

Ce qu'il faut comprendre afin de distinguer les travaux d'Andrew Wiles des “déchets”

Michael Harris

Exposé à la conférence «À l'ombre d'une lecture (L'Immanence des vérités - Alain Badiou), quelles hypothèses sur le contemporain » ?

IRCAM, Festival *Manifeste*, 7-8 juin 2019

AVANT-PROPOS

J'avoue que j'étais très gêné après les deux jours de la conférence où j'ai présenté l'exposé qui suit, bien trop gêné pour reprendre contact avec les organisateurs, alors qu'on m'avait invité à leur transmettre le texte de mon intervention. Mais j'ai mis du temps à comprendre l'origine de ma gêne. Enfin je me suis rendu compte que mon problème venait du fait que la notion d'« *œuvres-en-vérité* » qui devait structurer les interventions des mathématiciens à la conférence revêt une signification très différente dans le champ universitaire américain que dans l'univers intellectuel français. Dans *L'Immanence des vérités*, si j'ai bien compris, l'expression sert à distinguer les travaux qui représentent de véritables événements, ceux qui sont destinés à survivre, de ceux d'une existence passagère, et qui appartiennent à la catégorie des archives, ou bien des déchets. Chez nous, par contre, ce genre de distinction est suspect, parce qu'il a servi historiquement à justifier toutes les exclusions dont souffre encore la société américaine, et plus particulièrement le système universitaire, fortement hiérarchisé, et presque aussi élitiste (mais dans un autre style) que celui des grandes écoles françaises.

Évidemment cela n'empêche pas les universitaires américains de consacrer beaucoup d'énergie pour préserver les hiérarchies existantes, et je suis conscient que dans mon propre fonctionnement routinier en tant qu'universitaire américain je suis parfaitement complice dans cette opération de préservation du *statu quo*. On n'est pas à une contradiction près. Cela dit, mes collègues américains trouveraient de très mauvais goût que je m'adonne à la *célébration* de notre rôle dans ce système élitiste et hiérarchique, et je dois dire que je partageraient leur réaction.

C'est en partie pour cette raison, mais seulement en partie, que j'ai insisté plusieurs fois dans mon exposé sur le caractère *collectif* de la recherche mathématique. La vision des mathématiques comme la création d'une succession de grands hommes (presque toujours des hommes) est trop bien enracinée dans les narratifs dominants autour du sujet, et toute occasion est bonne pour remettre cette vision en question. Mais la réalité de notre pratique est déformée par une autre vision encore plus nocive, celle d'une technique conçue, comme toutes les techniques, pour servir les besoins du marché, et dont la finalité pourrait tout aussi bien être réalisée par une Intelligence Artificielle. Le système de la trilogie de M. Badiou, avec les parallèles qu'il établit entre la science, l'amour, la politique, et l'art — justement dans leurs dimensions collectives — pourrait nous fournir des moyens de combattre cette vision, avec tous les risques qu'elle comporte pour l'avenir de notre pratique.

PROPOS: *[Q]u'en est-il des œuvres mathématiques entendues comme « œuvres-en-vérité dotées de leur propre index » et non plus comme conditions pour telle ou telle philosophie ?*

Je m'intéresse aux mathématiques depuis l'âge de 13 ans et je ne trouve rien dans mon expérience qui correspond à cette question. Evidemment je n'ai pas eu le temps de lire les deux autres tomes de *L'Être et l'Événement* depuis décembre, quand Yves André m'a invité à participer à cette conférence, et je n'ai qu'une notion très vague de leur contenu — tout cela je l'ai expliqué à Yves, qui m'a assuré que "un exposé de mathématicien n'abordant qu'en diagonale les thèmes du livre est aussi bienvenu."

Enfin, je viens d'une autre tradition philosophique, mais c'est une tradition où les mathématiques jouent un rôle central très analogue à celui qu'ils semblent jouer dans le système de M. Badiou. Mais je suis convaincu que dans les deux cas cette centralité est dûe à une erreur, effectivement la même erreur dans les deux cas. Pour dire les choses grossièrement — mais tout ce que je vais dire sera dit grossièrement — c'est comme si un patient souffrait d'une maladie — dans l'occurrence l'absence d'un moyen sûr pour distinguer le vrai du faux — et que les mathématiques étaient présentées comme une sorte de pilule qui montre comment procéder pour réaliser cette distinction. Evidemment cela intéresse des philosophes. Mais si cette pilule ne marche que dans le domaine très restreint de la pratique mathématique, elle risque d'aggraver la maladie en question...

D'ailleurs, le mot "vrai" n'est presque jamais utilisé dans ma vie professionnelle, et encore seulement pour boucher des trous syntaxique, comme quand on dit "Il est vrai que..." ou "la conclusion est une conséquence de la vérité de cette condition", des expressions vides de contenu métaphysique. Et quand je me demande ce que je comprends par le mot "vrai", au-delà des contingences de l'observation empirique, je constate que dans la tradition occidentale la vérité est ce qu'on obtient à la fin d'un raisonnement qui ressemble beaucoup à ce que font les mathématiciens. La métaphysique de vérité est toute autre dans la tradition chinoise, semble-t-il, et c'est d'autant plus intéressant que les philosophies chinoises classiques s'intéressent peu, ou pas du tout, aux mathématiques.

Ce que les mathématiciens peuvent offrir à la philosophie, en revanche, c'est une pratique qui permet d'arriver à l'accord, basée sur un langage construit sans ambiguïté, ce qui présuppose (comme Wittgenstein a voulu croire) qu'il y a une communauté qui agit pour exclure toute utilisation illicite. Mais comme Deligne a remarqué (vers 40') à propos de la théorie de types d'homotopie proposée par Voevodsky, c'est comme la Novlangue d'Orwell où l'idéal est de rendre impossible l'expression de pensées hérétiques. On retombe ainsi sur l'accord de la communauté, et donc cette pratique n'est nullement éternelle.

Ici je dois préciser que, dans la mesure où j'ai une orientation philosophique en ce qui concerne les mathématiques, c'est ce qu'on appelle "naturalisme méthodologique"¹

¹ A final use of "naturalism" in the philosophy of mathematics is distinctive to mathematics, and arises out of consideration of the proper extent of methodological naturalism. According to Quine's

d'après Penelope Maddy. C'est-à-dire, le point de départ est ce que font effectivement les mathématiciens, et non pas une vision idéalisée de ce que doit être les mathématiques. En particulier, dire que la mathématique est la science de l'être en tant que l'être n'éclaire pas la forme de vie de la communauté des mathématiciens, ni fixe son horizon.

Si j'ai plus ou moins compris en quoi consiste l'index, c'est donc à chercher du côté de la communauté, et c'est une conclusion qui répugne sans doute au système de M. Badiou, mais je n'y peux rien. Au lieu de poursuivre cette question, je propose de parler de choses que je comprends, en me basant sur les quelques lignes du livre *L'immanence des vérités* où l'on se demande si la solution par Wiles du théorème de Fermat mérite d'être considérée parmi les oeuvres. Alors que cette solution est déjà effectivement reléguée aux archives, comme j'expliquerai tout à l'heure, je voudrais la sauver de la déchetterie.

Que dit M. Badiou à propos de Wiles? (p. 589) Que son théorème est un exemple de *travail rétroactif*: "il mesure en quelque sorte la puissance des moyens nouveaux quant à la solution de problèmes anciens". C'est opposé à la fois au *travail technique* (routinier, je dirais) et au *travail créatif*, qui "consiste d'inventer des perspectives, des concepts, des méthodes de démonstration". Seul un *travail créatif* peut être qualifié d'oeuvre.

"Parlera-t-on pour autant, en se basant sur ce seul tour de force, de l'oeuvre de Wiles'? C'est douteux."

Mais les reportages sur ce que Wiles a réalisé ont tendance à ne pas reconnaître que ce qui importe aux arithméticiens n'est pas tant qu'il a démontré le théorème de Fermat, aussi impressionnant que cela puisse être, mais surtout qu'il l'a fait par la création des moyens pour démontrer un résultat beaucoup plus solide et actuel, à savoir la *modularité* des courbes elliptiques sur le corps rationnel. Je vais traiter 4 points, d'abord rapidement, puis un peu plus en profondeur.

1. Le plus simple : en fait, Wiles a bien inventé "des perspectives, des méthodes de démonstration", mais il n'insiste pas dessus parce que son éthique personnelle mathématique valorise surtout la solution des problèmes identifiables. Avant Fermat il avait fait (entre autres) la première contribution à la solution de la Conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer (avec Coates) et il avait résolu la Conjecture Principale d'Iwasawa (with Mazur). De plus, les spécialistes sont capable d'identifier les concepts sous-jacents à ces trois résultats majeurs qui font de lui le spécialiste le plus remarquable de sa génération de la théorie algébrique des nombres, et qui ont été assimilés par la communauté, même si personne ne les a codifiés en une "Théorie de Wiles."

naturalism, the natural sciences provide us with the proper methods of inquiry. But, as Penelope Maddy has noted, mathematics has its own internal methods and standards, which differ from the methods of the empirical sciences, and naturalistic respect for the methodologies of successful fields requires that we should accept those methods and standards. This places Maddy's methodological naturalism in tension with the original Quinean version of the doctrine, because, Maddy argues, letting natural science be the sole source of confirmation for mathematical theories fails to respect the autonomy of mathematics. (A. Paseau, "Naturalism in the Philosophy of Mathematics," *Stanford Encyclopedia of Mathematics*, 2008-2013, <https://plato.stanford.edu/entries/naturalism-mathematics/>)

2. Ces perspectives nouvelles ont depuis plus que 25 ans servi de base pour un des domaines les plus actifs et prestigieux de la théorie des nombres, où les méthodes de théorie algébrique des nombres sont utilisées pour établir une partie du *programme de Langlands*. Il y a eu de nombreuses conférences et groupes d'études consacrées rien qu'à des contributions spécifiques à ce domaine, et tous les spécialistes ont essayé de contribuer ; j'ai moi-même publié plusieurs travaux qui généralisent ces perspectives à d'autres types de problèmes.

3. Cependant, ce n'est pas seulement la preuve de Wiles qui est considérée aujourd'hui comme une archive (dans le sens de la profession, non pas celui du livre de Badiou), au sens que les travaux les plus récents dans cette direction ont énormément simplifié les arguments de Wiles et les ont rendus plus puissants. En effet, tout le domaine est en cours de reconceptualisation comme partie d'une perspective beaucoup plus large qui incorpore le *programme de Langlands géométrique*, dont la formulation actuelle nécessite le développement de techniques nouvelles, certaines consacrées notamment à surmonter les difficultés implicites dans les arguments en géométrie de dimension infinie. Le mot *infini* revient aussi dans le langage des *infini-catégories*, qui elles-mêmes ne sont que la première étape, enfin bien comprise grâce aux travaux de Jacob Lurie en particulier, d'une hiérarchie hypothétique infinie des infinis. A la fin — mais il n'y aura pas une fin, justement — même les problèmes résolus par Wiles et ses collègues sont destinés à être incorporés dans une perspective d'une telle généralité que les motivations contemporains seront vraisemblablement invisibles ou insignifiantes.

4. Cela renforce l'affirmation que le cadre convenable n'est pas le chercheur individuel mais plutôt la communauté — ou le chercheur *collectif*. Les innovations de Wiles ont un sens seulement comme des moments particulièrement remarquables dans une chaîne d'innovations avec beaucoup d'auteurs, certains très célèbres pour leurs nombreuses inventions, d'autres peut-être seulement connus pour une ou deux contributions qui sont néanmoins indispensables. L'insistance sur le rôle des individus exceptionnels — les grands hommes — cache l'effort collectif, qui, on peut soutenir, est le niveau auquel *l'absoluité* mérite d'être située.

1. Dans le cas de FLT, mais aussi en germe dans ses autres travaux, on peut dire que l'innovation principale de Wiles était qu'il avait trouvé un moyen de *compter* des ensembles d'objets qui sont intrinsèquement infinis. Le théorème qu'il a effectivement démontré, dans son papier avec Richard Taylor, est le suivant : toute courbe elliptique sur \mathbf{Q} est obtenue par la construction de Shimura à partir d'une forme modulaire. Nous savons que Shimura a défini une application *injective*

$$\{(certaines) \text{ formes modulaires}\} \Rightarrow \{\text{courbes elliptiques sur } \mathbf{Q}\}$$

Pour terminer la démonstration, Wiles doit montrer que cette application est *surjective* (complètement démontré par Breuil-Conrad-Diamond-Taylor en raffinant la méthode de Wiles, mais le cas particulier démontré par Wiles suffit pour Fermat). Une méthode classique pour conclure est de compter les deux ensembles et de montrer qu'ils ont la même cardinalité. Malheureusement ce genre d'argument (comme Dedekind avait remarqué) est précisément ce qui ne marche pas pour les ensembles

concepts. Enfin, deux perspectives qui sont présentes dans les travaux de Wiles depuis ses débuts :

(a). L'idée que la théorie globale de corps de classes permet de réinterpréter les calculs très difficiles de ramification sauvage en un premier p , en termes de calculs beaucoup plus simples de ramification modérée en des premiers différents de p . C'était dans son papier avec Coates en 1976, et c'était aussi dans la première tentative de terminer sa démonstration de la modularité (et donc de FLT), ainsi que dans la bonne méthode qu'il a inventée avec Taylor. A noter que la première tentative était basée sur les systèmes d'Euler inventés par Rubin et Kolyvagin et qui ont aussi leurs origines dans les travaux antérieurs de Wiles.

(b) L'idée déjà mentionnée que le problème infini de comptage puisse être ramené à des calculs finis.

2. J'ai dit que les perspectives, méthodes, concepts introduits par Wiles ont permis d'établir des cas particuliers du grand programme de Langlands, le grand visionnaire de la théorie des nombres, qui peut facilement se comparer aux exemples de mathématiciens créatifs (Riemann, Galois, Grothendieck) mentionnés dans le passage en question du livre. Mais pour les mathématiciens en dehors du domaine l'importance de Langlands n'est pas si claire, et il a dû attendre longtemps avant d'être honoré par le Prix Abel — deux années après Wiles — justement parce que Langlands est surtout connu (sauf par des spécialistes) pour ses perspectives et concepts, et pas tellement pour les résultats qui portent son nom. Même quand Langlands et Taylor ont obtenu le Prix Shaw (deux années après Wiles), celui qui les a présentés avait le mauvais goût de dire à peu près ceci : que Langlands a obtenu le prix pour avoir posé des conjectures, et Taylor pour les avoir résolues. Cela n'est pas du tout exact et cela a beaucoup vexé Langlands, mais cela correspond à une division bien ancrée dans l'imaginaire des mathématiciens entre "bâtisseurs de théories" et "résolveurs de problèmes." La profession a tendance à attribuer la créativité à ces derniers, même si les mathématiciens les plus appréciés sont ceux qui sont les deux à la fois.

Cela dit, ce sont les méthodes introduites par Wiles qui, jusqu'à présent, ont permis d'établir les conjectures dans tous les cas connus, et c'est un programme de recherche encore loin d'être épuisé. Dernièrement la démonstration de la conjecture de modularité pour les courbes elliptiques sur les corps quadratiques imaginaires était le sujet d'un papier avec 10 auteurs qui fait appel à toutes les méthodes qui trouvent leurs origines dans les travaux de Wiles, et bien plus encore.

Encore un mot sur la finitude. Une grande réussite des méthodes de Wiles est la démonstration (par Kisin et par Emerton) d'une conjecture de Fontaine et Mazur qui dit essentiellement que certains ensembles d'objets géométriques sont finis. Par ailleurs, un autre chemin proposé pour démontrer le théorème de Fermat était de rendre *effectif* le théorème de finitude de Faltings (conjecture de Mordell). Cela pourrait très bien correspondre à la description du *fini accessible*. Et plus généralement on peut voir tous les grands théorèmes de classification — par exemple, la classification des groupes de Lie semisimples — comme des victoires du fini sur un champ potentiellement infini. Les mathématiciens sont toujours très contents de pouvoir exprimer un tel champ par un fini accessible; typiquement on obtient les prix

les plus prestigieux pour des résultats de ce genre. Alors je ne vois pas si cela veut dire que les mathématiciens opèrent leur propre *oppression*, ni que la finitude des objets d'un type donné (par exemple, le théorème de Faltings) les représente comme un *déchet*.

3. Langlands lui-même a souvent exprimé de l'impatience avec les arithméticiens qui travaillent dans le champ ouvert par les travaux de Wiles, Taylor, et al. Il a même indiqué, pas toujours avec beaucoup de tact, qu'ils perdent leur temps (et le sien) et qu'ils feraient mieux de travailler sur les méthodes qu'il a proposées pour réaliser les correspondances prévues par ses conjectures.

Il est clair en tout cas que les travaux de Wiles et al sont provisoires, du point de vue du programme de Langlands. Ils ont réussi à résoudre des questions brûlantes mais qui ne brûle plus depuis qu'elles ont été résolues. C'est le moment de citer André Weil, qui parle de l'ennui qui arrive après l'extase, dans un contexte légèrement différent :

Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la Gita, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.

Je ne sais pas si la remarque de Weil sur la connaissance et l'indifférence qui arrivent en même temps exprime en quelque sorte l'oppression de la finitude. Toujours est-il que la résolution d'une grande conjecture ne laisse ni un vide, ni une beauté froide, mais plutôt le sentiment **qu'on n'a pas encore trouvé la question qui aurait dû être posée** à la place de la conjecture. C'est certainement le cas des travaux de Wiles. Il y a les conjectures de Langlands qui vont bien au-delà de tous les cas spécifiques où elles ont été démontrées. La résolution du théorème de Fermat dans le cadre du programme de Langlands ne pourrait jamais être un déchet, parce qu'elle confirme la profondeur de ce programme. Mais il ne réalise pas non plus la *raison profonde* de ce programme. Il y a ici trois travaux créatifs à distinguer :

Le travail de Langlands et ses précurseurs : formulation du programme

Le travail de Wiles et ceux qui l'ont suivi : vérification du programme et conséquences

Le travail d'un groupe de mathématiciens qui ne sont pas encore nés: détermination de la *raison profonde* du programme.

Je ne crois pas à l'existence de *raisons profondes* en général ; c'est peut-être justement une tentative de trouver un *index* pour le travail réalisé. Cependant la quête des raisons profondes caractérise toujours le mouvement d'un programme mathématique. Langlands a formulé son programme comme une unification de beaucoup de résultats disparates dans différents domaines de la théorie des nombres et aussi de la théorie des représentations de groupes de Lie semisimples. On a tendance à dire que son programme *explique* tous ces résultats qui désormais sont perçus comme des *phénomènes* plus ou moins superficiels qui proviennent de la structure

exprimée par le programme de Langlands. Mais ensuite on peut demander une explication pour cette structure. Pourquoi cette dualité et pas une autre?

La démonstration éventuelle (dans 200 ans...) des conjectures de Langlands n'est pas garantie de répondre à cette question. Au contraire, dans la littérature de physique mathématique il y a une théorie hypothétique appelée "six dimensional (2,0) superconformal QFT" qui inclut la version géométrique de la dualité de Langlands dans un petit coin.

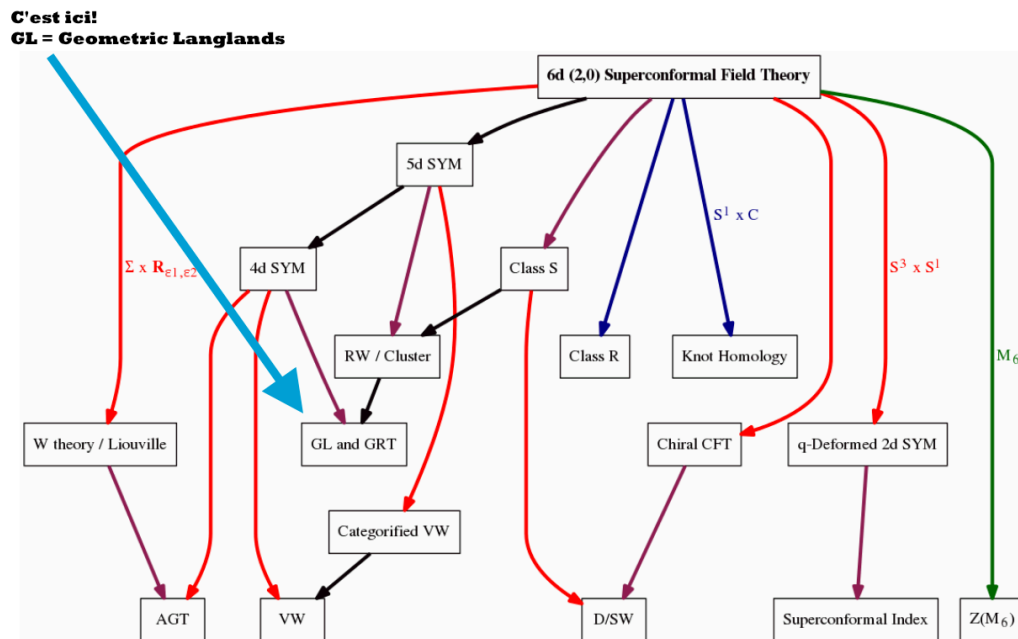


Diagramme de la conférence *Mathematical Aspects of Six-Dimensional Quantum Field Theories* Berkeley 8-12 décembre 2014

Mais alors où est la théorie qui explique la relation de tout cela avec la théorie des nombres?

Comme j'ai écrit dans mon livre,

Physicists like Steven Weinberg can "Dream of a final theory" but mathematicians can realistically dream only of an endlessly receding horizon.

Pour construire cette théorie en 6-dimensions il faut faire appel à la théorie de catégories supérieures. On le fait sans se soucier beaucoup des éventuels paradoxes ensemblistes. Et ceci n'est pas parce qu'on ne reconnaît pas leur pertinence, mais plutôt parce qu'on sait bien que la théorie sera inévitablement provisoire. Quand le moment arrive (dans 2000 ans) où l'on se rapproche de sa construction, où l'on risque d'atteindre "à la connaissance et à l'indifférence en même temps", la théorie en question aura longtemps été dépassée comme structure globale de notre imagination mathématique. C'est une situation que Grothendieck a décrit avec le mot *avatar*: les objets mathématiques que nous connaissons sont perçus comme des *avatars* d'une réalité sous-jacente mais cachée.

Sur la page 34 on lit

Dans l'oeuvre d'art, dans la situation politique et plus encore dans la situation amoureuse, la question de savoir si on n'est pas constamment aux prises avec l'incertitude quant à ce qui est dedans et ce qui est dehors est constitutive du processus lui-même.

Mais cela s'applique tout autant à la situation où se trouvent les mathématiciens. La question que j'ai proposée aux philosophes va dans ce sens :

How can we talk to one another, or to ourselves, about the mathematics we were born too soon to understand?

Dans le chap. C15 M. Badiou écrit (plus ou moins à ce propos) "Mais la mathématique n'est pas le lieu du sens." Je pense plutôt qu'il y a toujours un sens mais c'est relatif au langage utilisé par la communauté contemporaine — je dirais "immanente" si je savais ce que cela veut dire — des mathématiciens. Cette communauté, ce langage, leurs préoccupations, etc. sont toujours en mouvement, et le sens aussi. Et en dehors d'un sens incarné dans un langage vivant, où est la mathématique?

There are good reasons why the theorems should all be easy and the definitions hard. As the evolution of Stokes' Theorem revealed, a single simple principle can masquerade as several difficult results; the proofs of many theorems involve merely stripping away the disguise. The definitions, on the other hand, serve a twofold purpose: they are rigorous replacements for vague notions, and machinery for elegant proofs.⁴⁴

4. Enfin, de ce point de vue l'absolu n'est pas l'ensemble impossible de tous les ensembles mais plutôt le processus même qui cherche à arriver à une limite qu'on sait d'avance qu'on n'atteindra jamais :

when after a long and arduous climb we finally find our way to the concepts we had been seeking, we see that they are in turn the avatars of concepts we glimpse only dimly, and so on without end.

lorsque après une montée longue et ardue nous trouvons enfin notre chemin vers les concepts que nous cherchions, nous voyons qu'ils sont à leur tour les avatars des concepts que nous n'entrevoions qu'indistinctement, et ainsi sans fin.

On peut tracer l'histoire collective de la pensée de Wiles, et s'il faut prouver qu'elle mérite le nom d'oeuvre c'est de ce côté collectif qu'il faut chercher la justification. Dans le livre "Eloge des mathématiques" on trouve des expressions comme "confrérie des mathématiciens" ou "authentique Internationale... des mathématiciens" et d'autres encore. C'est certainement une telle confrérie — je peux donner une liste de noms, avec la contribution de chacun — qui a réalisé une grande oeuvre. En se focalisant sur l'apport d'un individu on perd le sens de la véritable dynamique de la pratique. Ou peut-être on peut affirmer avec Badiou (p. 23) — et je l'affirmerais, encore une fois, si

je le comprenais — que "le devenir-sujet d'un individu ou d'un collectif dépend de sa capacité à être immanent au processus d'une vérité." Il s'agit donc de voir le sujet des mathématiques comme la tout-à-fait réelle communauté des mathématiciens. Encore, sans attacher trop d'importance à la notion de *vérités*, on peut affirmer (p. 21) pour les mathématiques que "*les vérités sont créées par un sujet humain, personnel ou impersonnel, individuel ou collectif, dans des mondes déterminés, avec des matériaux déterminés.*"

Ou enfin, si un des buts de la philosophie est d'identifier ce que Badiou appelle les lieux où être et être-pensé sont identiques (p. 70), alors c'est effectivement une description possible des mathématiques, à ceci près qu'il ne faut pas se tromper sur l'identité de ceux ou celles qui pensent ce dont l'être est "être-pensé".