De l'inauguration d'une intellectualité mathématique matérialiste codifiée catégoriquement

Martin Gonzalez

Université du Luxembourg

Séminaire *MaMuPhi* - 9 octobre 2021

Deux textes de référence

- *Adjointness and Foundations*, Dialectica, 23 (1969) ;
- *Quantifiers and Sheaves*, Actes, Congrès International de Mathématiques, (1970) ;

1. The Formal–Conceptual Duality in Mathematics and in its Foundations[2]

That pursuit of exact knowledge which we call mathematics seems to involve in an essential way two dual aspects, which we may call the Formal and the Conceptual. For example, we manipulate algebraically a polynomial equation and visualize geometrically the corresponding curve. Or we concentrate in one moment on the deduction of theorems from the axioms of group theory, and in the next consider the classes of actual groups to which the theorems refer. Thus the Conceptual is in a certain sense the subject matter of the Formal.

Foundations will mean here the study of what is universal in mathematics. Thus Foundations in this sense cannot be identified with any "starting-point" or "justification" for mathematics, though partial results in these directions may be among its fruits. But among the other fruits of Foundations so defined would presumably be guide-lines for passing from one branch of mathematics to another and for gauging to some extent which directions of research are likely to be relevant.

Being itself part of Mathematics, Foundations also partakes of the Formal-Conceptual duality. In its formal aspect, Foundations has often concentrated on the formal side of mathematics, giving rise to Logic. More recently, the search for universals has also taken a conceptual turn in the form of Category Theory, which began by viewing as a new mathematical object the totality of all morphisms of the mathematical objects of a given species A, and then recognizing that these new mathematical objects all belong to a common non-trivial species C which is independent of A. Naturally, the formal tendency in Foundations can also deal with the conceptual aspect of mathematics, as when the semantics of a formalized theory T is viewed itself as another formalized theory T', or in a somewhat different way, as in attempts to formalize the study of the category of categories. On the other hand, Foundations may conceptualize the formal aspect of mathematics, leading to Boolean algebras, cylindric and polyadic algebras, and to certain of the structures discussed below.

One of the aims of this paper is to give evidence for the universality of the concept of adjointness, which was first isolated and named in the conceptual sphere of category theory, but which also seems to pervade logic. Specifically, we describe in section III the notion of cartesian closed category, which appears to be the appropriate abstract structure for making explicit the known analogy (sometimes exploited in proof theory) between the theory of functionality and propositional logic. The structure of a cartesian closed category is entirely given by adjointness, as is the structure of a "hyperdoctrine", which includes quantification as well. Precisely analogous "quantifiers" occur in realms of mathematics normally considered far removed from the province of logic or proof theory.

QUANTIFIERS AND SHEAVES

by F. W. LAWVERE

The unity of opposites in the title is essentially that between logic and geometry, and there are compelling reasons for maintaining that geometry is the leading aspect. At the same time, in the present joint work with Myles Tierney there are important influences in the other direction: a Grothendieck " topology " appears most naturally as a modal operator, of the nature " it is locally the case that ", the usual logical operators such as $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ have natural analogues which apply to families of geometrical objects rather than to propositional functions, and an important technique is to lift constructions first understood for " the " category $\underline{S}$ of abstract sets to an arbitrary topos. We first sum up the principal contradictions of the Grothendieck-Giraud-Verdier theory of topos in terms of four or five adjoint functors, significantly generalizing the theory to free it of reliance on an *external* notion of infinite limit (in particular enabling one to claim that in a sense logic is a special case of geometry). The method thus developing is then applied to intrinsically define the concept of Boolean-valued model for $\underline{S}$ ($\underline{BVM}/\underline{S}$) and to prove the independence of the continuum hypothesis free of any use of transfinite induction. The second application of the method outlined here is an intrinsic geometric construction of the Chevalley-Hakim global spectrum of a ringed topos free of any choice of a " site of definition ".

When the main contradictions of a thing have been found, the scientific procedure is to summarize them in slogans which one then constantly uses as an ideological weapon for the further development and transformation of the thing. Doing this for " set theory " requires taking account of the experience that the main pairs of opposing tendencies in mathematics take the form of adjoint functors, and frees us of the mathematically irrelevant traces ($\in$) left behind by the process of accumulating ($\cup$) the power set (P) at each stage of a metaphysical " construction ". Further, experience with sheaves, permutation representations, algebraic spaces, etc., shows that a " set theory " for geometry should apply not only to *abstract* sets divorced from time, space, ring of definition, etc., but also to more general sets which do in fact develop along such parameters. For such sets, usually logic is " intuitionistic " (in its formal properties) usually the axiom of choice is false, and usually a set is not determined by its points defined over 1 only.

1. By a topos we mean a category $\underline{E}$ which has finite limits and finite colimits, which is *(a)* cartesian closed and which *(b)* has a subobject classifier T. That is *(a)* on the one hand there is for each object A an internal hom functor $(\ )^A$ right adjoint to cartesian product $(\ ) \times A$, and *(b)* on the other hand there is a single map true: $1 \to T$ such that any monomorphism $X' \rightarrowtail X$ in $\underline{E}$ is the pullback of true along a unique characteristic map $X \to T$. This is the principal struggle in the internal theory of an arbitrary topos, and leads to very rapid development. The " set " T of

Pour Lawvere :

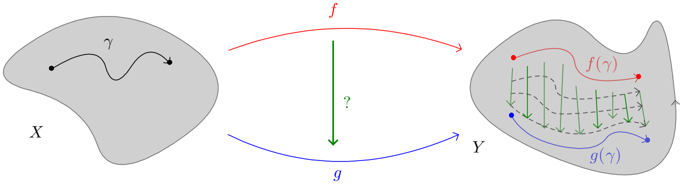
1. **Fondations** = ce qu'il y a d'universel dans les mathématiques
   - Problématique proprement mathématique : ni "point de départ" ni "justification"
   - Objetif : avancer un concept de la mathématique qui lui est universel
2. Foncteurs/situations **adjoints** = formalisant des processus dialectiques
   - Il est possible de formuler une intellectualité mathématique codifiée catégoriquement
   - Ce faisant, elle se dote matériellement d'une autonomie relative
3. **Topos élémentaires** = lieu *à l'intérieur duquel* il est possible de faire des mathématiques
   - Concept de l'intellectualité mathématique **émancipé de la logique**
   - Caractérisation affirmative : constitué de l'**intersection de situations adjointes**
   - Ils ne sont pas immédiatement mathématiques ou logiques
   - Ils portent des fruits mathématiques et logiques
4. Ils **ouvrent des possibles** pour la mathématique, la logique et éclairent la philosophie
   - Géométrisation de la logique (Lawvere, Girard, Caramello, Döring)
   - Unifications intra-mathématiques (Caramello : équivalences de Morita, topos relatifs)
   - Modalités/triplets adjoints et Hegel (cet après-midi)
   - Logiques des Mondes - A. Badiou
5. **Ce lieu n'est pas le tout dont l'écriture catégorielle est capable**
   - Topos bi-Heyting où la formalisation d'un nouvel processus dialectique (lieu doté d'une deuxième négation faible)
   - Modalités/triplets adjoints et Hegel (cet après-midi)
   - $(\infty, 1)$-topoi élémentaires (année prochaine...)

Phénomènes récurrents en mathématiques :

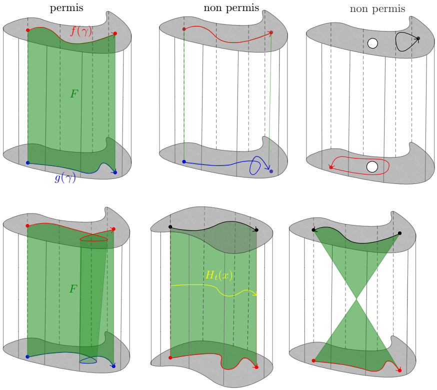
- notions d'équivalence plus faible que l'isomorphisme ensembliste pour identifier des objets
- double dynamique (compositionnelle et juxtapositionnelle)
- chaque dynamique a sa propre opératoire (associativité, neutralité, unitarité..)

Une transformation naturelle est un morphisme entre deux objets codifiant dans sa structuration le mouvement de ces trois composantes.

Exemple : $f, g : X \to Y$ fonctions continues, γ chemin continu. On appellera l'opération consistant à pousser $f(\gamma)$ vers $g(\gamma)$ de façon continue une *homotopie* $f(\gamma) \simeq g(\gamma)$.

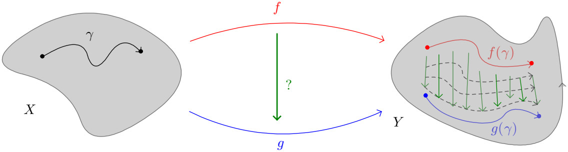


$f(\gamma) \simeq g(\gamma) \leftrightsquigarrow$ bande F *non arrachée*, dans le cylindre $Y \times [0,1]$:



Fonctionnement :

- Bande *identité* $f(\gamma) \times [0,1]$
- Retournement
- Recollement horizontal : par juxtaposition de chemins
- Recollement verticalement pré-composition ou post-composition
- $g(\gamma)$ et/ou $f(\gamma)$ réduits à un point
- Si γ ne s'auto-intersecte pas $\rightsquigarrow$ bande triangulaire soutenue par un de ses points. On dira que γ est contractile.



Formalisation d'une bande : une fonction *régionale* continue

$$
\begin{array}{rcl}
H^{f,g}_{\gamma} : X_{|\gamma} \times [0,1] & \longrightarrow & Y \\
(x,t) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} H(x,0) := f(x) & x := \gamma(h) \\ H(x,t) & \text{intérieur horizontal de la bande} \\ H(x,1) := g(x) & \end{array} \right.
\end{array}
$$

où $X_{|\gamma}$: restriction de X à l'image du chemin continu $\gamma : [0,1] \to X : h \mapsto \gamma(h)$.

- f et g sont homotopes si la fonction globale $H^{f,g} : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ est continue.
- f et g sont localement homotopes toute restriction $H^{f,g}_{U} : U \times [0,1] \longrightarrow Y$ à $U \subseteq X$ est continue.

Intérêt des transformations naturelles : **éclairer** le fonctionnement des fonctions régionales.

Pensée mathématique $\rightsquigarrow$ déterminer quand de telles bandes sont ou pas arrachées (avec tous les moyens de bord à disposition).

Intellectualité mathématique $\rightsquigarrow$ avancer (pas à pas) une analyse de la situation...

- Objet central : fonctionnement des bandes.
- Bandes sont constituées de 4 extrémités :
  - Extrémités horizontales = chemins (possiblement contractés en des points), images d'un chemin γ par application de 2 fonctions continues entre 2 espaces topologiques X, Y.
  - Extrémités verticales= action de pousserles extrémités horizontales, créant ainsi une bande.
- Dynamique :
  - Assemblage vertical : composition de fonctions
  - Assemblage horizontal : juxtaposition de chemins
- Opératoire :
  - (Associativité) L'assemblage (vertical ou horizontal) de trois bandes F_1, F_2, F_3 correctement disposées est associatif (on peut commencer par assembler F_2, F_3 et assembler le résultat avec F_1 ou alors commencer par assembler F_1, F_2 puis procéder de même).
  - (Neutralité) A minima, une bande non arrachée consistant en une corde dont les deux extrémités s'identifient à $f(\gamma)$. En particulier, si $X = Y, f : \mathrm{id}_X$ et γ est contracté en un point $x \in X$, il y a une telle bande non arrachée.

...puis une codification de notre analyse :

1. On constitue une catégorie Top dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les fonctions continues.
2. Pour X dans Top, on constitue une catégorie $\mathcal{P}X$
   - objets : points de X
   - morphismes : chemins continus (dans X) entre deux points de X
3. Pour $X, Y \in$ Top, on constitue une catégorie $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}X, \mathcal{P}Y)$
   - objets : les fonctions continues $X \to Y$
   - morphismes : des homotopies entre chemins continus $f(\gamma)$ et $g(\gamma)$.
4. Au total, constituer une *2-catégorie* $\mathcal{P}$ Top à expliciter (rigidité variable de son opératoire)
5. Bandes $\rightsquigarrow$ 2-morphismes inversibles de $\mathcal{P}$ Top.

On note

- $\mathbf{2}$ la catégorie avec deux objets qu'on notera $0, 1$ et un seul morphisme $\sigma : 0 \longrightarrow 1$ entre ces objets.
- $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ le produit cartésien de deux catégories et un bifoncteur $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{G}$ est un foncteur en ses deux composantes.
- $\circ$ la composition de morphismes et $\bullet$ la composition de foncteurs

Definition

Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle entre F et G, notée $\alpha : F \Longrightarrow G$, est un bi-foncteur

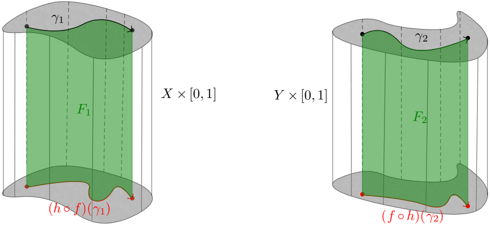
$$\alpha : \mathcal{C} \times \mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{D}$$

tel que $\alpha(-, 0) = F$ et $\alpha(-, 1) = G$.
α est appelé isomorphisme naturel si de plus on a

$$\alpha \bullet \alpha^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \text{ et } \alpha^{-1} \bullet \alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{C} \times \mathbf{2}} \tag{1}$$

Équivalences d'homotopies

Soient deux fonctions continues f :X→Y et h :Y→X. On voudrait comparer les espaces X et Y à la lumière des bandes



X homotopiquement équivalent à Y ssi $f \circ h \simeq id_Y$ et $(h \circ f) \simeq id_X$. Or il peut arriver que

- $(h \circ f)(\gamma_1) \neq \gamma_1$ ou $(f \circ h)(\gamma_2) \neq \gamma_2$
- h et f ne soient pas bijectives.

$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est une **équivalence de catégories** s'il existe $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que $\epsilon : F \bullet G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ et $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \simeq G \bullet F$. Si de plus ϵ et η sont des égalités, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont **isomorphes**.

Établissons le tableau partiel des analogies présentées :

$f\colon X \leftrightarrows Y\colon h$	Topologie	Catégories	$L\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D}\colon R$
égalités d'ensembles $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ $h \circ f = \mathrm{id}_X$ +propriétés…	homéomorphisme entre espaces	isomorphisme entre catégories	égalité de foncteurs $LR = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ $RL = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$
homotopies de fonctions $f \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$ $h \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ +propriétés…	équivalence d'homotopie entre espaces	équivalence entre catégories	isom. nat. $LR \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ $RL \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$

Soit sk$\mathcal{C}$ sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ qui prends exactement un représentant de chaque classe d'isomorphismes de $\mathcal{C}$. Alors

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "equiv"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left] \\ sk\mathcal{C} \arrow[u, hook] \arrow[r, "isom"] & sk\mathcal{D} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

- ϵ et η mesurent affirmativement le défaut d'égalité entre deux catégories équivalentes.

Et Lawvere dans tout cela ?

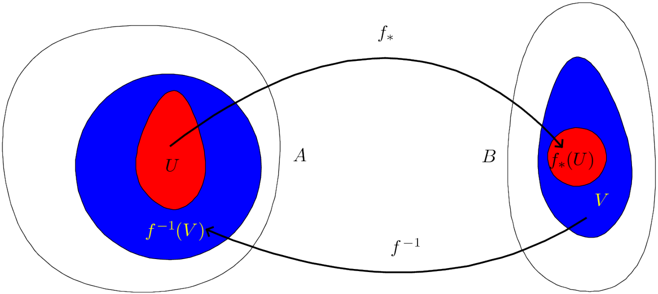
Lawvere, *Quantifiers and Sheaves (1970)* :

Lorsque les principales contradictions d'une chose ont été trouvées, la procédure scientifique consiste à les résumer dans des slogans que l'on utilise ensuite constamment comme une arme idéologique pour le développement et la transformation ultérieurs de la chose. Faire cela pour la ≪ théorie des ensembles ≫ nécessite de tenir compte de l'expérience que les principales paires de tendances opposées en mathématiques prennent la forme de foncteurs adjoints, et nous libère des traces mathématiquement non pertinentes (∈) laissées derrière par le processus d'accumulation (∪) de l'ensemble de puissance (P) à chaque étape d'une "construction" métaphysique.

- Isomorphisme $\rightsquigarrow$ non trivialité de ϵ et η $\longleftarrow$ équivalence
- Équivalence $\rightsquigarrow$ non inversibilité ϵ et η $\longleftarrow$ adjonction

Soit A, B ensembles non vides et $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$ leurs ensembles puissance (ou de sous-parties). Une fonction $f : A \longrightarrow B$ induit deux fonctions :image *directe* et *réciproque*

$$f_* : \mathcal{P}(A) \leftrightarrows \mathcal{P}(B) : f^{-1}$$



Alors pour tous $U \subseteq A$ et $V \subseteq B$:

1. $U \subseteq f^{-1}(f_*(U))$ car f peut avoir plusieurs préimages.
2. $f_*(f^{-1}(V)) \subseteq V$ car f peut ne pas prendre toutes les valeurs de V.

On munit $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ des préordres *inclusion* $\subseteq$. Ils sont préservés par

$$f_* : (\mathcal{P}(A), \subseteq) \leftrightarrows (\mathcal{P}(B), \subseteq) : f^{-1}$$

Alors de $U \subseteq f^{-1}(f_*(U))$ et $f_*(f^{-1}(V)) \subseteq V$ on déduit :

1. Deux opérateurs partout bien définis d'ensembles préordonnés

$$\eta : U \mapsto f^{-1}(f_*(U)) \text{ (clôture)} \qquad \epsilon : f_*(f^{-1}(V)) \mapsto V \text{ (intérieur inversé ou noyau).}$$

2. Ils créent une distinction *ensembliste* et relative à f :
   - U **fermé** ssi $f^{-1}(f_*(U)) \subseteq U$ et V **ouvert** ssi $V \subseteq f_*(f^{-1}(V))$
   - U fermé ssi sa clôture est inversible, V ouvert ssi son intérieur est inversible.

Soit $\mathcal{P}_o(A)$ (resp. $\mathcal{P}_o(B)$) sous-ensemble des fermés de A (resp. ouverts de B). Alors (f_*, f^{-1}) crée une *connexion galoisienne* entre $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ (généralisant la notion de correspondance de Galois)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(A) \arrow[r, bend left, "f_*"] & \mathcal{P}(B) \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] & {} \arrow[r, squiggly, "\text{adjonction}"] & {} & f_*(U) \subseteq V \Longleftrightarrow U \subseteq f^{-1}(V) \\
\mathcal{P}_o(A) \arrow[u, hook, "\text{inclusion}"] \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{P}_o(B) \arrow[u, hook, "\text{inclusion}"] & {} \arrow[r, squiggly, "\text{bijection}"] & {} & U = f^{-1}(f_*(U)) \quad f_*(f^{-1}(V)) = V
\end{tikzcd}$$

Retour en arrière : Quel impact sur la nature de f ?

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(A) \arrow[r, shift left, "f_*"] & \mathcal{P}(B) \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \\ \mathcal{P}_0(A) \arrow[u, hook, "\text{inclusion}"] \arrow[r, "\simeq"] & \mathcal{P}_0(B) \arrow[u, hook, "\text{inclusion}"] \end{tikzcd}$$

$\overset{\text{adjonction}}{\rightsquigarrow}$ $f_*(U) \subseteq V \Longleftrightarrow U \subseteq f^{-1}(V)$

$\overset{\text{bijection}}{\rightsquigarrow}$ $U = f^{-1}(f_*(U)) \quad f_*(f^{-1}(V)) = V$

Classiquement, pour $f : A \longrightarrow B$, le défaut de bijectivité de f, se mesurent négativement :

- f est non injective ssi elle n'admet pas de réciproque à gauche
- f est non surjective ssi elle n'admet pas de réciproque à droite

Les opérateurs η et ϵ mesurent *affirmativement* le défaut de bijectivité de f.

- f est non injective ssi $\eta \neq id_{\mathcal{P}(A)}$
- f est non surjective ssi $\epsilon \neq id_{\mathcal{P}(B)}$
- f est bijective ssi $\mathcal{P}_0(A) = \mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}_0(B) = \mathcal{P}(B)$.

Mise en fonctorialité de f et f^{-1} induit deux propositions équivalentes :

- Il existe un isomorphisme naturel en chaque composante :

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(B)}(f_*(-), -) \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(A)}(-, f^{-1}(-))$$

- Il existe deux transformations naturelles $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A)} \Longrightarrow (f^{-1} \circ f_*)$ et $\epsilon : f_* \circ f^{-1} \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{P}(B)}$ telles que les triangles suivant sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
f_*(U) \arrow[r, "f_*\eta_U"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{f_*(U)}"'] & f_*(f^{-1}(f_*(U))) \arrow[d, "\epsilon_{f(U)}"] \\
& f_*(U)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f^{-1}(V) \arrow[r, "\eta_{f^{-1}(V)}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{f^{-1}(V)}"'] & f^{-1}(f_*(f^{-1}(V))) \arrow[d, "f^{-1}\epsilon_V"] \\
& f^{-1}(V)
\end{tikzcd}$$

Le couple (η, ϵ), "unités" de la situation adjointe (f_*, f^{-1}), norme partout

- ce sur quoi $\mathcal{P}_0(A)$ et $\mathcal{P}_0(B)$ s'unifient : au point même où $(\eta, \epsilon) = (id, id)$;
- ce vers quoi $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ se synthétisent : au point même où (η, ϵ) constituent *une* correspondance globale θ i.e. lieu maximal où elles consistent comme transformations naturelles.

Exemple : Treillis des ouverts

$(X, \mathcal{T}_X)$ espace topologique, $|X|$ ensemble sous-jacent. $\mathcal{T}(X)$ son treillis d'ouverts.

- Borne maximale : $\mathcal{T}_g := \{\{\}, X\}$, borne minimale : $\mathcal{T}_d := \mathcal{P}X$

Défaut d'homogénéité entre Top et Set $\leftrightsquigarrow$ **deux** situations adjointes.

D'une part

$$(-, \mathcal{T}_d) : \mathrm{Set} \leftrightarrows \mathrm{Top} : |-|$$

- fonction $|X| \to S \leftrightarrow$ fonction continue $(X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (S, \mathcal{T}_S)$ ssi $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_d$
- $\eta_S : S \mapsto |(S, \mathcal{T}_d)| = S$ triviale et $\epsilon_X : (|X|, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$
  - unifie ensembles et espaces discrets
  - synthétise Set et Top en mesurant un manque de finesse par rapport à $\mathcal{T}_d$

D'autre part

$$|-| : \mathrm{Top} \rightleftarrows \mathrm{Set} : (-, \mathcal{T}_g)$$

- fonction $S \to |X| \leftrightarrow$ fonction continue $(S, \mathcal{T}_S) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ ssi $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_g$
- $\hat{\epsilon}_S : |(S, \mathcal{T}_g)| = S \mapsto S$ triviale et $\hat{\eta}_X : (X, \mathcal{T}_X) \to (|X|, \mathcal{T}_g)$
  - unifie ensembles et espaces grossiers
  - synthétise Set et Top en mesurant un raffinement par rapport à $\mathcal{T}_g$

Exemple : Algèbres de Heyting et co-Heyting

Adjonctions logiques : soit p=proposition.

1. H algèbre de Heyting $\leftrightsquigarrow$ conjonction avec p, $H \longrightarrow H$, adjoint à gauche de l'implication faible (haut : adjoint à droite, bas : adjoint à gauche) :

$$\frac{a \vdash (p \to b)}{(p \wedge a) \vdash b}$$

   - 0 et 1 les bornes inférieures et supérieures,
   - la négation faible $\neg a := a \to 0$ est le pge tel que $a \wedge \neg a = 0$
   - En général il n'est pas vrai que $a \vee \neg a = 1$.

2. H algèbre de co-Heyting $\leftrightsquigarrow$ disjonction adjointe à droite d'une *soustraction*

$$\frac{a \vdash (p \wedge b)}{(p \backslash a) \vdash b}$$

   - tout élément de H admet un ppe $\sim a := 1 \backslash a$ tel que $a \vee \sim a = 1$
   - nouvel opérateur $\partial a := a \wedge \sim a$ "bord de a"
   - $\sim a$ satisfait la loi du tiers exclu, invalide la loi de non-contradiction.
   - **Exemple** : le treillis des fermés d'un espace topologique.

Intersection de ces deux situations $\leftrightsquigarrow$ algèbre de *bi-Heyting*

- termes unifiés $\leftrightsquigarrow$ $\sim = \neg$ $\leftrightsquigarrow$ algèbres de Boole.

Des topos de Grothendieck aux topos de Lawvere :

De la nécessité d'une quantité minimale d'ouverts :

1. $\mathbb{C}^2 \rightsquigarrow$ topologie standard $\mathcal{T}_1$ ou topologie $\mathcal{T}_2$ dont sa base d'ouverts : $U_f = \mathbb{C} \backslash f^{(-1)}(\{0\})$ pour f holomorphe.
2. $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ car f est continue mais $\mathcal{T}_2 \neq \mathcal{T}_1$: les fermés de $\mathcal{T}_2$ sont soit des ensembles finis, soit $\mathbb{C}^2$ tout entier (prolongement analytique).
3. Grothendieck : pallier le manque d'ouverts en se sourçant de ceux venus des revêtements de l'espace considéré $\rightsquigarrow$ notion de topos $\mathcal{E}$ de faisceaux sur un site.
4. Giraud : axiomatique pour qu'une catégorie $\mathcal{C} \simeq \mathcal{E}$.

Voici comment Lawvere présente sa notion (*Quantifiers and Sheaves*, 1970) :

L'unité des contraires dans le titre est essentiellement celle entre la logique et la géométrie. [...] Nous résumons d'abord les principales contradictions de la théorie de Grothendieck-Giraud-Verdier des topos en termes de quatre ou cinq foncteurs adjoints généralisant de manière significative la théorie pour la libérer du recours à une notion externe de limite infinie (en permettant en particulier de dire qu'en un sens la logique est un cas particulier de la géométrie).

Soit $\mathbf{1}$ la catégorie avec un seul objet et une seule flèche (la flèche identité).
Lawvere en tirera les situations suivantes

Objet terminal	Objets produit	Objets fonctionnels	Classifiant des sous-objets
$X \to \mathbf{1}$	$X \to X \times Y$	$X \to Y^A$	$X \to \Omega$
$* \to Y$	$X \times X \to Y$	$A \times X \to Y$	$? \rightarrowtail X$

Ainsi,

- Avoir un objet terminal $\Leftrightarrow$ admettre un adjoint à droite du foncteur terminal $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{1}$ C'est le cas de tout singleton dans la catégorie des ensembles.
- Avoir un produit binaire $\Leftrightarrow$admettre un adjoint à droite du foncteur diagonal $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$
- Posséder les exponentiels (ou objets fonctionnels) de tous objets équivaut à admettre un adjoint à droite de $A \times (-)$ pour tout objet A de $\mathcal{C}$.
  - Satisfait par Set, pas par Top.
  - Les espaces des bandes données auparavant représentent des objets exponentiels pour Top.
- Objets puissance...

Topos élémentaire : intersection de ces situations.

Definition

Un topos élémentaire est une catégorie possédant

1. toutes limites finies qu'on peut construire à partir de ses objets
2. tous les objets puissance $\mathcal{P}X$ de ses objets X

Notion qui s'émancipe à la fois

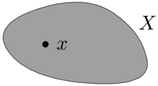
1. d'une dépendance sur la logique fondationnelle
2. de la situation intramathématique qui l'a motivée

Quelques propriétés

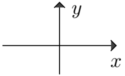
- Les sous-objets de chaque objet peuvent être indexés par un ensemble.
- L'objet puissance de l'objet final 1 distingue un objet : le classifiant de sous-objets $\mathcal{P}(1) = \Omega$
- L'objet puissance de tout objet X s'identifie à l'objet fonctionnel de X vers Ω : $\mathcal{P}X = \Omega^X$
- la flèche $1 \to \Omega$ structure l'ensemble des sous-objets de Ω comme algèbre de Heyting complète lorsqu'ils sont ordonnés par inclusion.

Analogies

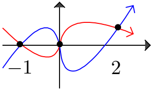
Element



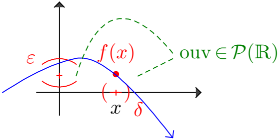
Produit Cartésien



Solutions



Continuité



Element Global

$$1 \longrightarrow X$$

$$1 = \text{objet terminal}$$

Produit binaire

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\exists!"] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{R} & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \arrow[l, "\pi_x"'] \arrow[r, "\pi_y"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Egaliseurs

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\exists!"'] \arrow[d] & \\ \{-1,0,2\} \arrow[r, hook] & \mathbb{R} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

produits finis

limites finies

Ensemble puissance

valeurs de vérité

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[d, "\mathrm{id}\times\hat{\varphi}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X\times\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\epsilon_X"] & \mathcal{P}1 = \{\varnothing, 1\} \end{tikzcd}$$

« appartenance »

Rétroaction sur la logique et les mathématiques :

1. Un morphisme *géométrique* s'il admet un adjoint à gauche préservant les limites finies.
2. Un morphisme *logique* s'il préserve toute la structure interne.
3. l'unité créée de l'intersection de ces deux situations donne la notion d'homéomorphisme local, vu comme morphisme géométrique dont l'adjoint à gauche est précisément un foncteur logique.

Ainsi, selon cette même logique d'intrications d'adjonctions, nous avons

1. Rétroaction ensembliste = adjonctions supplémentaires $\leftrightsquigarrow$ axiome du choix, la récursivité, l'induction...
2. Rétroaction sur les nombres : situation adjointe $\leftrightsquigarrow$ objet de nombres naturels $\mathbb{N}$ (déjà dans sa thèse de 1963).
3. Rétroaction sur l'algèbre : algèbre universelle (théories de Lawvere).
4. ...

Definition

Un topos élémentaire est un topos de bi-Heyting ssi l'opérateur de réunion avec un sous-objet admet un adjoint à gauche.

Dans un tel topos

- les sous-objets $\leftrightsquigarrow$ propositions locales
- l'inconsistance d'un paradoxe est locale et peut être circonscrite tout en gardant le réseau rationnel d'inférences

Enjeu :

- Formalisation possible du type de négation dialectique à l'oeuvre dans la résolution des contradictions non-antagoniques.
- Relations croissantes avec la physique quantique (Döring).
- Relations géométriques encore devant nous (résolutions des singularités d'Hironaka ?)
- Notion sera introduite en 1991 : Lawvere n'y fera aucune allusion philosophique.
- Pourtant en 1970 : faisceautisation élémentaire comme "méthode résolvant la contradiction entre pré-faisceaux et espace étalés"..

Journal *The Chevron* du 6 Février 1976 (Vol. 16, N°. 31 à Waterloo, Canada)

Mao on math

Why should math and science students read Chairman Mao's works?

William Lawvere, one of the world's leading mathematicians, will give reasons when he speaks on "Applying Marxism-Leninism-Mao Tse-Tung Thought to Mathematics and Science" this evening (Friday) at 9 p.m. in Physics 145. This is a popular lecture, open to the public.

News continues to arrive from China concerning dramatic advances in science and technology, advances attributed to the scientific application of Marxism-Leninism-Mao Tse-Tung thought.

Scientific journals published in China give serious attention to the social and political significance of scientific work. Yet the uses of the dialectical method are at an early stage of development in Western science.

Lawvere points to chairman Mao's writings "Where do Correct Ideas Come From?" and "On Contradiction" as the basis for his outstanding mathematical achievements.

In this talk, he will show how science is corrupted to pseudoscience under imperialism, and how Lenin's "Materialism and Empirio-criticism" serves as a guide to science and mathematics under the two superpowers.

Lawvere, now teaching at the State University of New York at Buffalo, is internationally known for his development of a form of dialectics known as topos theory.

This work has enabled previously unrelated trends in modern mathematics to apply concepts and methods developed by each other. First applied to geometry and logic, Lawvere's work is now finding its way into applied mathematics.

He will also be giving an address to the Ontario Mathematical meeting, tomorrow afternoon. This second lecture, at 2:30pm in MC 5158, concerns his mathematical work, and is entitled "Topos theory as a clarification of some relationships between set theory, logic and sheaf theory".

The talk Friday evening is jointly sponsored by the physics department and the Mathematics Faculty.

—henry crapo