Catégorification des espèces de structures

Andrée C. EHRESMANN

Université de Picardie Jules Verne, LAMFA
ehres@u-picardie.fr
https://ehres.pagesperso-orange.fr
https://vbm-ehr.pagesperso-orange.fr

Séminaire Mamuphi, IRCAM, Mars 2022

PARTIE I

ACTION D'UNE CATEGORIE SUR UN ENSEMBLE

ESPECE DE STRUCTURES ASSOCIEE

Congrès de Nice 1957

Ehresmann, Charles
Jahresbericht d. DMV
Bd. 60 (1957) S. 49—77

Gattungen von lokalen Strukturen.

Von CHARLES EHRESMANN in Paris.

In dieser Arbeit[1]) wird der allgemeine Begriff einer Gattung von mathematischen Strukturen entwickelt, ausgehend von den Begriffen „Kategorie" und „Funktor", die von Eilenberg-Mac Lane ein 1
geführt worden sind. Dies führt besonders zu einer Theorie der Gattungen von lokalen Strukturen[2]). Die Mannigfaltigkeiten der Kategorie C^r, die lokalen Produkte, die Blätterungen und die Faserungen bilden wichtige Gattungen dieser Art. Die Beweise sind bloß kurz angedeutet, da sie leicht ergänzt werden können. Die Grundstrukturen der Differentialgeometrie sollen in einer Fortsetzung zu dieser Arbeit be- 2
handelt werden.

Wir unterscheiden zwischen Mengen und Klassen; eine Menge ist auch eine Klasse. Die Klasse aller Mengen ist keine Menge. Wir lassen

---

1) Diese Arbeit ist die Darstellung des ersten Teils meines Vortrags über „Grundbegriffe der Differentialgeometrie", gehalten bei der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in Würzburg (September 1956). Der zweite Teil dieses Vortrags brachte eine Definition der Grundstrukturen der Differentialgeometrie. Er wird in einer Fortsetzung zu dieser Arbeit erscheinen.

2) Die Grundideen dieser Theorie habe ich schon in früheren Publikationen[3]) kurz angegeben und seit 1952 in verschiedenen Vorlesungen und Vorträgen ausführlich mit Anwendungen dargestellt (z. B. in Rio de Janeiro, Princeton, Yale, Bombay, Paris). 3

3) a) Structures locales et structures infinitésimales (Comptes Rendus Acad. Sciences, Paris, 234, 1952, p. 587).

b) Structures locales (Annali di Mat., 1954, p. 133).

c) Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie (Colloque Int. de Géométrie diff. de Strasbourg, C.N.R.S., 1953).

IDEE D'UNE CATEGORIE

L'article commence par la définition d'une catégorie sous la forme initiale donnée par Eilenberg & Mac Lane (1945): classe munie d'une loi de composition partielle vérifiant certains axiomes (et non via les Hom).

Charles met en évidence les applications source α et but β et le fait que le composé $\kappa(f, g) = f.g$ est défini ssi $\alpha(f) = \beta(g)$. En termes plus modernes:

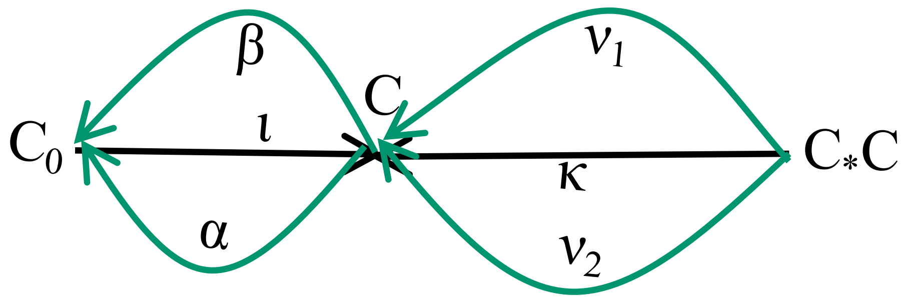
IDEE D'UNE CATEGORIE

L'article commence par la définition d'une catégorie sous la forme initiale donnée par Eilenberg & Mac Lane (1945): classe munie d'une loi de composition partielle vérifiant certains axiomes (et non via les Hom).

Charles met en évidence les applications source α et but β et le fait que le composé $\kappa(f, g) = fg$ est défini ssi $\alpha(f) = \beta(g)$. En termes plus modernes:

Proposition. ***L****'ensemble* $C{*}C$ *des couples composables est le produit fibré* $\alpha V \beta$.

D'où le diagramme Γ_C dans *Set,* appelé ***idée de la catégorie*** C, qui permet d'engendrer *l'esquisse* de catégorie..



ACTION D'UN GROUPE SUR UN ENSEMBLE

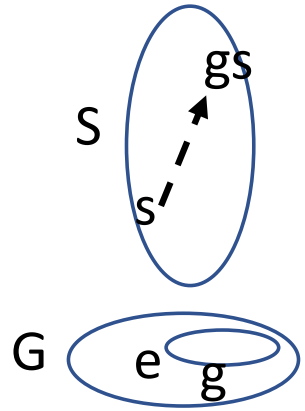
Pour définir l'*action* κ *d'un groupe* G d'unité e sur un ensemble S on peut :

1. Soit se donner une *composition*

   $\kappa : G\text{x}S \longrightarrow S : \ (g, s) \mapsto gs$

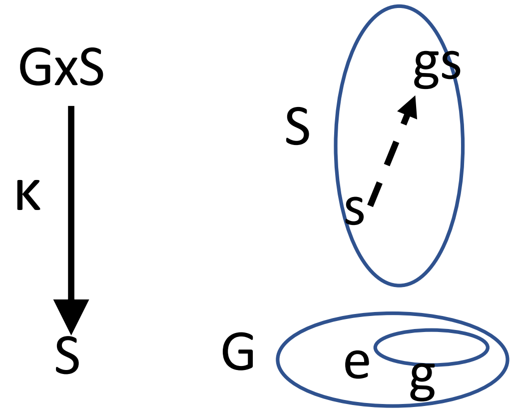
vérifiant $g'(gs) = (g'g)s$ et $es = s$

$$\begin{array}{c} G\text{x}S \\ \Big\downarrow k \\ S \end{array}$$



ACTION D'UN GROUPE SUR UN ENSEMBLE

Pour définir l'*action k d'un groupe* G d'unité e sur un ensemble S on peut :

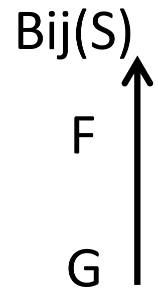


1. Soit se donner une *composition*

$$\kappa: G \mathrm{x} S \longrightarrow S : \ (g, s) \mapsto gs$$

vérifiant $g'(gs) = (g'g)s$ et $es = s$

2. Soit se donner un homomorphisme F de G dans le groupe des bijections Bij(S) de S associant à g la bijection $s \mapsto gs$ de S sur S.



On aura 2 méthodes analogues pour définir l'action d'une catégorie C sur un ensemble S, à la différence que la composition κ n'est plus définie que sur une partie $G_{*}S$ de GxS et F est remplacé par un foncteur de C vers *Set*

CATEGORIE D'OPERATEURS SUR UN ENSEMBLE

Voici la définition d'une ***action*** k *d'une catégorie* C sur un ensemble S donnée dans "Gattungen von lokalen Struk-turen" (trad. française). Si C est un groupe on retrouve la 1ère définition précédente.

DEFINITION : Une **catégorie d'opérateurs** sur une classe S est une catégorie C munie d'une *loi de composition* 'partielle' k : (f, s) |-> fs définie pour certains couples (f, s), où f ϵ C, s ϵ S et fs ϵ S, et qui satisfait aux axiomes suivants :

I) Si g(fs) ou (gf)s est défini, alors les deux éléments sont définis et g(fs) = (gf)s.

2) Si gf et fs sont définis, alors g(fs) est aussi défini.

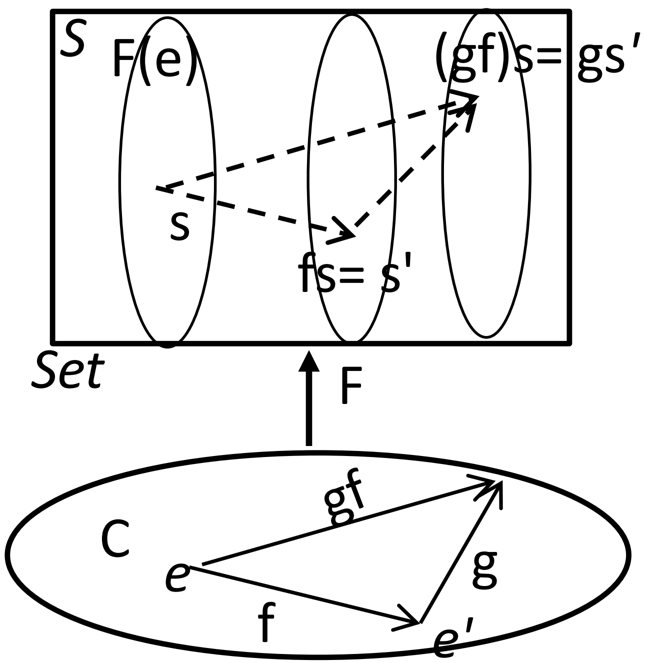
3) Si e est une unité de C et si es est défini, alors es = s.

4) Pour tout f ϵ C, il existe un s ϵ S tel que fs soit défini et pour chaque s ϵ S il existe un f ϵ C tel que fs soit défini

Dans ce cas, Charles dit aussi que S est une **espèce de structures sur** C.

ACTION DE CATEGORIE DEFINIE PAR UN FONCTEUR

Proposition. *Les actions* k*:* $C_*S \longrightarrow S$ *de la* catégorie C *sur un ensemble* S *sont en bijection avec les foncteurs* F: C $\longrightarrow$ *Set vérifiant :* (1) *Les fibres* F(e), e $\in C_o$ *sont disjointes et non vides et* $S = \ddot{\cup}_e F(e)$.



(i) *Foncteur* F *associé à une action* k :

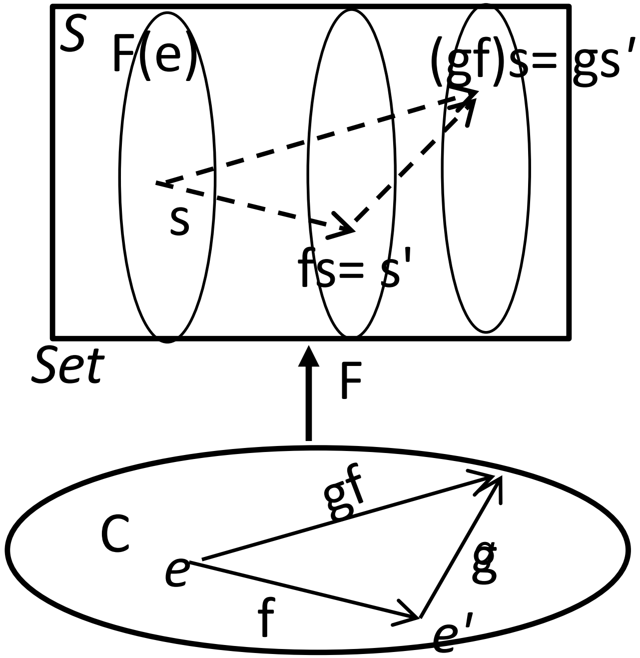
$$F(e) = \{s \in S \mid k(e, s) \text{ est défini}\},$$

$$F(f)(s) = k(f, s) \text{ si } s \in F(e), f : e \longrightarrow e'.$$

Il s'ensuit $S = \cup_e F(e)$.

ACTION DE CATEGORIE DEFINIE PAR UN FONCTEUR

***Proposition**. Les actions* k*:* $C_*S \to S$ *de la* catégorie C *sur un ensemble* S *sont en bijection avec les foncteurs* F: C $\to$ *Set vérifiant :* (1) *Les fibres* F(e), e $\in C_o$ *sont disjointes et non vides et* S = $\ddot{\cup}_e$F(e).



(i) *Foncteur* F *associé à une action* k :

F(e) = {s $\in$ S| k(e, s) est défini},

Fff)(s) = k(f, s) si s $\in$ F(e), f : e $\to$ e' .

Il s'ensuit S = U_eF(e).1.

(ii) Inversement à un foncteur F vérifiant (1) est associée l'action k de C sur l'ensemble S = U_eF(e) définie par

k(f, s) = F(f)(s) si s $\in$ F(e).

Si F ne vérifie pas (1), C opère sur la somme disjointe S' des F(e).

DIAGRAMME D'UNE ESPECE DE STRUCTURES

Soit S une espèce de structures sur la catégorie C (source α, but β, composition κ). Les axiomes vérifiés par l'action k associée conduisent à construire le **diagramme** D_S suivant dans *Set.*

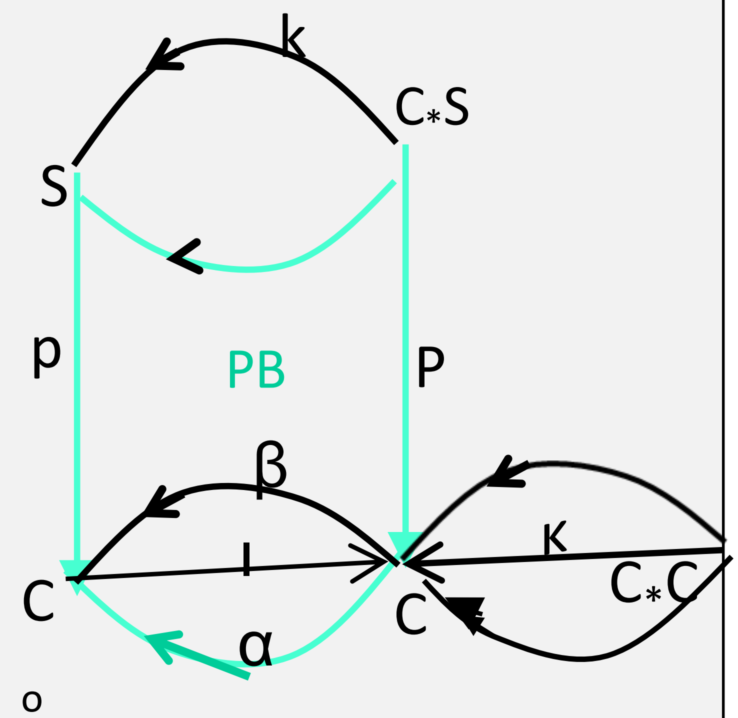


Diagramme D_S

- Il existe $p: S \to C_o$: s |-> e où e est l'unique objet tel que k(s, e) est défini;
- L'action $k: C{*}S \to S$: (f, s) |-> fs a pour domaine le produit fibré de (α, p) (en vert).
- On a : p k = β P: (f, s) |-> β(f) .

DIAGRAMME D'UNE ESPECE DE STRUCTURES

Soit S une espèce de structures sur la catégorie C (source α, but β, composition κ). Les axiomes vérifiés par l'action k associée conduisent à construire le **diagramme** D_S suivant de S dans *Set.*

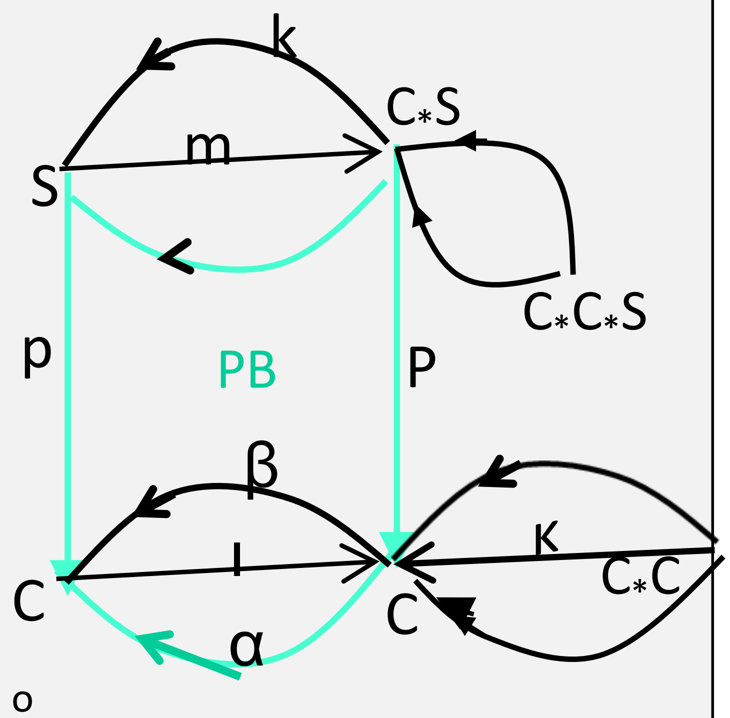


Diagramme D_S

- Il existe p: $S_. \to C_o$: s |-> e où e est l'unique objet tel que k(s, e) est défini;
- L'action k: $C_*S \to S$: (f, s) |-> fs a pour domaine le produit fibré de (α, p) (en vert).
- On a : p k = β P: (f, s) |-> β(f) .
- Utilisant des PB, on construit

  m: $S \to C_*S$: s |-> (p(s), s) ,

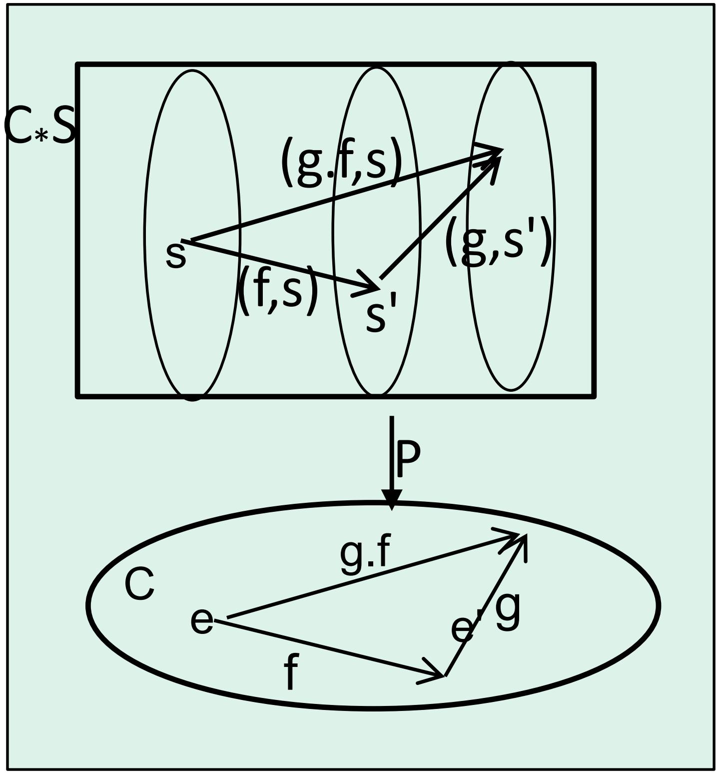
  puis C_*C_*S = {(g, f, s}| g.f et fs définis} et 2 flèches $C_*C_*S \to C_*S$ associant resp. (g.f)s et g(fs) à (g, f, s). Par définition k doit les égaliser.

FIBRATION DISCRETE ASSOCIEE A UNE ESPECE DE STRUCTURES

Proposition. *L'ensemble* C_*S *devient une catégorie pour la loi de composition :*

$$(g, s')(f, s) = (g.f, fs) \quad \textit{ssi} \quad s' = fs \ \textit{ et } \ g\,f \textit{ est défini dans } C..$$

L'application P *de* C_*S *vers* C *définit un foncteur* de cette catégorie *vers* C, *et* P: $C_*S \longrightarrow C$ *est une* **fibration discrète.**

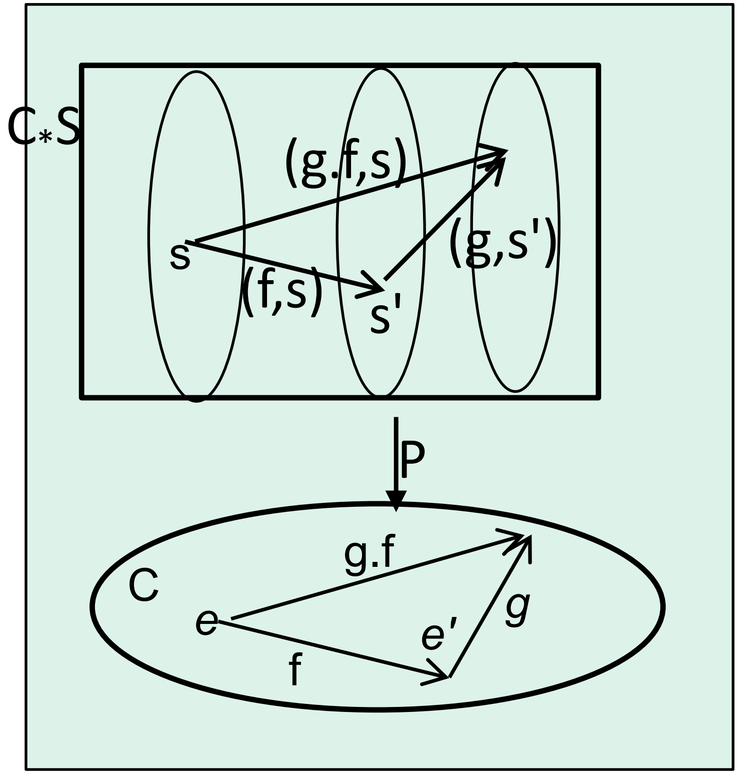


FIBRATION DISCRETE ASSOCIEE A UNE ESPECE DE STRUCTURES

Proposition. *L'ensemble* C_*S *devient une catégorie pour la loi de composition :*

$$(g, s')(f, s) = (g.f, fs) \quad \textit{ssi} \quad s' = fs \ \textit{ et } \ g\,f \textit{ est défini dans } C.$$

L'application P *de* C_*S *vers* C *définit un foncteur* de cette catégorie *vers* C, *et* $P: C^*S \to C$ *est une* **fibration discrète.**



La catégorie C_*S est appelée *catégorie des hypermorphismes* (ou, si C est un groupoïde, groupoïde des isomorphismes) sur C .

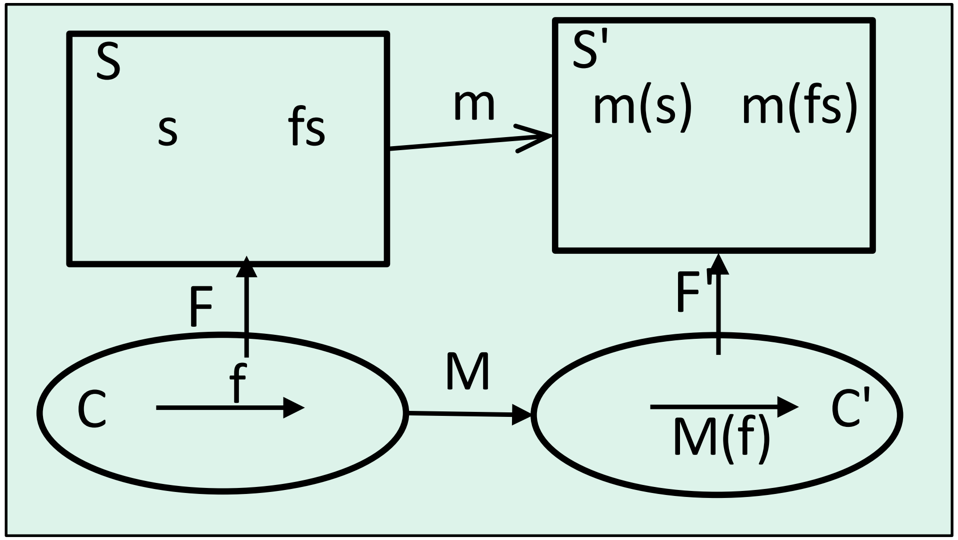
Dire que P est une *fibration discrète* sur C signifie que, donnés un morphisme f; $e \to e'$ dans C et un s dans la 'fibre' $P^{-1}(e)$, il existe un unique morphisme (à savoir ici (f, s)) de source s et appliqué sur f par P .

LA CATEGORIE DES APPLICATIONS COVARIANTES

Une **application covariante** de l'espèce de structures S sur C (définie par l'action k) vers une espèce de structures S' sur C' (définie par k') est un couple (M, m) où $M : C \longrightarrow C'$ est un foncteur et $m: S \to S'$ une application vérifiant :

$$m(fs) = M(f)m(s). \text{ pour tout } (f, s) \in C_*S.$$

Ces applications covariantes forment la **catégorie *Cov***.

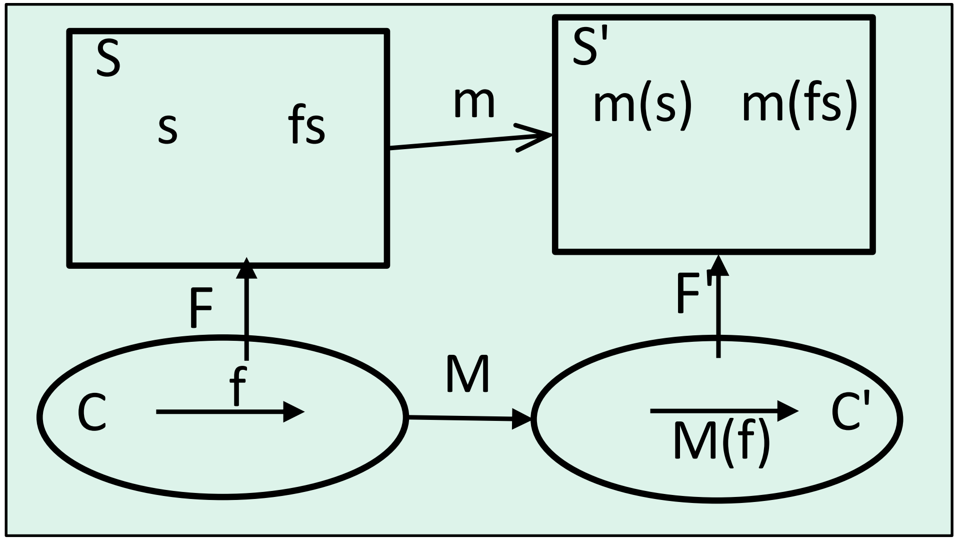


LA CATEGORIE DES APPLICATIONS COVARIANTES

Une **application covariante** de l'espèce de structures S sur C (définie par l'action k) vers une espèce de structures S' sur C' (définie par k') est un couple (M, m) où $M : C \to C'$ est un foncteur et $m: S \to S'$ une application vérifiant :

$$m(fs) = M(f)m(s). \text{ pour tout } (f, s) \in C_*S.$$

Ces applications covariantes forment la **catégorie *Cov***.



Si les actions k et k' sont définies par des foncteurs F et F' vers *Set* vérifiant (1), m définit une transformation naturelle

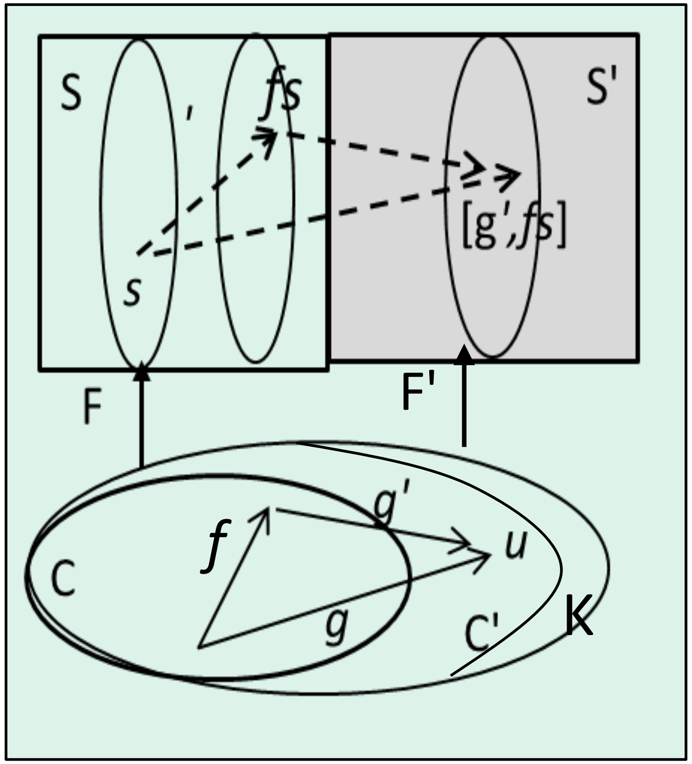
$$m\_: F \to F' M.$$

Proposition. *Cov est isomorphe à une sous-catégorie pleine de Diag(Set). En particulier les catégories de préfaisceaux sont isomorphes à des sous-catégories de Cov* (en prenant M = Id).

THEOREME D'ELARGISSEMENT

Soit S une espèce de structures sur C et F le foncteur la définissant. On suppose que C est une sous-catégorie pleine d'une catégorie K.

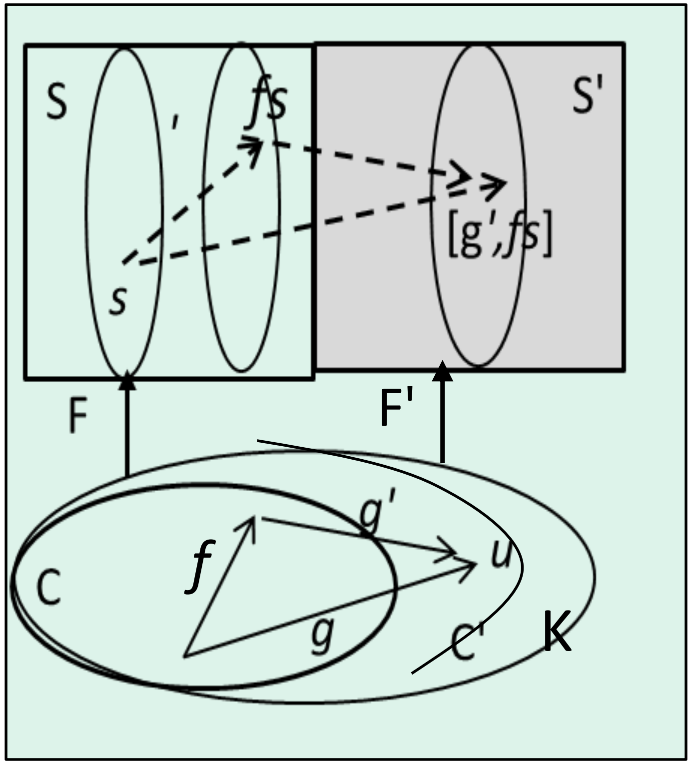
Théorème d'élargissement *(ou de Transportabilité).* *Une espèce de structures* S *sur* C *s'étend universellement en une espèce de structures* S' *sur la sous-catégorie pleine* C' *de* K *dont les objets* u *sont buts d'au moins un* g ϵ K *de source dans* C.



THEOREME D'ELARGISSEMENT

Soit S une espèce de structures sur C et F le foncteur la définissant. On suppose que C est une sous-catégorie pleine d'une catégorie K.

Théorème d'élargissement *(ou de Transportabilité).* *Une espèce de structures* S *sur* C *s'étend universellement en une espèce de structures* S' *sur la sous-catégorie pleine* C' *de* K *dont les objets* u *sont buts d'au moins un* g ϵ K *de source dans* C.



S' est défini par le foncteur F' ***extension de Kan de*** F pour l'insertion C → C'. Donc F'(u) est colimite de

$F_/$: C↓u → *Set :* g |-> F(α(g)),

d'où ; F'(u) = $\sum_g$F(α(g))/~

avec (g'f, s) ~ (g', fs).

Une classe d'équivalence élément de F'(u) est appelée un **atlas de but** u **ayant pour cartes** les éléments de cette classe d'équivalence.

EXEMPLES D'ELARGISSEMENT

1. Soit C un groupoïde. Il est *transitif* si les Hom sont tous non vides. Soit *e* un objet de C et C*e* le sous-groupe plein de C ayant *e* pour unité. Si C*e* est un groupe d'opérateurs sur un ensemble E, le théorème d'élargissement permet d'étendre cette action en une espèce de structures sur C dont toutes les fibres sont isomorphes à E.

Toute espèce de structures sur un groupoïde transitif est obtenue de cette façon.

2. A un pseudogroupe de transformations G sur S on associe l'espèce de structures S sur G définie par le foncteur F: G → *Set* tel que :

$$F(O) = \{(O, o) \mid o \in O\} \text{ pour tout objet O de D,}$$

$$F(g): F(O) \to F(O'): (O, o) \mapsto (O', g(o)) \quad \text{pour tout } g: O \to O'.$$

Les structures locales associées à G correspondent à un *élargissement complet* de cette espèce de structures.

PARTIE 2

ESPECES DE STRUCTURES INTERNES :

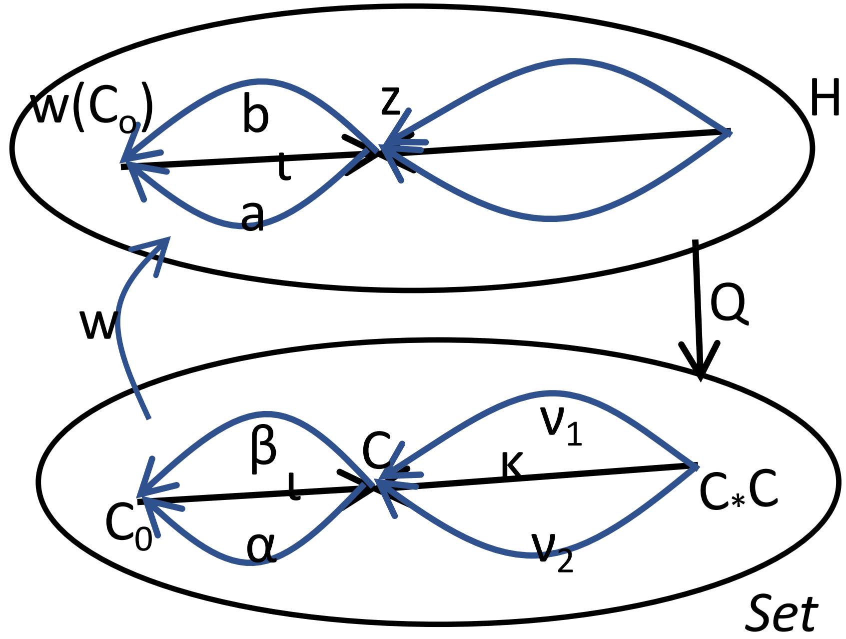
Espèces topologiques

Espèces de structures locales

CATEGORIE Q-INTERNE (ou Q-STRUCTUREE)

Soit Q: H → *Set* un foncteur qui est fidèle et réfléchit les produits fibrés existants.

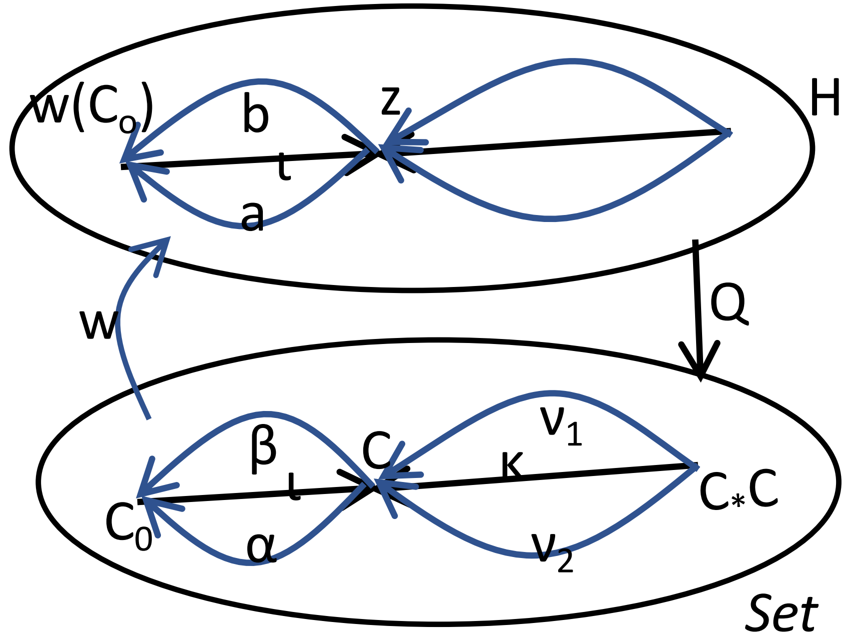
A une catégorie C nous associons son "idée" Γ_C dans *Set* formée par sa source α, son but β et sa composition κ: $C_*C = \alpha V \beta \to C$.



CATEGORIE Q-INTERNE (ou Q-STRUCTUREE)

Soit $Q: H \to$ *Set* un foncteur qui est fidèle et réfléchit les produits fibrés existants.

A une catégorie C nous associons son "idée" Γ_C dans *Set* formée par sa source α, son but β et sa composition $\kappa: C_*C = \alpha V\beta \to C$.



Catégorie Q-interne = (C, z) où *C* = catégorie, z = objet de H tel que Q(s) = C et qu'il existe une section locale w de Q qui 'relève' dans H l'idée Γ_C de C et tel que w(C) = z.

Exemple. Si H = *Top* et Q son foncteur d'oubli, on obtient une *catégorie topologique* (C, T) : T est une topologie sur C rendant continues α, β, κ. En 1959, Charles associe à un espace fibré principal un groupoïde topologique "localement trivial" .

ESPECE DE STRUCTURES Q-INTERNE'

Soit encore Q: H → *Set* un foncteur fidèle qui réfléchit les produits fibrés. Reprenons le *diagramme* D_S dans *Set* associé à une espèce de structures S sur une catégorie C. En particulier il contient l'idée Γ_C de la catégorie C dans *Set*..

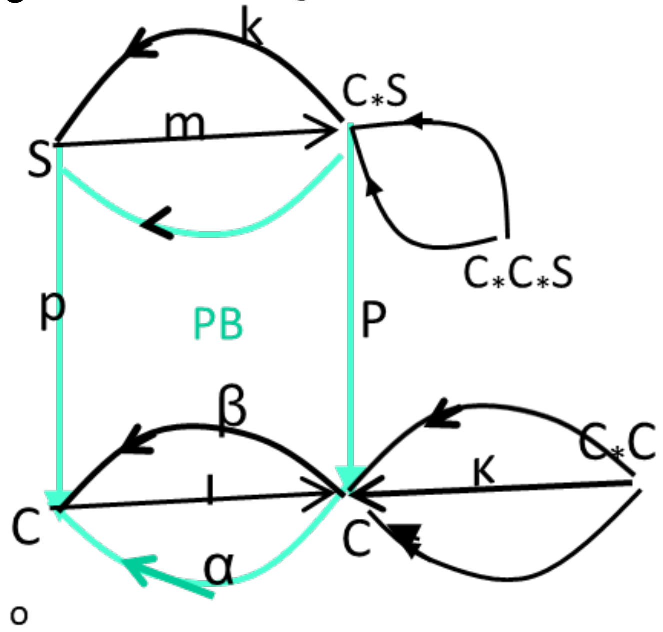


Diagramme D_S

Définition. *Une* **espèce de structures Q-interne** consiste en une espèce de structures S sur C et un 'relèvement' dans H de son diagramme D_S dans *Set,* relèvement signifiant image dans H d'une section locale w': D_S → H de Q. L'*action* Q-interne associée est w'(k).

ESPECE DE STRUCTURES Q-INTERNE'

Soit encore Q: H → *Set* un foncteur fidèle qui réfléchit les produits fibrés. Reprenons *le diagramme* D_S dans *Set* associé à une espèce de structures S sur une catégorie C,. En particulier il contient l'idée Γ_C de la catégorie C dans *Set*..

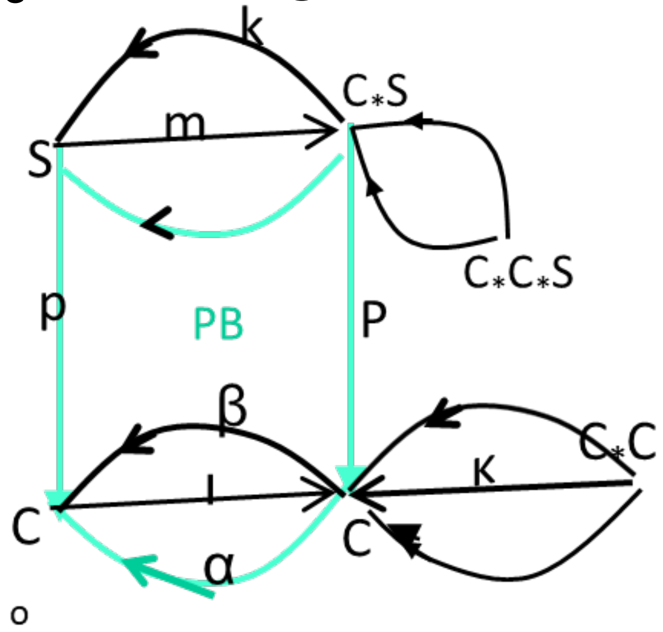


Diagramme D_S

Définition. *Une* **espèce de structures Q-interne** consiste en une espèce de structures S sur C et un 'relèvement' dans H de son diagramme D_S dans *Set,* relèvement signifiant image dans H d'une section locale w': D_S → H de Q. L'*action* Q-interne associée est w'(k).

Exemple **:** Si H = T*op,* on parle d'**espèce de structures topologique***.* Si C est un groupoïde topologique localement trivial, ce sont les *espaces fibrés associés* au fibré principal défini par C..

ESPECE DE STRUCTURES INDUCTIVE. ELARGISSEMENT

Une **classe inductive** (ou inf-semi-treillis) est un ensemble ordonné dans lequel toute partie A majorée vide a une borne Sup notée VA. Soit *Ind* la catégorie ayant pour objets les ensembles inductifs et pour morphismes les applications préservant les Sup, et les Inf des parties finies Soit Q_{ind} son foncteur d'oubli vers *Set*.

Une **catégorie inductive** *est une catégorie* Q_{Ind}-interne (C, <) telle que l'ordre induit sur les Hom soit discret. Une **espèce de structures inductive** est une espèce Q_{Ind}-interne..

ESPECE DE STRUCTURES INDUCTIVE. ELARGISSEMENT

Une **classe inductive** (ou inf-semi-treillis) est un ensemble ordonné dans lequel toute partie A majorée a une borne Sup notée VA. Soit *Ind* la catégorie ayant pour objets les ensembles inductifs et pour morphismes les applications préservant les Sup, et les Inf des parties finies Soit Q_{ind} son foncteur d'oubli vers *Set*.

Une **catégorie inductive** *est une catégorie* Q_{Ind}-interne (C, <) telle que l'ordre induit sur les Hom soit discret. Une **espèce de structures inductive** est une espèce Q_{Ind}-interne..

Théorème. 1. *La fibration discrète associée à une espèce ide structures nductive est une catégorie inductive*.

2. *Son élargissement à une sur-catégorie inductive de* (C, <) *est aussi une catégorie inductive.*

L'ordre entre atlas A de cet élargissement est défini comme suit :

A < A' s'il existe une carte de A majorée par une carte de A'

COMPLETION D'UNE APPLICATION LOCALE

Classe locale = ensemble ordonné (L, <) dont toute partie non vide E a un Inf noté ΛE satisfaisant *l'axiome de distributivité* :

$$(\mathrm{V}A) \wedge b = \mathrm{V}_{a \in A}(a \wedge b)) \quad \text{pour toute partie majorée A.}$$

Une *application locale* P: L ⟶: L' est une application inductive entre classes locales. On appelle *ensemble* P-*compatible* une partie A de L telle que P(a) Λ P(a') = P(a Λ a') pour tout a, a' de A. L'application P est **complète** si tout ensemble P-compatible A tel qu'il existe VP(A) admet un Sup VA dans L'.

COMPLETION D'UNE APPLICATION LOCALE

Classe locale = ensemble ordonné (L, <) dont toute partie non vide E a un Inf noté ΛE satisfaisant *l'axiome de distributivité* :

$$(\vee A) \wedge b = \vee_{a\in A}(a \wedge b)) \quad \text{pour toute partie majorée A.}$$

Une *application locale* P: L →: L' est une application inductive entre classes locales. On appelle *ensemble* P-*compatible* une partie A de L telle que P(a) Λ P(a') = P(a Λ a') pour tout a, a' de A. L'application P est **complète** si tout ensemble P-compatible A tel qu'il existe VP(A) admet un Sup VA dans L'.

Théorème. **de complétion.** *Une application locale* P: L → L' *s'étend universellement rn unr application locale complète* P^: L^→. L'

Les éléments de L^ sont toutes les classes P-compatibles A telles qu'il existe VP(A) et l'on a P^(A) = VP(A).

Exemple. Ce théorème étend la construction du faisceau associé relatif au cas où L' est l'ordre sur les ouverts d'une topologie ou d'une paratopologie.

ELARGISSEMENT COMPLET D'UNE ESPECE DE STRUCTURES LOCALE

Théorème d'élargissement complet. *Si* S *est une espèce de structures locale sur une sous-catégorie* C *d'une catégorie locale* K *elle s'étend universellement en une espèce de structures locale complète sur une sous-catégorie pleine de* K.

On construit d'abord l'élargissement de l'espèce inductive qui conduit à une application locale P: $C' {}_* S' \to C'$. On complète celle-ci pour obtenir l'élargissement complet de l'espèce initiale. Dans celui-ci les nouvelles structures ajoutées correspondent à des ensembles compatibles d'atlas formant des **atlas complets**...

ELARGISSEMENT COMPLET D'UNE ESPECE DE STRUCTURES LOCALE

Théorème d'élargissement complet. *Si* S *est une espèce de structures locale sur une sous-catégorie* C *d'une catégorie locale* K *elle s'étend universellement en une espèce de structures locale complète sur une sous-catégorie pleine de* K.

On construit d'abord l'élargissement de l'espèce inductive qui conduit à une application locale P: $C' {}_* S' \rightarrow C'$. On complète celle-ci pour obtenir l'élargissement complet de l'espèce initiale. Dans celui-ci les nouvelles structures ajoutées correspondent à des ensembles compatibles d'atlas formant des **atlas complets**...

Ce théorème correspond à un ***Théorème de faisceau associé*** pour des catégories locales (i.e. munies de "topologies sans point", avant les notions de topologie de Grothendieck). En 1957, Charles le démontré seulement pour des groupoïdes, mais une preuve pour les catégories locales se trouve dans un article de 1969.

PARTIE 3

ESPECES DE STRUCTURES PARTIELLES

Noyaux d'espèces de structures
Semi-faisceaux
Systèmes Evolutifs

NOTIONS D'ESPECES DE STRUCTURES PARTIELLES

Des problèmes d'Analyse ont conduit à 'partialiser' la notion d'espèce de structures (interne ou non) de 2 manières différentes :

(i) En remplaçant l'action $k: C_* S \rightarrow S$ associée par une "action partielle", donc seulement définie sur une partie C@S du produit fibré $C_* S$. D'où la notion de **noyau d'espèce de structures**, utilisée dans des problèmes de contrôle pour des équations différentelles (A. Bastiani, 1963-67).

NOTIONS D'ESPECES DE STRUCTURES PARTIELLES

Des problèmes d'Analyse ont conduit à 'partialiser' la notion d'espèce de structures (interne ou non) de 2 manières différentes .

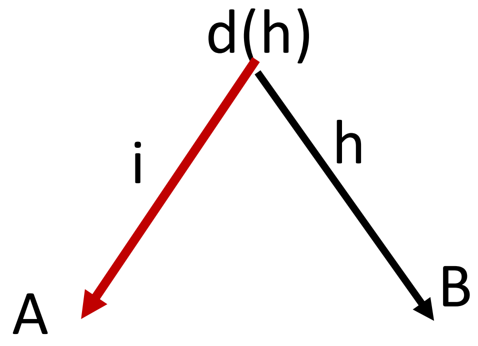
(i) En remplaçant l'action k: $C_*S \to S$ associée par une "action partielle", donc seulement définie sur une partie C@S du produit fibré C_*S. Par exemple la notion de **noyau d'espèce de structures**, utilisée dans des problèmes de contrôle pour des équations différentelles (A. Bastiani, 1963-67).

(ii) En remplaçant le préfaisceau F: C → *Set* définissant une action par un **semi-faisceau** qui est un foncteur de C vers la catégorie *Par(Set)* des fonctions partielles. Et ceci se généralise en considérant des (K, M) **semi-faisceau**x, où K est une catégorie et M une sous-classe admissible de monomorphismes de K. Ceci a été utilisé dans ma thèse (1962, 2008) pour définir les **distructures** (généralisant les distributions de Schwartz), puis (avec Jean-Paul Vanbremeersch, 1987-2007) pour étudier les **Systèmes Evolutifs**.

LA CATEGORIE *Par(Set) DES* FONCTIONS PARTIELLES

Set est la catégorie ayant pour objets les ('petits') ensembles et pour morphismes les applications h: A → B (ou *fonctions totales*) entre eux.

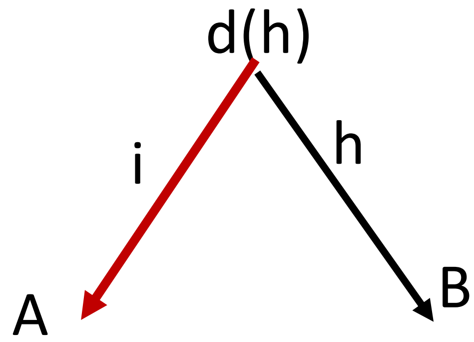
Une **fonction partielle** de A vers B est un triple (A, h, B), où h est une application totale d'une partie d(h) de A vers B. On la représente par le span ci-contre dans *Set,* où ι est l'insertion de d(h) dans A.

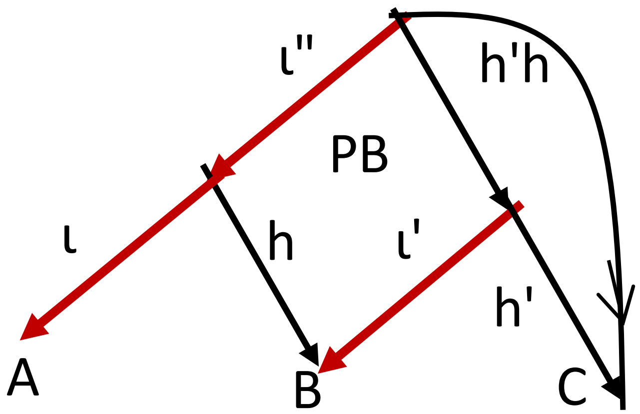


LA CATEGORIE *Par(Set) DES* FONCTIONS PARTEIIES

Set est la catégorie ayant pour objets les ('petits') ensembles et pour morphismes les applications h: A → B (ou *fonctions totales*) entre eux.

Une **fonction partielle** de A vers B est un triple (A, h, B), où h est une application totale d'une partie d(h) de A vers B. On la représente par le span ci-contre dans *Set,* où ι est l'insertion de d(h) dans A.

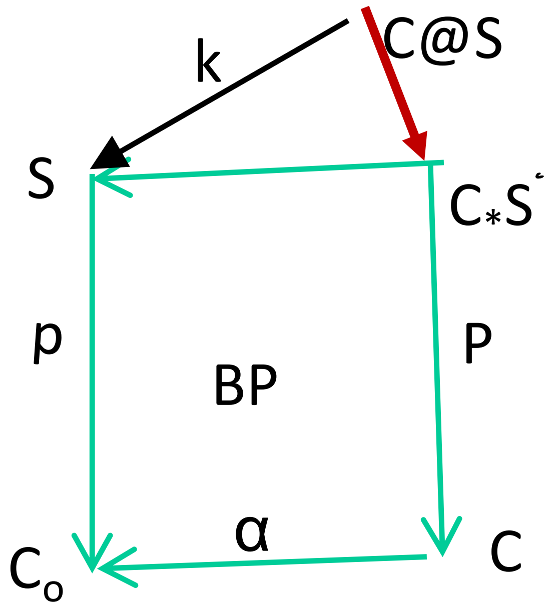




On note ***Par(Set) la catégorie des fonctions partielles***, où la composition des spans se fait par produit fibre. Elle admet la catégorie *Set* des fonctions totales pour sous-catégorie.

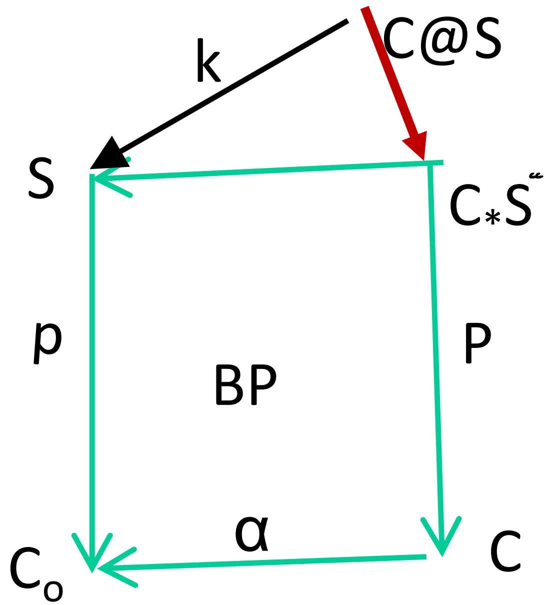
ESPECE DE STRUCTURES PARTIELLE

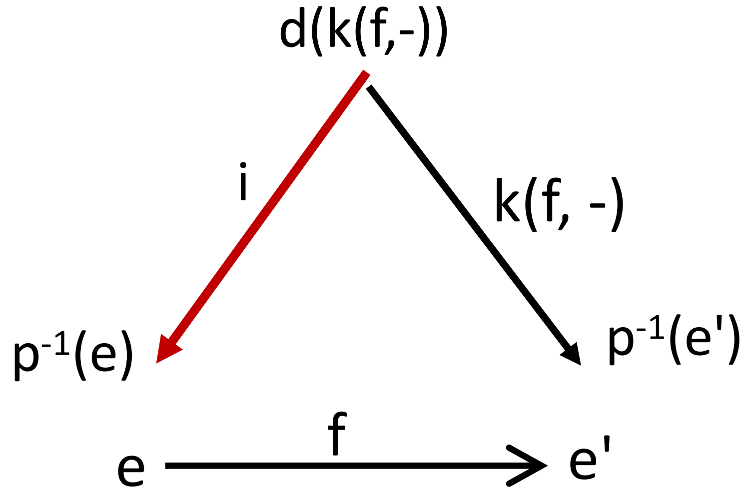
Définition. Soit C une catégorie et S un ensemble. On dit que S est une *espèce de structures partielle* sur S si on a une surjection p: S → C_o et une **action partielle** *de* C *sur* S définie par une fonction partielle (C∗S, k, S) où C∗S = αVp et d(k) = C@S.



ESPECE DE STRUCTURES PARTIELLE

Définition. Soit C une catégorie et S un ensemble. On dit que S est une *espèce de structures partielle* sur S si on a une surjection $p: S \to C_o$ et une **action partielle** *de* C *sur* S définie par une fonction partielle (C_*S, k, S) où $C_*S = \alpha V p$ et $d(k) = C@S$.





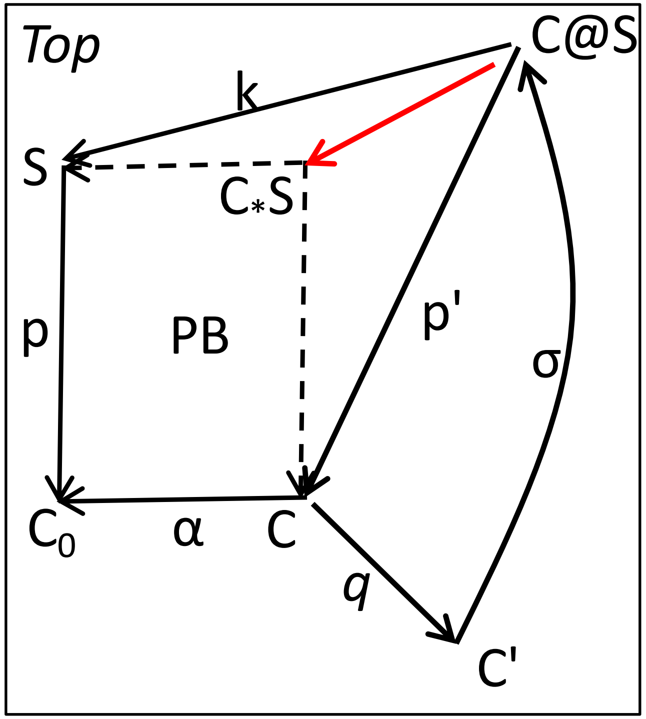
Proposition. *A une action partielle* k *de* C *sur* S *on associe un* foncteur **F'**: $C \to$ *Par(Set)* associant à tout $f : e \to e'$ dans C la fonction partielle $(p^{-1}(e), k(f, -), p^{-1}(e'))$.

NOYAU D'ESPECE DE STRUCTURES

Cette notion a été introduite pour étudier les problèmes de Cauchy aux limites et les problèmes de contrôle (A. Bastiani, 1964-67). Les principaux résultats sont des théorèmes d'**optimisation** pour les solutions d'un **système guidable**, étendant "Bellman's *dynamic programming method".*

NOYAU D'ESPECE DE STRUCTURES

Cette notion a été introduite pour étudier les problèmes de Cauchy aux limites et les problèmes de contrôle (A. Bastiani, 1964-67). Les principaux résultats sont des théorèmes d'**optimisation** pour les solutions d'un **système guidable**, étendant "Bellman's *dynamic programming method"*.



Un **noyau d'espèce de structures,** ou **action partielle** d'une catégorie topologique C sur un espace topologique S est une application continue k: C@S → S, où C@S est un ouvert du produit fibré C∗S = $\alpha V p_0$. D'où une *fibration partielle* p': C@S → *C.*

Un **système guidable** est le couple d'un tel noyau k et d'un foncteur continu *q*: C → C'. Il a pour **solutions l**es fonctions continues σ: C' → C@S sections (locales) de *qp'*.

CATEGORIE *Pr*(K, M) DES ELEMENTS M-PARTIELS

Soit K une catégorie. Une sous-catégorie M de K est dite *ss-admissible* (Ehresmann 2008) *si* elle vérifie les conditions :

(i) M iest formé de monomorphismes et contient les identités.

, (ii) M est stable par PB, i.e. le PB d'un m ϵ M avec g ϵ K existe et la projection opposée à m est dans M.

(iii) (*Unicité*) : Il existe au plus un m ϵ M ente 2 objets de K.

Exemples: 1. *Par(Top)* pour M = {insertions ouvertes} dans *Top* .
2. *Par(Cat*) pour M = {insertions de sous-catégories} dans *Cat.*

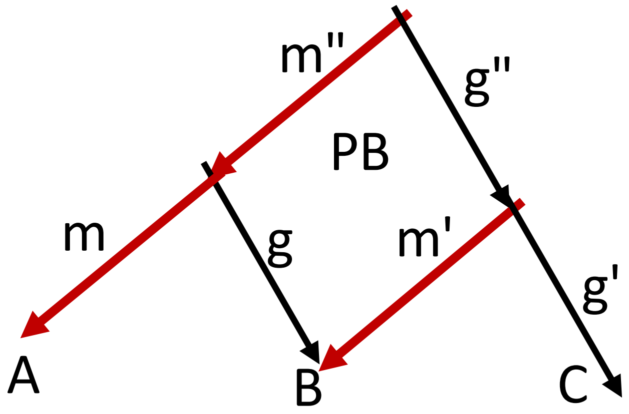
CATEGORIE *Pr*(K, M) DES ELEMENTS M-PARTIELS

Soit K une catégorie. Une sous-catégorie M de K est dite *ss-admissible* (Ehresmann 2008) *si* elle vérife les conditions :

(i) M iest formé de monomorphismes et contient les identités. , (ii) M est stable par PB, i.e. le PB d'un m ϵ M avec g ϵ K existe et la projection opposée à m est dans M.

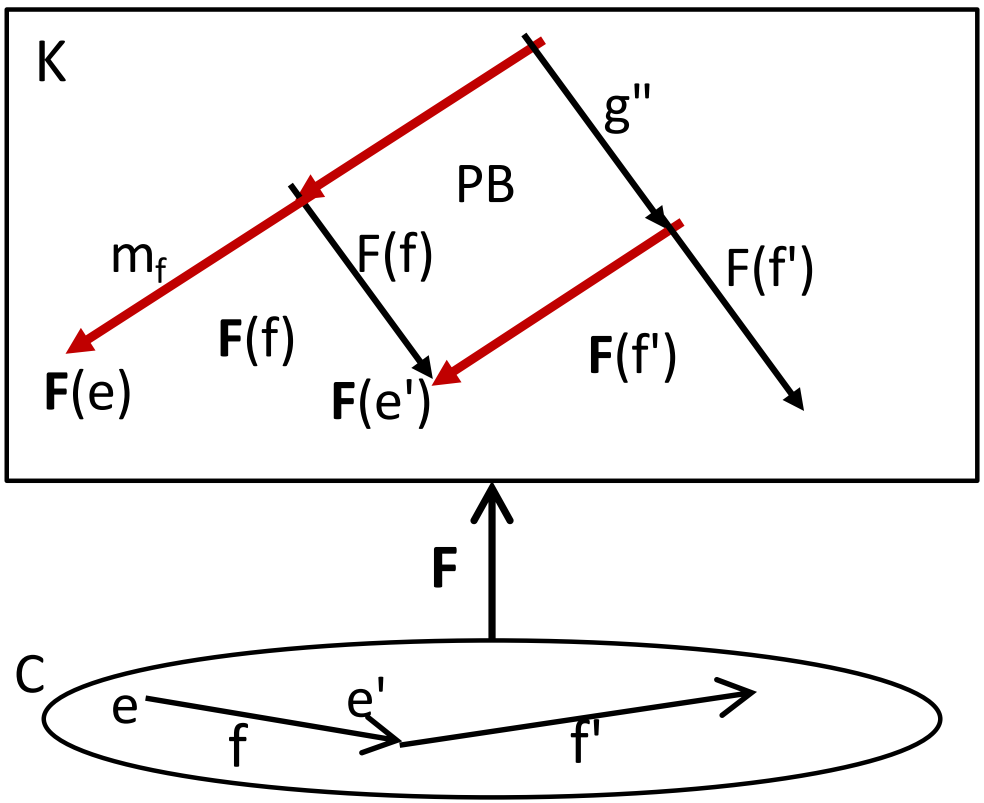
(iii) (*Unicité*) : Il existe au plus un m ϵ M ente 2 objets de K.

Exemples: 1. *Par(Top)* pour M = {insertions ouvertes} dans *Top* .
2. *Par(Cat*) pour M = {insertions de sous-catégories} dans *Cat.*



On appelle **élément M-partiel** de K un span (A, (m, g), B). En les composant par PB, ceux-ci forment la catégorie *Pr*(M, K) (c'est une catégorie par suite de (iii))..
K s'identie à la sous-catégorie des spans (Id, g) ("total maps").

CATEGORIE DES (K, M)-SEMI-FAISCEAUX



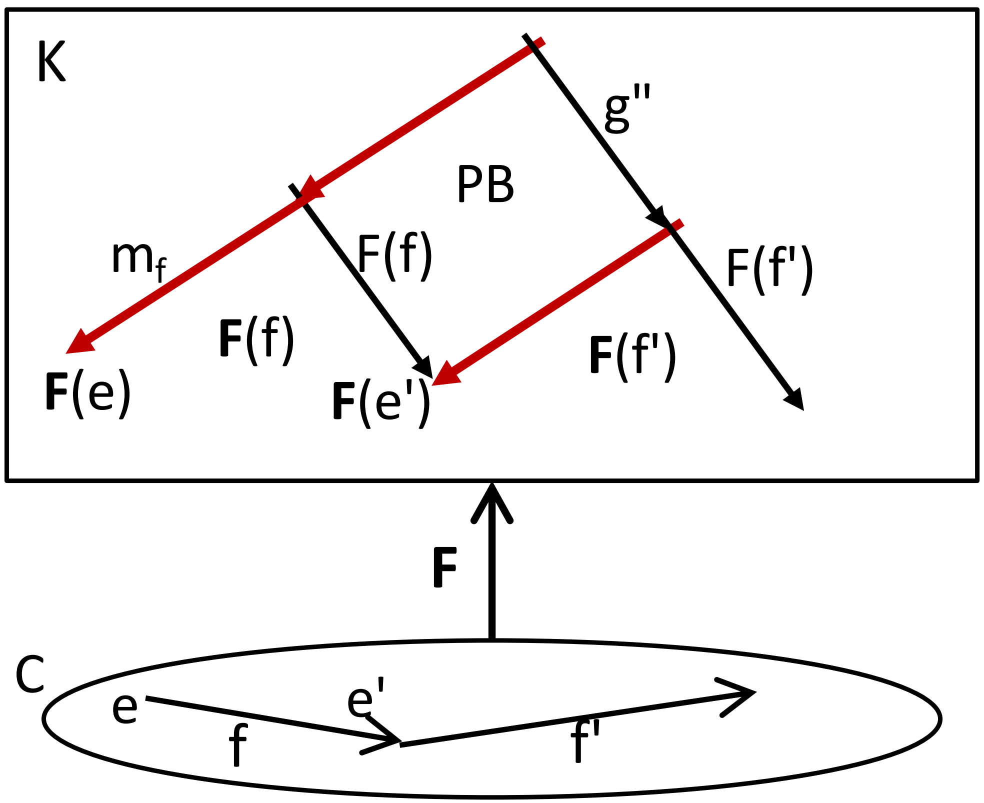
Soit K une categorie et M une sous-catégorie ss-admissible (en rouge)..

Définition. Un **(K, M)-semi-faisceau F** sur une catégorie C est un foncteur **F:** C ⟶ *Par*(K, M). :

Donc **F**(e) ∊ K_o pour e ∊ C_o et **F**(f) est un span

(m_f , F(f)): **F**(e)⟶ **F**(e')

CATEGORIE DES (K, M)-SEMI-FAISCEAUX



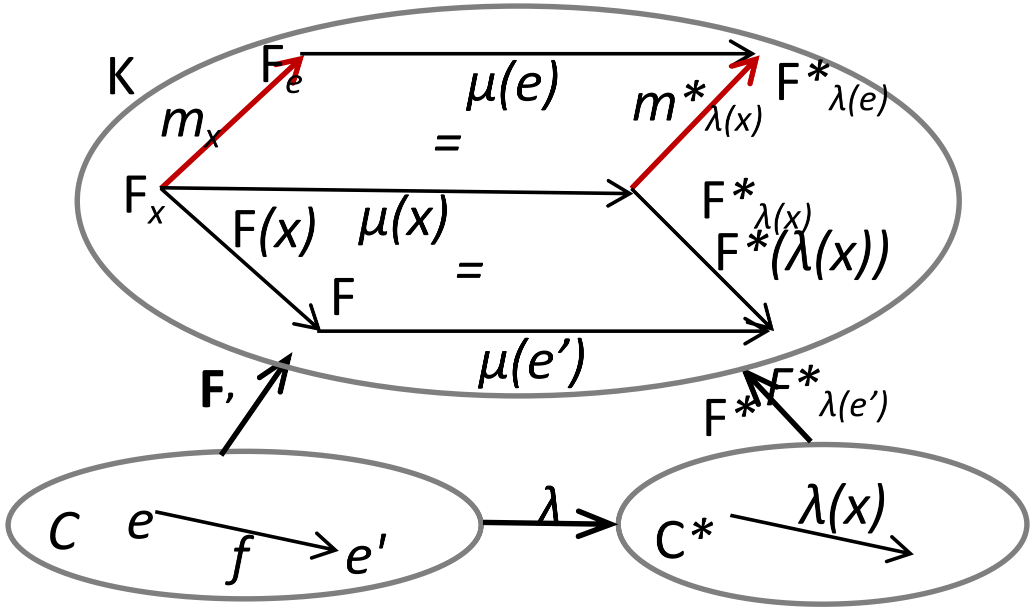
Soit K une categorie et M une sous-catégorie ss-admissible (en rouge)..

Définition. Un **(K, M)-*semi-faisceau*** **F** sur une catégorie C est un foncteur **F:** C $\longrightarrow$ *Par*(K, M). :

Donc **F**(e) $\in K_o$ pour e $\in C_o$ et **F**(f) est un span
(m_f, F(f)): **F**(e)$\longrightarrow$ **F**(e')

La **catégorie SS(K, M) des (K, M)-semi-faiscaux** a pour objets les (K, M)-semi-faisceaux et pour morphismes de **F** vers **F*** les paires (λ, μ): **F** → **F*** d'un foncteur λ: C → C* et d'une transfor-mation naturelle μ*:* **F** → **F*** λ. .

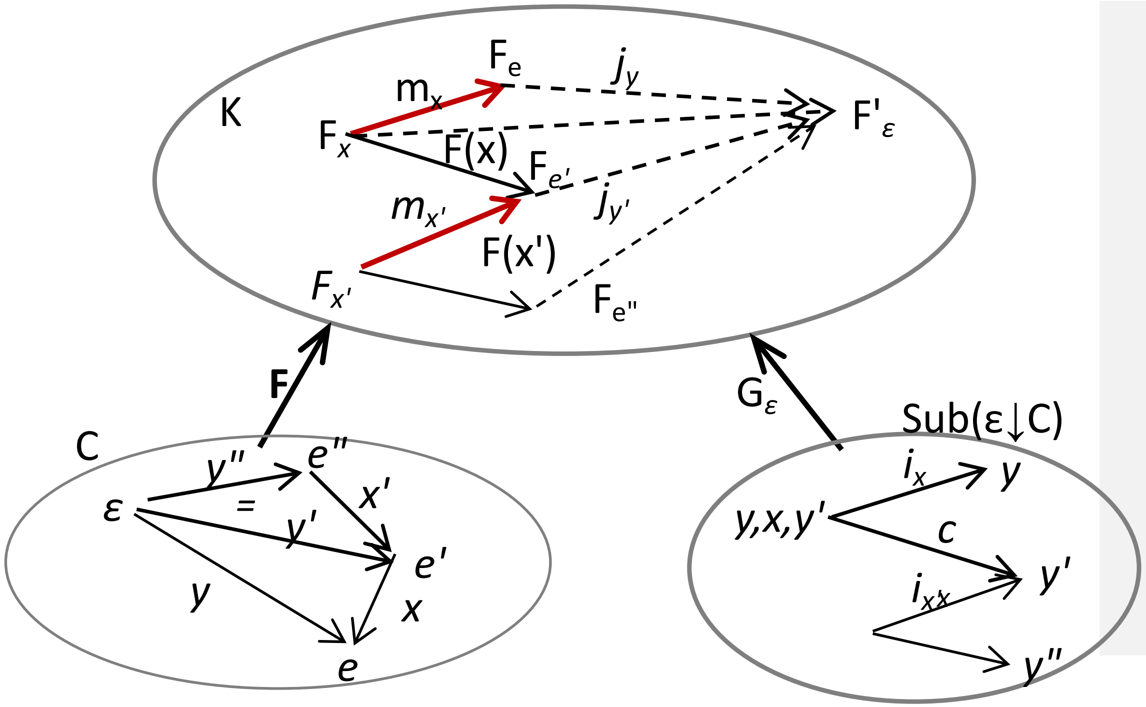
LA CATEGORIE DES (K, M)-SEMI-FAISCEAUX



Si **F** est un (K, M)-semi-faisceau sur C et **F*** un (K, M)-semi-faisceau sur C*, un *morphisme de* **F** vers **F*** est une paire (λ, μ): **F** → **F*** d'un foncteur λ: C → C* et d'une transformation naturelle μ*:* C → K rendant commutatif le diagramme ci-dessus.

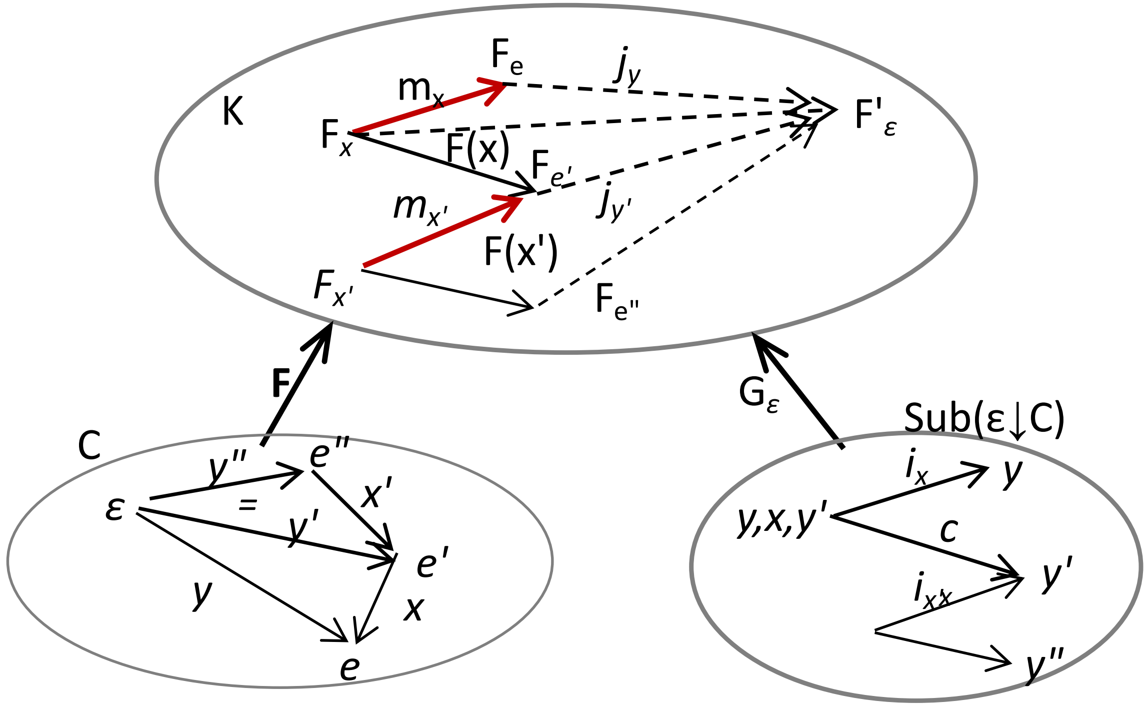
D'où la **catégorie *SS*(K, M) des** (K, M)-**semi-faisceaux**.

PREFAISCEAU ASSOCIE A UN (K, M)-SEMI-FAISCEAU



Théorème du Préfaisceau Associé. ***Si*** K *a des produits fibrés et 'assez' de colimites, la catégorie* Diag(K) *des* K-*préfaisceaux est une sous-catégorie reflexive de la catégorie* SS(K, M) *des* (K, M)-*semi-faisceaux.*

PREFAISCEAU ASSOCIE A UN (K, M)-SEMI-FAISCEAU



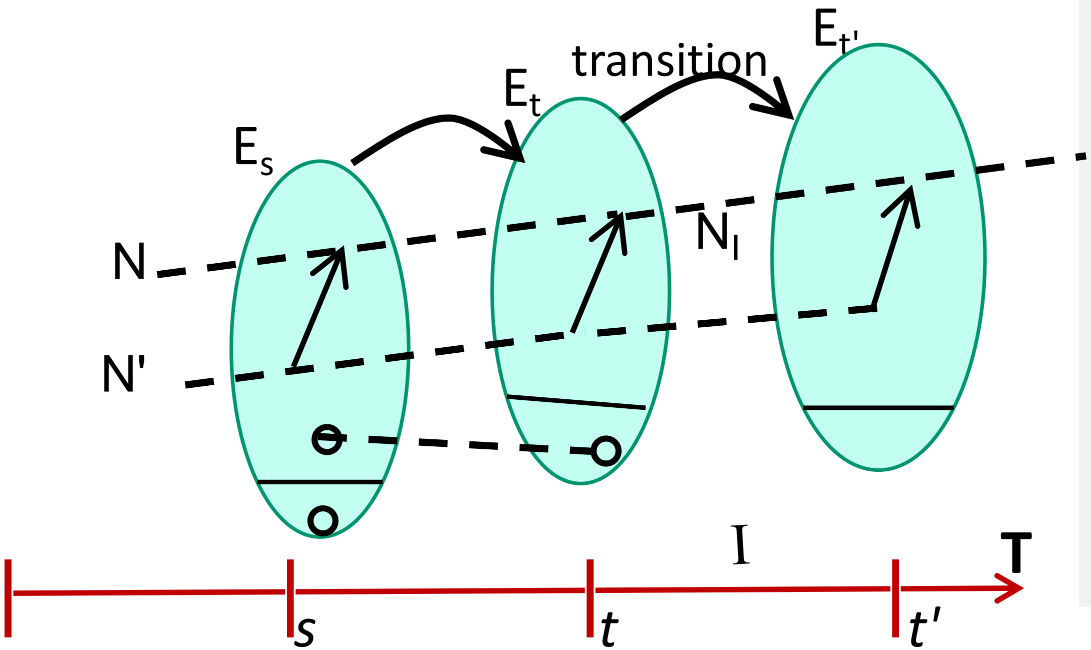
Théorème du Préfaisceau Associé Si K *a des produits fibrés et 'assez' de colimites, la catégorie* Diag(K) *des* K*-préfaisceaux est une sous-catégorie reflexive de la catégorie* SS(K, M) *des* (K, M)*-semi-faisceaux.*

Le K-préfaisceau $F': C^{op} \to K$ est construit explicitement. Sa fibre F'_ε est la colimite du foncteur G_ε: Sub(ε↓C) → K (où Sub(ε↓C) est la catgorie subdivision de la catégorie ε↓C

$$G_\varepsilon(i_x) = m_x \quad \text{and} \quad G_\varepsilon(c_x) = F(x).$$

Si K = *Sets*, F'_ε est le quotient de $\sum (F_e)_{y:\varepsilon\to e}$ par l'équivalence engendrée par : $(y, sx) \sim (xy, s)$ piur tout $s \in F_x$.

SYSTÈME EVOLUTIF [EV 1987-2007]



Un **Système Evolutif E** est un *Par(Cat)* semi-faisceau sur la catégorie **T** définissant l'ordre sur un intervalle T de **R.**
Donc il associe à tout t une catégorie *configuration* E_t et pour t < t′, un foncteur partiel *transition* **E(***t,t'*) de E_t vers $E_{t'}$.

Composant N de **E** = famille maximale d'objets N_r de E_t reliés par des transitions. Les liens entre composants sont définis de même.

Pour I =]*t, t'*[, soit E_I la categorie ayant pour objets N_I les restrictions à I des composants N dont le support contient I ; les morphismes sont définis de même à partir des liens.

Théorème. *Les catégories* E_I *forment un faisceau de catégories sur* T *tel que* (A) *Pour tout t'' ϵ* I *le foncteur de* E_I *vers la fibre* $E_{t''}$ *est injectif*. *On a une bijection entre SE ets faisceaux satisfaisant* (A).

MERCI