IRCAM, 29/04/2017

Rhésus, expérience hétérophonique

Deuxième partie

(*Du côté de chez la mathématique*)

Nicolas Neveu

[d1] Je commence par exprimer publiquement une reconnaissance de dettes, silencieuse [d2] [d3] Je vais tenter une gageure : *expliquer* en 45 minutes ce que, dans *Rhésus*, je *raconte* en 45 minutes – avec force ellipses, soutenu ou contrarié par trois camarades.

1/ Percept, affect, concept

[d4] Dans *Rhésus*, la question commune qui nous travaille (tout autant que nous la travaillons), c'est la question de la continuité.

[d5] Je vais commencer par un énoncé très autoritaire : **la continuité, ça nous concerne tous !** (fût-ce sous le mode d'une rupture de... continuité). La continuité est une question philosophique et même, simplement mais décisivement, *quotidienne* (c'est par exemple la question du contact à soi). Je ne vais pas refaire ici, même de façon hyper condensée, l'histoire riche et complexe d'une question qui a traversé de façon permanente l'histoire des idées, d'Aristote à René Thom en passant par Leibniz, Henri Poincaré, Hermann Weyl, Cavaillès, Lautman, et bien d'autres...

Commençons au plus banal. [d6] Ce qui s'oppose au continu, c'est le discontinu, la césure, la rupture. En terme mathématique : le *discret*. (Je ne ferai pas ici la distinction entre discret et discontinu...) Qu'est-ce qui est premier, le discret ou le continu ? (Lieu d'une polémique qui a jalonné toute l'histoire de la philosophie...) Je répondrai au plus court : **il y a *toujours déjà* la dualité discret/continu** – il suffit de contempler le ciel étoilé... Donc : ne pas choisir, prendre les deux à la fois. Ce que l'on pourrait soutenir d'un slogan : « ni Bergson ni Bachelard, *et* les deux à la fois ! »

[d7] Remarquez que cette dualité discret/continu a à voir (bien que ce ne soit pas exactement la même chose) avec la dualité fini/infini. L'infini comme extension du fini, ou

le fini comme restriction de l'infini ? Le continu comme enrichissement progressif du discret (Gilles Châtelet dirait : « une purée du discret »!) ou le discret comme suite de démarcations dans un continu ? On est toujours pris dans cette alternative, sans avoir à décider une fois pour toutes : pulsation...

Je vous fais néanmoins une confession. Si l'on me mettait un fusil sur la tempe et que l'on me demandait de choisir malgré tout, je suivrais plutôt une ligne de pensée (Leibniz, Poincaré, Thom...) qui donne une certaine primauté (voire une primauté certaine) au continu. [d8] Poincaré parle de « continu amorphe », Weyl parle de « continu intuitif ». Le statut de ce continu primordial, *prédonné*, est délicat à clairement identifier : il n'est ni substantiel (donc pas en position de matière à informer), ni une forme *a priori* de la sensibilité, il n'est pas un étant mais plutôt un réservoir pour tout étant. Il présente toujours une forte propriété d'homogénéité et d'*indéfinie divisibilité*. René Thom dira : « *le vrai continu à l'état pur n'a pas de points* ». Et il s'empresse d'ajouter : « *quand on a cette vision du continu, on est obligé de renoncer à le démontrer. Dans la mesure où l'on exprime quelque chose, on abandonne de toute évidence cette vision pure*. »

On dira alors : il y a indubitablement *l'intuition de la continuité*. Et, en reprenant une terminologie deleuzo-guattarienne :

- la continuité est un percept : il y a la continuité *perçue* de l'espace, la continuité du temps, la continuité psychique, physique, la continuité vécue (et, qui sait ?, il y aurait peut-être une notion de continuité politique, qui pour le coup n'est pas donnée mais serait à construire *en effet* (en effectuation) pour échapper à la triste contemplation de l'émergence *ici* d'un événement politique 'intéressant', qui s'éteint, puis de l'émergence *là* d'un autre événement, qui s'éteint à son tour, etc. Je m'empresse de refermer cette piste).
- la continuité est un affect (j'ajouterai : dans l'entendement). Pour faire entendre ceci, je dirai quelque chose comme suit. On fait beaucoup de choses en vertu de capacités insues (i.e qui doivent demeurer insues au moment où on les fait) : faire du vélo, toute une gestuelle élémentaire en maths (Guitart l'a admirablement montré dans *La pulsation mathématique*), respirer, et j'ajouterai (plus généralement) : « continuer » . **« Continuité » nommerait alors cet insu-là**. Ou mieux : on ne peut « continuer » qu'à éprouver, de façon essentiellement insue, la « continuité ». (Ceci à titre d'hypothèse structurante – au moins pour moi.)
- enfin, la continuité est un concept (c'est sans le moindre doute un concept *mathématique*).

Précision méthodologique. Dans *Rhésus*, il s'est agi pour moi d'aller chercher, au sein des maths, ce que celles-ci peuvent nous dire du « continu intuitif », ou de l'intuition de la continuité, sans pour autant complètement s'affranchir de ce qu'elles ont depuis des lustres thématisé sous « continuité » : typiquement, en termes de variations des fonctions (continues) d'un substrat dans un autre. Ce dont je vais parler dès maintenant, sans me faire scrupule de tordre le cou à l'histoire.

2/ Vers les monstres

Quel est donc le lien entre le concept et l'affect-percept ? C'est-à-dire : quel est le concept censé correspondre à, ou rendre compte de l'affect-percept de la continuité ? Ou encore : comment appréhender, saisir en pensée, *construire* cet état de multiplicité étrange qu'est le continu ? [d9] Question de continuum, de continuum *numérique*, à élaborer en adéquation avec la perception que l'on a du continuum géométrique. Ou si l'on veut : adéquation discret/continu, quantité/espace.

Remarquons d'emblée un hiatus, ou une inadéquation principielle. Si « le continu à l'état pur n'a pas de points », est indéfiniment divisible, sa saisie mathématique est prise dans les rets de la théorie des ensembles, c'est-à-dire d'une conception radicalement *atomistique* : [d10] un ensemble est constitué d'éléments, de points, par nature indivisibles... Soit donc une construction se laissant appréhender comme la saturation d'un squelette discret par un substrat continu (la donation première, sans laquelle on ne peut rien faire, et surtout pas de mathématiques, est bien celle des entiers naturels, donation discrète par excellence).

[d11] Il y a eu, en 1872, une sorte de réponse triomphale, qui demeure (malgré les diverses conceptions concurrentes : continu de Brouwer, continu de Harthong-Reeb lié à l'analyse non- standard, continu de Conway et ses nombres surréels) l'identification officielle, le modèle, le paradigme du continu dans la mathématique contemporaine : c'est la construction de l'ensemble **R** des nombres réels par Cantor et Dedekind. (Je passe sous silence les distinctions de « complexité » entre nombres : rationnel/irrationnel, algébrique/ transcendant, etc.)

[d12] Très vite, on a la droite réelle, la droite graduée, à atteindre. Et les rationnels, les rapports d'entiers, donation première, qui sont partout sur cette droite mais de façon fantomatique. Le coup de génie de Dedekind, c'est de dire qu'un réel n'est rien d'autre que

l'ensemble des rationnels qui lui sont inférieurs. Ça a l'air d'un vilain tour de passe-passe, ça ressemble à un serpent qui se mord la queue, mais il n'en est rien. Un nombre réel, c'est une *coupure* au sein des rationnels (ou, de façon équivalente, une classe d'équivalence de suites de Cauchy pour la relation d'équivalence idoine). On bouche les trous, et (on prouve que) les opérations algébriques standards sur les rationnels s'étendent aux nombres réels : dans un vocabulaire cher à François, il s'agit d'un procédé d'adjonction-extension. Ceci fait, on peut bien oublier cette construction abstraite et formellement rigoureuse, et revenir à l'intuition première que l'on a d'un nombre réel, par exemple en terme de développement décimal illimité. Insistons quand même : ici, « boucher les trous », c'est faire une opération de *complétion* ou de *passage à la limite* (inhérent à l'idée même de continuité).

Dès lors, on peut construire un calcul plus fin que le calcul algébrique standard sur des quantités fixes (en vérité : légitimer des considérations bien plus anciennes). Le courbe, déformation de morceau de droite, s'identifie à des variations de quantités. Il faut alors bien dire, et voir, ce qu'est une variation continue. Et mieux : [d13] distinguer différents niveaux de régularité – discontinu, continu, et mieux que continu : lisse (en terme mathématique : dérivable).

Visuellement, ça donne ceci. [d14] Ici, c'est continu et c'est même lisse, on peut tracer mentalement de jolis tangentes partout sur la courbe. [d15] Ici, c'est lisse partout, sauf à l'endroit du pic où l'on serait bien en peine de trouver une candidate décente pour être tangente – mais ça demeure continu en le pic. Et enfin, [d16] ici, on a bien une rupture de continuité manifeste.

Formellement, la continuité (d'une fonction d'une variable réelle) s'exprime ainsi [d17] dans la logique du premier ordre. Remarquez qu'ici, la continuité est une propriété *locale*. Mais on peut explorer ce domaine de régularité supérieure qu'est le domaine lisse, et développer le calcul infinitésimal [d18] à la Newton-Leibniz, le calcul différentiel et intégral, où se joue une autre dualité profonde, la dualité local/global. Il faut insister sur le fait que ce calcul infinitésimal a été, et demeure encore probablement aujourd'hui, le paradigme de toute physique mathématique. Ce qui peut nous permettre de comprendre pourquoi cette lignée de penseurs que j'évoquais, Leibniz, Poincaré, Thom, Gilles Châtelet, pour qui mathématique rimait avec *Naturphilosophie*, ont donné une préséance non seulement au continu, mais au (domaine du) lisse.

Oui mais voilà, c'est le moment tératologique de cet exposé : la galerie de monstres, [d19] parfaitement non exhaustive. Pendant longtemps, les mathématiciens ont cru que « continu », c'était la même chose que « lisse » – sauf éventuellement en des points isolés. Eh bien, c'est tout à fait faux ! En 1872, Karl Weierstrass exhibe une fonction dont voici un spécimen. [d20] Elle se présente comme sommation infinie de fonctions de type cosinus, tout ce qu'il y a de plus lisse, c'est-à-dire comme superposition de fonctions oscillantes de fréquence de plus en plus petite. Le résultat qu'on obtient, c'est une fonction qui est partout continue [c'est facile à montrer, modulo l'appareillage technique nécessaire], et qui n'est dérivable nulle part. Moralement : en chaque point de la courbe, vous avez un pic ! C'est monstrueux – à tout le moins ça défie l'entendement.

Autre exemple : la courbe de Peano. [d21] Il s'agit d'une fonction continue définie sur l'intervalle [0,1] à valeurs dans le carré, et qui remplit tout le carré, sans le moindre oubli. Ça, c'est un peu troublant, eu égard à l'idée que l'on se fait de la notion de dimension. Si un segment peut se déformer continûment en un morceau de plan, comment distinguer l'unidimensionnel du bidimensionnel ? Fort heureusement, le théorème d'invariance du domaine, dû à Brouwer, rétablit l'intuition première : [d22] un continu à n dimensions est homéomorphe à un continu à p dimensions si et seulement si $n=p$. « Homéomorphe » veut dire : transformable de façon biunivoque et bicontinue (continue dans un sens et dans l'autre, ce qui n'est pas automatique). Et c'est bien ça qui permet de mettre le trouble provoqué par la courbe de Peano au vestiaire : cette fonction n'est pas biunivoque et, même si elle l'était, elle présente infinitésimalement de telles propriétés de rugosité qu'elle interdirait à sa réciproque d'être continue.

Dernier exemple. [d23] On se place dans le plan des nombres complexes et on considère la transformation « élévation au carré », qui est continue et même lisse et même encore mieux que ça : elle est holomorphe, ce qui constitue pour les mathématiciens le Graal de la régularité. On construit à partir de cette transformation une dynamique *discrète* : on part d'un point quelconque et on lui applique successivement et indéfiniment cette transformation. On obtient un nuage de points, qu'on appelle l'orbite du point de départ. De deux choses l'une, ou bien cette orbite part à l'infini, ou bien elle demeure bornée dans le plan. Question : quel est l'ensemble des points de départ dont l'orbite est bornée ? (Je ne réponds à la question de savoir pourquoi c'est une bonne question...) C'est ce qu'on appelle l'*ensemble de Julia* associé à la transformation. Ici, la réponse est simple et c'est un exercice facile : c'est le disque unité plein.

Compliquons un peu la situation. [d24] Au lieu de se contenter d'élever au carré, on élève au carré et on ajoute une petite perturbation *c*, qui est un nombre complexe représentable dans le plan. On applique la même démarche : un point de départ, son orbite (bornée ou pas), l'ensemble de Julia associé à cette transformation. Quelle est la forme de l'ensemble de Julia ? La réponse est beaucoup plus compliquée et dépend bien entendu de la valeur de la perturbation *c*.

Voici quelques spécimens d'ensembles de Julia. [d25] On retrouve le disque unité, mais on voit apparaître des formes très étranges, des formes fractales, infiniment rugueuses. Et on peut faire un distinguo : sur les 4 exemples du haut, les ensembles de Julia sont connexes (d'un seul tenant), alors qu'ils ne le sont plus sur les 3 exemples du bas (en vérité, ils sont même totalement discontinus, ils ont éclaté en poussière).

Question dès lors légitime : [d26] quel est l'ensemble des perturbations *c* pour lesquelles l'ensemble de Julia associé demeure connexe ? C'est l'*ensemble de Mandelbrot*. Alors là, on va faire un peu de cinéma... Roulement de tambour... [En avant la musique!] [d27] Voici l'ensemble de Mandelbrot : un disque tangent à une cardioïde pleine, et tout autour des excroissances, des verrues qui se reproduisent à l'infini. [d28] Ici, on voit l'ensemble de Mandelbrot dans le plan, où l'on a associé à quelques points du plan l'ensemble de Julia correspondant. On voit bien que si l'on est *dans* Mandelbrot, Julia est connexe, et si l'on est *hors* de Mandelbrot, Julia éclate en poussières... Je vous laisse maintenant éprouver pendant une vingtaine de secondes une plongée dans l'ensemble de Mandelbrot. [d29]

Il faut bien avoir en tête que ces exemples pathogènes, on peut les multiplier à l'infini : flocon de Von Koch, escalier du diable, objets fractals, attracteurs étranges, systèmes chaotiques, etc. On peut alors résumer le chemin jusqu'ici parcouru par le diagramme suivant, [d30] encore incomplet.

3/ **Fusion/distinction**

Parvenu à ce point, il faut nous y résoudre : on doit congédier l'idée somme toute naïve selon laquelle la continuité nous offrirait un monde, sinon parfaitement lisse et régulier, du moins « sobre ». Dit plus prosaïquement, la continuité nous a fait des enfants monstrueux dans le dos. Il faudrait en conclure que le non-lisse est constitutif du lisse. Ou, pour faire image : sous toute caresse s'agite une rugosité outrageante. Eh bien, je considère que c'est une conclusion beaucoup trop déprimante – et ceci, moins par décision ontologique que, disons, par choix esthétique. Ce qui veut dire, si l'on reprend les choses en amont, que le problème de la continuité ne se réduit pas à celui de l'élaboration et de la construction d'un continuum, et du dépli des conséquences de cette construction – ce qui ne donnerait à voir la continuité que comme pur change au sein d'une multiplicité.

Je m'empare alors d'une mention de Guitart dans « Caractère global et caractère local de la vérité » : **la question – philosophique – de la continuité est celle de la tension entre *fusion* et *distinction*.** [d31] Fusion, identification, mêmeté ; distinction, changement, hiérarchie. Cette idée, on la trouve déjà très distinctement chez Hermann Weyl, dans une langue certes plus aride !, mais aussi chez Aristote pour qui le mouvement, le temps, pensés comme continus, sont caractérisés en termes de *synthesis* et *diairesis* tout à la fois, composition et division, c'est-à-dire mettre-ensemble et séparer tout à la fois (Aristote, *Physique*, IV, 220 a 5).

Mais cette tension, on peut la voir déjà à l'œuvre sur un fait élémentaire : [d32] l'égalité bien connue 0,999... = 1 identifie bien deux codes distincts. Et il faut bien comprendre que cette égalité, qui n'est pas valable pour tous les nombres mais seulement pour les plus simples d'entre eux, les nombres décimaux, qui admettent une écriture décimale finie (et, donc, une autre infinie), cette fusion de deux codes distincts est constitutive de la continuité de la droite réelle (dans le modèle de Cantor-Dedekind). Sans cela, un nombre se réduirait à un simple code et, comme tels, les codes forment une collection totalement discontinue. (On peut risquer une hypothèse : ici, l'organisation de la pensée se constitue d'une impureté d'écriture.)

Nous voici donc à l'orée d'un nouveau chemin... [d33] Question : comment prendre en charge mathématiquement la fusion, l'effet de mêmeté ? Comment prendre en charge mathématiquement l'effet de distinction, le changement ? Et comment mettre ça ensemble, en tension ?

Concernant la fusion, l'effet de mêmeté, la mathématique a donné une réponse, sinon unique ou univoque, du moins privilégiée : c'est la théorie des groupes, et des *actions de groupes*, dont je vais expliquer quelques ressorts dans un instant. Quant à la distinction, au changement, c'est au sein d'un espace que ça « travaille », c'est encore la question de la spatialité, soit la *topologie* (et, dans le modèle que je vais finir par exposer, je demeurerai encore largement tributaire du calcul infinitésimal ci-avant évoqué).

4/ Fusion : action de groupes

Un groupe, c'est quoi ? [d34] Un groupe, c'est une structure algébrique. C'est un ensemble, sur lequel on a défini une opération interne. Cette opération agit sur deux éléments pour produire un troisième élément : 2+3=5... On demande que cette opération soit associative, qu'elle possède un élément neutre, et que tout élément admette un symétrique (un inverse par rapport au neutre vis-à-vis de l'opération). Pour aller au plus court, *la structure de groupe est l'expression algébrique de l'idée géométrique de symétrie*.

Quelques exemples. L'ensemble des entiers positifs ou négatifs est un groupe pour l'addition : le neutre, c'est 0, le symétrique de 2, c'est –2. Idem pour les réels non nuls et la multiplication : le neutre, c'est 1, le symétrique de 2 c'est ½. On a aussi des groupes finis, par exemple $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, le groupe des restes de la division euclidienne par n. Par exemple, dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, on ne compte plus 0,1,2,3,4,5,6 etc. mais comme ceci : 0,1,2,0,1,2,0,1,2, etc. Ceci n'est pas une abstraction. On ne cesse quotidiennement de compter modulo 12, ou modulo 24, dans la mesure où notre vie est essentiellement et excessivement réglée par le temps capitaliste des horloges...

On a aussi des exemples de groupes non commutatifs, au premier chef le groupe des permutations d'un ensemble X : le neutre, c'est la permutation identité (qui ne permute rien), enchaîner deux permutations, c'est bien faire une permutation, et toute permutation admet une permutation qui permet de revenir à la configuration initiale. Ce groupe n'est pas commutatif dès que l'ensemble X possède plus de 3 éléments (c'est-à-dire qu'il importe de tenir compte de l'ordre dans lequel on effectue les permutations). Autres exemples : le groupe linéaire, le groupe des isométries du cube (qui possède 48 éléments), et beaucoup d'autres.

Ce qu'il faut comprendre, et c'est même historiquement comme cela que c'est apparu, c'est qu'un groupe ne devient intéressant qu'à partir du moment où il *agit* sur un certain ensemble (et je dirai désormais : sur un *espace*). Autrement dit, le groupe *s'incarne* comme groupes de transformations (bijectives) d'un espace.

Formellement, cela donne ceci. [d35] Une *action de groupe* d'un groupe G sur un espace X, c'est une correspondance qui, à tout élément g du groupe et à tout point x de l'espace, associe un nouveau point de l'espace, gx, le transformé de x sous l'action de l'élément g. Bien entendu, G n'est pas n'importe quoi, donc cette correspondance doit se souvenir de la structure de groupe. En clair : le neutre fixe tout point de l'espace (i.e le neutre s'incarne comme la transformation identité de l'espace), et la composition de deux transformations successives est compatible avec l'opération de groupe (voir le petit schéma). On voit bien alors qu'un élément du groupe s'incarne comme transformation bijective de l'espace X (d'où la définition équivalente, plus ramassée, que je ne commente pas).

On peut maintenant raccrocher à l'idée de fusion. [d36] Etant donné un point *x* de l'espace, on peut considérer son *orbite* sous l'action du groupe, c'est-à-dire l'ensemble, le nuage des points de l'espace constitué de tous les transformés de *x* (sous l'action de tous les éléments du groupe). Il est facile, et même trivial, de voir que, dans l'espace X, la relation « être dans la même orbite » est une relation d'équivalence. Conséquence immédiate : l'espace X se partitionne en orbites, se présente comme réunion disjointe de ses orbites. Deux points d'une même orbite deviennent en quelque sorte indiscernables, en vertu de l'action d'un groupe qui les échange – *et c'est bien là que surgit l'effet de fusion, ou de mêmeté*.

Exemples. Prenez le plan, où l'on a spécifié une origine, et faisons agir sur ce plan le groupe des rotations centrées en cette origine (c'est bien un groupe). Il est facile de voir que l'orbite d'un point est le *cercle* centre en l'origine et passant par ce point. Autre exemple : la même situation, mais on remplace le groupe des rotations par le groupe des homothéties, ou dilatations-contractions (c'est encore bien un groupe). Il est tout aussi facile de voir que l'orbite d'un point est ici la droite joignant l'origine à ce point.

La partition du plan donne donc ceci, [d37] selon les cas. Dans le premier (groupe des rotations), le plan se laisse voir comme réunion de cercles de plus en plus grands ; dans le second (groupe des homothéties), il se laisse voir comme faisceau de droites concourantes en un même point. Vous m'accorderez sans peine que si l'on a l'une ou l'autre de ces visions, et mieux encore les deux en même temps, c'est un peu plus structuré, et structurant, que de dire simplement : le plan est une collection de points... Effet structurant de l'effet de fusion.

(J'avais un troisième exemple, [d38] qui fait écho à une belle et énigmatique phrase de Benoît Casas, mais comme dit Jacob Taubes, « le temps presse ».)

5/ <u>Distinction : topologie d'un espace</u>

Passons à l'effet de distinction, de changement – au sein d'un espace. Question de spatialité, [d39] c'est-à-dire de topologie : élaboration d'un discours sur la question des lieux.

Je ne commente pas la définition de ce qu'est un espace topologique, et je vous laisse seulement contempler quelques mots-phares de la topologie, où vous constatez que ces mots, tous issus du langage quotidien, ont un rapport étroit avec la spatialité.

Bien entendu, la question de savoir si deux espaces sont homéomorphes, c'est-à-dire topologiquement équivalents, est une question essentielle – et en général très difficile. A titre d'exemple, [d40] voici comment l'on voit, et l'on dit, qu'une droite, ce n'est pas la même chose qu'un cercle. Vous voyez que c'est simple. (En revanche, si l'on « voit » bien qu'une sphère, ce n'est pas la même chose qu'un tore (une bouée), c'est beaucoup plus difficile à dire...)

Ici, je vais considérer plus spécifiquement un certain type d'espace topologique, qu'on appelle **variété** (lisse). Une variété, c'est un espace qui, localement, ressemble à (un morceau d')espace euclidien (uni- ou bi- ou n-dimensionnel). C'est un recollement de morceaux qui sont tous homéomorphes à un (morceau d')espace euclidien, la procédure de recollement devant être contrôlée. Je vous passe les détails techniques, mais l'idée sous-jacente est simple. Une variété « se lit » localement à travers des *cartes*, qui nous envoie dans un espace euclidien, la collection de toutes les cartes s'appelle un *atlas*, et la condition de compatibilité entre différentes cartes exprime ce qui se passe lorsqu'on consulte un atlas (géographique) : la forme de la Bretagne doit être la même dans une carte de France et une carte d'Europe.

Exemples de variétés : une courbe (lisse), un cercle, une sphère, un tore, un bretzel, etc. Avec une petite condition supplémentaire, on va même pouvoir importer au sein d'une variété, et entre les variétés (bref, dans la catégorie des variétés) le bon vieux calcul infinitésimal qu'on sait parfaitement faire dans les espaces euclidiens. Ceci, donc, à travers la lecture dans les cartes locales. Calcul infinitésimal qui, je le rappelle, nous a permis de bien exprimer ce qu'on a thématisé sous le chef de la variation, du changement.

Enfin, une situation [d41] qui va permettre de dégager un vocabulaire utile pour la suite. On considère un espace, une variété X qui se projette sur une autre variété B (projection continue, lisse). Dire « projection » sous-entend que tous les points de l'espace cible B sont atteints. On peut donc considérer, pour chaque point de B, sa contre-image dans X, la partie de X qui se projette exactement sur ce point : c'est ce qu'on appelle la fibre au-dessus du point. Exemple 1. Un plan se projette sur une droite : la fibre au-dessus d'un point de la droite est une droite. Exemple 2 : une spirale se projette sur un cercle : la fibre au-dessus de chaque point du cercle est une collection discrète de points (c'est ce qu'on appelle un revêtement du cercle). Exemple 3 : une surface en forme de pantalon se projette sur une droite, via une fonction « hauteur » (d'où la représentation horizontale). Les fibres sont alors, selon la hauteur, un cercle ou deux cercles disjoints ou, au seul niveau de l'entrejambe, une forme en « huit » (c'est ce qu'on appelle une singularité).

6/ Montage : espace fibré

On dispose maintenant de tous les ingrédients pour effectuer cette « opération de montage » tant désirée : mettre en tension fusion et distinction, c'est-à-dire ici mettre en tension un groupe G et une variété B, appelée *espace de base*. [d42] Le lieu de cette mise en tension, c'est encore une variété, un espace plus vaste que B, que j'appelle X. X est lié au groupe G : le groupe agit sur X (j'ai expliqué ça tout à l'heure). X est lié à l'espace de base B : il se projette sur B (je viens de l'expliquer). Précisons : dans X, le souvenir de l'action se lit dans les orbites, et dans leur structuration ; et le souvenir de la projection se lit dans les fibres, et dans leur structuration.

Mais on veut du lien entre fusion et distinction, entre groupe (qui agit) et espace (comme lieu d'une projection), entre action et projection, c'est-à-dire, dans X, entre orbites et fibres. On va donc demander que les orbites soient confinées dans les fibres, qu'une orbite circule à l'intérieur d'une même fibre : c'est le sens de la formule. Lorsqu'on dispose d'un tel montage, on dit que X a une structure d'*espace fibré*.

Précisons encore un peu. La fibre au-dessus d'un point *b* de la base peut se voir comme « espace intérieur » de ce point, son « monde intérieur ». Un point n'est donc pas ici une être inerte, il est d'emblée puissance d'engendrement de la distinction. Et dans ce monde intérieur, dans chaque fibre, le groupe agit, indiscerne, opère des effets de fusion.

Pour éviter de se noyer dans une trop grande complexité, [d43] on va demander que toutes les fibres soient homéomorphes à une même fibre-type, disons une variété F. Autrement dit, on greffe à chaque point de la base une « copie » de la fibre-type F. X est donc une collection de copies de F paramétrées par B. Tous les points de la base B ont le « même » espace intérieur – le « même », en tant qu'isomorphe mais distinct.

Donnons tout de suite deux exemples. [d44] On considère le cylindre, qu'on projette sur son cercle de base. Les fibres de cette projection sont des droites, sur lesquelles on fait agir, par exemple, le groupe des translations. Le cylindre est un espace fibré en droites. On considère maintenant le tore, qu'on projette sur son grand cercle intérieur. Les fibres sont de petits cercles, sur lesquels on fait agir, par exemple, le groupe des rotations. Le tore est un espace fibré en cercles. Le problème, ou le côté un peu frustrant, c'est que dans ces deux cas, l'action et la projection sont séparées, la manière de fusionner et la manière de distinguer sont descellées. Le lien, c'est l'absence de lien, et c'est donc un peu faible.

Regardons cette situation banale de façon un peu plus générale. [d45] Vous avez un espace de base B, un groupe G, vous prenez comme fibre-type F=G, et vous posez X=GxB, le produit cartésien de G et de B, c'est-à-dire l'ensemble des couples constitués d'un élément de G et d'un point de B. Vous faites agir G sur X en vous restreignant à la première composante et en utilisant l'opération interne au groupe G. Vous projetez naturellement X sur B, sur la deuxième composante. Vous obtenez ainsi un espace fibré, mais qui est une platitude puisqu'il ne crée aucune tension, aucun rapport entre l'action et la projection. C'est ce qu'on appelle un *espace fibré trivial*. Un espace fibré trivial, c'est un produit cartésien, c'est-à-dire un espace qui se laisse complètement épuiser par le quadrillage cartésien.

De ce point de vue, on comprend que la notion d'espace fibré est une généralisation de la notion de produit cartésien. On va demander qu'un espace fibré soit *localement* trivial, c'est-à-dire localement assimilable à un produit cartésien (d'un morceau de l'espace de base par la fibre-type, le groupe agissant toujours sur chaque fibre). Mais localement seulement : s'il l'est globalement, c'est qu'il est trivial. Cette condition de trivialité (ou de *synthèse*) locale, c'est précisément ce qu'on doit imposer pour se donner suffisamment d'homogénéité (locale, donc) et échapper à la triste alternative entre trivialité complète et infinie complexité. Trivialité complète : X se soumet au joug du quadrillage cartésien. Infinie complexité : chaque fibre est entourée d'autres fibres, certes indistinctes d'elle en tant que copie abstraite, mais qui lui sont furieusement hétérogènes.

7/ <u>Möbius</u>

On va pouvoir maintenant se confronter à des espaces globalement plus audacieux : tordus, troués, etc. [d46] C'est-à-dire qu'on va rechercher un espace fibré non trivial, ne serait-ce que pour ne pas avoir fait tout ce chemin pour en rester à des platitudes... On va même chercher, en un certain sens, le « plus petit » possible. Il faut donc examiner les conditions minima qu'on doit imposer au groupe (qui agit) et à l'espace (sur lequel on projette) pour espérer (je dis bien : espérer) obtenir un fibré non-trivial.

Condition sur le groupe ? C'est facile : il doit avoir au moins deux éléments. S'il n'y en a qu'un, c'est le neutre (soit le groupe trivial) qui fixe tout : son action est factice. [d47] Donc, on prend le groupe à 2 éléments, traditionnellement noté $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Ses deux éléments, vous les appelez comme vous voulez : 0/1, vrai/faux, identité/transposition, moi/mon reflet. Faire agir le groupe à 2 éléments sur un espace, c'est introduire un *miroir* au sein de cet espace, et rendre chaque point indiscernable de son reflet à travers le miroir.

Condition sur l'espace ? C'est un peu moins facile [d48] (il faut disposer d'un peu de techniques opératoires dans les espaces fibrés, et d'un peu de théorie de l'homotopie). La condition, c'est que l'espace B doit être *troué*, en terme technique : *non contractile*. C'est-à-dire qu'il ne doit pas être possible de déformer continûment l'espace en un point, sans déchirer sa structure géométrique. Une courbe, une « croix », un plan sont contractiles ; un cercle, une sphère, un tore ne sont pas contractiles. L'idée est la suivante. Si l'espace de base B n'est pas troué, par exemple une boule pleine, on peut la contracter en un point, et cette contraction se répercute au niveau de l'espace total X qui, lui, se contracte en une fibre. Si maintenant on « décontracte », en bas le point se décontracte en une boule, et au-dessus, la fibre va se décontracter en un joli produit cartésien, c'est-à-dire un fibré trivial. Chose qu'on voulait éviter. Donc, on prend le « plus petit » espace troué qu'on peut concevoir : le cercle.

Le but, c'est donc de construire un espace fibré (non trivial) de groupe le groupe à 2 éléments, et d'espace de base le cercle. Avec également une « petite » fibre-type, de dimension 1 : typiquement, une droite, ou un segment de droite. Brisons le suspense, voici de ce que ça donne [d49] : l'anneau ou le ruban ou la *bande* de Möbius, trace dans l'espace d'un segment pivotant dont le milieu décrit un cercle et qui revient à sa position initiale en ayant effectué un demi-tour, le *demi-tour fatidique*.

On a bien sûr diverses représentations de Möbius [d50] : par paramétrage dans l'espace à 3 dimensions, par équation, une représentation complexe. On peut aussi, [d51] et c'est même plus naturel, voir Möbius comme un carré dans lequel on a identifié deux bords opposés après avoir effectué une torsion, représentée par les 2 flèches en sens inverse. On peut aussi s'imaginer une bande infinie, avec une infinité de carrés, et on enroule cette bande (une infinité de fois, et dans les 2 sens) autour de la bande de Möbius – de la même façon, si vous voulez, qu'on enroule une droite autour d'un cercle.

Regardons d'un peu plus près. [d52] Voilà pour la structure fibrée de la bande. Il faut bien sûr préciser qu'il s'agit d'un fibré non trivial, le « plus petit » qu'on puisse construire.

En effet, on vient de fibrer le cercle par des (segments de) droites. Si on le fait trivialement, on obtient le cylindre, et on « voit » bien que Möbius, ce n'est pas la même chose qu'un cylindre. Pour vous en convaincre définitivement, je vous donne un exercice à faire à la maison (que je ne corrigerai pas) : faites un cylindre de papier, et un Möbius de papier, sur lesquels vous avez pris soin de tracer le cercle de base, prenez une paire de ciseau, découpez suivant ce cercle, et observez ce qui se passe... Moralité : Möbius est le plus petit espace fibré non trivial.

Ceci dit, on n'est pas obligé d'être aussi savant pour éprouver ce que cette bande peut avoir de bizarre. D'abord, elle est uniface. Ensuite, et surtout, elle n'est pas orientable : il est impossible de se repérer globalement sur cette bande. (C'est même, en un certain sens, la plus petite surface orientable qui soit.) Placez vous en un point, tracez mentalement un repère, deux vecteurs orientés par exemple vers la droite/vers le haut. Faites le tour de la bande en transportant votre repère, et vous reviendrez à votre point de départ avec une orientation vers la droite/vers le bas.

On peut le voir aussi autrement, en revenant à notre bande infinie qu'on a enroulé une infinité de fois autour de Möbius. On marque un petit disque sur la bande de Möbius, et on déroule la bande pour retrouver la bande infinie. [d53] On voit ceci, qui peut nous aider à éprouver la désorientation : la bande est *agitée* par une pulsion, un inconfort, de ne jamais pouvoir décider si l'on est au-dessus ou en-dessous du cercle médian (et qui, *de facto*, prive de sens la notion de dessus et de dessous).

La bande de Möbius noue une manière de fusionner par symétrie, via l'action du groupe à 2 éléments : miroitement, indiscernabilité par couples – idée d'un *monde-en-miroir*. Et une manière de distinguer, via la projection sur le cercle, par circulation autour d'un manque, d'un défaut, d'une absence – idée d'un *monde troué*. Effet-miroir/effet-de-trouage, *mirage&tournage*, qui, **ici**, provoque l'impossibilité radicale de s'orienter.

8/ <u>Pour conclure</u>

Je rappelle que Lacan disait que le sujet a à voir avec la bande de Möbius, selon l'image suivante : les mouvements sur le cercle, les mouvements conscients, ne seraient que projections de mouvements beaucoup plus retors sur la bande, mouvements de l'inconscient.

Möbius, paradigme *possible* de la continuité en tant que tension entre fusion et distinction, Möbius incarne deux déterminations, ou deux universalités distinctes, un *nouage paradoxal* (monde-en-miroir/monde troué) et une *obstruction* (désorientation), qui néanmoins fusionnent.

C'est le moment de conclure, [d54] ce que je vais faire (presque) silencieusement en vous laissant observer deux diagrammes. Le premier résume ici le chemin parcouru. Le second résume ce par quoi l'on a terminé. [d55] Cette conclusion, c'est plutôt une invitation à prolonger, mais à prolonger non en se focalisant sur l'obstruction de la désorientation – qui n'est pas une impasse, mode le plus terrible de l'obstruction, mais qui n'en est qu'un mode. Il s'agit plutôt de *se* relever, c'est-à-dire de relever l'obstruction en son paradoxe fondateur, et de repartir de ce paradoxe, de le déplier, de le compliquer, de le démanger.

Et puisqu'il faut bien conclure malgré tout, je le ferai avec les mots de René Thom :

« *Il y a une certaine opposition entre géométrie et algèbre. Le matériau fondamental de la géométrie, de la topologie, c'est le continu géométrique ; étendue pure, instructurée, c'est une notion « mystique » par excellence. L'algèbre, au contraire, témoigne d'une attitude opératoire fondamentalement « diaïrétique ». Les topologues sont les enfants de la nuit. Les algébristes, eux, manient le couteau de la rigueur dans une parfaite clarté*. »

Il s'agit bien de cela : manier le couteau de la rigueur dans la clarté, tout en demeurant des enfants de la nuit.