Espèces de structures locales Ehresmanniennes

Mamuphi 12 mars 2022

Andrée Ehresmann et René Guitart

Journée Mamuphi
du Samedi 12 mars 2022

Espèces de structures locales Ehresmanniennes
Andrée Ehresmann et René Guitart

Horaires
10h. Ouverture : F. Nicolas
10h15. Introduction : R. Guitart
10h30 à 13h :
R. Guitart, Pseudogroupes, groupoïdes inductifs, semigroupes inverses, étendues. I
A. Ehresmann, Catégorification des espèces de structures, I
Questions
14h30 à 17h :
A. Ehresmann, Catégorification des espèces de structures, II
R. Guitart, Pseudogroupes, groupoïdes inductifs, semigroupes inverses, étendues. II
Questions

INTRODUCTION

Dans une diapositive qui suit on verra l'organisation générale des travaux de Charles Ehresmann, comme présentée par Andrée dans diverses conférences. Ici, dans cette journée, nous nous concentrerons sur ce qui touche à la question du local proprement dite, et à l'émergence et l'enrichissement de ses formulations.

Il faut souligner que cette question est toujours chez Ehresmann un préalable essentiel, à partir duquel il développe ensuite sa vue des structures infinitésimales, et de la géométrie différentielle. Mais ici, nous n'expliquerons pas cette suite. Nous voulons au contraire rendre accessible la première étape, le traitement de la question du local.

Ce dont nous ne parlerons pas vraiment, ce sont donc des notions essentielles qu'Ehresmann a développées, qui sont maintenant dans le bagage de tout géomètre : fibrations, feuilletages, calcul des jets, connexions.
Et, liés à ces notions, les travaux de, par exemple, Kodaira et Spencer sur les déformations des pseudogroupes (pseudogroupes dont en revanche nous traiterons), et des élèves d'Ehresmann, notamment Jacques Felbau, Georges Reeb, puis, en géométrie différentielle Paulette Libermann, Jean Pradines dans le développement de ce que Pradines appelle, en faisant un parallèle avec le programme de Klein (d'Erlangen), « le programme d'Ehresmann ».

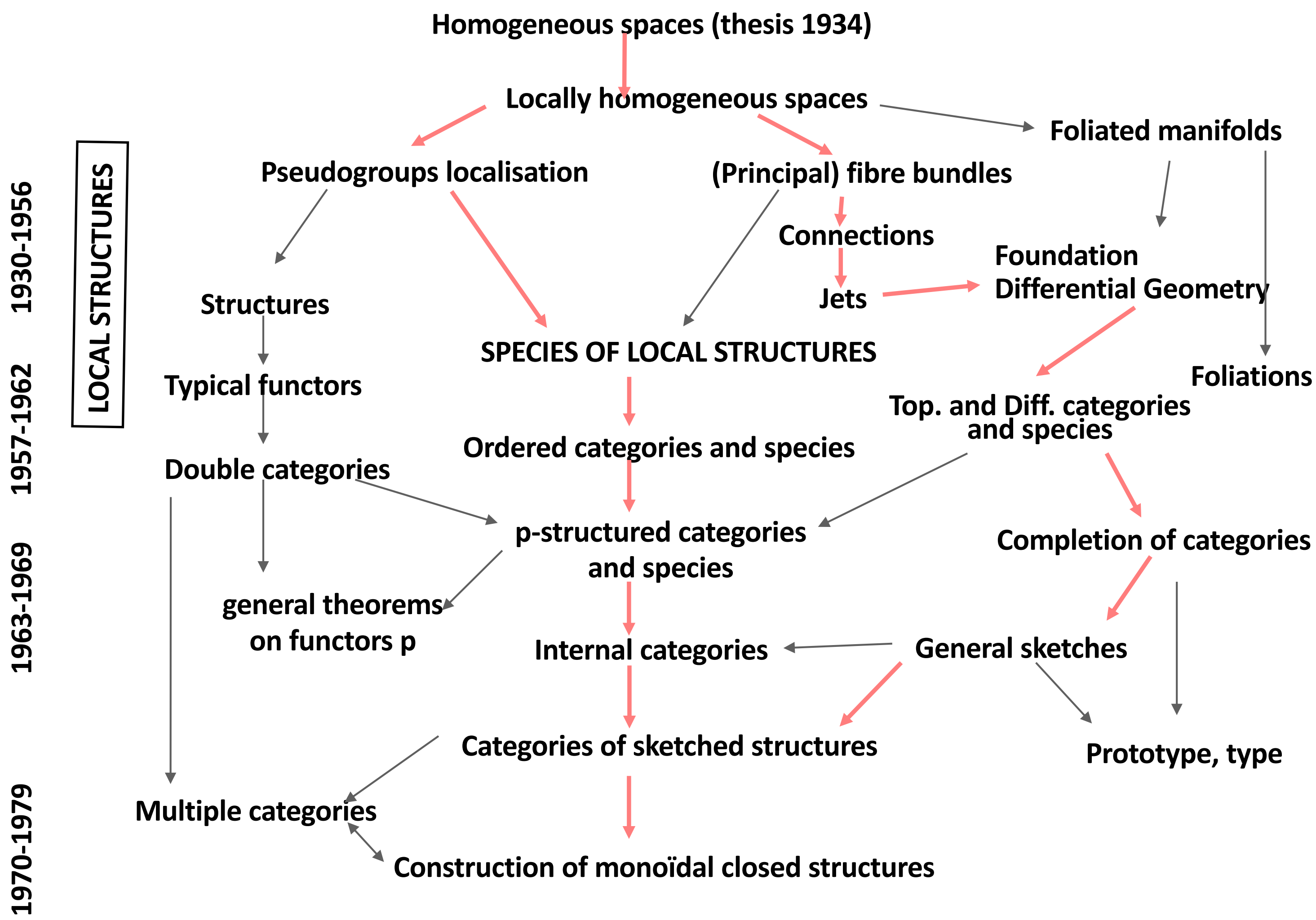
En 1932, Veblen et Whitehead publient le livre *A set of axioms for différential geometry*,
et en 1963, Kobayashi et Nomizu publient *Foundations of différential geometry*.

Il est remarquable que le point clé de Veblen-Whitehead soit la notion de pseudogroupe,
et que le tout début de Kobayashi-Nomizu soit exactement la définition précisée par Ehresmann de pseudogroupe, et partant sa définition de variété (Et le deuxième chapitre de Kobayashi Nomizu commence encore par quelque chose d'essentiel d'Ehresmann, à savoir sa notion de connexion).

Entre temps donc Ehresmann s'est emparé de l'outil « pseudogroupe », et cela lui a permis de définir ce qu'il appelle Une ***espèce de structure locale***. C'est le seul but de cette journée que d'introduire progressivement à cette notion et ses propres prolongements aujourd'hui.

-On montrera quelques points historiques d'où cette notion sera « sollicitée », passant par la notion plus ou moins vague encore de variété, puis la définition finale des pseudogroupes et structures locales associées, et on citera de nombreux exemples.
-Ensuite on verra comment cette notion se transforme par catégorification, à partir de 1957, en celle de groupoïde et catégorie d'opérateurs, puis de groupoïdes et catégories d'opérateurs interne à une catégorie donnée, et notamment comment les pseudogroupes se retrouvent comme groupoïdes ordonnés.
-Puis on verra que ces extensions doivent encore, pour permettre des applications à l'analyse et l'étude des systèmes guidables, être généralisées avec l'usage d'actions partielles, et les catégories partielles d'opérateurs et semi-faisceaux.
- Enfin, en passant par la notion de « local » d'Ehresmann, et les notions de « inverse semigroup » et de « catégories de monomorphismes », on montrera --- à l'adresse des gens un peu familiers des faisceaux et topos --- le rapport entre les structures locales d'Ehresmann et les topos de Grothendieck, notamment les « étendues ».

SYSTÈME EVOLUTIF DES TRAVAUX DE CHARLES EHRESMANN



Résumés

Andrée Ehresmann :

Catégorification des espèces de structures, I et II.

En 1957, Charles Ehresmann introduit (dans « Gattungen von Lolalen Strukturen ») la notion générale d'*espèce de structures* S *sur une catégorie C, associée à une action de C sur S*. Je commencerai par en rappeler diverses propriétés, dont le principal Théorème d'Elargissement (ou Transportabilité) d'une telle espèce de structures (ce qui étend aux catégories ce qui était abordé dans « Gattungen » dans le cas des groupoïdes).

Une 2e partie rappellera les notions de catégorie et d'espèce de structures internes à une catégorie concrète, avec application aux espèces de structures topologiques, ordonnées ou inductives et surtout aux espèces de structures locales. Ici encore les principaux résultats portent sur des Théorèmes d'Elargissement, et plus précisément sur *l'Elargissement Complet* d'une espèce de structure locale. Ce dernier généralise le cas des espèces de structures locales associées à un pseudogroupe de transformations.

Enfin, selon le temps restant, je parlerai de 2 notions d'*espèces de structure partielle* que j'ai introduites en vue de problèmes d'analyse :

(a) les *noyaux d'espèce de structures topologique* (en vue de problèmes de contrôle et d'optimisation, 1963).

(b) Les *semi-faisceaux* définis par un foncteur vers une catégorie d'applications partielles qui interviennent pour définir les distructures (1962 et 2008) et dont les *Systèmes Evolutifs* (A. Ehresmann & J.-P. Vanbremeersch) sont un cas particulier

René Guitart :

Pseudogroupes, groupoïdes inductifs, semigroupes inverses, étendues, I et II.

Nous commencerons au départ en situant superficiellement l'émergence de la question des pseudogroupes dans l'histoire de la géométrie différentielle [après notamment Gauss, Lamé, Lie, Cartan, pour fournir une détermination de la notion de variété où un calcul différentiel intrinsèque soit possible (Lévi-Civita et Ricci, Cartan), et partant le traitement général de la question de la courbure « in the large »].

Nous dirons ce qu'est un pseudogroupe, un atlas, un atlas complet, et les exemples que sont les variétés (par exemple la sphère), les fibrés tangents et des repères, les feuilletages. On comparera la définition des variétés en termes de pseudogroupe et atlas avec celle en termes de faisceaux. On dira ce qu'est une espèce de structure locale, et le pseudogroupe de ses isomorphismes locaux.

Partant d'un pseudogroupe, on détermine un groupoïde ordonné qui est inductif, et sur lequel Ehresmann définit un « pseudoproduit » qui en fait un « semigroupe inverse ». Et réciproquement à tout semigroupe inverse est associé un groupoïde inductif.

Enfin, nous examinons la version Ehresmannienne de la « topologie sans point » en termes de paratopologies, alias les « locales », et partant de là les groupoïdes internes à la catégorie des locales. Cela permet l'examen rapide de comment dans des travaux plus récents à partir d'un groupoïde ordonné ou d'un groupoïde locale on peut déterminer un site (au sens de Grothendieck), que Lawson et Steinberg appellent un « site d'Ehresmann », tel que le topos des faisceaux sur ce site soit une « étendue », et réciproquement (d'après Kock et Moerdijk, Lawson et Steinberg, Dewolf et Pronk, dans des articles dont certains parus en 1991 , 2004 , 2018 et 2020, dans les *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle Catégorique*).

A partir de ce traitement de l'articulation du local au global, on peut considérer que la question de la géométrie différentielle, y inclus celle de la courbure et des connexions, évoqué ici au départ, se trouve toute entière déplacée sur celle des groupoïdes différentiables, des groupoïdes de Lie, voire des catégories différentiables, des foncteurs jets, etc.
Ce serait l'objet d'un autre exposé.