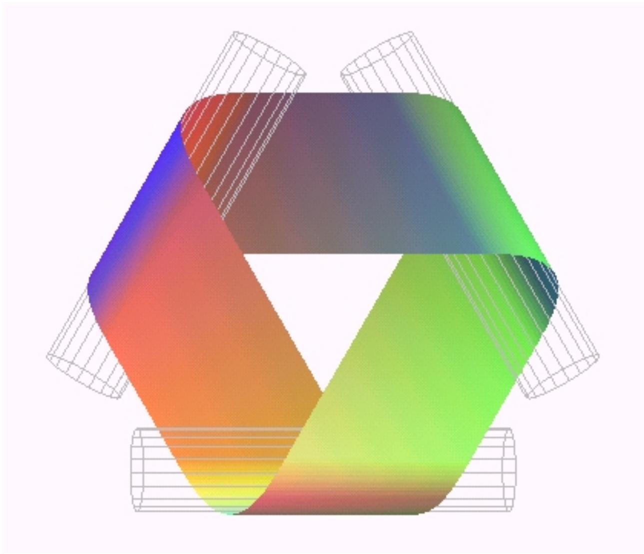


Bord du ruban à 3 demi-torsions$=$noeud de trèfle$\neq$ cercle



Rubans$=$bandes tirées par trois solides cylindriques. Ainsi on obtient les représentations suivantes pour les rubans à un (à gauche) et trois demi-torsions (à droite) :

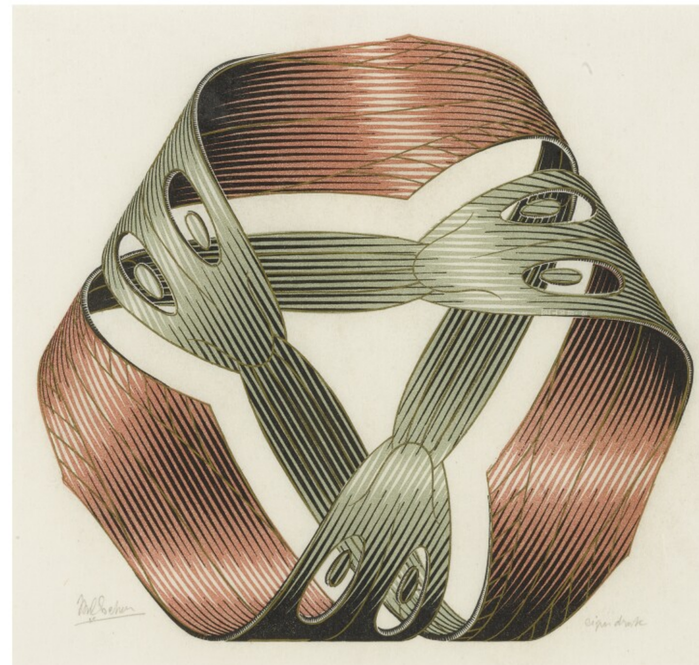




Inscription sur le noeud borroméen:

Attention, le ruban ainsi inscrit ne constitue pas un noeud borroméen (ou brunnien) à 4 anneaux[1].

D'où une *bande en trèfle* (inscrite dans un noeud borroméen)



1. contrairement à l'image Lacanienne communément diffusée du sinthome.