De l'inauguration d'une intellectualité mathématique matérialiste codifiée catégoriquement

PAR MARTIN GONZALEZ
University of Luxembourg
Email: martin.gonzalez@uni.lu

Séminaire Mamuphi - 9 Octobre 2021

1 Introduction

Mon enjeu sera ici de rehausser, contre l'impératif « vivre sans idée » généralisé dans notre actualité, la figure du mathématicien pensif, et je me centre à cette occasion sur celle du mathématicien W. Lawvere, mathématicien dont les travaux sont souvent aiguillés à la logique mathématique. Nous donnerons une lecture alternative de ce dont le mathématicien W. Lawvere est le nom en espérant convaincre l'auditeur qu'il y a là une ressource extrêmement riche pour la pensée en ce qu'il inaugure un espace d'intellectualité mathématique de type nouveau, fondamentalement différent de ceux par exemple de Weyl et Poincaré et dont je renvoi à l'exposé mamuphi les étudiant.

Cet exposé se constitue comme annonce d'un programme d'étude dont le fil conducteur est celui d'ouvrir la question d'une Idée mathématique des mathématiques, d'une notion d'intellectualité mathématique qui ne soit pas simplement réflexive mais dotée d'une autonomie relative au point même ou elle constitue son écriture propre.

Notre objectif d'aujourd'hui se restreindra à élucider comment Lawvere inaugure dès 1960 un tel espace d'intellectualité de type nouveau visant à étendre ce que mathématique désigne comme monde peuplé de constructions mathématiques en situation et comme intensité maximale de la pensée à l'oeuvre dans ce monde des mathématiques.

Cette extension se fera en deux étapes:

- Une première étape consiste à constituer affirmativement l'autonomie relative d'une intellectualité mathématique au point même ou elle se dote d'une écriture propre : l'écriture catégorielle.
- Une deuxième étape, redoublant la première, constitue une méthode de dialectique affirmative dans cet espace d'intellectualités à la lumière de la notion de paires d'adjoints.

Nous analyserons comment Lawvere inaugure ces deux extensions en avançant l'écriture catégorielle comme écriture propre à ce que, de l'intellectualité mathématique peut-être codifié pour ensuite pouvoir être dit, écriture qu'il soutient étendre celle de la pensée mathématique - l'algèbre -. Nous caractériserons le projet Lawverien sous cet angle, en y articulant les possibles ainsi ouverts tout comme les nouveaux risques et les éventuels échecs, tous procédant de l'inauguration d'un tel espace de pensée. Nous tenterons ensuite de démarquer fidèlement la ligne spécifique que Lawvere défendra de l'intérieur de cet espace ainsi inauguré.

1.1 Hypothèses de travail

Partant du fait que le nom propre de l'écriture de la pensée mathématique est le mot "algèbre". Rappelons-le, al-Khawârizmî invente, en formulant, l'algèbre sans inventer encore, en formalisant, l'écriture algébrique (le « x »). Ainsi, ce mot se partage dialectiquement comme écriture et comme pensée mathématique. Tout de même, "solfège" nomme l'écriture et la pensée codifiée du discours musical qui va avec (cf. son autonomisation par rapport à la codification du discours poétique dans le grégorien). Autrement dit, dans les deux cas, écriture et pensée autonome sont dialectiquement liées. Le point clé que nous essayerons de défendre est qu'une intellectualité mathématique qu'on pourrait qualifier matérialiste se distingue d'une plus commune réflexivité mathématique (telles celles de Weyl et Poincaré) par là même qu'elle est dotée d'une écriture propre: l'écriture catégorielle.

L'étendue du développement nécéssaire pour décrire ce qu'intellectualité mathématique matérialiste veut dire est, je le pense, encore devant nous, et ne pourrait s'encapsuler dans ce seul exposé qui se veut seulement une annonce de programme de travail pour un tel développement. Je tenterai d'esquisser une première caractérisation affirmative de ce que j'entends par intellectualité mathématique en les points suivants

1. Son enjeu d'orientation est celui de la constitution déclarée et en réflexion d'une idée proprement mathématique des mathématiques
2. Elle est l'affaire du mathématicien *pensif* (plutôt qu'elle ne l'est du mathématicien réflexif, encore moins du philosophe, l'épistémologue, le logicien..)
3. Elle est dotée d'une écriture propre, catégorielle (tout comme la pensée mathématique est dotée d'une écriture propre: algébrique).
4. L'intellectualité mathématique questionne des *oeuvres* mathématiques (puis en second temps ses catégories de déploiement spécifiques: l'espace, le continu, le nombre, la grandeur, la symétrie, l'axiomatique…)
5. Elle s'adresse à et se met au service de tout un chacun (et non pas seulement de ceux chez qui elle agit tout en restant dans son propre terrain)
6. Elle se lie au destin de son époque, elle construit des libres rapports avec d'autres intellectualités auto-constituées et se donne les moyens d'intervenir sur son environnement (au lieu de s'exiler en se refermant sur son autonomie)
7. Elle peut rétroactivement être compatible - tout en restant autonome et différente - avec un enjeu philosophique (en l'occurence, dans cet exposé, celui d'un matérialisme de type nouveau, affirmatif, tel celui avancé par Alain Badiou dans Logiques des Mondes.

2 L'écriture catégorielle

Pour Lawvere, l'écriture catégorielle codifie ce qu'il y a d'universel dans les mathématiques. Le mot qu'il utilisera sera celui de fondations mais il va le circonscrire dans une problématique proprement mathématique. Il ne s'agit ni d'in point de départ, ni d'une justification. Son objectif est d'avancer des concepts de la mathématique qui lui sont universels dans leur dynamique. Nous verrons ce que de la théorie des catégories et plus précisément les transformations naturelles apporte comme premier éclairage. Ensuite nous verrons comment certains processus dialectiques peuvent être formalisés par des paires de foncteurs adjoints qu'on appellera « situations adjointes ». Dotés de la codification tels processus dialectiques cela nous montre qu'il est possible de formuler une intellectualité mathématique et qu'elle se dote matériellement d'une autonomie relative.

Le concept de topos élémentaire vient comme idée extra-mathématique d'un lieu à l'intérieur duquel il est possible de faire et réfléchir aux mathématiques. Il sera le fruit d'une dialectique affirmative tout en constituant un lieu où une logique interne proprement mathématique peut s'y déployer et être restituée. Cette notion se constitue comme intersection de différentes situations adjointes. On le verra, ils ne sont pas immédiatement intramathématiques ou logiques si bien qu'ils portent des fruits dans leur effet rétroactif vers la logique et la pensée mathématique. Ce faisant, ils ouvrent des nouveaux possibles pour la mathématique comme pour la logique et éclairent la philosophie:

- Géométrisation de la logique (Lawvere, Girard, Caramello, Döring)
- Unifications intra-mathématiques (Caramello: équivalences de Morita, topos relatifs)
- Modalités/triplets adjoints et Hegel (cet après-midi)
- Logiques des Mondes - A. Badiou

Retenons que ce lieu n'est pas le tout de ce dont l'écriture catégorielle est capable. Nous le verrons, d'autres situations adjointes formaliseront des lieux ou logique intuitionniste et paraconsistante co-existent. Nous ne le traiterons pas mais remarquons quand même que le même principe qui opère pour des paires d'adjoints peut être utilisée dans un cadre plus structuré, celui des catégories supérieures nous donnant par exemple une notion de $(\infty, 1)$-topoï élémentaires.

Nous introduirons transformations naturelles et foncteurs adjoints en ce qu'ils formalisent comme éclairage dans une situation mathématique.

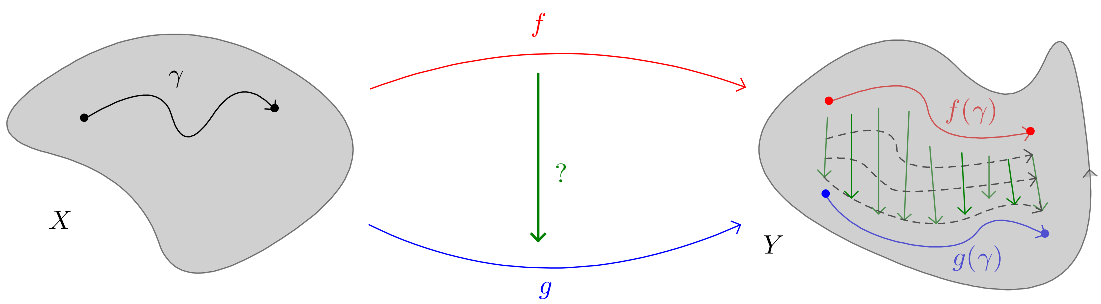
2.1 Une situation mathématique

Quelques phénomènes récurrents en mathématiques concernent

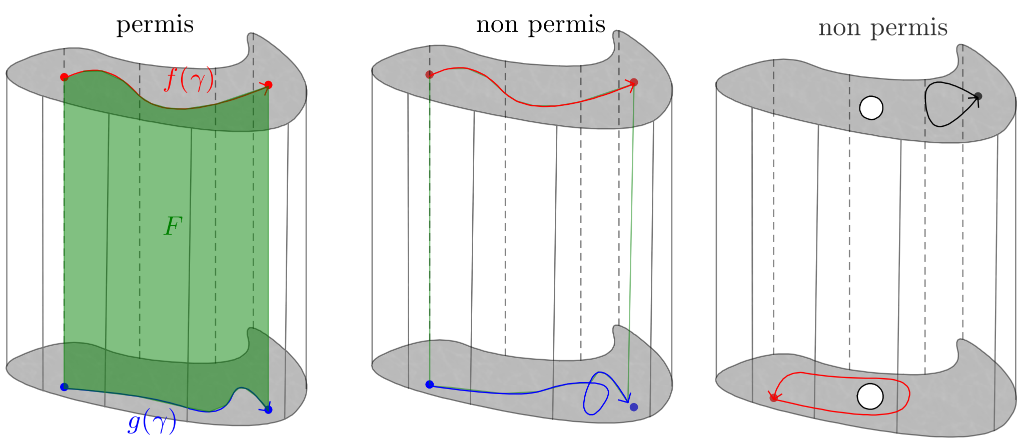
1. des notions d'équivalence plus faibles que la notion d'isomorphisme ensembliste permettant d'identifier des objets,
2. une double dynamique (compositionnelle et juxtapositionnelle) d'assemblage,
3. chaque dynamique a sa propre opératoire (associativité, neutralité, unitarité..).

Une transformation naturelle est un morphisme entre deux objets codifiant, dans sa structuration même, le mouvement de ces trois composantes. Voyons cela plus en détail en prenant appui sur la notion d'homotopie.

En présence de deux fonctions continues f, g entre deux espaces topologiques X, Y nous voulons formuler ce phénomène particulier où les images par f et g d'un arc continu γ de X peuvent se déformer l'une vers l'autre sans qu'il soit nécéssaire de les couper pour ce faire. On appellera l'opération consistant à pousser $f(\gamma)$ vers $g(\gamma)$ une « homotopie » qu'on notera $f(\gamma) \simeq g(\gamma)$.



Dire que $f(\gamma)$ se déforme de manière continue vers $g(\gamma)$ sera interprété comme la présence d'au moins une bande F *non arrachée*, dans le « cylindre » $Y \times [0, 1]$:

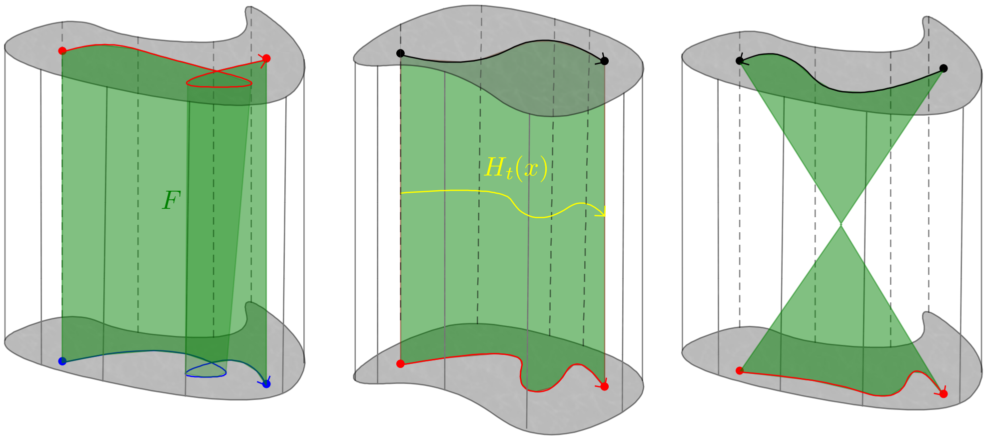


De telles bandes n'existent pas en général mais, quand elles existent, tout développement mathématique consistant devrait dans cette situation assurer les points suivants

- La bande « identité » $f(\gamma) \times [0, 1]$ n'est jamais arrachée quelque soient γ et f continues
- On peut toujours retourner une bande sans l'arracher. On gardera tout de même mémoire de la direction de la bande (de haut en bas)

- On peut coller deux bandes soit horizontalement (par juxtaposition de chemins) soit verticalement (par pré-composition ou post-composition). Si elles sont pas arrachées et correctement collés alors elles forment une bande non arrachée.
- Si $g(\gamma)$ et/ou $f(\gamma)$ sont réduits à un seul point et par là donnent à des bandes « triangulaires », cela ne change rien quant à leur caractère arraché ou pas.
- Si γ ne s'auto-intersecte pas, elle crée une bande triangulaire soutenue par un de ses points. On dira que γ est contractile.

Quelques autres exemples:



A gauche, on a une bande avec des la même quantité de boucles, orientées dans le même façon. Au milieu toute étape intermédiaire (horizontale) entre les extrémités d'une bande est homéomorphe à l'une des extrémités, à droite ce n'est pas le cas (γ n'est pas homéomorphe à un point).

L'écriture algébrique formalisant ces bandes est celle d'une fonction (qu'on dira *régionale*) continue

$$\begin{array}{rcl} H_\gamma^{f,g}: X_{|\gamma} \times [0,1] & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} H(x,0) := f(x) & x := \gamma(h) \\ H(x,t) & \text{intérieur horizontal de la bande} \\ H(x,1) := g(x) & \end{array} \right. \end{array}$$

où $X_{|\gamma}$ est la restriction de X à l'image du chemin continu $\gamma: [0,1] \to X: h \mapsto \gamma(h)$. Ainsi,

- une bande sera arraché si $H_\gamma^{f,g}$ n'est pas continue sur le paramètre $t \in [0,1]$ et non arrachée sinon
- f et g sont homotopes si la fonction globale $H^{f,g}: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ est continue
- f et g sont localement homotopes toute restriction $H_U^{f,g}: U \times [0,1] \longrightarrow Y$ à un ouvert $U \subseteq X$ est continue.

A partir ce cela, notre situation mathématique peut être soigneusement formalisée algébriquement (donnant les notions de group(oïd)e fondamental, revêtements,...) avec le but d'étudier quand ces bandes sont ou ne sont pas arrachées. Notre but ici n'est pas de developper un tel formalisme, classique dans un cours de topologie, mais de synthétiser le mode de fonctionnement de telles bandes en une seule structuration. Faisons une première évaluation de notre situation:

- Notre objet central d'étude est le fonctionnement des bandes.
- Ces bandes sont constituées de 4 extrémités:
    - les extrémités horizontales représentent des chemins (possiblement contractés en des points), images d'un chemin γ par application de 2 fonctions continues entre 2 espaces topologiques X, Y.

  - ○ Les extrémités verticales représentent l'action de « pousser » les extrémités horizontales, créant ainsi une bande.

- Les bandes suivent deux logiques d'assemblage, verticale ou horizontale, selon la bonne juxtaposition de chemins où selon la bonne composition de fonctions continues.
- L'assemblage (vertical ou horizontal) de trois bandes F_1, F_2, F_3 correctement disposées est associatif (on peut commencer par assembler F_2, F_3 et assembler le résultat avec F_1 ou alors commencer par assembler F_1, F_2 puis procéder de même.
- Pour toute fonction continue $f: X \longrightarrow Y$, et tout chemin continu γ de X, il y a, à minima, une bande non arrachée consistant en une corde dont les deux extrémités s'identifient à $f(\gamma)$. En particulier, si $X = Y$, $f: \mathrm{id}_X$ et γ est contracté en un point $x \in X$, il y a une telle bande non arrachée.

2.2 Transformations naturelles

L'écriture catégorielle a ceci de singulier qu'elle viendra éclairer le fonctionnement des bandes en codifiant explicitement - en amont de la formalisation algébrique des objets mathématiques en jeu - un type particulier d'évaluation qu'on a fait de notre situation. Ainsi donc, sans revenir aux définitions de catégories et foncteurs (et encore moins aux questions d'axiomatique ensembliste), on peut dire que notre évaluation s'est faite en plusieurs étapes:

1. On constitue une catégorie **Top** dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les fonctions continues.
2. Pour un espace topologique X on constitue une catégorie $\mathcal{P}X$ dont les objets sont les points de X et les morphismes sont les chemins continus dans X entre deux points de X.
3. Pour X, Y espaces topologiques, on constitue une catégorie $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}X, \mathcal{P}Y)$ dont les objets sont les fonctions continues $X \to Y$ et les morphismes sont les bandes non arrachées i.e. des homotopies entre chemins continus $f(\gamma)$ et $g(\gamma)$.
4. Au total, il s'agit donc de constituer une « 2-catégorie » $\mathcal{P}\mathbf{Top}$ à expliciter (en ce qu'elle a des objets, des morphismes et des 2-morphismes avec des règles plus ou moins strictes d'assemblage).
5. Pour revenir à nos bandes, elles seront très exactement les 2-morphismes de $\mathcal{P}\mathbf{Top}$ qui sont inversibles.

Rappelons quelques définitions élémentaires en théorie des catégories. On note

- $\mathbf{2}$ la catégorie avec deux objets qu'on notera $0, 1$ et un seul morphisme $\sigma: 0 \longrightarrow 1$ entre ces objets.
- $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ le produit cartésien de deux catégories et un bifoncteur $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{G}$ est un foncteur en ses deux composantes.
- $\circ$ la composition de morphismes et $\bullet$ la composition de foncteurs.

Définition-Proposition 1. *Soient $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle entre F et G, notée $\alpha: F \Longrightarrow G$, est, de manière équivalente,*

1. *un bi-foncteur*
$$\alpha: \mathcal{C} \times \mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{D}$$
tel que $\alpha(-, 0) = F$ et $\alpha(-, 1) = G$.
2. *la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $\alpha_X: F(X) \longrightarrow G(X)$ dans $\mathcal{D}$ tel que pour tout $f: X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ on a*
$$\alpha_Y \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_X. \tag{1}$$

Si de plus tout α_X est un isomorphisme de $\mathcal{D}$ ou, de manière équivalente, on a

$$\alpha \bullet \alpha^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \text{ et } \alpha^{-1} \bullet \alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{C} \times \mathbf{2}} \tag{2}$$

alors α est appelé isomorphisme naturel.

Démonstration.

- $1 \Rightarrow 2$: on définit $\alpha_X := \alpha(\mathrm{id}_X, \sigma)$, alors la formule ci-dessus découle de

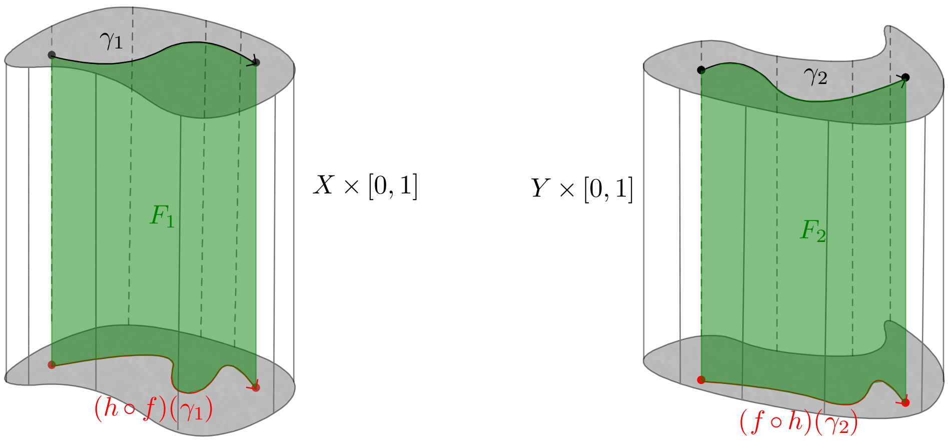
$$(f \times \mathrm{id}_1) \circ (\mathrm{id}_X \times \sigma) = (\mathrm{id}_Y \times \sigma) \circ (f \times \mathrm{id}_0).$$

- $2 \Rightarrow 1$: il suffit de poser $\alpha(f, \mathrm{id}_0) = F(f)$, $\alpha(f, \mathrm{id}_1) = G(f)$ et $\alpha(f, \sigma) = G(f) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ F(f)$. □

De cette manière, la donnée d'une bande non-arrachée avec et dans toute sa dynamique propre se voit synthétisée, encapsulée dans la notion d'isomorphisme naturel.

2.3 Equivalences d'homotopie

Soient deux fonctions continues $f: X \to Y$ et $h: Y \to X$. D'une part, on peut les composer de deux manières: $(f \circ h): Y \to Y$ et $(h \circ f): X \to X$. D'autre part, on a les identités id_X et id_Y. Notre objet central d'étude devient donc le fonctionnement des bandes



Contrairement à la situation de deux fonctions bijectives inverses l'une de l'autre en théorie des ensembles, plusieurs cas de figure se distinguent. En effet, à partir de cette situation, où $(h \circ f)(\gamma_1) \simeq \gamma_1$ et $(f \circ h)(\gamma_2) \simeq \gamma_2$, il se peut que

- h et f ne soient pas bijectives. Par exemple, un segment consiste en une infinité de points et ne peut pas être en bijection avec un point sur lequel il se serait contracté.
- les extrémités des bandes soient différentes: $(h \circ f)(\gamma_1) \neq \gamma_1$ ou $(f \circ h)(\gamma_2) \neq \gamma_2$ (comme le montre l'image ci-dessus)

En revenant à notre formalisation algébrique,

- X et Y sont homotopiquement équivalents si $H^{h \circ f, \mathrm{id}}$ et $H^{f \circ h, \mathrm{id}}$ sont continues.
    - Un disque est homotopiquement équivalent à un point
- X et Y sont homéomorphes ssi $H^{h \circ f, \mathrm{id}} = \mathrm{Id}_X$ ssi $H^{f \circ h, \mathrm{id}} = \mathrm{Id}_Y$.
    - Les ensembles sous-jacents à ces deux espaces sont alors isomorphes.
    - Un cercle et un carré sont homéomorphes

Le fonctionnement des équivalences d'homotopie s'éclaire par la notion équivalence de catégories.

Définition 2. *Un foncteur* $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur* $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ *tel qu'on ait des isomorphismes naturels* $\epsilon\colon F \bullet G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ *et* $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \simeq G \bullet F$*. (*$G, \eta, \epsilon$ *ne sont en général pas uniques.)*

Si de plus ϵ *et* η *sont des égalités, alors* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *sont isomorphes.*

Etablissons le tableau partiel des analogies présentées:

$f\colon X \leftrightarrows Y\colon h$	Topologie	Catégories	$L\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D}\colon R$
égalités d'ensembles $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ $h \circ f = \mathrm{id}_X$ +propriétés...	homéomorphisme entre espaces	isomorphisme entre catégories	égalité de foncteurs $LR = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ $RL = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$
homotopies de fonctions $f \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$ $h \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ +propriétés...	équivalence d'homotopie entre espaces	équivalence entre catégories	isom. nat. $LR \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ $RL \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$

Pour synthétiser, l'intuition du fonctionnement de cette homogénéité résultante de l'idée d'équivalence homotopique est explicitement éclairée par la notion d'équivalence de catégories: elle tient à une réflexivité de la structure morphique de deux catégories plutôt qu'à une bijection entre leurs d'objets sous-jacents.

A titre d'exemple, tout comme la relation d'homotopie est une relation d'équivalence qui nous permet de grouper et classer les chemins homotopes, nous pouvons constituer le squelette sk$\mathcal{C}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ comme sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ qui prends exactement un représentant de chaque classe d'isomorphismes de $\mathcal{C}$. Ainsi donc sk$\mathcal{C}$ est unique à unique isomorphisme près et deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont équivalentes si et seulement si sk$\mathcal{C}$ et sk$\mathcal{D}$ sont isomorphes (en tant que catégories).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "equiv"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left] \\
sk\mathcal{C} \arrow[u, hook] \arrow[r, "isom"] & sk\mathcal{D} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

3 Quelques mots sur Lawvere

On peut se demander où est Lawvere dans cette histoire. Pour l'instant les transformations naturelles nous ont donné des outils pour éclairer le fonctionnement de certaines notions mathématiques. On pourra même objecter que Lawvere n'invente ni la théorie des catégories (explicitement introduites en 1945 par Eilenberg et Maclane, si bien que l'on peut retracer sa raison d'être dès les travaux de Hilbert sur la résolution de modules), ni la notion de foncteurs adjoints (déjà formulée algébriquement via la notion de problèmes universels - en anglais universal mapping problem - introduite par Kan mais que Lawvere redécouvre en quelque sorte, sans savoir de l'existence du travail de Kan) ni la théorie des topos (que l'on peut considérer comme retentissante victoire dans la pensée mathématique, dont le chef de file est Grothendieck, étendue de son intérieur par la libération de nouveaux possibles venues de la pensée catégorielle). Qui plus est, Lawvere rapportera dans une interview que Grothendieck lui aurait attribué, dans une correspondance, comme contribution à ce sujet la découverte des classifiants de sous-objects dans les topoï comme un des seuls aspects des topos qu'il n'aurait pas prédit lui-même.

Nous maintiendrons que Lawvere inaugure bien une percée dans l'intellectualité mathématique et nous tenterons de décrire la manière dont il constitue ces topoï élémentaires dans sa communication Quantifiers and Sheaves (1970). En effet, pour Lawvere, il se joue là aussi une orientation idéologique comme il l'écrit:

> Lorsque les principales contradictions d'une chose ont été trouvées, la procédure scientifique consiste à les résumer dans des slogans que l'on utilise ensuite constamment comme une arme idéologique pour le développement et la transformation ultérieurs de la chose. Faire cela pour la « théorie des ensembles » nécessite de tenir compte de l'expérience que les principales paires de tendances opposées en mathématiques prennent la forme de foncteurs adjoints, et nous libère des traces mathématiquement non pertinentes ($\in$) laissées derrière par le processus d'accumulation ($\cup$) de l'ensemble de puissance (P) à chaque étape d'une "construction" métaphysique.

Procédons donc à introduire et examiner la notion d'adjonction.

3.1 Foncteurs adjoints

L'homogénéité entre catégories équivalentes est caractérisée affirmativement par la construction d'isomorphismes naturels $LR \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ et $RL \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Qui dit homogénéité dit que tous les objets de chaque catégorie interagissent avec leur environnement essentiellement de la même manière.

Question: à quelle condition peut-on caractériser affirmativement le défaut d'équivalence entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ qui, si bien non équivalentes, se reflètent l'une sur l'autre par l'existence de foncteurs $L: \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D}: R$?

Retournons pour comprendre cela aux mathématiques ensemblistes. Pour $f: A \to B$ fonction d'ensembles non vides, le défaut de bijectivité de f, se mesurent négativement:

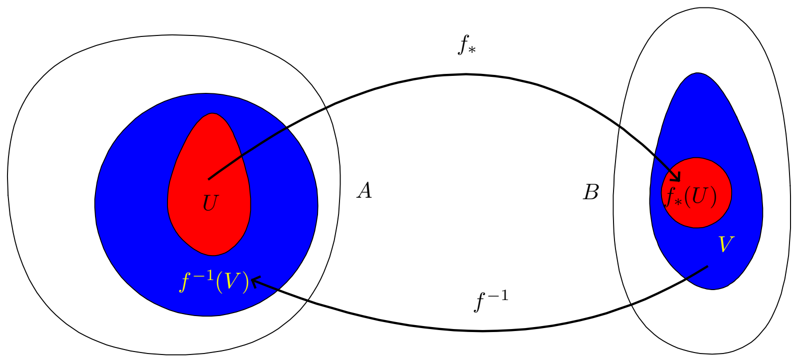
- f est non injective ssi elle n'admet pas de réciproque à gauche
- f est non surjective ssi elle n'admet pas de réciproque à droite

La notion de connexion galoisienne que l'on rappellera dans la suite viendra lui opposer, sous certaines conditions, une mesure affirmative de ce défaut et de la mise en fonctorialité de cette idée découlera la notion de foncteurs adjoints.

Pour un ensemble A on notera son ensemble puissance (aussi appelé ensemble de parties) $\mathcal{P}(A)$. Tout ensemble A non vide induit un ensemble préordonné $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, lui-même induisant une catégorie dont les objets sont les sous parties d'un ensemble A et pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(A)$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(A)}(X, Y) = \begin{cases} \{X \to Y\} & X \subseteq Y \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}.$$

Notons que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ induit un morphisme identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)}$ défini trivialement sur les objets par $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)}(U) = U$. Ainsi, une fonction $f: A \longrightarrow B$ entre deux ensembles non vides induit deux morphismes en sens opposés $f_*: \mathcal{P}(A) \leftrightarrows \mathcal{P}(B): f^{-1}$.



Il n'est pas difficile de montrer que, f_* et f^{-1} satisfont des propriétés de compositionalité permettant de dire qu'en effet ils constituent des foncteurs. Alors pour tous $U \subseteq A$ et $V \subseteq B$:

1. $U \subseteq f^{-1}(f_*(U))$ car f peut avoir plusieurs préimages.
2. $f_*(f^{-1}(V)) \subseteq V$ car f peut ne pas prendre toutes les valeurs de V.

Alors on déduit:

1. Deux opérateurs partout bien définis d'ensembles préordonnés

$$\eta\colon U \mapsto f^{-1}(f_*(U))\ \text{(clôture)} \qquad \epsilon\colon f_*(f^{-1}(V)) \mapsto V\ \text{(intérieur inversé ou noyau).}$$

2. Ils créent une distinction *ensembliste*:
   - U **fermé** ssi $f^{-1}(f_*(U)) \subseteq U$ et V **ouvert** ssi $V \subseteq f_*(f^{-1}(V))$
   - U fermé ssi sa clôture est inversible, V ouvert ssi son intérieur est inversible.
3. Ils synthétisent une correspondance globale entre ensembles préordonnés appelée connexion galoisienne

$$f_*(U) \subseteq V \Longleftrightarrow U \subseteq f^{-1}(V)$$

Remarquons que ouverts et fermés ne sont définis que relativement à f. Les opérateurs η et ϵ mesurent *affirmativement* le défaut de bijectivité de f.

- f est non injective ssi $\eta \neq \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A)}$, c.à.d. si η n'est pas triviale
- f est non surjective ssi $\epsilon \neq \mathrm{id}_{\mathcal{P}(B)}$, c.à.d. si ϵ n'est pas triviale

Soit $\mathcal{P}_0(A)$ (équivalentes. $\mathcal{P}_0(B)$) sous-ensemble des fermés de A (resp. ouverts de B). On a alors

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(A) \arrow[r, shift left, "f_*"] & \mathcal{P}(B) \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] & & \arrow[r, squiggly, "\text{adjonction}"] & & f_*(U) \subseteq V \Longleftrightarrow U \subseteq f^{-1}(V) \\
\mathcal{P}_0(A) \arrow[u, hook, "\text{inclusion}"] \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{P}_0(B) \arrow[u, hook, "\text{inclusion}"] & & \arrow[r, squiggly, "\text{bijection}"] & & U = f^{-1}(f_*(U)) \quad f_*(f^{-1}(V)) = V
\end{tikzcd}$$

La mise en fonctorialité de ces propriétés au regard des foncteurs f et f^{-1} induit deux propositions équivalentes:

1. Il existe un isomorphisme naturel en chaque composante:

$$\theta\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(B)}(f_*(-), -) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(A)}(-, f^{-1}(-))$$

2. Il existe deux transformations naturelles $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A)} \Longrightarrow (f^{-1} \circ f_*)$ et $\epsilon\colon f_* \circ f^{-1} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{P}(B)}$ telles que les triangles suivant sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
f_*(U) \arrow[r, "f_*\eta_U"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{f_*(U)}"'] & f_*(f^{-1}(f_*(U))) \arrow[d, "\epsilon_{f(U)}"] \\
& f_*(U)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f^{-1}(V) \arrow[r, "\eta_{f^{-1}(V)}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{f^{-1}(V)}"'] & f^{-1}(f_*(f^{-1}(V))) \arrow[d, "f^{-1}\epsilon_V"] \\
& f^{-1}(V)
\end{tikzcd}$$

On dira alors que le foncteur f_* est adjoint à gauche de f^{-1} ou encore que f^{-1} est adjoint à droite de f_* ou encore que la paire (f_*, f^{-1}) est adjointe.

Le cas des ordres partiels ne rend visible qu'une partie restreinte du phénomène d'adjonction, mais fournir déjà plusieurs informations:

- f_* est adjoint à gauche de f^{-1} il n'est pas vrai pour autant que f est adjoint à droite de f^{-1};
- f^{-1} a cependant un adjoint à droite, différent de f_* qu'on ne définira pas ici.
- les adjonctions peuvent ne pas être des dualités ou des isomorphismes, mais sont des candidats pour passer à ce statut;
- les opérateurs de fermeture peuvent signaler la présence d'une situation adjointe.

La définition générale d'une paire d'adjoints vient naturellement en remplaçant f_* et f^{-1} ci-dessus nous donnant une version opératoire et dynamique des connexions galoisiennes.

Formellement, voici la définition de foncteurs adjoints.

Définition-Proposition 3. *$L: \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D}: R$ est une paire de foncteurs adjoints si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite:*

1. *Il existe un isomorphisme naturel en chaque composante:*

$$\Phi: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(-), -) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, R(-))$$

2. *Il existe deux transformations naturelles $\eta: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow R \bullet L$ et $\epsilon: L \bullet R \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ telles que les triangles suivant sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd} L(U) \arrow[r, "L\eta_U"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{L(U)}"'] & L(R(L(U))) \arrow[d, "\epsilon_{L(U)}"] \\ & L(U) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R(V) \arrow[r, "\eta_{R(V)}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{R(V)}"'] & R(L(R(V))) \arrow[d, "R\epsilon_V"] \\ & R(V) \end{tikzcd}$$

On appellera η et ϵ "unités" de la situation adjointe formée par le couple (L, R). Nous donnerons pas la preuve de cette équivalence mais il est à noter que (η, ϵ) et Φ se rapportent l'un à l'autre via:

$$\begin{aligned} \eta_U &= \Phi_{U, L(U)}(\mathrm{id}_{L(U)}) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, (R \bullet L)(U)) \\ \epsilon_V &= \Phi^{-1}_{R(V), V}(\mathrm{id}_{R(V)}) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}((L \bullet R)(V), V). \end{aligned}$$

Ainsi chaque évaluation $\eta_U: U \rightarrow RL(U)$ de η se voit comme projection dans $\mathcal{C}$ de l'identité de $L(U)$ et chaque évaluation $\epsilon_V: LR(V) \rightarrow V$ de ϵ se voit comme rétroprojection dans $\mathcal{D}$ de l'identité de $R(V)$.

Soit $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}_0$ les sous-catégories pleines des objets ou η et ϵ sont des isomorphismes naturels. Alors $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}_0$ sont équivalentes et on trouve un diagramme analogue à celui trouvé dans la section précédente:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "L"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "R"] \\ \mathcal{C}_0 \arrow[u, hook, "\text{inclusion}"] \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{D}_0 \arrow[u, hook, "\text{inclusion}"'] \end{tikzcd} \quad \begin{matrix} \overset{\text{adjonction}}{\rightsquigarrow} \\[2em] \overset{\text{équivalence}}{\rightsquigarrow} \end{matrix} \quad \begin{matrix} Hom_{\mathcal{D}}(L(U), V) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(U, R(V)) \\[2em] \eta(U) \simeq U \quad \epsilon(V) \simeq V \end{matrix}$$

Le couple (η, ϵ) constitue dialectiquement deux types d'unités en ce qu'il norme partout

- ce sur quoi $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}_0$ s'unifient: sur les objets où (η, ϵ) sont inversibles;
- ce vers quoi $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se synthétisent: au point même où (η, ϵ) sont des transformations naturelles constituant *une* correspondance globale

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(U), V) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, R(V)).$$

Dernière remarque: (η, ϵ) constituent une extension ascendante qui part d'une pure homogénéité entre $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}_0$ (par équivalence) vers deux catégories (éventuellement plus grandes que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$) représentant l'extension maximale de la situation adjointe, maximale en le sens ou (η, ϵ), si bien ne sont plus des isomorphismes, consistent toujours et encore comme transformations naturelles.

3.1.1 Premier exemple

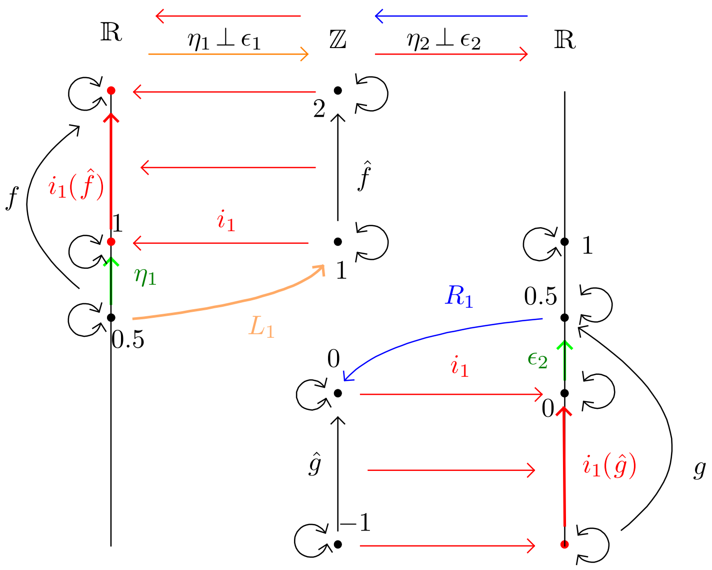
Essayons maintenant de donner une intuition imagée du fonctionnement des transformations η et ϵ ci-dessus. On appellera *flèches universelles* les flèches η_U et ϵ_V que η et ϵ distinguent d'entre le reste des flèches. On l'a vu, les objets où η_U ou ϵ_V ne sont pas inversibles distinguent les éléments non unifiés de la situation adjointe. Considérons la catégorie $(\mathbb{R}, \leqslant)$ dont les objets sont les nombres réels et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(x, y) = \begin{cases} \{x \rightarrow y\} & x \leqslant y \\ \varnothing & x > y \end{cases}.$$

Alors $(\mathbb{R}, \leqslant)$ admet comme sous-catégorie pleine $(\mathbb{Z}, \leqslant)$. Dans la suite on considère les foncteur covariants:

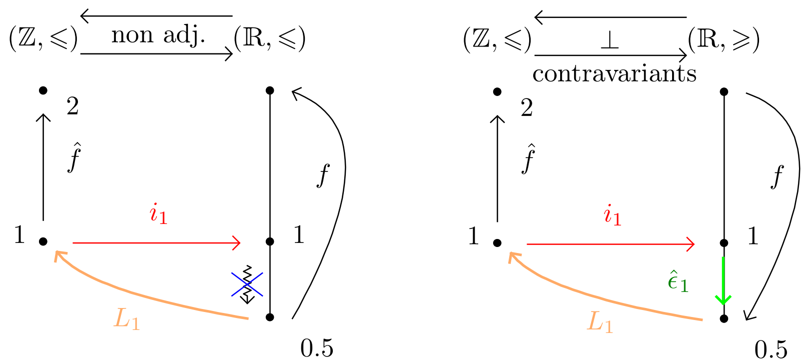
$$\begin{array}{rcl} i_1\colon \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} R_1\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} L_1\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lceil x \rceil \end{array}$$

où pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière inférieure et $\lceil x \rceil$ sa partie entière supérieure. Il n'est pas difficile de montrer que les couples (L_1, i_1) et (i_1, R_1) forment deux situations adjointes distinctes. On dira qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est à l'*intersection* de deux situations adjointes si $\mathcal{C}$ est domaine et/ou codomaine commun de deux situations adjointes bien définies, comme c'est le cas de $\mathbb{Z}$ ici, et qu'on illustrera de la façon suivante:



On remarquera que dans ce cas les flèches universelles non triviales (dessinées en vert) se concentrent sur les extrémités. On voit aussi de manière générale que:

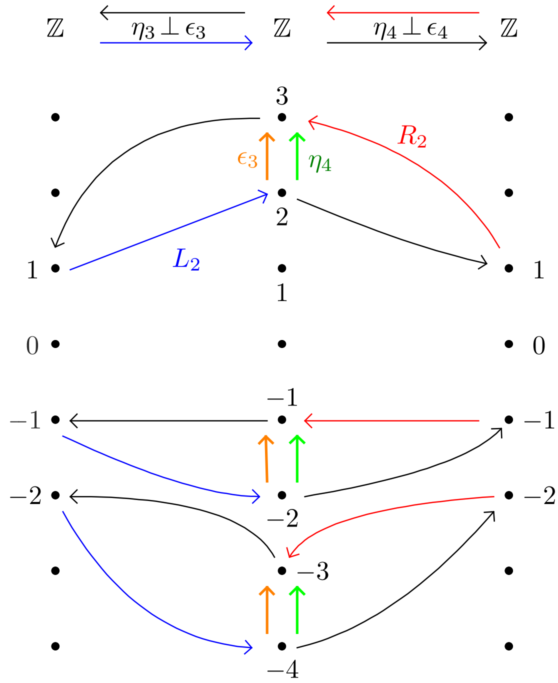
- l'unité et la co-unité d'une adjonction formalise la correction en amont/en aval nécéssaire pour créer des correspondances biunivoques $f \leftrightarrow \hat{f}$ et $\hat{g} \leftrightarrow g$;
- Il se peut tout de même qu'en prenant une catégorie opposée et des foncteur contravariants, on puisse transformer un adjoint à gauche en un adjoint à droite.



Considérons maintenant les foncteurs

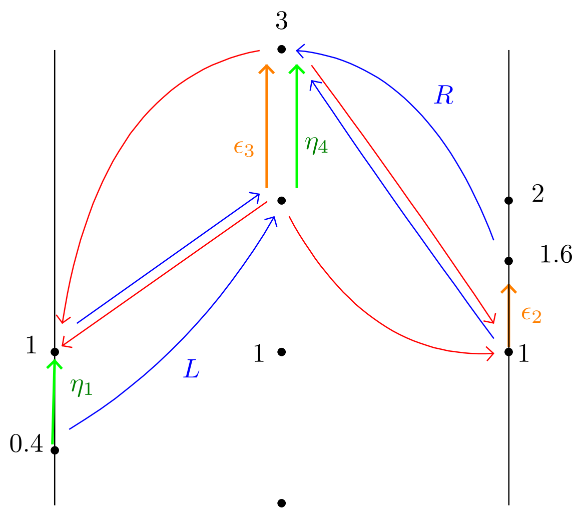
$$\begin{array}{rcl} i_2\colon \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \lfloor n/2 \rfloor \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} L_2\colon \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} R_2\colon \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array}$$

donnant lieu à deux situations adjointes:



On remarquera que les flèches universelles non triviales se concentrent sur la catégorie au milieu. Dans les deux exemples précédents les flèches universelles non triviales elles sont en quelque sorte équireparties dans les opérateur unité/counité. Au total on peut composer les adjonctions des deux exemples précédents exhibant un nouvel triplet d'adjoints où chaque unité/counité contient des flèches universelles non triviales :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\lfloor -/2 \rfloor"] & \mathbb{Z} \arrow[l, bend right=60, "2\times(-)+1"'] \arrow[l, bend left=60, "2\times(-)"] \arrow[r, "i"] & \mathbb{R} \arrow[l, bend right=60, "\lfloor - \rfloor"'] \arrow[l, bend left=60, "\lceil - \rceil"] \end{tikzcd}$$



3.1.2 Le treillis des ouverts

Voyons maintenant comment les unités d'une adjonction mesurent l'hétérogénéité entre un espace topologique et un ensemble. Pour rappel, une fonction $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ entre espaces topologiques est continue ssi $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \ \forall U \in \mathcal{T}_Y$. On note $|X|$ l'ensemble sous-jacent d'un espace topologique. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X.

On dit que $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$ et on note $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ si l'identité $\mathrm{id}_X\colon (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ est continue. Ainsi, $\subseteq$ définit un préordre sur l'ensemble $\mathcal{T}(X)$ de toutes les topologies possibles sur X. Le treillis $\mathcal{T}(X)$ admet comme borne maximale la topologie grossière $\mathcal{T}_g := \{\{\}, X\}$ et borne minimale la topologie discrète $\mathcal{T}_d := \mathcal{P}X$. Ainsi le défaut d'homogénéité entre Top et Set se mesure doublement par deux situations adjointes

On a une première situation adjointe

$$(-, \mathcal{T}_d)\colon \mathrm{Set} \leftrightarrows \mathrm{Top}\colon |-|$$

déterminé comme suit

- une fonction $|X| \to S$ s'identifie à une fonction continue $(X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (S, \mathcal{T}_S)$ ssi $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$
- $\eta_S\colon S \mapsto |(S, \mathcal{T}_d)| = S$ toujours triviale
- L'opérateur $\epsilon_X\colon (|X|, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$
  - unifie ensembles et espaces discrets
  - synthétise ensembles et espaces topologiques en mesurant un manque de finesse par rapport à $\mathcal{T}_d$

On a une deuxième situation adjointe

$$|-|\colon \mathrm{Top} \rightleftarrows \mathrm{Set}\colon (-, \mathcal{T}_g)$$

déterminé comme suit

- une fonction $S \to |X|$ s'identifie à une fonction continue $(S, \mathcal{T}_S) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ ssi $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_g$
- $\hat{\epsilon}_S\colon |(S, \mathcal{T}_g)| = S \mapsto S$ toujours triviale
- L'opérateur $\hat{\eta}_X\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (|X|, \mathcal{T}_g)$
  - unifie ensembles et espaces grossiers
  - synthétise ensembles et espaces topologiques en mesurant un raffinement par rapport à $\mathcal{T}_g$

Les opérateurs η et ϵ à la fois donnent les conditions d'existence d'une correspondance globale spécifique entre deux catégories et formalisent, de l'intérieur de cette correspondance, l'éventuel défaut d'homogénéité entre ces deux catégories. Le point fondamental est que le processus de construction de η et ϵ fait ressortir de nouvelles notions opérant des scissions dynamiques entre les objets d'une catégorie.

Un cours entier sur des constructions adjointes en mathématiques peut être donné, constituant des constructions mathématiques comme le résultat de la dialectique affirmative d'une situation adjointe et beaucoup de notions catégorielles - extensions de Kan, limites, colimites, objets initiaux, finaux et même topoï - peuvent être définis en termes de foncteurs adjoints. Dans notre effort de tenir sur notre objectif, à savoir celui de déployer un espace d'intellectualité mathématique particulier, nous résisterons à la tentation de prolonger l'introduction de ces exemples et ces notions, classiques dans un cours de base en théorie de catégories, pour essayer tant soit possible d'aller pas à pas, de marcher sur deux jambes - formalisation/interprétation - en ce que disent ces situations adjointes comme matière rationnelle dans leur dialectique affirmative. On commence à le sentir: là où la pensée mathématique à tout à gagner d'aller à toute vitesse sur son déploiement formel, l'intellectualité mathématique a un *tempo* tout à fait inverse, en ayant tout à gagner de s'y attarder sur chaque pas réalisé autant de temps que nécéssaire pour assurer la continuité de son discours réflexif.

3.1.3 Situations logiques

A partir d' une proposition p, se donner une algèbre de Heyting équivaut à se donner une situation où la conjonction est adjoint à gauche de l'implication:

$$\frac{a \vdash p \Rightarrow b}{p \wedge a \vdash b}$$

Ci-dessus on note de manière mnémotechnique en haut l'adjoint à droite et en vas l'adjoint à gauche. En notant 0 et 1 les bornes inférieures et supérieures, ceci nous donne une négation faible $\neg a$ est le plus grand élément tel que tel que $a \wedge \neg a = 0$ et défini par $\neg a := a \Rightarrow 0$. En général il n'est pas vrai que $a \vee \neg a = 1$.

On peut considérer des situations adjointes additionnelles: une situation dans laquelle la disjonction est adjointe à droite d'un opérateur de soustraction donne une une notion d'algèbre de co-Heyting Ω.

$$\frac{a \vdash p \wedge b}{p \setminus a \vdash b}$$

Dans cette situation, tout élément de Ω admet un plus petit élément « $\sim a$ » tel que $a \vee \sim a = 1$ défini par $\sim a := 1 \setminus a$ et la conjonction $a \wedge \sim a$ définit un nouvel opérateur que l'on pourrait appeler « bord de a » et noté $\partial a := a \wedge \sim a$. En termes logiques, la négation $\sim a$ satisfait la loi du tiers exclu mais invalide la loi de non-contradiction. Le treillis des fermés d'un espace topologique en est un exemple.

Ainsi, on peut composer nos situations. Le résultat d'une ensemble ordonné se retrouvant à l'intersection de ces deux situations adjointes donne une algèbre de bi-Heyting qui est à l'intersection de ces deux situations adjointes et les termes unifiés dans ce contexte sont ceux pour qui $\sim = \neg$, c'est à dire ces algèbres de bi-Heyting qui sont des algèbres de Boole.

3.2 Topoï élémentaires selon Lawvere

Grothendieck étudie les topos étales devant la nécessité de se donner une topologie plus fine que celle disponible par la géométrie algébrique classique.

Exemple 4. On peut munir $\mathbb{C}^2$ de la topologie standard $\mathcal{T}_1$ ou d'une topologie $\mathcal{T}_2$ dont sa base d'ouverts est donnée par les compléments $U_f = \mathbb{C} \setminus f^{(-1)}(\{0\})$ de fonctions holomorphes $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Il est clair que $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ car f est continue mais $\mathcal{T}_2 \neq \mathcal{T}_1$: en effet le principe du prolongement analytique nous dit que les zéros de f sont isolés. Ainsi, les fermés de $\mathcal{T}_2$ sont soit des ensembles finis, soit $\mathbb{C}^2$ tout entier. Or le disque complexe unité est un fermé de $\mathcal{T}_1$.

Grothendieck cherchera a pallier ce *manque d'ouverts* de $\mathcal{T}_2$ en allant se ressourcer sur ceux disponibles dans les revêtements des objets géométriques à étudier. Il abandonne la catégorie faisceaux sur les ouverts d'un espace topologique pour travailler des catégories de faisceaux sur des catégories munies d'une structure de *site* permettant à ses objets d'agir comme des ouverts et lui permettant de travailler sur les ouverts venus de ces revêtements et dont il doit assurer la consistance. Giraud axiomatisera les conditions de consistance qu'une catégorie doit avoir pour être équivalente à un topos de Grothendieck.

Les topos élémentaires de Lawvere, dans leur différence et leur extension par rapport à l'axiomatisation de Giraud, diront de l'existence effective de son intellectualité mathématique. Son approche sera de restituer de quelles situations adjointes un topos $\mathcal{C}$ de Grothendieck est assujetti ou, plus précisément, déterminer $\mathcal{C}$ comme source d'un certain nombre de foncteurs ayant des adjoints à droite. Voici comment Lawvere présente sa notion:

> L'unité des contraires est essentiellement celle entre la logique et la géométrie. [...] Nous résumons d'abord les principales contradictions de la théorie de Grothendieck-Giraud-Verdier des topos en termes de quatre ou cinq foncteurs adjoints généralisant de manière significative la théorie pour la libérer du recours à une notion externe de limite infinie (en permettant en particulier de dire qu'en un sens la logique est un cas particulier de la géométrie).

Nous laisseront une réflexion des termes « unité des contraires » et « contradiction », dont Lawvere renvoi dans sa bibliographie à « De la Contradiction » de Mao pour la fin de notre exposé. Retenons ici l'intension consciente de Lawvere à constituer une notion dans le rapport affirmatif dans lequel elle se trouve de sorte à en donner ses conditions de possibilité.

3.2.1 Situations structurelles

Soit $\mathbf{1}$ la catégorie avec un seul objet et une seule flèche (la flèche identité). Toute catégorie $\mathcal{C}$ est équipée d'un foncteur constant $T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{1}$. Alors

- $\mathcal{C}$ admet un objet terminal (resp. initial) $\Longleftrightarrow T$ admet un adjoint à droite (resp. à gauche)

Par exemple, tout ensemble (resp. espace topologique) X est muni d'une unique flèche $\{\} \to X$ et tout singleton $\{*\}$ munit X d'une flèche $X \to \{*\}$. Il n'existe aucune fonction $X \to \{\}$. L'ensemble vide est le seul objet initial de Set et de Top et tout singleton $\{*\}$ en est un objet final pour ces deux catégories.

Lawvere en tirera les situations suivantes (en haut l'adjoint à droite, en bas l'adjoint à gauche)

Objet terminal	Objets produit	Objets fonctionnels	Object classifiant des sous-objets
$X \to 1$	$X \to X \times Y$	$X \to Y^A$	$X \to \Omega$
$* \to Y$	$X \times X \to Y$	$A \times X \to Y$	$? \rightarrowtail X$

Ainsi,

- Avoir un objet terminal équivaut à admettre un adjoint à droite du foncteur terminal T: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{1}$

  C'est le cas de tout singleton dans la catégorie des ensembles.
- Avoir un produit binaire équivaut à admettre un adjoint à droite du foncteur diagonal Δ: $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$
- Posséder les exponentiels (ou objets fonctionnels) de tous objets équivaut à admettre un adjoint à droite de $A \times (-)$ pour tout A

  La catégorie Set admet tous ses exponentiels car on peut bien parler d'ensemble de fonctions. Par contre, et c'est là un manque cruel de la catégorie des espaces topologiques: on ne peut munir les ensembles d'applications continus d'une topologie (compacte-ouverte) que pour certains espaces. Ainsi Top n'est pas pas cette situation adjointe.

Posséder un classifiant de sous-objets fait intervenir une situation plus subtile intrication entre représentabilité d'un foncteur qui classe des familles de sous-objets et un foncteur faisant intervenir la construction des objets puissance, analogue à celle d'ensemble de parties d'un ensemble tel que celui qu'on a vue lors d'introduire les connexions galoisiennes. L'intrication de ces situations est riche et donne des définitions équivalentes d'un topos élémentaire et a dans son coeur une structuration en algèbres de Heyting, reflétant la structuration des ouverts d'un espace topologique. En donnons une particulièrement compacte:

Définition 5. *Un topos élémentaire est une catégorie possédant*

1. *toutes limites finies qu'on peut construire à partir de ses objets,*
2. *tous les objets puissance $\mathcal{P}X$ de ses objets X.*

En définissant ainsi topoï par rapport à des situations adjointes, définies par des unités « élémentaires » la notion est résultat d'un processus dialectique affirmatif et s'émancipe à la fois

1. d'une dépendance sur la logique fondationnelle
2. de la situation intramathématique qui l'a motivée

D'une part, cette notion ne dépend pas d'une notion de limite infinie pré-constituée et Lawvere montre cette indépendance matériellement en donnant une démonstration de l'indépendance de l'hypothèse du continu sans utilisation d'induction transfinie. D'autre part, cette notion dépasse sa situation intra-mathématique de départ: tout topos de Grothendieck est un topos élémentaire et Lawvere montre cette indépendance en donnant démontrant la possibilité de construire certains objets géométriques indépendamment de leur site de définition.

Quelques propriétés d'un topos élémentaire:

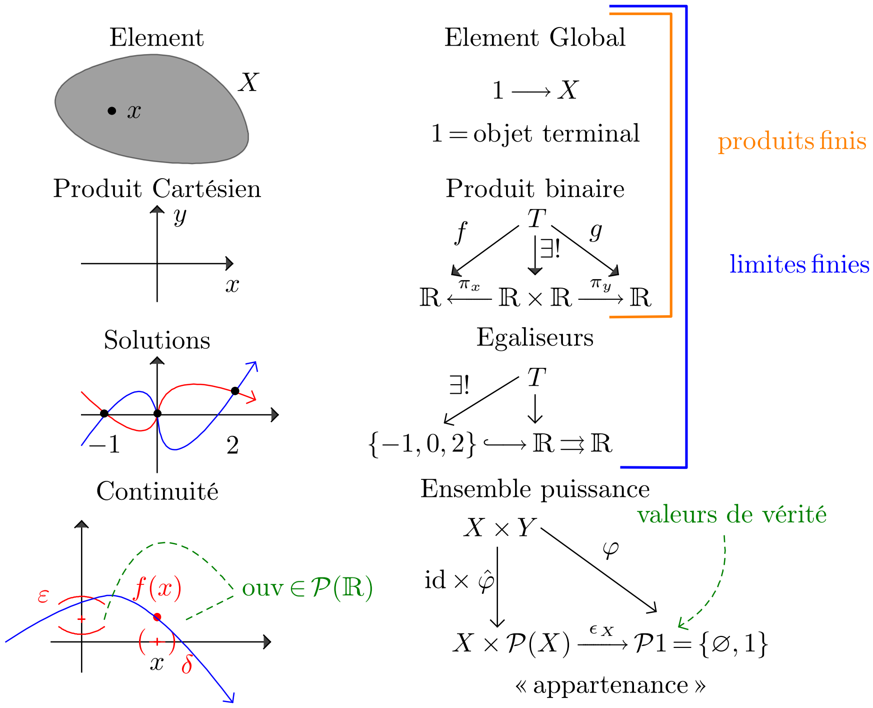
- Les sous-objets de chaque objet peuvent être indexés par un ensemble.
- L'objet puissance de l'objet final 1 distingue un objet: le classifiant de sous-objets $\mathcal{P}(1) = \Omega$.
- L'objet puissance de tout objet X s'identifie à l'objet fonctionnel de X vers Ω : $\mathcal{P}X = \Omega^X$.
- La flèche $1 \to \Omega$ structure l'ensemble des sous-objets de Ω comme algèbre de Heyting complète lorsqu'ils sont ordonnés par inclusion.
- Un topos même dénombrable est complet de manière intrinsèque.

Une fois assurée son autonomie relative par rapport à la géométrie et à la logique, Lawvere étudiera l'effet rétroactif que la notion qu'il a éclairé tant sur la logique comme sur les mathématiques. Sans vouloir m'étendre d'avantages sur des définitions, remarquons que:

1. Un morphisme de topos sera dit « géométrique » s'il admet un adjoint à gauche préservant les limites finies.

2. Un morphisme de topos sera dit « logique » s'il préserve toute la structure de Heyting interne de son topos de départ.

Intuitivement, les topos élémentaires restituent les ingrédients élémentaires de l'analyse dans le cadre catégoriel: il faut pouvoir parler d'éléments, il faut pouvoir tracer le graphe d'une courbe, il faut pouvoir déterminer des points d'intersection et il faut pouvoir énoncer une notion de continuité.



Pour finir cette section, retenons un point: un topos élémentaire est à l'intersection de situations adjointes spécifiques mais il se peut que l'on choisisse de se concentrer en d'autres situations adjointes. Ainsi, selon cette même logique,

1. Lawvere répercute sa notion de topos pour circonscrire ce qu'une catégorie doit posséder pour devenir de manière légitime une catégorie d'ensembles en termes d'adjonctions supplémentaires reflétant l'axiome du choix, la récursivité, l'induction...)

2. Une de ces situations adjointes distinguera ce que Lawvere appelle un objet de nombres naturels $\mathbb{N}$, notion déjà présente chez Lawvere dans sa thèse de 1963, et qui possibilise pour un topos le d'avoir une notion interne de nombres naturels. D'une part, tout topos de Grothendieck possède un tel objet. D'autre part, il est remarquable que dans le cadre des catégories supérieures, un résultat récent dit que tout $(\infty,1)$-topos élémentaire (dont la définition est à examiner en détail) possède un tel objet.

3. Le temps nous étant limité, nous devrons passer sur la rétroaction que Lawvere répercute cette fois-ci sur l'algèbre, en avançant une dite « algèbre universelle » qui se concentre sur la nature proprement opératoire et équationnelle de l'écriture catégorielle et qui sera ensuite étudiée par ce qu'on appellera des théories de Lawvere.

4. Un topos sera un topos de bi-Heyting ssi l'opérateur de réunion avec un sous-objet admet un adjoint à gauche. Dans un tel topos:

   - les sous-objets représentent des propositions locales,
   - l'inconsistance d'un paradoxe est locale et peut être circonscrite tout en gardant le réseau rationnel d'inférences,
   - Elle est reprise récemment dans le contexte des logiques quantiques.

Cette notion sera introduite en 1991. Cependant, là ou aujourd'hui on peut en tirer de cette notion des éclairages déterminants concernant le type de dialectique à l'oeuvre dans la résolution des contradictions non-antagoniques - exemplairement éclairée géométriquement par la méthode de résolutions des singularités d'Hironaka, qui dans leur non-fonctorialité ouvrent déjà des questions communes à des raisons différentes, Lawvere ne cherchera pas à formuler son intellectualité dessus. C'est d'avantage frappant car dans son article de 1970 il oppose à la méthode de faisceautisation de Godement par double passage à des limites infinies, une méthode élémentaire que Lawvere présentera comme « méthode résolvant la contradiction entre pré-faisceaux et espace étalés ».

Je pense c'est ici le moment d'arrêter le développement mathématique pour revenir sur la ligne que Lawvere trace une fois inauguré un tel espace de pensée.

4 La contradiction selon Lawvere

Le 6 Février 1976, le journal *The Chevron* au Canada publie l'annonce d'un exposé public de Lawvere.

Mao on math

Why should math and science students read Chairman Mao's works?

William Lawvere, one of the world's leading mathematicians, will give reasons when he speaks on "Applying Marxism-Leninism-Mao Tse-Tung Thought to Mathematics and Science" this evening (Friday) at 9 p.m. in Physics 145. This is a popular lecture, open to the public.

News continues to arrive from China concerning dramatic advances in science and technology, advances attributed to the scientific application of Marxism-Leninism-Mao Tse-Tung thought.

Scientific journals published in China give serious attention to the social and political significance of scientific work. Yet the uses of the dialectical method are at an early stage of development in Western science.

Lawvere points to chairman Mao's writings "Where do Correct Ideas Come From?" and "On Contradiction" as the basis for his outstanding mathematical achievements.

In this talk, he will show how science is corrupted to pseudo-science under imperialism, and how Lenin's "Materialism and Empirio-criticism" serves as a guide to science and mathematics under the two superpowers.

Lawvere, now teaching at the State University of New York at Buffalo, is internationally known for his development of a form of dialectics known as topos theory.

This work has enabled previously unrelated trends in modern mathematics to apply concepts and methods developed by each other. First applied to geometry and logic, Lawvere's work is now finding its way into applied mathematics.

He will also be giving an address to the Ontario Mathematical meeting, tomorrow afternoon. This second lecture, at 2:30pm in MC 5158, concerns his mathematical work, and is entitled "Topos theory as a clarification of some relationships between set theory, logic and sheaf theory".

The talk Friday evening is jointly sponsored by the physics department and the Mathematics Faculty.

—henry crapo

La traduction est la suivante:

> **Mao sur les maths**
>
> Pourquoi les étudiants en mathématiques et en sciences devraient-ils lire les travaux du président Mao ?
>
> William Lawvere, l'un des plus grands mathématiciens du monde, en donnera des raisons lors qu'il parlera ce soir (vendredi) à 21 heures dans la salle Physics 145, sur « En appliquant la pensée Marxiste-Léniniste-Maoïste aux mathématiques et aux sciences. Il s'agit d'une présentation populaire, ouverte au public.
>
> Des nouvelles continuent d'arriver de Chine concernant les avancées dramatiques de la science et de la technologie, avancées attribuées à l'application scientifique de la pensée marxiste-léniniste-Mao Tse-Tung. Les revues scientifiques publiées en Chine accordent une attention sérieuse à la signification sociale et politique du travail scientifique. Pourtant, les utilisations de la méthode dialectique sont à un stade précoce de développement dans la science occidentale.
>
> Lawvere pointe vers les écrits du président Mao « D'où viennent les idées justes » et « De la contradiction » comme base de ses succès mathématiques exceptionnels.
>
> Dans cette conférence, il montrera comment la science est corrompue en pseudo-science sous l'impérialisme, et comment le "Matérialisme et Empirio-criticisme" de Lénine sert de guide à la science et aux mathématiques sous les deux superpuissances.

> Lawvere, qui enseigne maintenant à l'Université d'État de New York à Buffalo, est internationalement reconnu pour son développement d'une forme de dialectique connue sous le nom de théorie des topos. Ce travail a permis à des tendances jusqu'alors indépendantes des mathématiques modernes d'appliquer des concepts et des méthodes développés les uns par les autres. D'abord appliqués à la géométrie et à la logique, les travaux de Lawvere sont maintenant en train de leur place dans les mathématiques appliquées.
>
> Il prononcera également une allocution à la réunion de mathématiques de l'Ontario, demain après-midi. Cette deuxième intervention, à 14h30 au MC 5158, concerne ses travaux mathématiques, et s'intitule « La théorie des topos comme clarification de quelques relations entre la théorie des ensembles, la logique et la théorie des faisceaux ».
>
> La conférence du vendredi soir est co-parrainée par le département de physique et la faculté de mathématiques.
>
> henry crapo

Ce sera la notion de foncteurs adjoints la notion qui incarnera la méthode dialectique dont parle Lawvere. A la lumière de cette annonce, on pourrait circonscrire le quel type de contradiction auquel Lawvere fait référence.

Partons du constat que Lawvere s'inscrit alors dans le cycle politique 1848-1976. Ce cycle politique, aujourd'hui clos se rapporte au cycle de la dialectique classique allant de Hegel au premier Badiou (celui d'avant *L'être et l'événement*). Cette première dialectique s'est déployée sous le signe de la puissance du négatif. La dialectique affirmative crée par construction des situations adjointes de Lawvere reflète une intension que l'on pourrait rapprocher de celle d'un Badiou dans Logiques des Mondes qui cherche à ouvrir la possibilité d'une nouvelle dialectique matérialiste affirmative en ce qu'elle cherche à caractériser ses composantes de manière interne et non pas simplement en rapport à ce à quoi elles se dialectisent.

L'intellectualité de Lawvere questionne la notion de contradiction à la lumière de celle du Mao dans *De la juste solution des contradictions au sein du peuple* où la méthode est de partir des amis, les ennemis se caractérisant par ce dont ils sont l'ennemi. Mao précise :« L'essentiel est ici de partir du *désir* d'unité. ». Ne s'agit t'il donc pas là d'une même intention à l'ouvre dans les situations adjointes de Lawvere, situations que l'on peut interpréter comme le fait de partir d'un foncteur ou d'une équivalence de catégories et de caractériser un adjoint à gauche/droite, dans leur foncteur « unité », comme ce qui caractérise ce dont il y a défaut d'homogénéité ?

Il est intéressant de voir que déjà dans son article de 1970, en tant que mathématicien pensif, Lawvere cherche une philosophie à "adjoindre" ou intriquer à cet espace qu'il ouvre. En le thématisant à la lumière du thème badiousien identifiant pensée mathématique et pensée de l'être en tant qu'être, on pourrait dire qu'il cherche, à partir d'un thème "O:=M" (plutôt que M:=O), où M est déterminé par cet espace d'intellectualité mathématique préconstitué, quel type de "O" lui convient, et quel sens donner à ":=". Ainsi, Lawvere cherchera une philosophie qui soit compatible avec son orientation intellectuelle et la suite montrera qu'il échouera à trouver complètement un sens à ce thème puis de céder sur l'exploration des applications en physique et en logique que sa percée en a ouvert comme nouvelles possibilités. Il refermera son intellectualité sur le terrain propre des mathématiques ou de la logique à partir de 1980. Nous pouvons en quelque sorte dire que Lawvere referme son intellectualité mathématique en ce qu'il constitue le rapport des mathématiques à une discipline extra-mathématique comme décomposable en un contenu ontologique suivi de son application à une discipline en question. Autant le dire du point de l'intellectualité mathématique: le mathématicien pensif Lawvere situe le rapport de sa pensée avec d'autres disciplines comme colimite injective plutôt que comme limite projective, position qui examinerait les différentes projections possibles de son intellectualité en de différentes perspectives de pensée. Ainsi, Lawvere opposera à l'idéalisme objectif et à l'idéalisme subjectif une matérialisme plus classique et basé sur les notions d'espace et quantité d'un côté et de nombres naturels et valeurs de vérité de l'autre à évaluer sur le champs de la physique. L'influence de Lawvere se fera sentir et le retour actif de la pensée toposique dans le champs mathématique ne reviendra que bien d'années après, comme le montre exemplairement le programme d'O. Caramello sur l'unification intra-mathématique à travers des morphismes de topos de Grothendieck.

Il nous vient de remarquer que G. Mazzola approche sa théorie mathématique de la musique comme colimite inductive de la même façon: il part d'une situation adjointe selon laquelle « gestes » et « formules » forment une situation adjointe entre mathématiques et musique, situation posant l'adjonction en colimite injective, c'est à dire à appliquer le fonctionnement littéral des paires d'adjoints vers plutôt que de projeter depuis les possibles la pensée dialectique à l'oeuvre dans cette notion mathématique.

Il semblerait enfin que Badiou n'ait jamais connu Lawvere sous l'angle décrit dans cet exposé. En effet, comme il l'explique explicitement dans son livre Badiou par Badiou (p.94), "C'est aussi la véritable percée de la théorie des catégories, qui tend à remplacer dans le champ mathématique la notion d'objet par celle de relation." Ainsi, les catégories consistent avant tout pour lui une théorie mathématique plutôt qu'une écriture de l'intellectualité mathématique. A l'époque de l'invention de la théorie des catégories, en effet une telle intellectualité mathématique n'était pas complètement constituée comme telle même si Lawvere en parle très brièvement dans ses articles, dont le contenu intellectuel peu à peu passera d'une intellectualité à la recherche de sa compossible philosophie à une application de l'intellectualité mathématique comme mathématisation d'un système philosophique tel celui de Hegel et dont on parlera cet après-midi. On peut donc comprendre que pour Badiou, s'il n'y a pas d'intellectualité mathématique disponible à l'époque, la théorie des catégories est quelque chose de quoi se méfier en ce qu'elle conditionne très bien, en tant que mathématique, une autre figure ontologique adversaire, à savoir celle tenue par Deleuze (et par extension rétroactive à Héraclite).

Ainsi donc, préconstitués d'une intellectualité mathématique codifiée catégoriquement on peut se demander de quelle manière elle s'intrique à la philosophie. Plus spécifiquement, si l'on tient qu'il y a deux ontologies possibilisant un mathème « M=O », à savoir

- l'être comme « pure dispersion multiple sur fond de vide » (Démocrite, Badiou..),
- l'être comme composé de relations de relations et la pensée de l'être comme « relations des relations entre relations » (Héraclite, Deleuze,...),

on peut se demander si ce n'est du point même d'existence autonome de cette intellectualité mathématique, non complètement immergée dans le domaine de pensée intramathématique, que l'on peut intriquer deux espaces étendus d'intellectualités compatibles, une mathématique et une autre philosophique, tout en soutenant la pensée mathématique comme ontologie soustractive telle la première ontologie énoncée. Si Lawvere semblerait avoir cédé face à l'ampleur d'une telle question, tenir sur elle en est l'un des impératifs qui guidera mon programme d'étude dans les suites de cet exposé.

5 Ouverture

En conclusion, nous avançons donc l'écriture catégorielle comme écriture propre à ce qui, de l'intellectualité mathématique, peut-être codifié pour ensuite pouvoir être dit et transmis. Plus précisément, le mot *catégories* viendra ici nommer dialectiquement à la fois écriture de l'intellectualité mathématique et une pensée autonome qu'on appellera « théorie des catégories » (tout comme l'algèbre est à la fois écriture et domaine mathématique parmi d'autres).

Du à l'extrême richesse et l'expansion foudroyante de cette théorie aujourd'hui, il ne serait pas raisonnable, même en survol, de lister quelques unes des nouvelles notions catégorielles qui irriguent la pratique mathématique contemporaine. Nous avons restitué transformations naturelles, paires d'adjoints et topos élémentaires dans cet exposé (datant d'il y a plus d'un demi-siècle!) mais les notions de catégorie monoïdale symétrique, catégorie homotopique, d'opérade... permettent de manière capitale d'éclairer de toutes autres situations mathématiques.

Précisons plus modestement que le choix de l'expression « écriture catégorielle » plutôt que « écriture fonctorielle » (ou encore « faisceautique, toposique… ») est ici assumé dans notre but d'élucider ce que, de cet espace d'intellectualité mathématique, est surnuméraire à une pensée mathématique particulière. A titre d'exemple, l'écriture catégorielle codifie la réflexion en intériorité mathématique d'un « point de vue fonctoriel » et sa potentialité pour une pensée mathématique (exemplairement déployée en théorie des schémas, des champs algébriques,..). De même, nous la préférons à l'expression « écriture diagrammatique » qui efface la réflexion - et donc l'écriture - compositionnelle, dynamique et opératoire d'une situation pour n'en garder que son aspect combinatoire et perspectiviste. C'est en ce point précis que Lawvere nous lègue, celui de l'écriture catégorielle, que nous décidons matériellement de l'existence d'une intellectualité mathématique, non complètement submergée dans la pensée mathématique à proprement parler et autonome tant de la logique que de la philosophie ou encore de la physique. D'où un redoublement de l'énoncé sur sa position d'énonciation: fonder matériellement une idée matérialiste de la mathématique (où matérialisme ici s'opposera par exemple à un idéalisme objectif ou subjectif des mathématiques mais aussi à un matérialisme vulgaire rabattant la pensée sur le langage). Il en reste que si l'écriture catégorielle peut ouvrir à la possibilité d'une idée des mathématiques particulière qui r*ai*sonne avec le matérialisme de type nouveau de Badiou, presque tout reste encore à faire. Le travail réalisé ici motive une ultérieure exploration exhaustive des traits de l'intellectualité mathématique en ce que fait *oeuvre* et sur sa dimension esthétique, c'est à dire son rapport à son environnement d'époque. Nous y reviendrons sur certains de ces aspects dans la journée mamuphi de Décembre.