



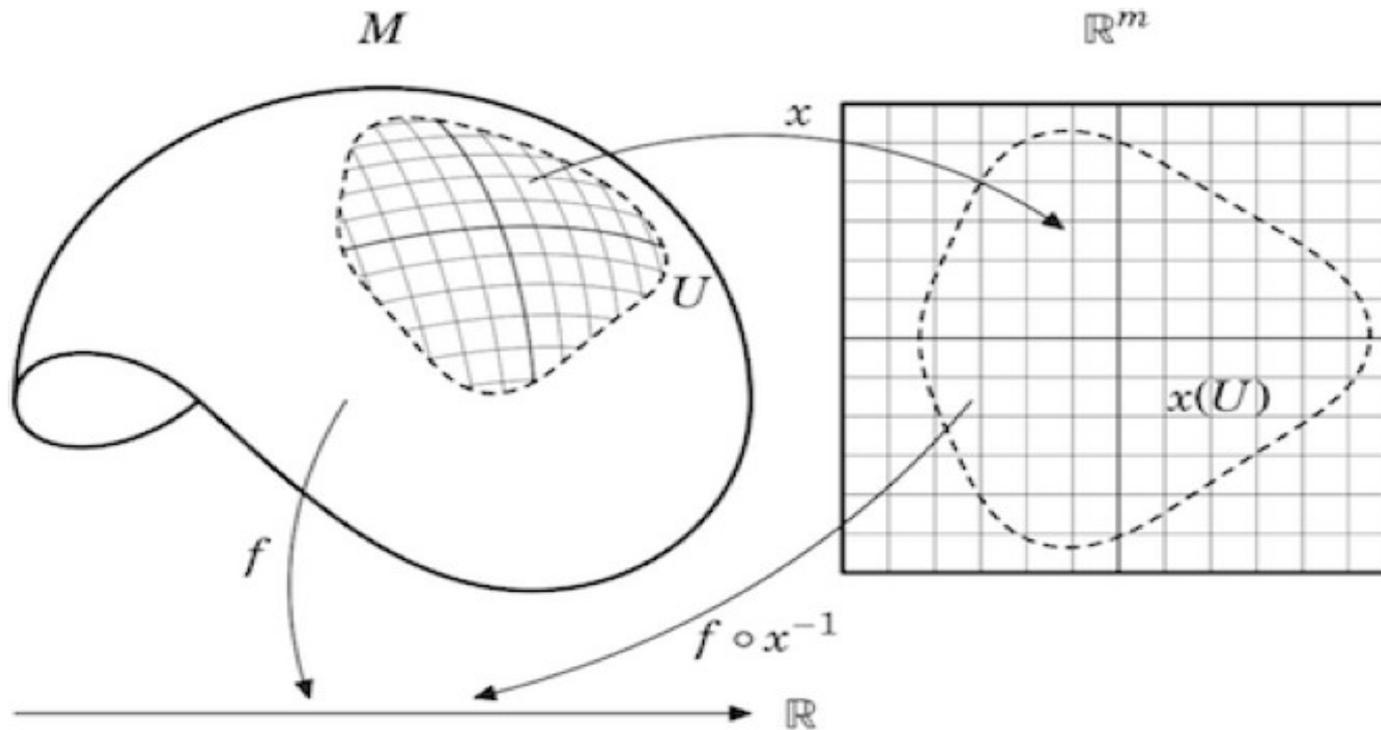
Dialectique du différentiel:  
des géométries Riemanniennes à l'hétérogénéité

Alessandro Sarti  
CNRS-EHESS

Recherche avec G.Citti

IRCAM Centre Pompidou, 29 février 2020

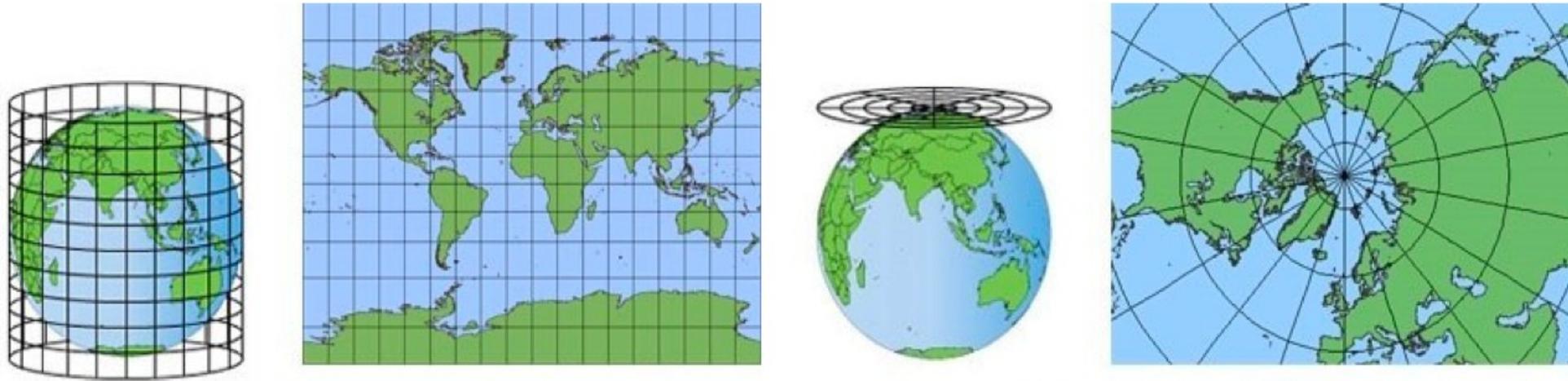
## Variété: carte



$$\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$$

La variété est localement un morceau d'espace courbe, obtenu via une déformation d'une boule de l'espace Euclidien.

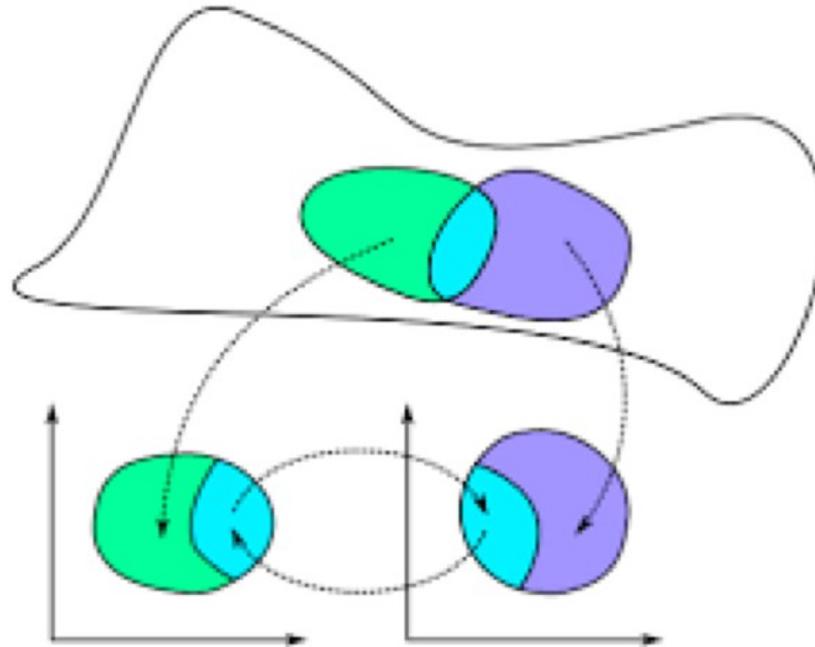
## Variété: atlas



$$M = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$$

Globalement une variété est définie comme une multiplicité d'ensembles ouverts

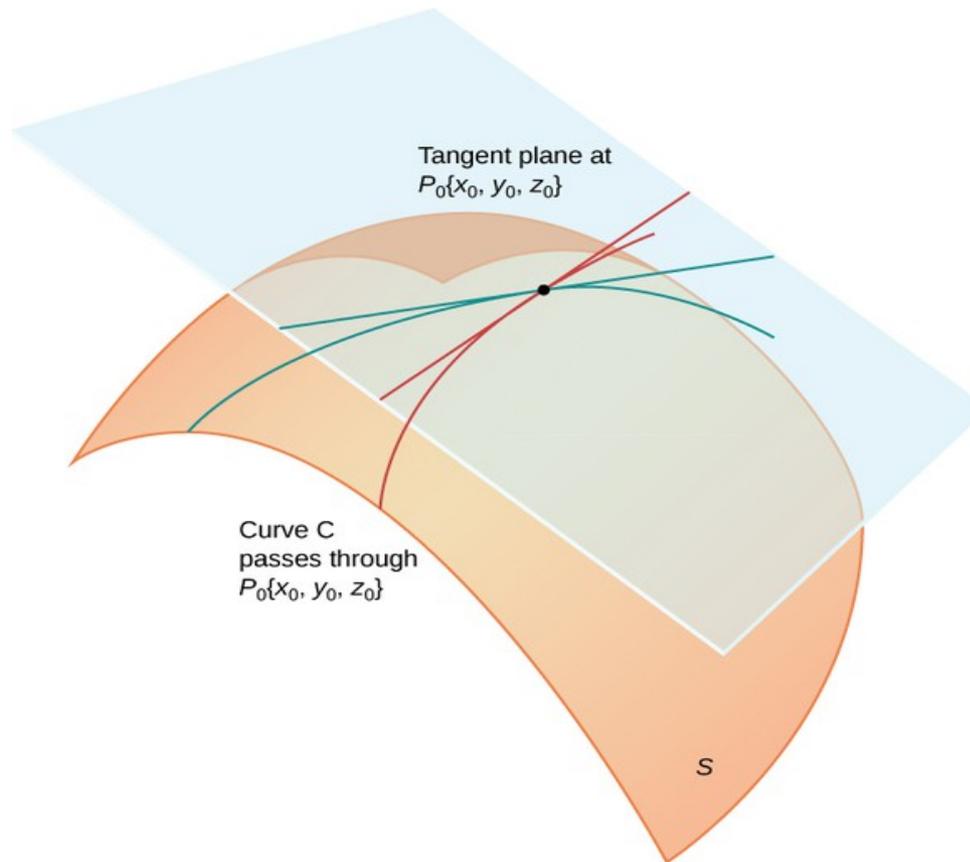
## Recollement de cartes



$$\begin{aligned} \phi_\alpha : U_\alpha &\rightarrow M, & \phi_\beta : U_\beta &\rightarrow M \\ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta & \text{regulier} \end{aligned}$$

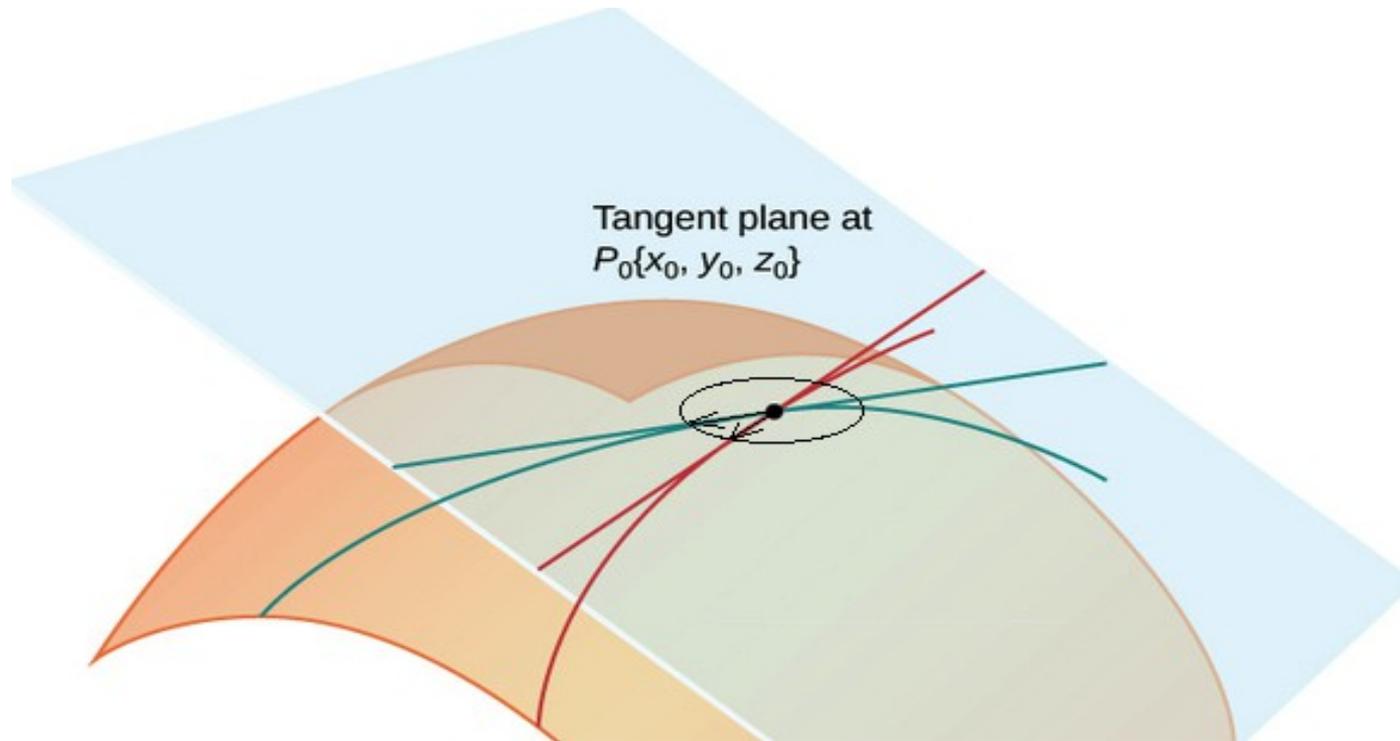
“Chaque voisinage est donc comme un petit bout d’espace euclidien, mais le raccordement d’un voisinage au voisinage suivant n’est pas défini et peut se faire d’une infinité de manières.” Mille Plateaux p.606

# Plan tangent



Le plan tangent en un point  $P_0$  est l'ensemble de toutes les dérivées des courbes passant par le point  $P_0$ . Il s'agit d'un espace vectoriel.

# La norme



$$|\vec{v}| = \sqrt{g_1^2 v_1^2 + g_2^2 v_2^2 + \dots} \quad \vec{v} \in T_{P_0}M$$

$$|\vec{v}| \leq 1 \quad \textit{ellipsoide}$$

$v_i$  dans une base orthogonale

« Les espaces de Riemann sont dépourvus de toute espèce d'homogénéité. Chacun d'eux est caractérisé par la forme de l'expression qui définit le carré de la distance de deux points infiniment voisins ». Mille Plateaux p.606

# Géométrie sous-riemannienne

## Plan tangent sous-Riemannien

Un sous-fibré AT du fibré tangent est introduit: c'est l'espace des directions admissibles de mouvement. En général, la dimension du plan tangent admissible est strictement inférieure à la dimension du plan tangent. Formellement à chaque point  $P_0$ , l'ensemble  $AT_{P_0}$  on aura une base

$$\partial_{v1,p_0}, \partial_{v2,p_0} \in AT_{P_0}$$

$$[\partial_{v1,p_0}, \partial_{v2,p_0}] = \partial_{v1,p_0} \partial_{v2,p_0} - \partial_{v2,p_0} \partial_{v1,p_0}$$

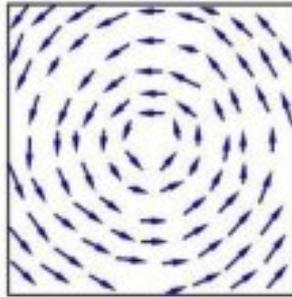
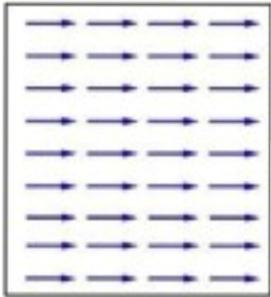
L'algèbre  $L_{P_0}$  contient  $AT_{P_0}$  et tous les commutateurs de ses éléments  $[\partial_{v1,p_0}, \partial_{v2,p_0}]$

Example: champs de vecteurs tangents aux courbes de niveau

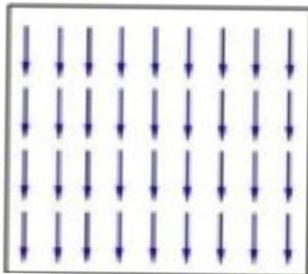


Champs de vecteurs unitaires  $|\mathbf{v}|=1$  sujets aux translations et rotations.

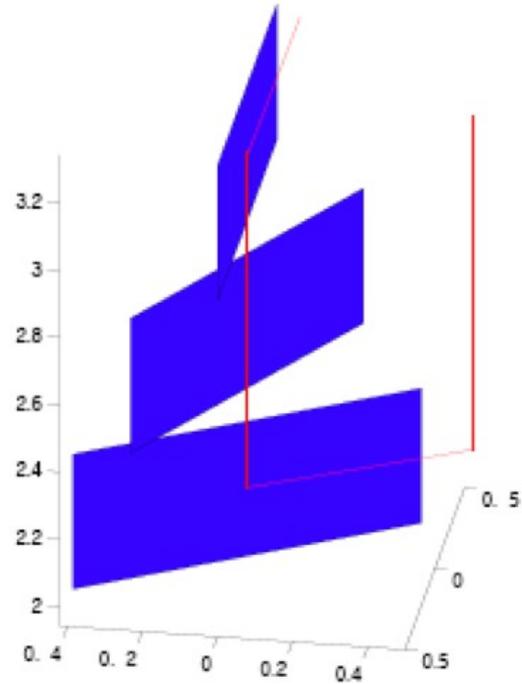
# Rotschild-Stein lifting (1977)



$$\tilde{X}_1 = \partial_x \quad \tilde{X}_2 = x\partial_y - y\partial_x$$



$$\tilde{X}_3 = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2] = -\partial_y$$



$$X_1 = \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y$$

$$X_2 = \partial_\theta$$

$$X_3 = [X_1, X_2] = -\sin \theta \partial_x + \cos \theta \partial_y$$

## Rotschild-Stein hétérogénéité



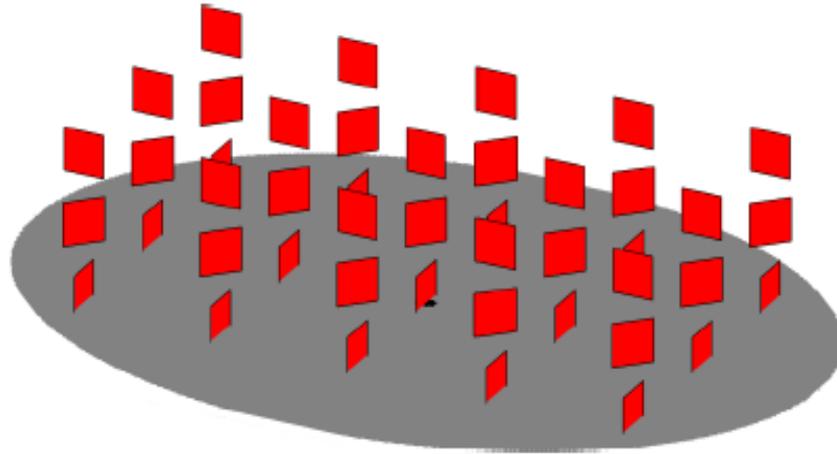
Si  $X_1, \dots, X_m$  satisfont la condition d'Hörmander, il existe une approximation locale des champs vectoriels donnés avec les générateurs d'un groupe de Lie qui peut être différent point par point.

# Hétérogénéité différentielle

# Lifting de $X_i$ dans $B_0$

$$X_{i,p} \quad p \in B_{p_0}$$

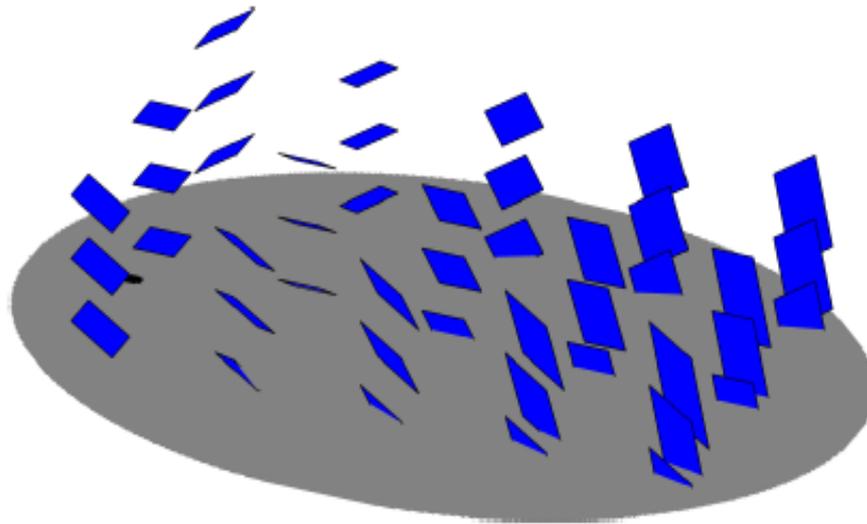
$$[X_i, X_j]$$



# Lifting de $Y_i$ dans $B_1$

$$Y_{i,p} \quad p \in B_{p_1}$$

$$[Y_i, Y_j]$$



# Hétérogène (géométrie) Lifting dans l'intersection

$$B_{p_0} \cap B_{p_1}$$

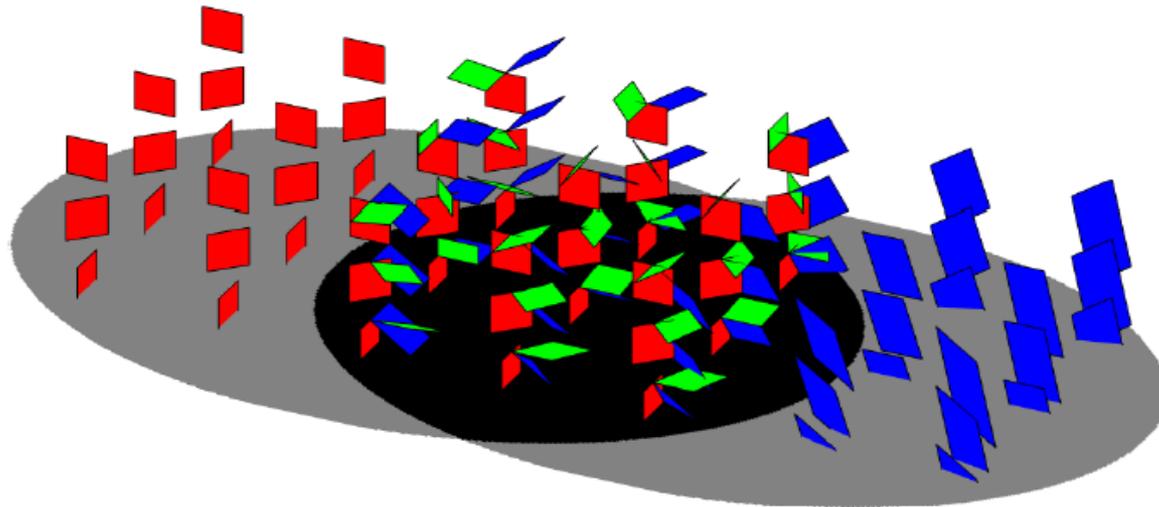
$$X_{i,p}$$

$$Y_{i,p}$$

$$[X_i, X_j]$$

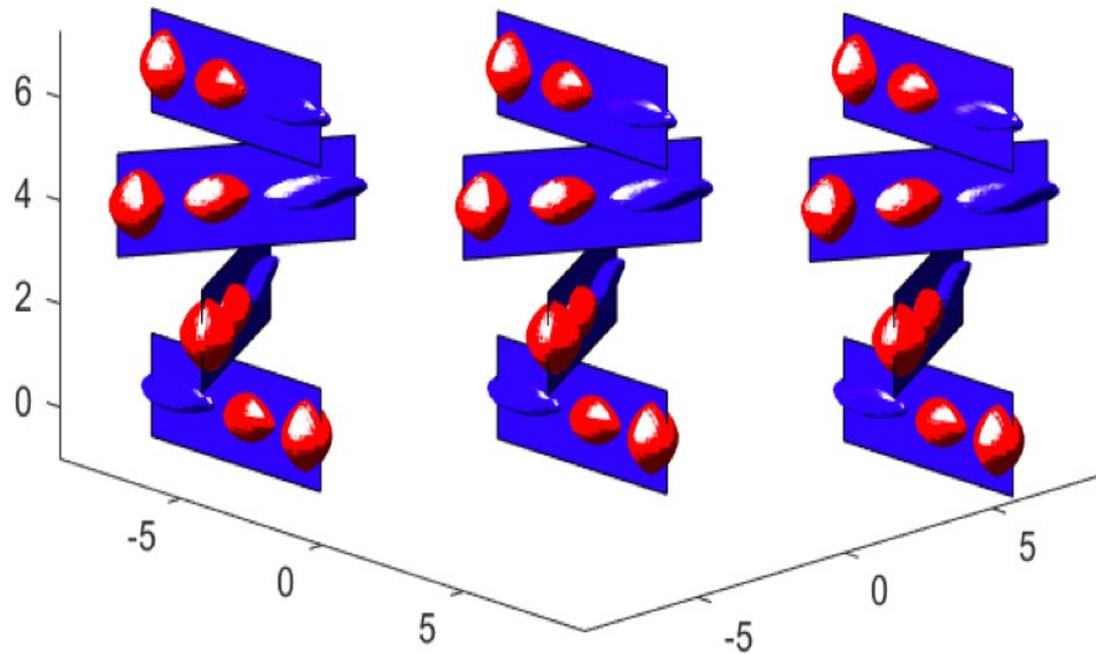
$$[Y_i, Y_j]$$

$$[X_i, Y_j]$$



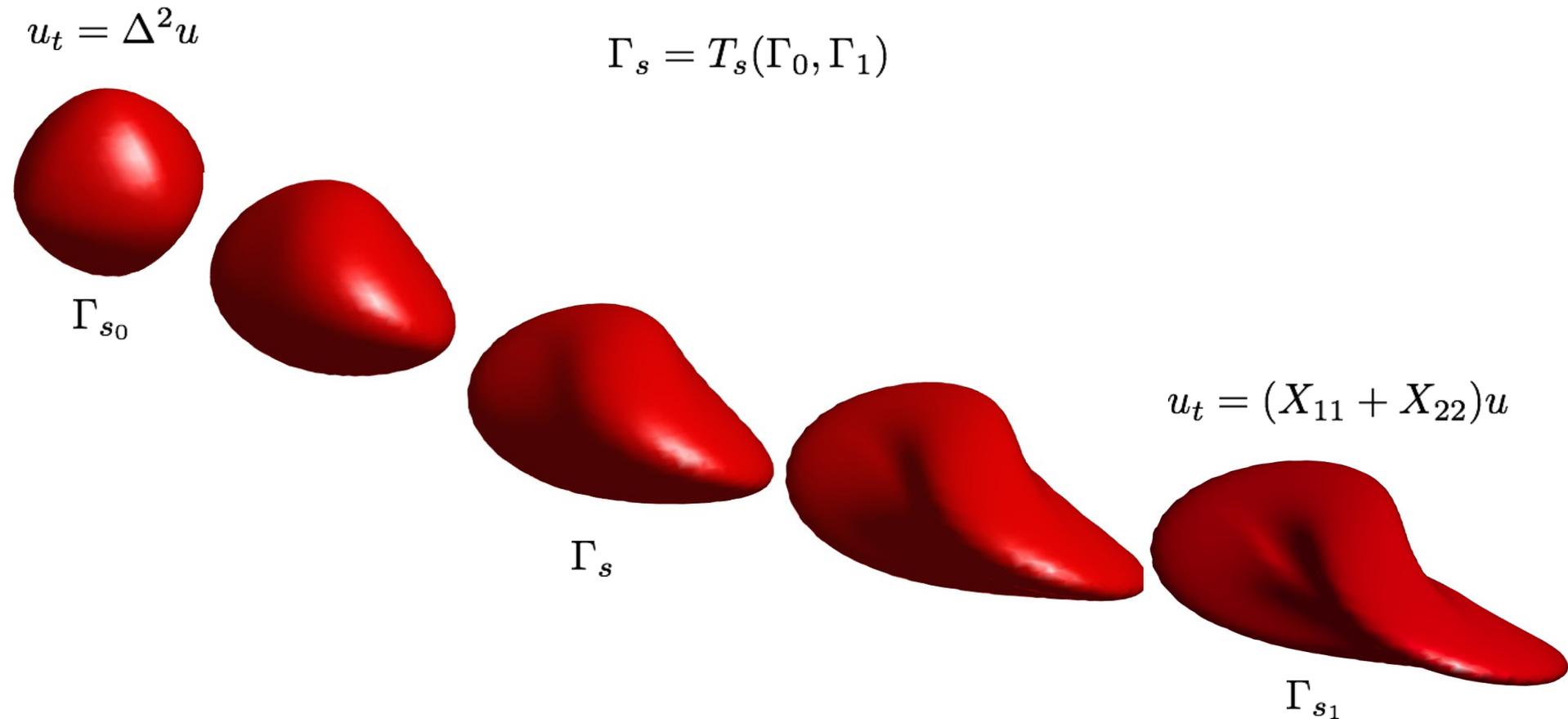
On a visualisé juste deux ouverts agencés, mais en réalité on peut en considérer une multiplicité. Rien à voir avec une dialectique du négatif, plutôt une production créative.

# Hétérogenèse (dynamique)



On considère un fibré d'opérateurs sur le fibré géométrique

Une courbe dans le fibré d'opérateurs  
Transport optimal dans un espace de mesures.



Devenir autre. D'un processus d'individuation à un autre. Daphné et le laur.