ALAN BADIOU ET LA THÉORIE DES ENSEMBLES: LES MATHÉMATIQUES PURES OU LES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Mirna Dzamonja, University of East Anglia, Royaume Uni
membre associée d'IHPST CNRS-Paris 1

PROGRAMME

- « L'index de l'absoluité « dans la théorie des ensembles contemporaine
- Un regard sur la théorie des ensembles comme l'ontologie
- Un regard sur l'application de cette ontologie
- De quoi Badiou est-il le nom. :-) un regard sur la relation entre la pratique de la théorie des ensembles et la philosophie
- Une conclusion

PARTIE I: L'INDEX DE L'ABSOLUITÉ DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES CONTEMPORAINE

Ou comment résister au forcing

LES CARDINAUX SINGULIERS ET LEURS SUCCESSEURS

- Un cardinal κ est *singulier* s'il existe un sous-ensemble A de κ tel que $|A| < \kappa$ mais $\sup(A) = \kappa$.
- Exemple: $\aleph_\omega = \sup_{n<\omega} \aleph_n$
- Les cardinaux singuliers ne se prêtent pas facilement au forcing :

Théorème (Shelah vers 1980) Si pour tout n, $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$, alors

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$$

Au contraire du théorème d'Easton (1970) qui dit qu'on peut changer les puissances des cardinaux réguliers un peu comme on veut.

Saharon Shelah, HUJI

PCF

En fait, Shelah a découvert des nouvelles opérations sur les cardinaux, pp et pcf, qui sont presque impossibles de changer par le forcing. Ils sont d'importance surtout pour les cardinaux singuliers.

Il a résolu le HGC révisée !

Les recherches sur pcf forment une partie très importante de la théorie des ensembles aujourd'hui.

LES LIMITS DU FORCING SUR LES SINGULIERS

- On sait (Jensen, voir l'Immanence de Vérités) que pour changer le CHG sur un cardinal singulier, il nous faut de grands cardinaux (au moins 0#)
- Si on veut avoir un axiome du forcing sur un singulier, il faut utiliser les itérations ET les grands cardinaux (NB pour l'axiome de Martin on a besoin que de ZFC).
- Avec Cummings, Komjath, Magidor, Morgan et Shelah, j'ai une série d'articles sur les axiomes de forcing pour les cardinaux singuliers (1995 - 2017)

On peut utiliser la résistance au forcing comme une mesure d'absolυité:

Exemple : (0) Une vérité qui est démontrable en ZFC est absolue,

elle a l'index d'absoluité $= \infty$

(1) Une vérité qui ne peut pas être changée par forcing a l'index d'absoluité $\aleph_0$

(2) Définissons ce qui est un forcing « gentil », par exemple ccc

(3) Si une vérité ne peut pas être changée par un forcing « gentil », elle a un index d'absoluité > 0

etc.

- Philosophiquement, cela est intriguant pour les fondements, en montrant que ZFC est plus puissant qu'on ne le pensait et
- Pour la théorie de Badiou aussi, car pour emprunter ses interprétations, cela implique qu'il existe dans la nature humaine des choses qu'on ne peut pas changer par une révolution

PARTIE II: UN REGARD SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES COMME L'ONTOLOGIE

J'adore la théorie des ensembles, j'adore la logique, mais je suis une pluraliste

Je ne crois pas que nous avons trouvé les fondements uniques pour les mathématiques
(et donc encore moins pour la vie)

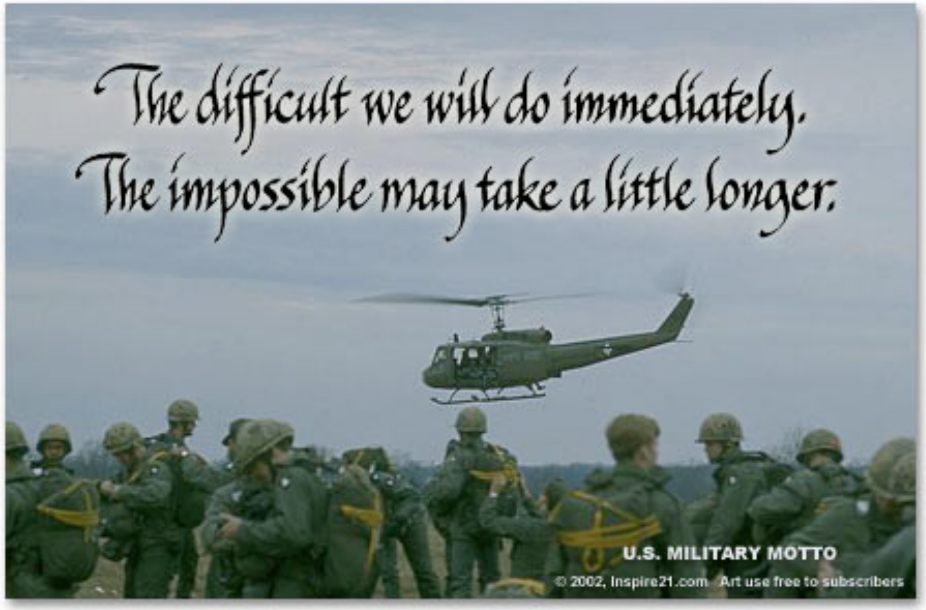
Je ne crois pas que de tels fondements existent

Je crois que les fondements et les mathématiques se développent ensemble et les deux vont toujours rester en développement

En mathématiques, l'ontologie et l'épistémologie vont ensemble

- La théorie des ensembles a sa place dans les fondements des mathématiques, car elle donne les fondements pour une partie importante des mathématiques de façon cohérente avec la pratique habituelle.
- La théorie des catégories a sa place, car elle donne une façon à modéliser la partie des mathématiques qui dépendent sur les classes propres, telles que la géométrie algébrique.
- Les fondements univalents ont leur place, car ils nous donnent une nouvelle façon de discuter des preuves, une notion centrale partout en mathématiques.

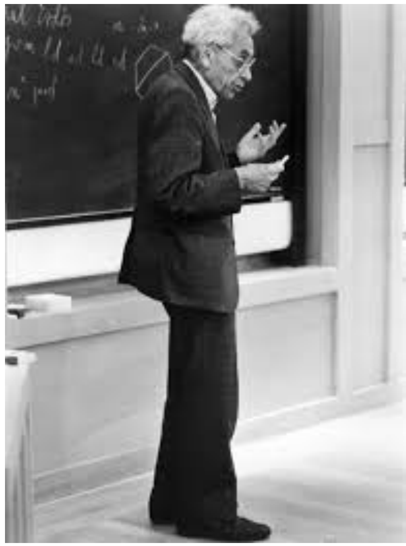
Le FINI

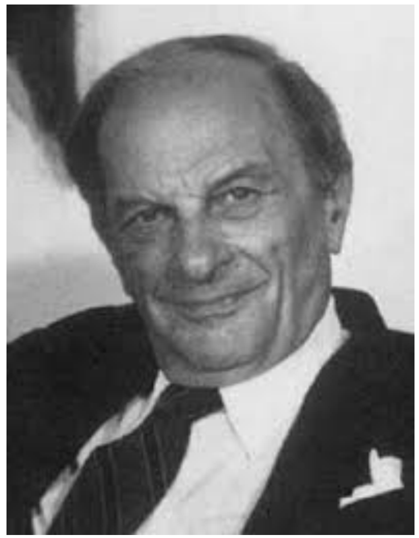


« The infinite we do right away; the finite takes a little longer. »

Pál Erdös et

Stanislaw Ulam





DES DIFFICULTÉS AVEC LE FINI

- L'arithmétique : assez compliquée déjà au niveau de + et x, comme on peut le voir par l'existence de la théorie de nombres
- L'arithmétique infinie de + et x est triviale

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$$

- La théorie des ensembles n'apporte absolument rien à la théorie des nombres
- Ni à la théorie des graphes finis
- Ni à la théorie des jeux finis…. etc. Tout cela se passe en V_ω

PARTIE III: LES APPLICATIONS DE L’ONTOLOGIE ENSEMBLISTE AUX « QUATRE PILIERS »

LES QUATRE PILIERS DE LA PHILOSOPHIE DE BADIOU

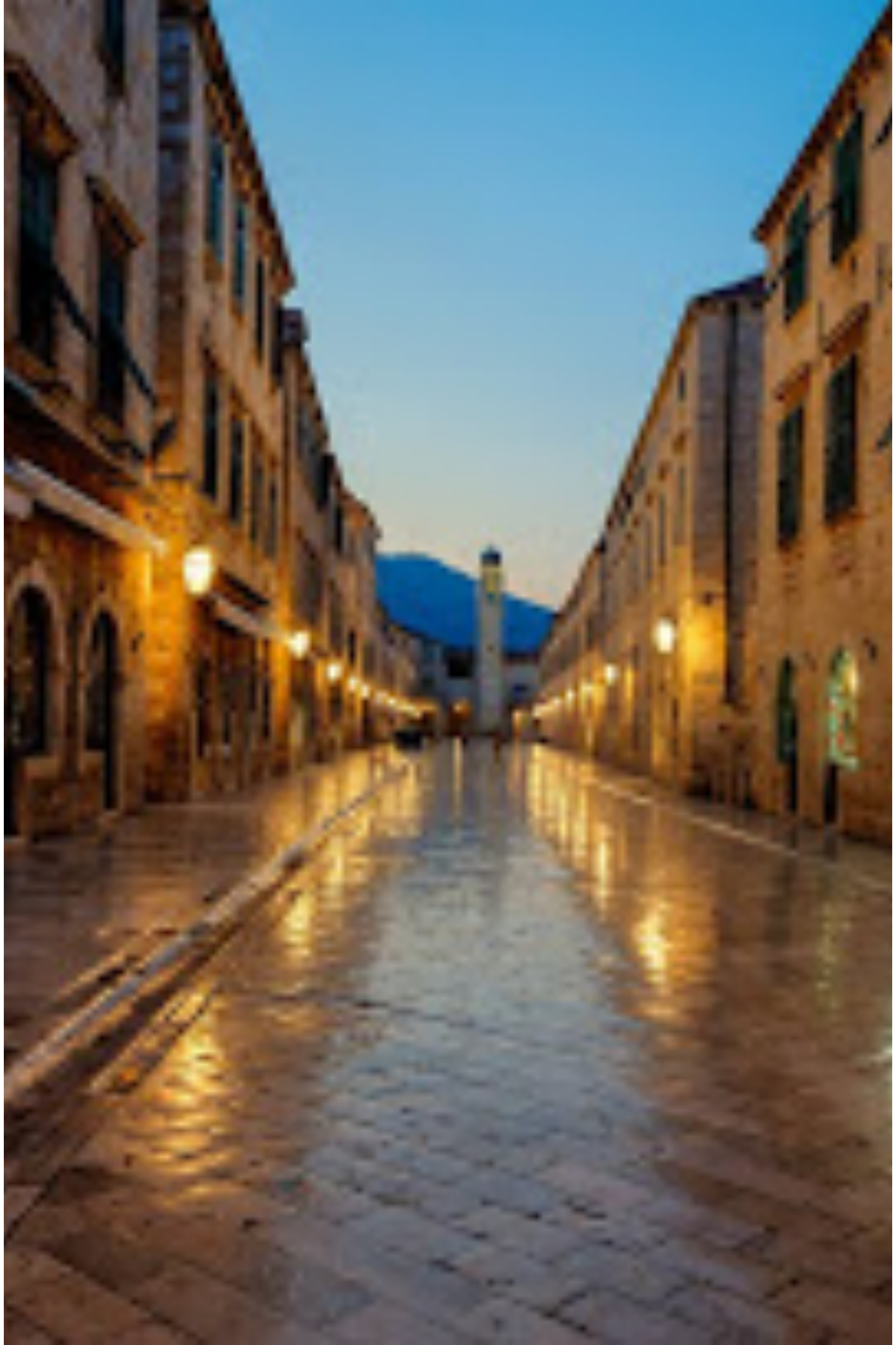
« La philosophie se fonde sur quatre piliers: l'amour, la politique, les sciences et l'art. » *A. Badiou, Éloge des mathématiques*

On va se concentrer sur la relation entre l’ontologie ensembliste et la politique.

Théorème de résistance, L'immanence des vérités pg. 352

- Th : Soit κ un cardinal infini et U un ultrafiltre sur κ . Pour chaque partition de κ en $< \kappa$ morceaux, il y a un de ces morceaux qui est en U. L'idée
- *« Une partie restera toujours dans U, comme la région de Yenan est restée sous le pouvoir populaire en dépit du quadriallage infligé à la Chine à la fois par Tchang Kaï-chek et par les envahisseurs japonais »* l'interprétation de l'idée par A. Badiou
- **Notation**: une grande partie = un ensemble dans l'ultrafiltre

- Maintenant on va faire une expérience de pensée, en interprétant le théorème de résistance dans un autre contexte, mais de deux façons différentes.



CONTEXTE: L'HISTOIRE DE LA CROATIE

- En 1918 elle entre dans le Royaume des Serbes, des Croates et des Slovènes, qui devient la Yougoslavie en 1919
- En 1941, Hitler envahit la Yougoslavie, la partage et établit un pays collaborateur en Croatie, sur le nom de « la Croatie Indépendante » et sur la gouvernance d'Ante Pavelić (dr).
- En 1945, la Yougoslavie se libère et la Croatie s'y réintègre
- En 1991 la Croatie sort de la Yougoslavie et redevient un pays indépendant sur la gouvernance de Franjo Tudjman, qui est très ouvert sur ses liens avec le passé de la Croatie Indépendante

APPLICATION 1: L’HISTOIRE SELON LA PÉRIODE 1945–1991

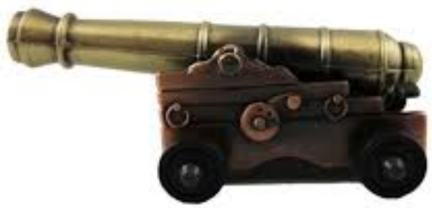
Drug Tito

Une grande partie des Croates était opposée au régime de Hitler et de Pavelić. Ils sont restés fidèles à l’idée de la Yougoslavie, pour la re-instaurer en 1945.

APPLICATION 2: L'HISTOIRE SELON LA PÉRIODE 1991-

Dr Tudjman

Une grande partie des Croates était opposée à la Yougoslavie. Ils sont restés fidèles à l'idée de la Croatie Indépendante, pour la re-instaurer en 1991.



- Une même idée du théorème de Résistance était utilisée pour deux idéologies opposées. Contradiction, car l'intersection de deux grandes parties doit être non-vide.
- Le passage de l'idée à l'idéologie est court et plein d'épines

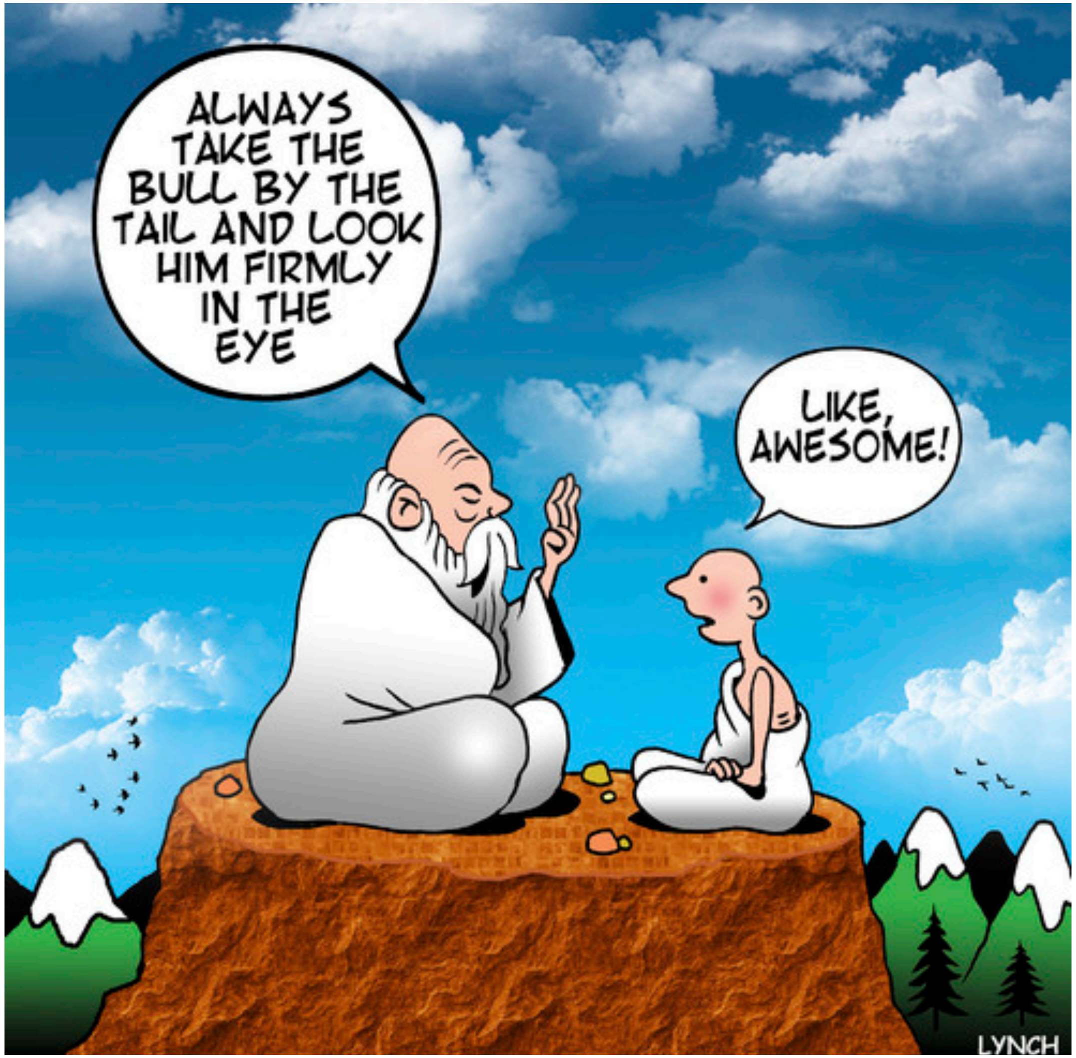
DANGER

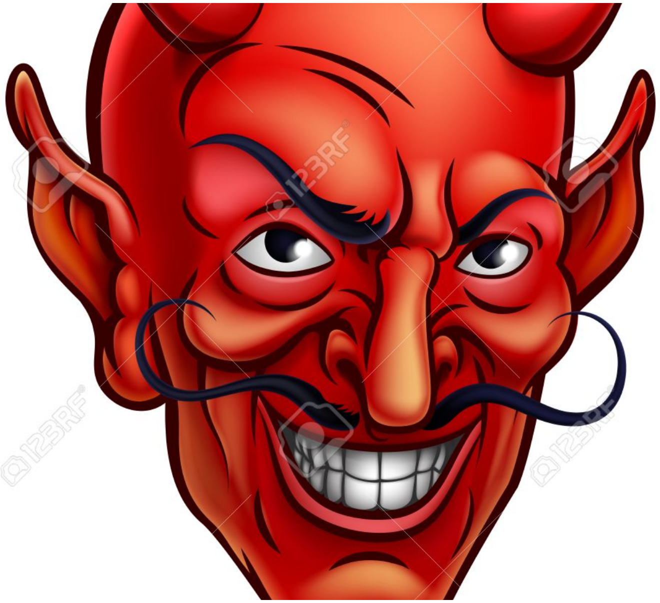
PARTIE IV: LA PRATIQUE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LA PHILOSOPHIE DE BADIOU

LA RÉACTION EN THÉORIE DES ENSEMBLES ET EN MATHÉMATIQUES

- Classe 1: La réaction est moins intense qu'on ne l'espère ou ne l'entend. Pourquoi? Sans se mentir, la plupart ne lisent pas la philosophie. Pas tout le monde n'a les capacités de Badiou de se promener entre des domaines différents ou même l'envie.
- Classe 2: Les réactions vicieuses: on accuse Badiou de ne rien comprendre aux mathématiques (absolument pas vrai) et d'avoir un penchant pour une sorte de mathématiques (comme tout le monde). Dans cette classe il y a des gens très corrects qui ne disent pas ce qu'ils veulent dire : ils n'aiment pas que les mathématiques soient utilisées en politique. Nous faisons les mathématiques pour ne pas devoir faire la politique.
- Classe 3: Les réactions calculatrices : est-ce qu'il me convient que les autres pensent que mon domaine est proche de la philosophie ?
- Classe 4: Nous, le reste. Je donnerai mon avis personnel, maintenant ….

UNE CONCLUSION PERSONNELLE



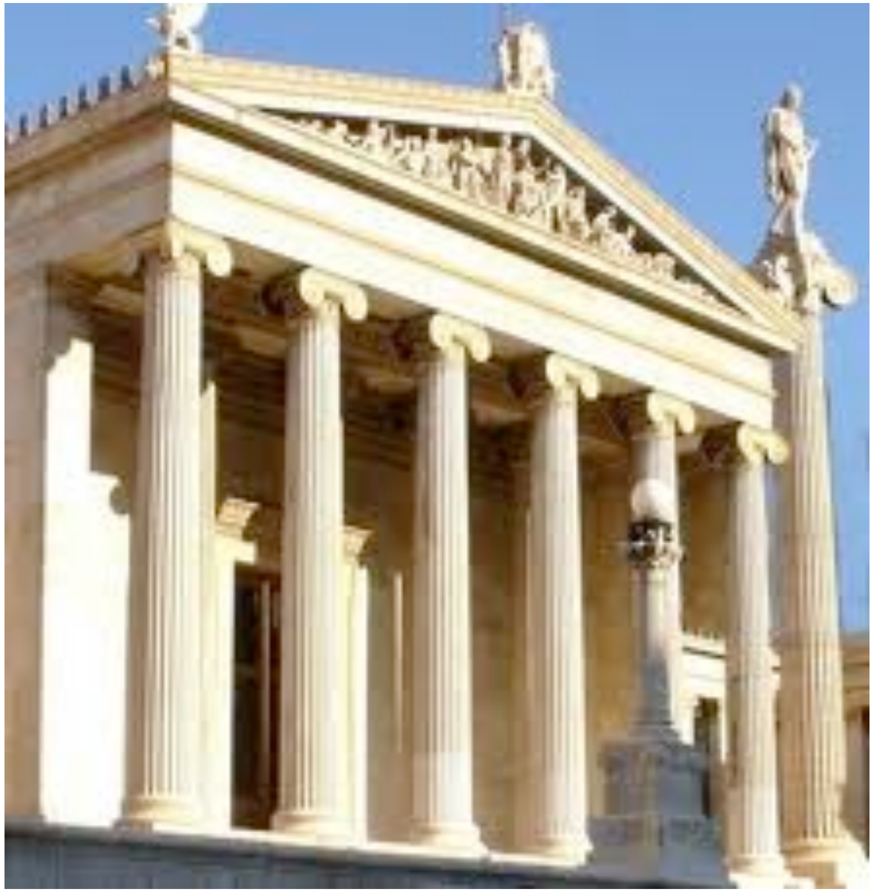


Les deux réactions typiques à Alain Badiou

MD sur Alain Badiou

- Alain Badiou est un très grand philosophe de l'infini.
- Il a compris l'essence du multivers mieux que beaucoup de mathématiciens, dont les logiciens
- Il a fait de la théorie des ensembles son ontologie, en résultant une théorie magnifique
- Il sous-estime le fini
- Il ne garde pas assez l'Idée contre l'idéologie
- Il se laisse emporter par son amour d'engagement politique pour appliquer la théorie là où les données sont plus complexes et moins belles que nécessaires pour appliquer l'Idée

NI GURU NI DIABLE, MAIS UN GRAND HOMME DE PENSÉE



L'Académie de Platon