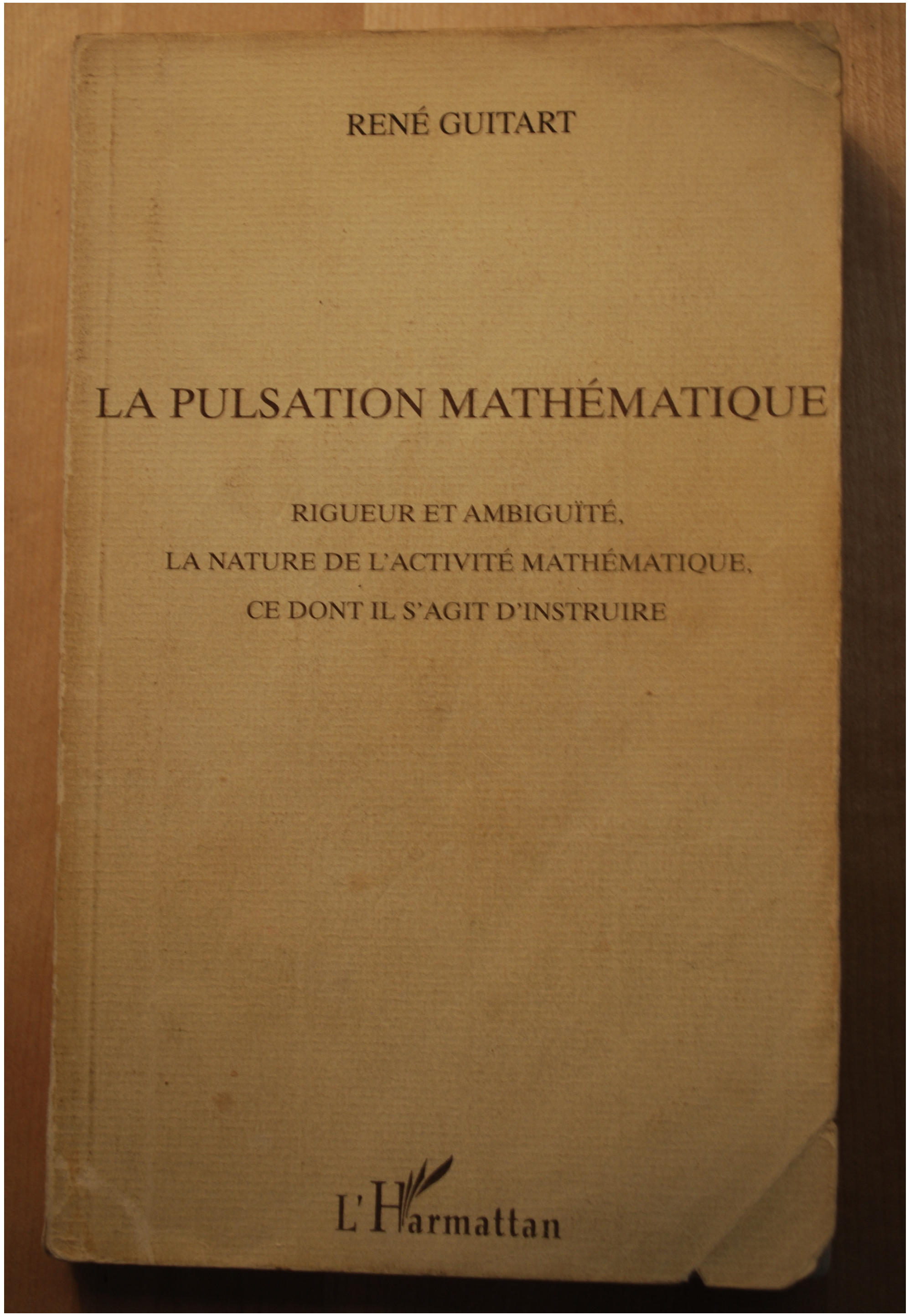
IRCAM, 29 avril 2017

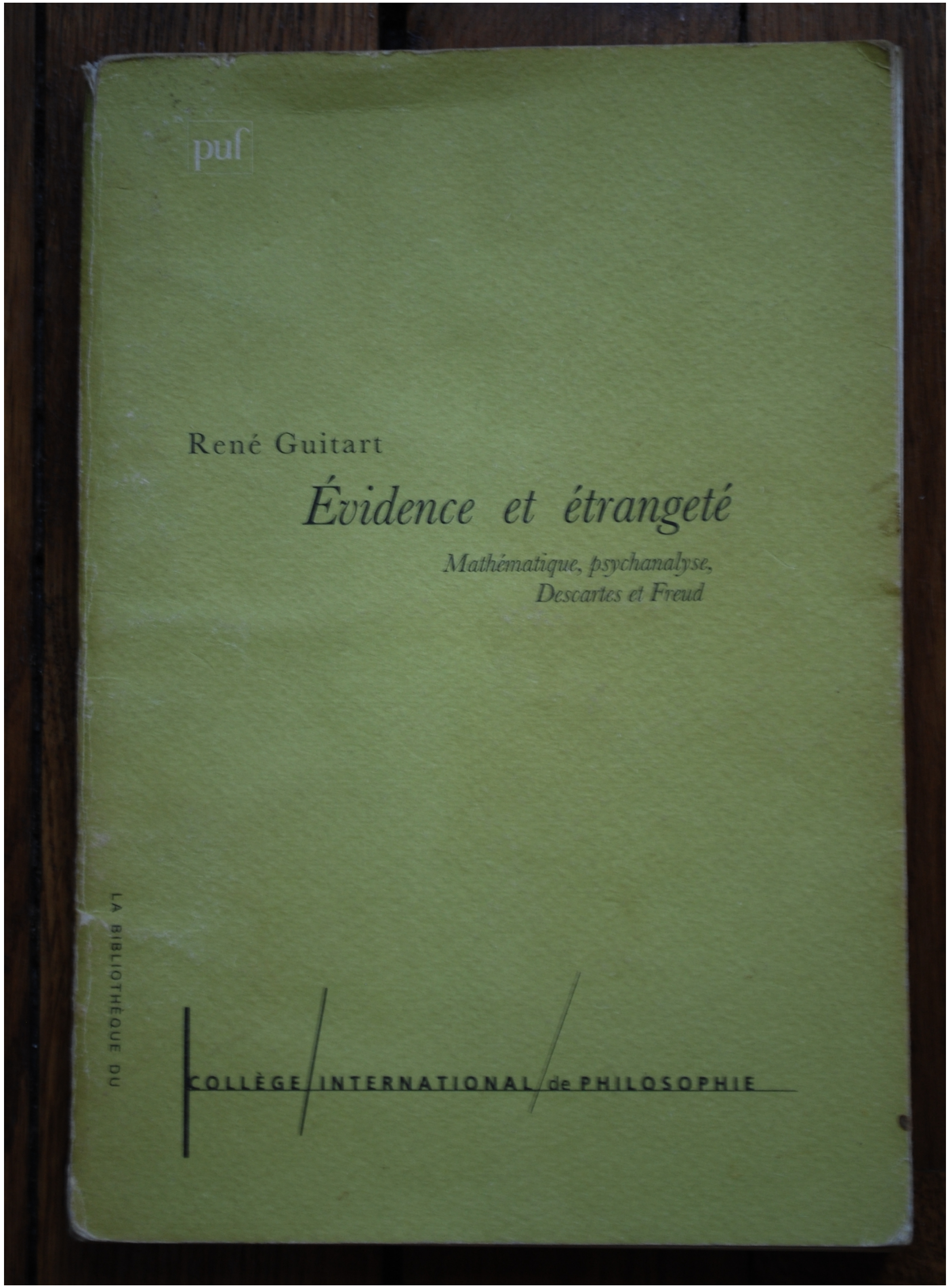
Rhésus, expérience hétérophonique

Deuxième partie

(*Du côté de chez la mathématique*)

Nicolas Neveu


RENÉ GUITART
LA PULSATION MATHÉMATIQUE
RIGUEUR ET AMBIGUÏTÉ,
LA NATURE DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE,
CE DONT IL S'AGIT D'INSTRUIRE
L'Harmattan


puf
René Guitart
Évidence et étrangeté
Mathématique, psychanalyse,
Descartes et Freud
LA BIBLIOTHÈQUE DU
COLLÈGE INTERNATIONAL de PHILOSOPHIE

+ « Caractère global et caractère local de la vérité »

+ « La courbure de la raison »

(http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr)

« *Comprendre est attraper le geste,
et pouvoir continuer.* »
(Jean Cavaillès)

« Il y a certes deux labyrinthes de l'esprit humain : l'un concerne la composition du continu, le second la nature de la liberté ; et ils prennent leur source à ce même infini. »

(Leibniz, *De libertate*)

« Le problème du continu demeure comme au temps de Leibniz, une « croix » ou la croix de la philosophie mathématique. »

(Jean Cavaillès, *Transfini et continu*)

CONTINUITÉ – CONTINUUM – CONTINU – CONTINUER

(SE) CONTINUER

essence arithmétique du continu

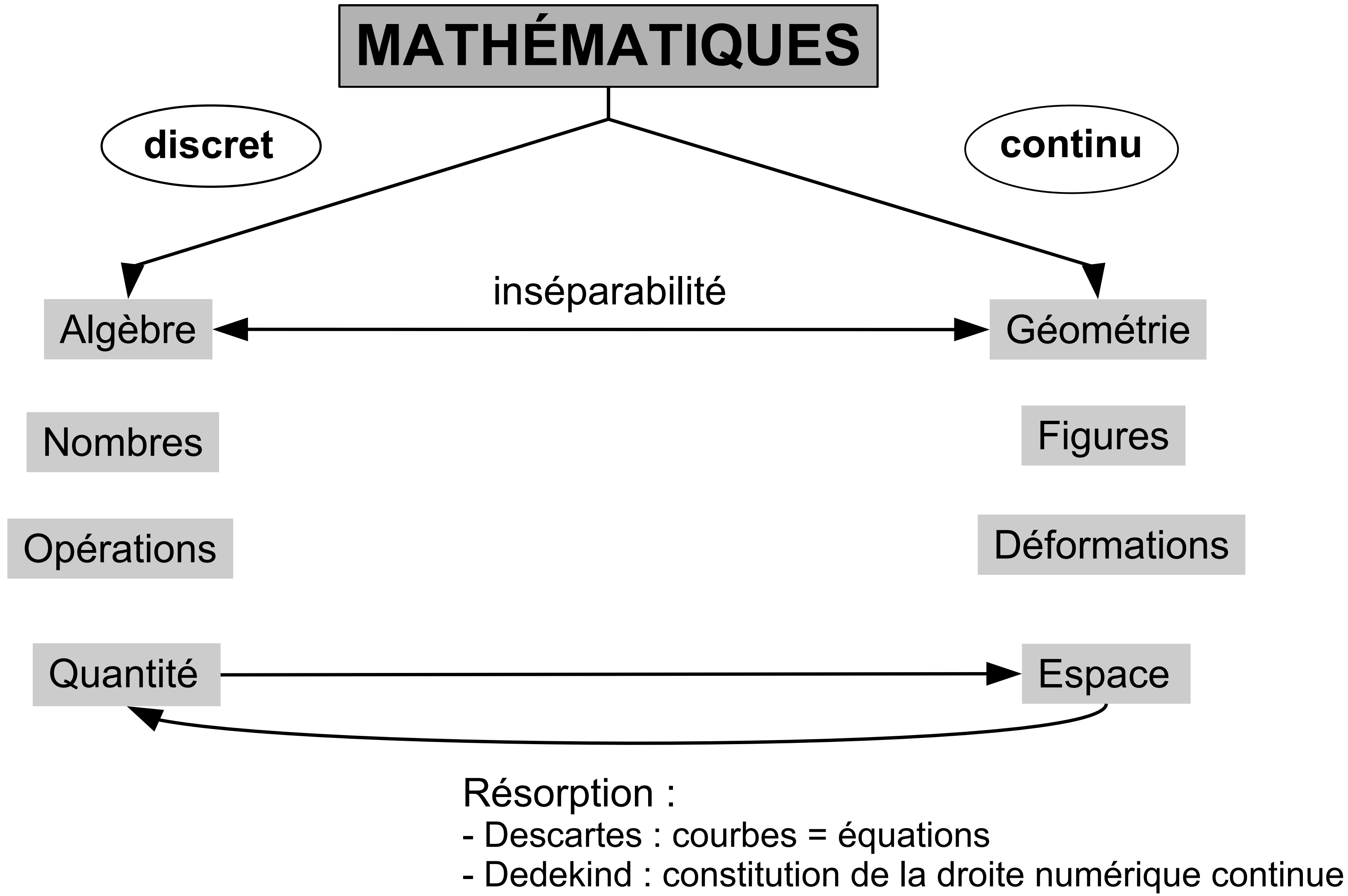
vs.

antériorité ontologique du continu
sur le discret

???

« [...] le continu [...] étendue pure, instructurée,
[…] notion « mystique » par excellence. »

(René Thom)


MATHÉMATIQUES
discret
continu
inséparabilité
Algèbre
Géométrie
Nombres
Figures
Opérations
Déformations
Quantité
Espace
Résorption :
- Descartes : courbes = équations
- Dedekind : constitution de la droite numérique continue

« Certainement le continu intuitif et le continu mathématique ne coïncident pas, un profond abîme les sépare. »

(Hermann Weyl, *Le continu*, 1918)

La planète $\mathbb{R}$

Starring :

$$1, \quad 2, \quad , 0, \quad -4, \quad 0,172, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1789}{1917}, \ldots$$

Also starring :

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{7}, \quad \pi, \quad e, \quad \ln(2), \quad \gamma, \quad \zeta(3), \ldots$$

Guest stars :

tous les nombres que (l'on sait que) l'on ne sait pas écrire (ils sont nombreux…)

La droite réelle :

$-\infty$ $+\infty$

Et les rationnels dans tout ça ?

Localité : partout (→ partie *dense*)

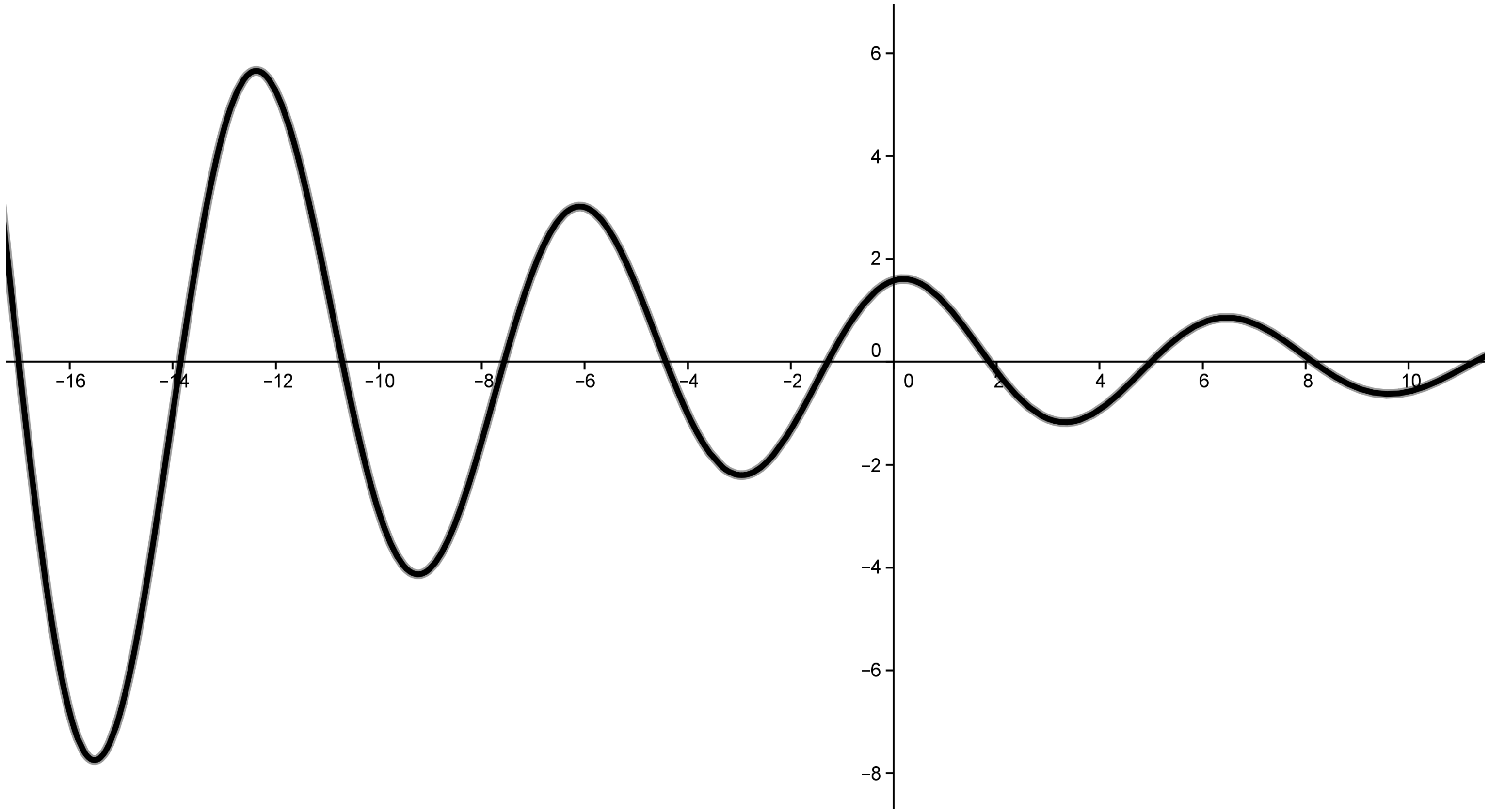
Présence : fantomatique (→ partie *maigre*)

coupure

Dedekind : un réel n'est rien d'autre
que l'ensemble des rationnels
qui lui sont (strictement) inférieurs

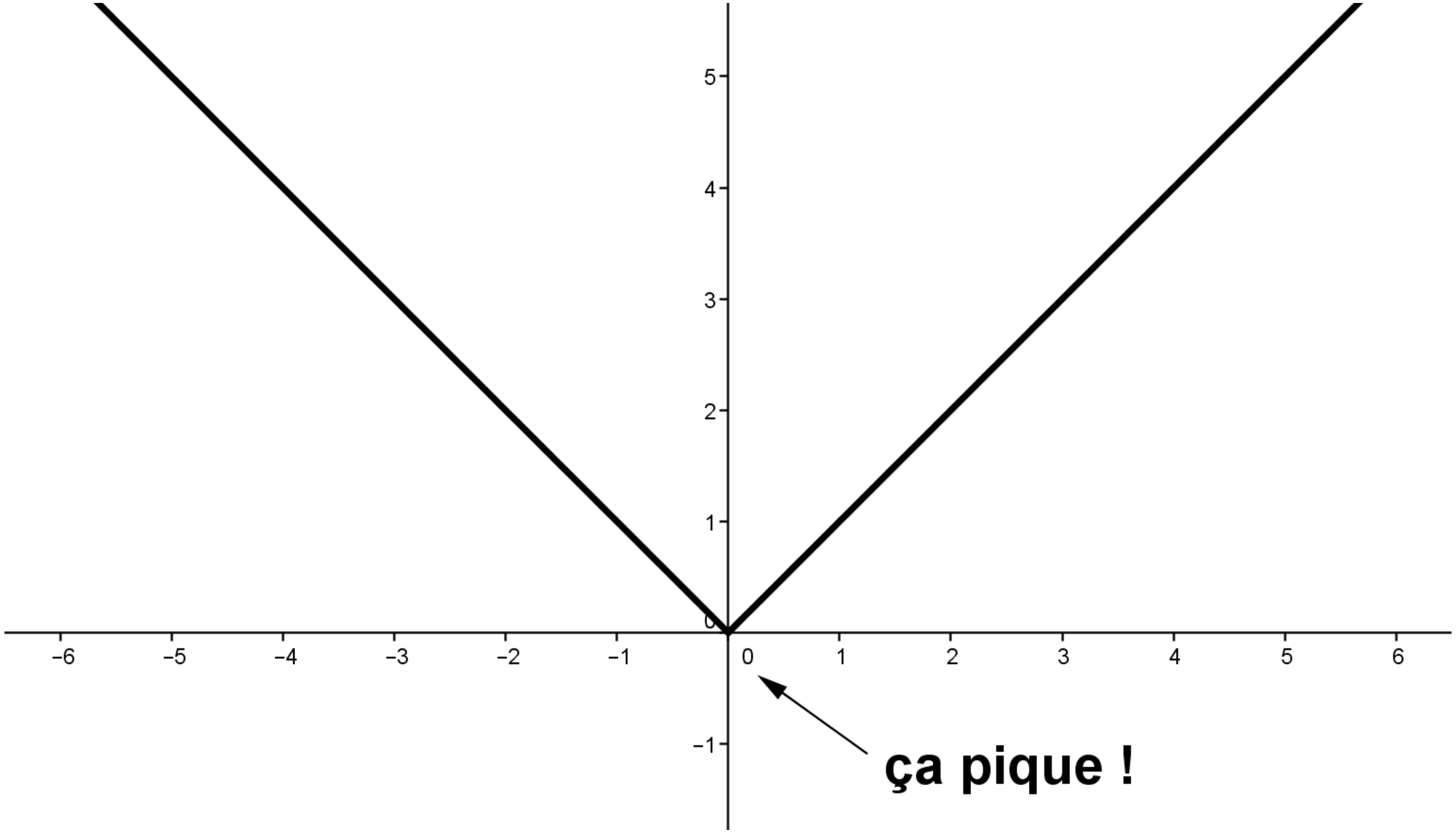
lisse *vs.* continu *vs.* discontinu

CONTINUUM



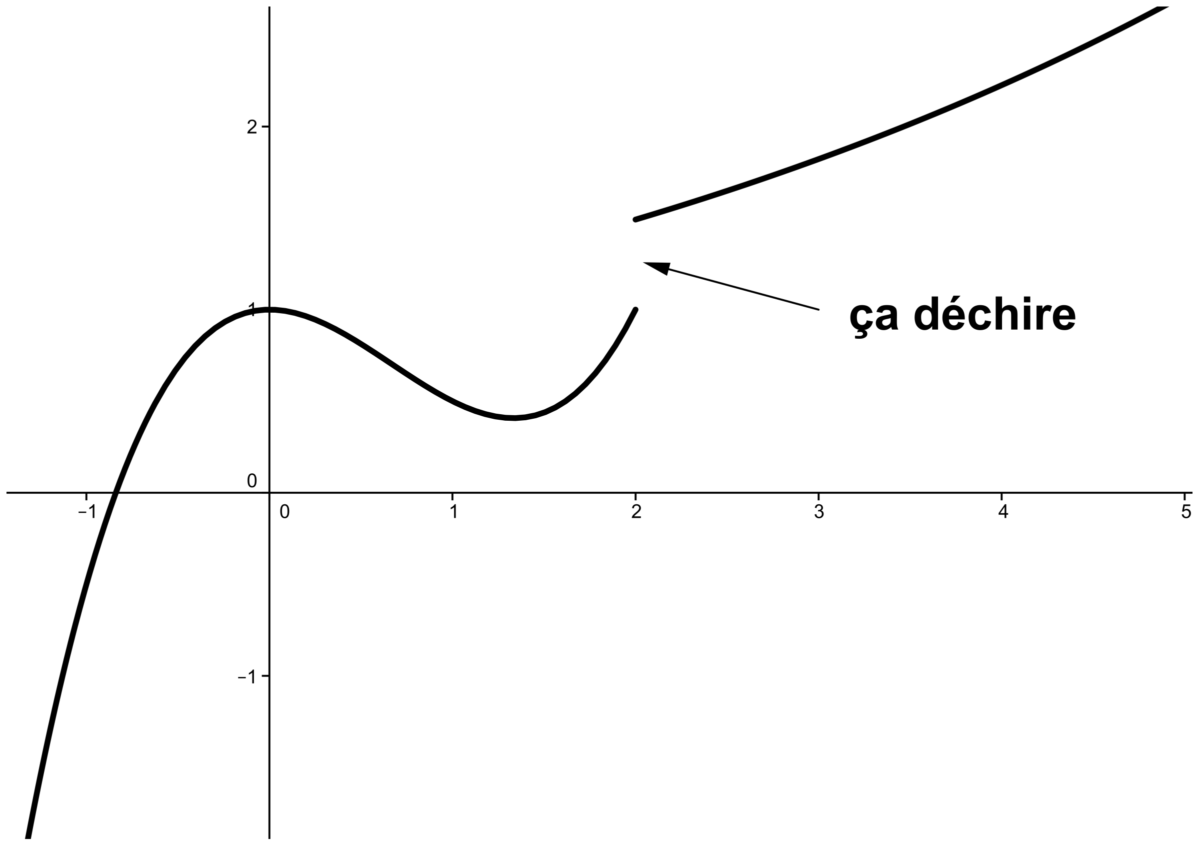
continu et dérivable (lisse)

CONTINUUM



continu mais pas dérivable

CONTINUUM



discontinu

*Epsilon*tik de Weierstrass

I partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur I, $x_0 \in I$.

f est **continue** en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \qquad |x - x_0| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

i.e

une « petite »variation au départ
produit
une « petite »variation à l'arrivée

CALCUL INFINITESIMAL

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a) \qquad \text{(Newton-Leibniz)}$$

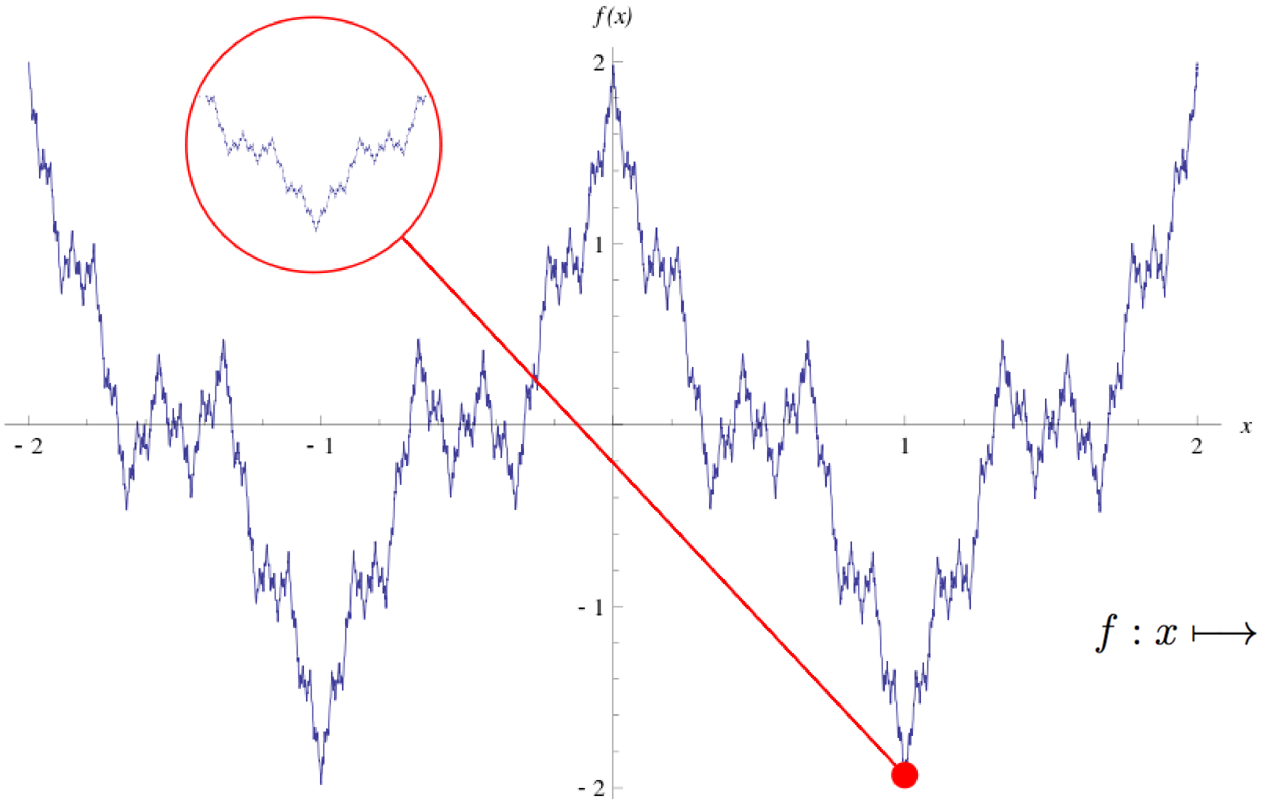
Inégalité des accroissements finis, formule(s) de Taylor, inversion locale, théorème des fonctions implicites, et :

$$\int_V \mathrm{d}\omega = \int_{\partial V} \omega \qquad \text{(Stokes)}$$

GALERIE DE MONSTRES

GALERIE DE MONSTRES

Karl Weierstrass (1872)

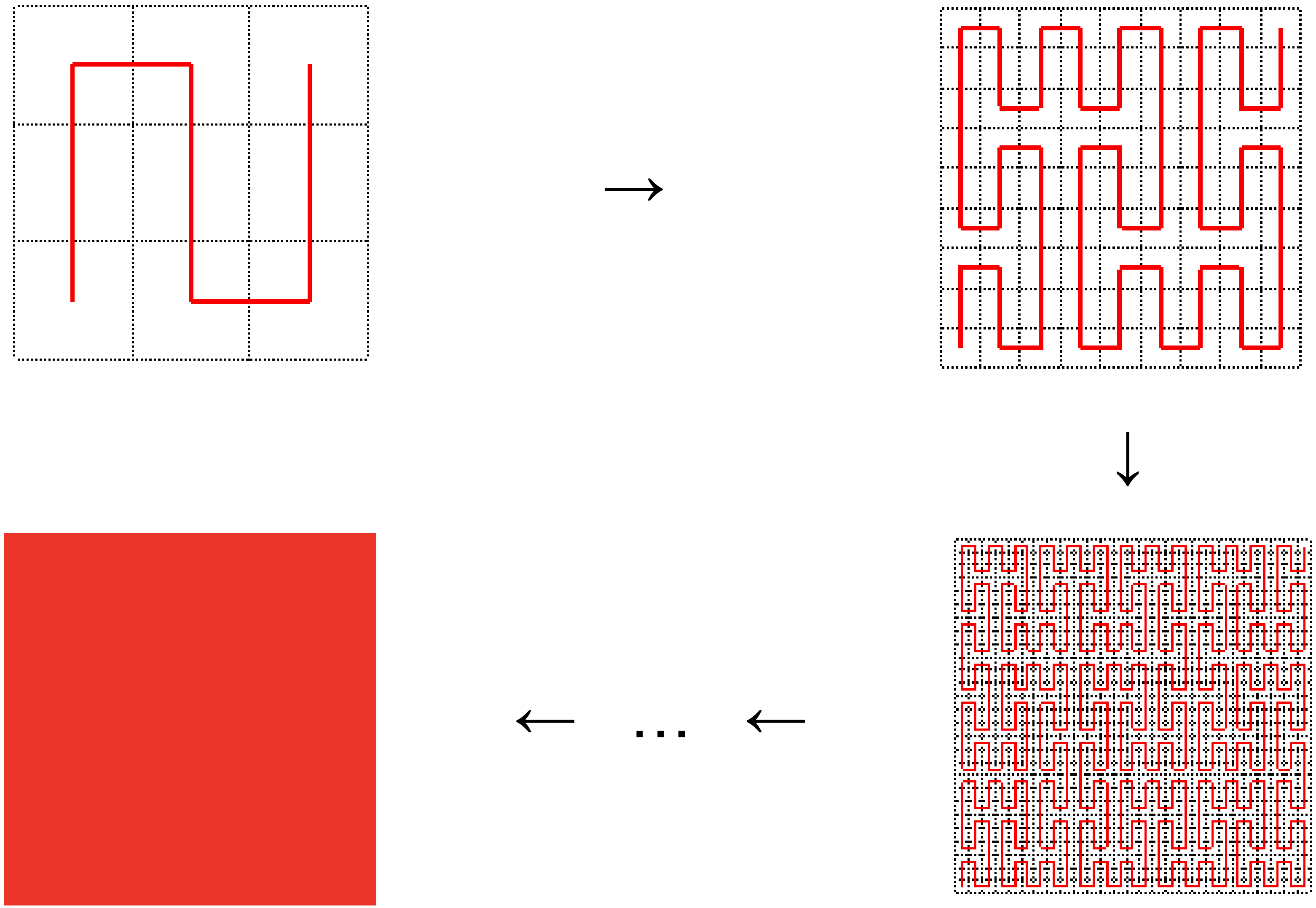


$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \qquad (0 < b < 1,\ ab > 1)$$

Charles Hermite (1822-1901) :
« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable que sont les fonctions continues sans dérivée. »

GALERIE DE MONSTRES

Giuseppe Peano (1890)



Théorème d'invariance du domaine

(Brouwer, 1912)

$\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^p$

si et seulement si

$n = p$

(**Homéomorphisme** : transformation biunivoque et bicontinue)

(ouf...)

GALERIE DE MONSTRES

Benoît Mandelbrot (env. 1980)

$$\psi_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2 \qquad \text{transformation quadratique}$$

On part d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$.
Orbite de z_0 : « nuage »de points

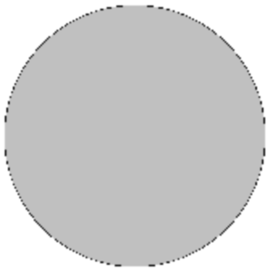
$$z_0,\ \psi_0(z_0),\ \psi_0(\psi_0(z_0)),\ \psi_0(\psi_0(\psi_0(z_0))),\ \ldots$$

Ici :

$$z_0,\ z_0^2,\ z_0^4,\ z_0^8,\ \ldots$$

Question : quel est l'ensemble des points z_0 tels que l'orbite de z_0 demeure bornée (= ne parte pas à l'infini) ? C'est l'*ensemble de Julia* $\mathbf{Jul}(\psi_0)$ associé à la transformation ψ_0.

Ici, réponse simple : $\quad \mathbf{Jul}(\psi_0) \;=\;$ disque unité !



GALERIE DE MONSTRES

Introduisons une petite perturbation $c \in \mathbb{C}$:

$$\psi_c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2 + c$$

L'orbite de z_0 est le nuage de points

$$z_0,\ \psi_c(z_0),\ \psi_c(\psi_c(z_0)),\ \psi_c(\psi_c(\psi_c(z_0))),\ \ldots$$

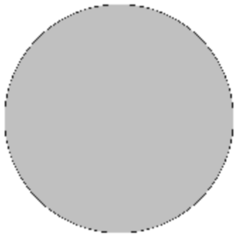
id est

$$z_0,\ z_0^2 + c,\ (z_0^2 + c)^2 + c,\ \left((z_0^2 + c)^2 + c\right)^2 + c,\ \ldots$$

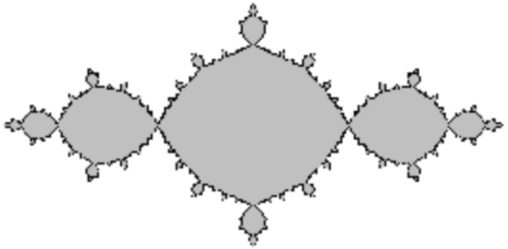
Question : quel est l'ensemble de Julia $\mathbf{Jul}(\psi_c)$ de la transformation ψ_c ?
Réponse : beaucoup plus compliquée !

GALERIE DE MONSTRES

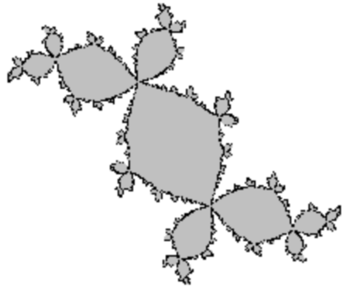
Quelques ensembles de Julia :



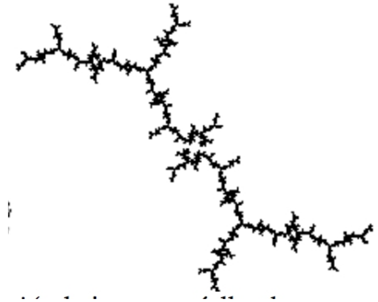
c = 0



c = –1



c = –0,122...+0,744...i



c = –0,15...+1,03...i

c = –0,63+0,67i

c = 0,35+0,05i

c = –0,76+0,12i

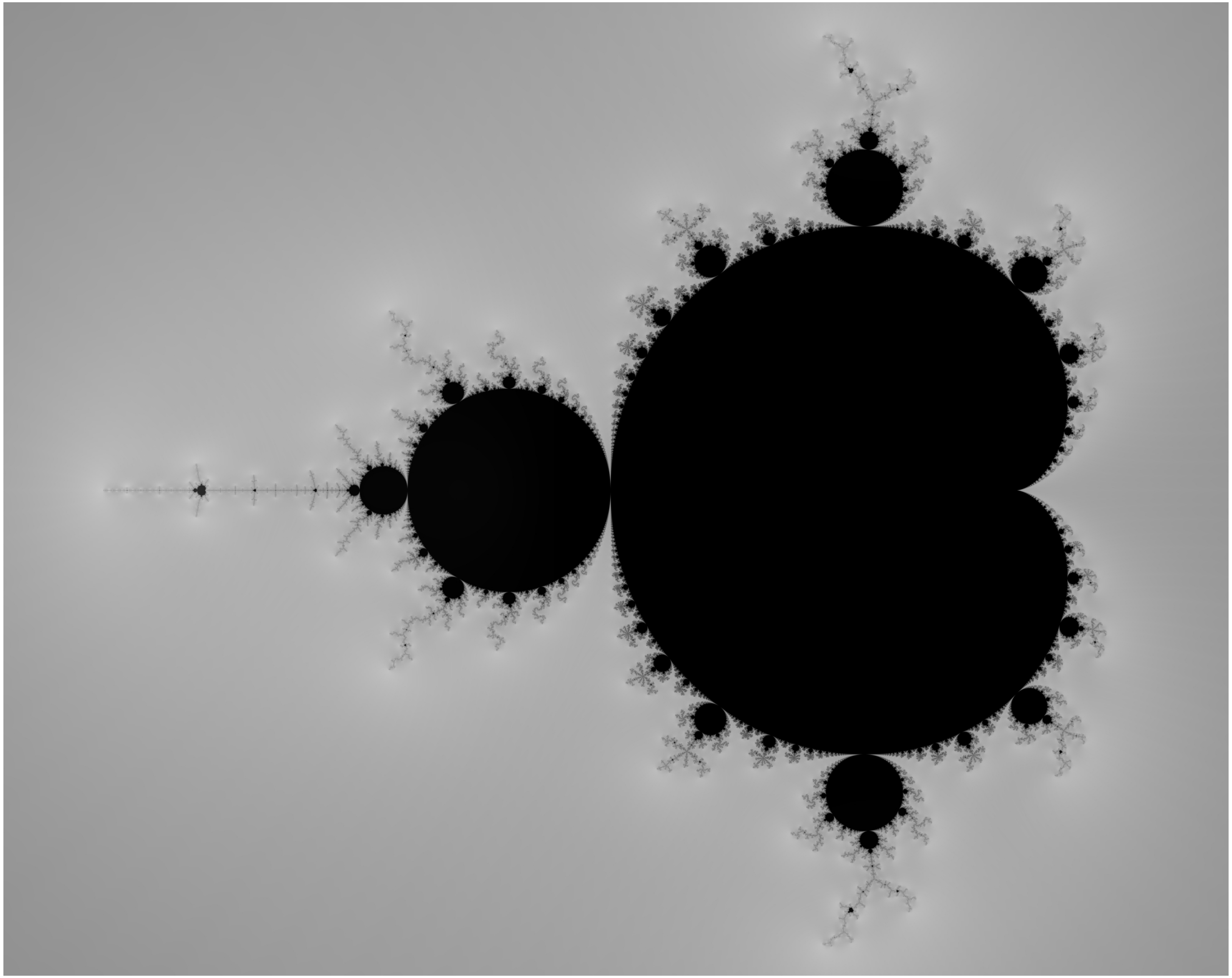
GALERIE DE MONSTRES

Ensemble de Mandelbrot : ensemble des perturbations c pour lesquels $\mathbf{Jul}(\psi_c)$ est connexe

$$\mathbf{Mandelbrot} \;=\; \{c \in \mathbb{C} \;/\; \mathbf{Jul}(\psi_c) \text{ est connexe}\}$$

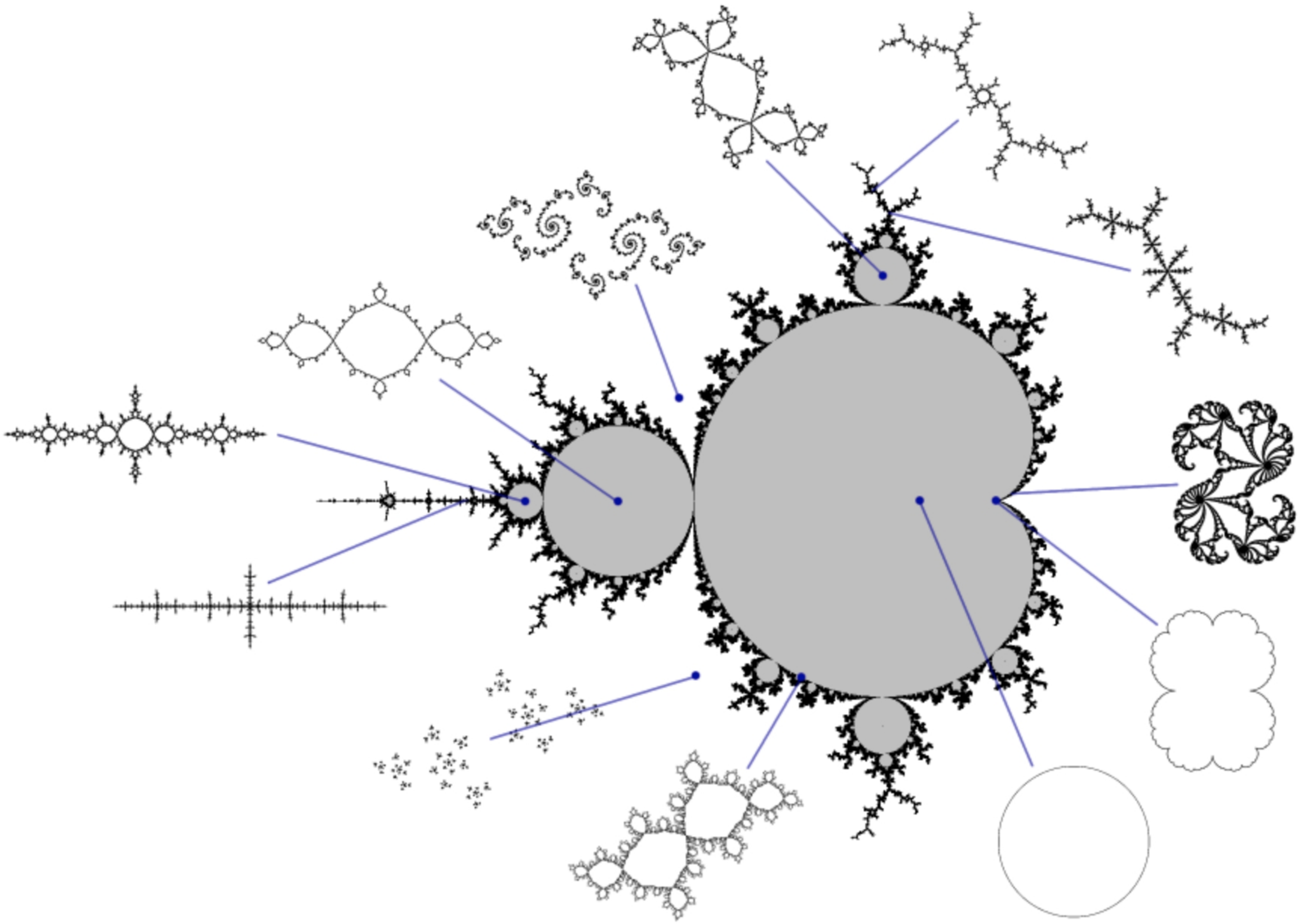
Roulement de tambour...

GALERIE DE MONSTRES



GALERIE DE MONSTRES

Mieux :

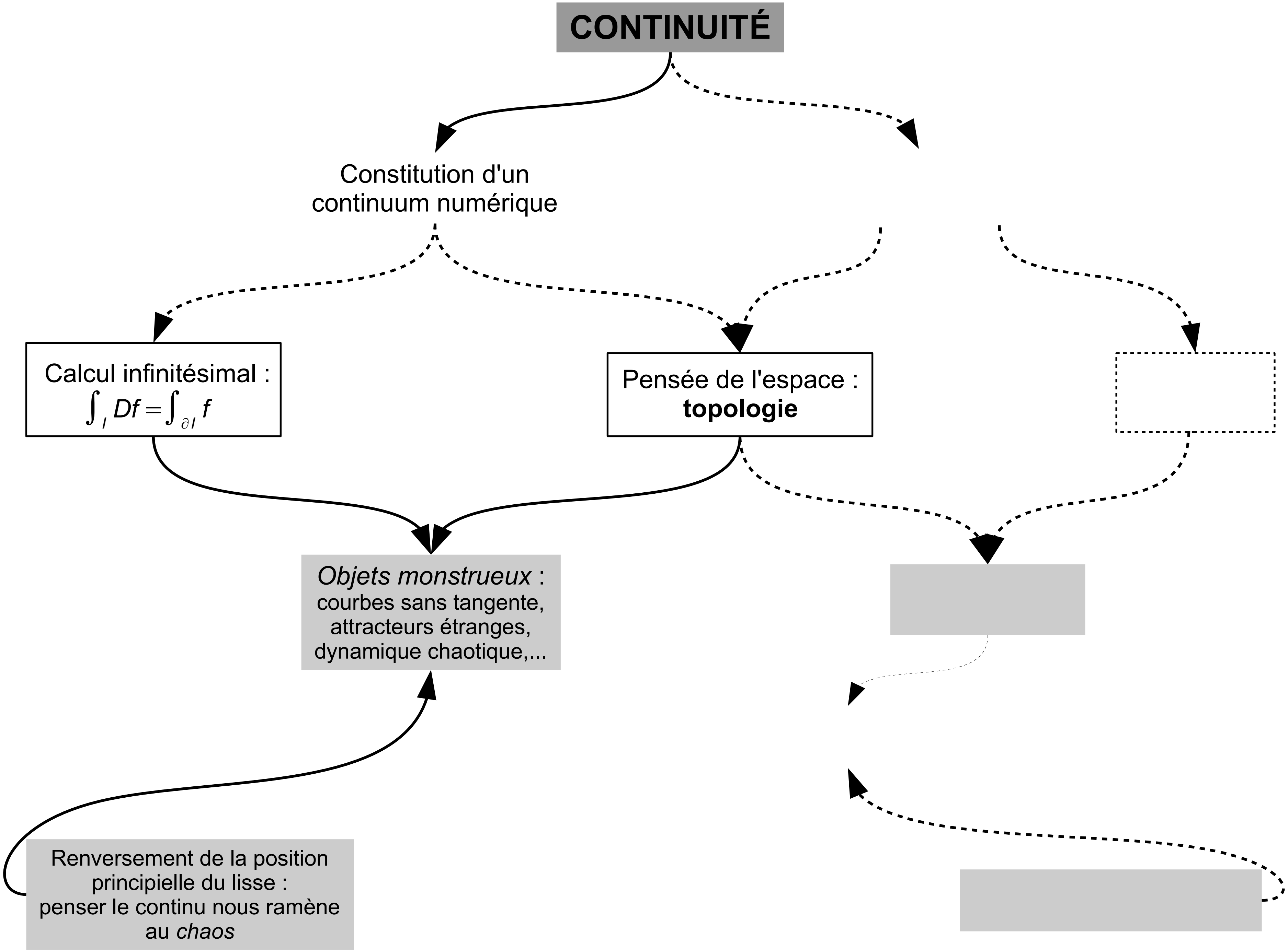


GALERIE DE MONSTRES

Encore mieux :

Une plongée dans l'ensemble de Mandelbrot

(il est facile de trouver des animations sur internet...)


CONTINUITÉ
Constitution d'un continuum numérique
Calcul infinitésimal : $\int_I Df = \int_{\partial I} f$
Pensée de l'espace : **topologie**
Objets monstrueux : courbes sans tangente, attracteurs étranges, dynamique chaotique,...
Renversement de la position principielle du lisse : penser le continu nous ramène au *chaos*

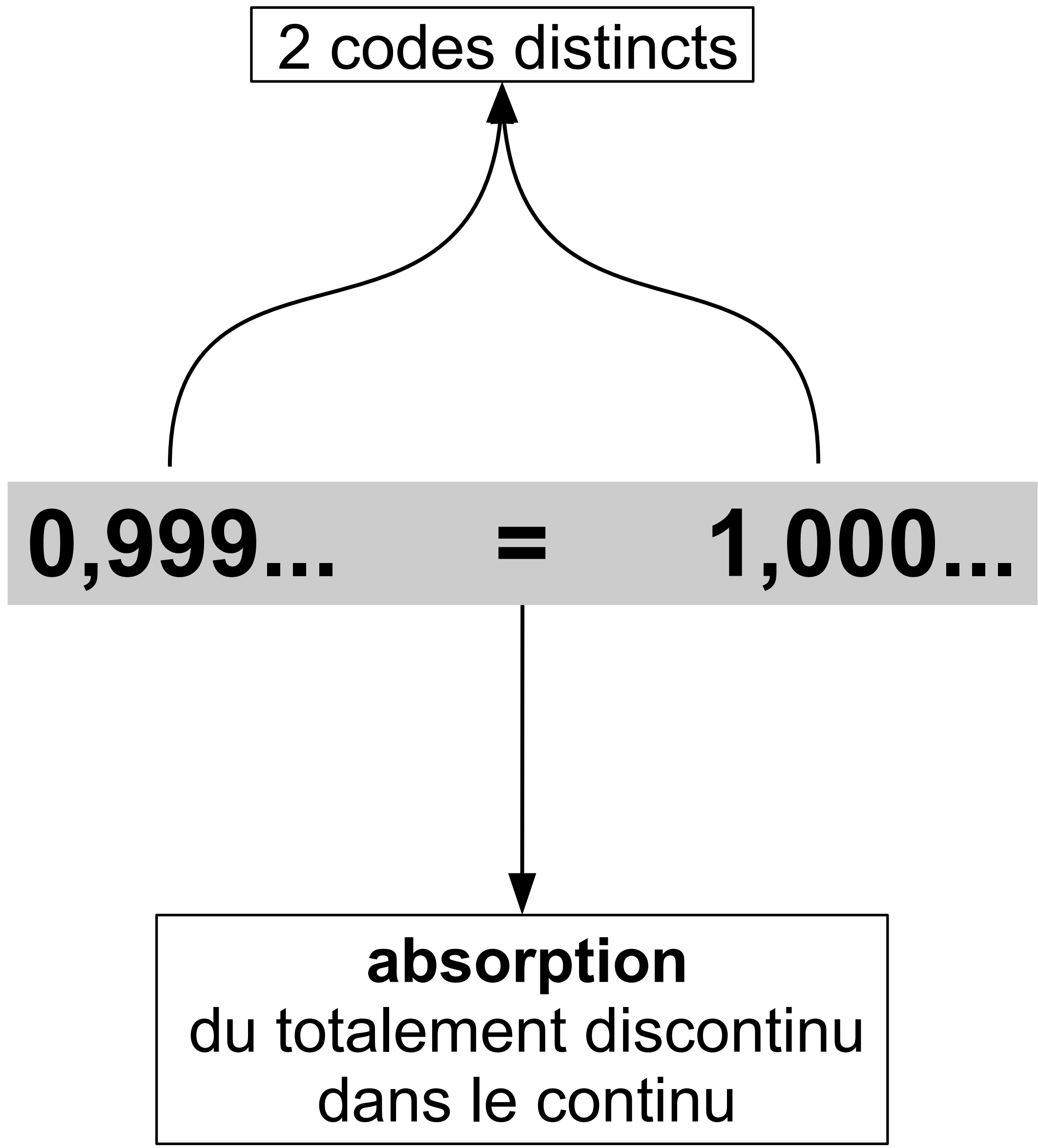
CONTINUITÉ = FUSION / DISTINCTION

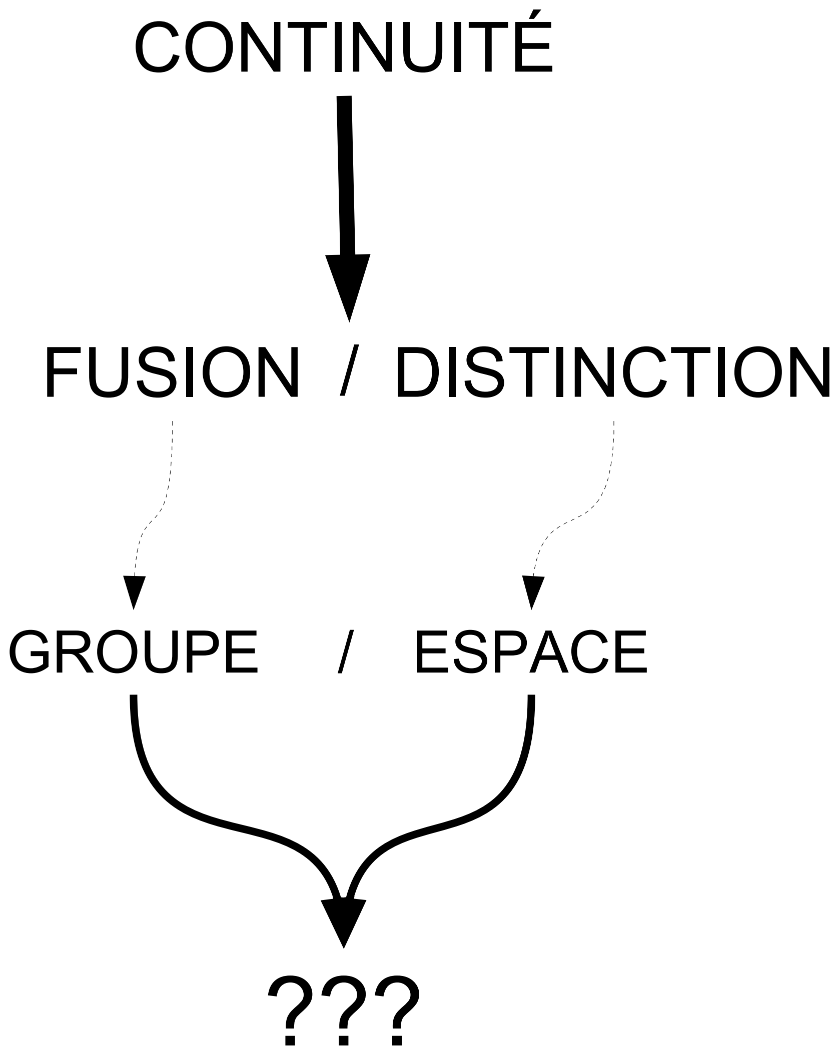
même&change

synthesis / *diairesis*

différence et répétition

séparé / inséparé


2 codes distincts
0,999... = 1,000...
absorption
du totalement discontinu
dans le continu


CONTINUITÉ
FUSION / DISTINCTION
GROUPE / ESPACE
???

QU'EST-CE QU'UN GROUPE ?

G un ensemble, et $*$ une opération *interne* dans G :

$$\begin{array}{rccc} * : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g,h) & \longmapsto & g * h \end{array}$$

vérifiant :

- $*$ est associative : $\quad (g * h) * k = g * (h * k)$
- il existe un (unique) élément neutre $e \in G$ pour $*$:

$$\text{pour tout } g \in G, \quad e * g = g * e = g$$

- tout $g \in G$ admet un (unique) symétrique par rapport à e vis-à-vis de $*$:

$$\text{pour tout } g \in G, \text{ il existe un (unique) } h \in G \text{ tel que } g * h = h * g = e$$

Exemples commutatifs : $\quad (\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, ...

Exemples non-commutatifs : $\quad \mathfrak{S}(X)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Isom}(\mathrm{Cube})$, ...

QU'EST-CE QU'UNE ACTION DE GROUPE ?

$(G, \cdot)$ un groupe, X un ensemble

Une **action de groupe** de G sur X est une application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

vérifiant :

- pour tout $x \in X$, $\quad e \cdot x = x$
- pour tous $g, g' \in G$, pour tout $x \in X$: $\quad g' \cdot (g \cdot x) = (g'g) \cdot x$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "g'g"'] & \bullet \arrow[r, bend left, "g'"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Définition équivalente :
donnée d'un morphisme de groupes $\quad \Phi \ : \ G \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$.
On a alors : $\quad \Phi(g)(x) = g \cdot x$.

QU'EST-CE QU'UNE ACTION DE GROUPE ?

Notion d'**orbite** d'un point

Point $x \in X$.
Orbite de x sous l'action du groupe G :

$$\mathbf{Orb}(x) = \{g \cdot x\}_{g \in G} \;=\; \{y \in X \;/\; \exists g \in G,\; y = g \cdot x\}$$

L'orbite de x, c'est le « nuage » de points de X constitué de tous les transformés de x sous l'action de tous les éléments de G

Dans X, la relation « être dans la même orbite »

$$x \,\mathcal{R}\, y \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \mathbf{Orb}(x)$$

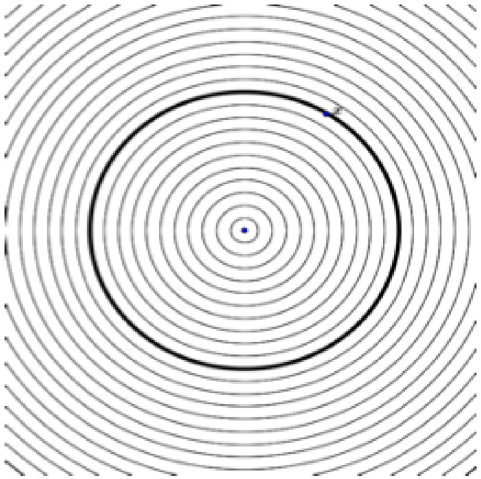
est une **relation d'équivalence** (réflexive, symétrique, transitive)

Conséquence : X se partitionne en orbites
$\longrightarrow$ effet de *fusion*, ou de *mêmeté*

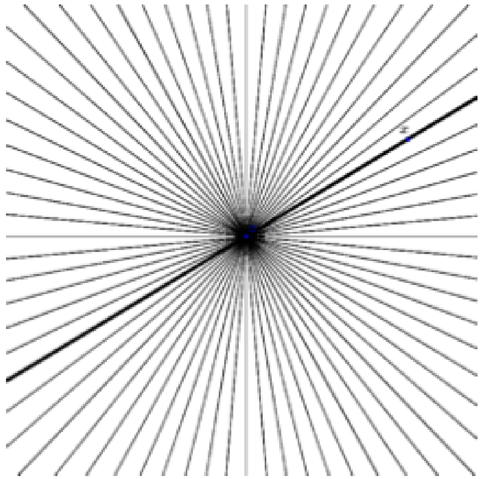
QU'EST-CE QU'UNE ACTION DE GROUPE ?

Exemple :

partition en orbites du plan...



...agi par le groupe des rotations



...agi par le groupe des homothéties

QU'EST-CE QU'UNE ACTION DE GROUPE ?

« *La poésie* **diagonalise** *et subtilise*
la langue de la politique. »
(Benoît Casas)

Autre exemple :

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: espace des matrices carrées de taille n
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: groupe des matrices inversibles
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ agit (à droite) sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ via

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (P, M) & \longmapsto & M \cdot P \ = \ P^{-1}MP \end{array}$$

M : transformation linéaire d'un espace de dimension n d'un point de vue canonique
$P^{-1}MP$: la même transformation d'un autre point de vue (représenté par P)

Problématique (importante) de la *réduction des matrices* :
une matrice M étant donnée, y a-t-il dans l'orbite de M une matrice « agréable » (optimalement : diagonale) ?

QUESTION DE SPATIALITÉ : TOPOLOGIE

Un *espace topologique*, c'est : un ensemble X dans lequel on a spécifié une collection de parties, déclarées *ouvertes*, vérifiant :

– la partie vide est ouverte, la partie pleine (X) est ouverte ;
– une union quelconque d'ouverts est ouverte ;
– une intersection *finie* d'ouverts est ouverte.

(Et c'est tout!)

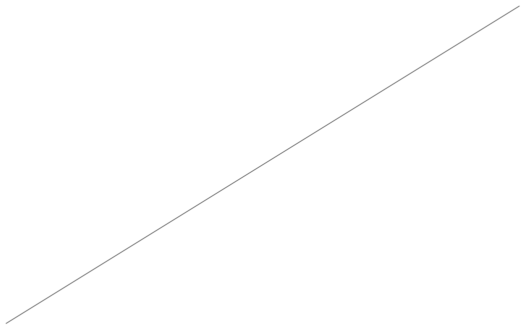
<u>Les mots-phares de la topologie</u> :

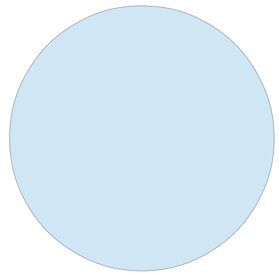
ouvert, fermé, voisinage, intérieur, adhérence, frontière, connexe, compact, dense, complet, contractile, …

Et aussi :

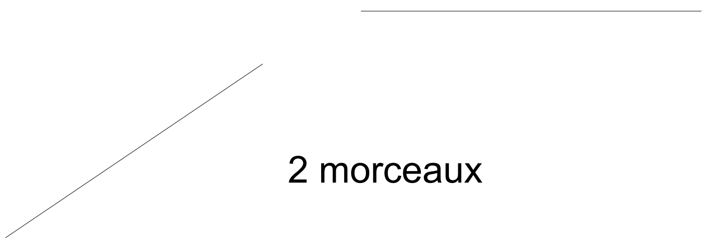
inflexion, rebroussement, bifurcation, singularité, ...

droite ≠ cercle

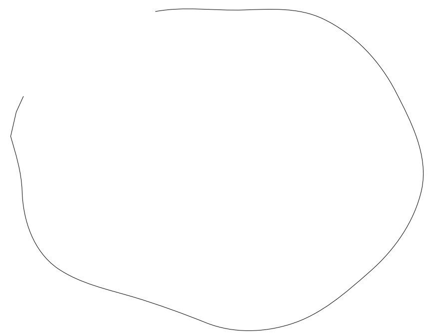




En effet, on coupe à un endroit et :



2 morceaux



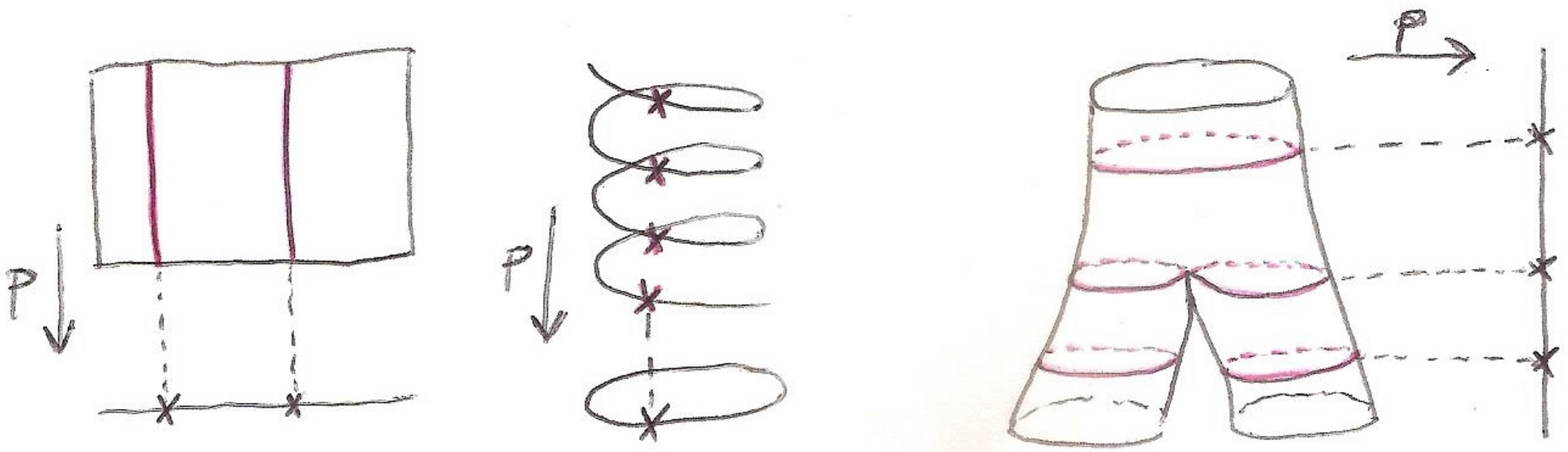
1 morceau

Fibres d'une projection

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\text{projection } p"'] & \supset & p^{-1}(b) \arrow[d, bend right] \\
B & \ni & b \arrow[u, squiggly]
\end{tikzcd}
$$

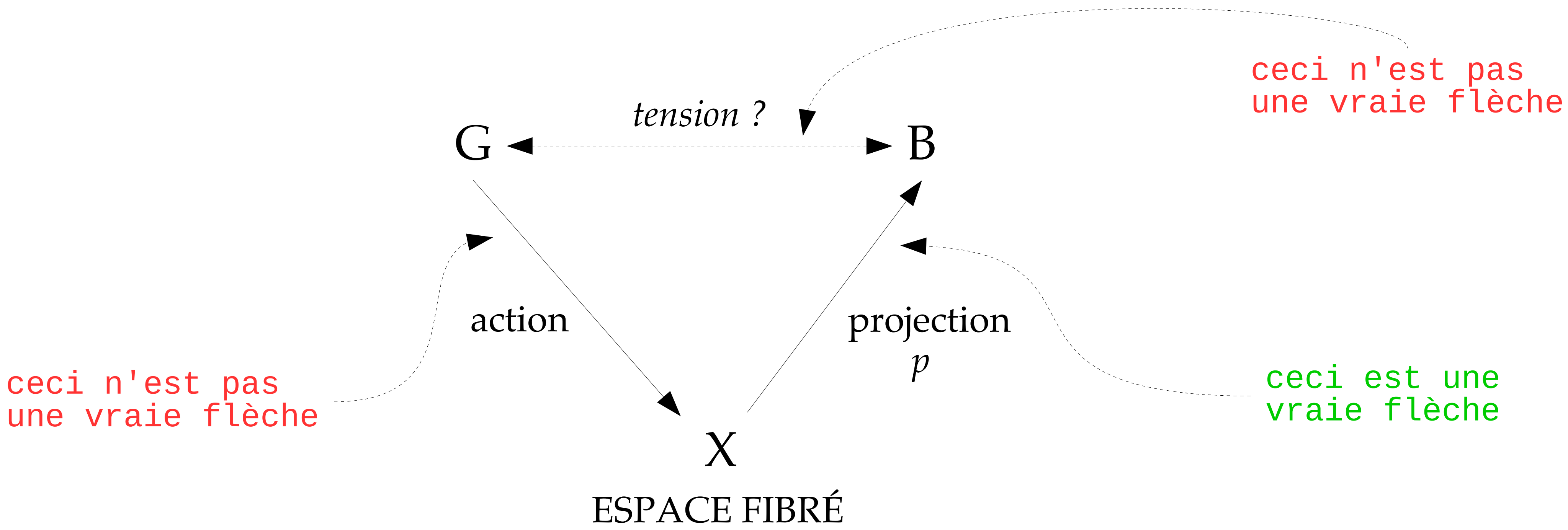
<u>*fibre*</u> au-dessus du point b

Exemples :



MONTAGE : FIBRATION

<u>Ingrédients</u> :
un groupe G, une variété B (*espace de base*), une variété X (*espace total*)



+ pour tout g dans G, pour tout x dans X :

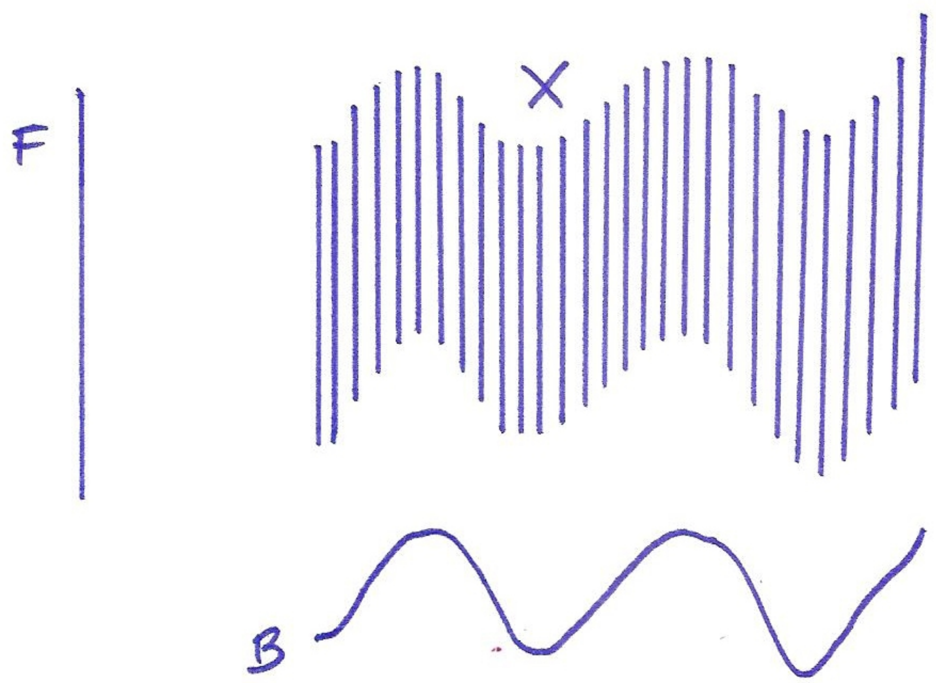
$$p(g{\cdot}x) = p(x)$$

(les orbites sont confinées dans les fibres)

Une demande :

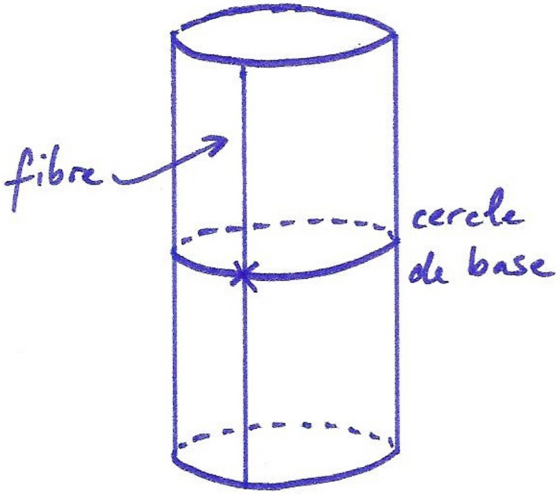
Toutes les fibres sont des 'copies' d'une même fibre-type F (une variété)

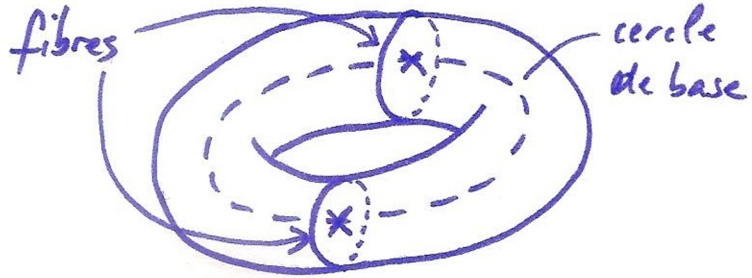
(on parlera donc de fibré en droites, fibré en cercles, fibré en plan, etc.)



DEUX EXEMPLES

fibré en droites



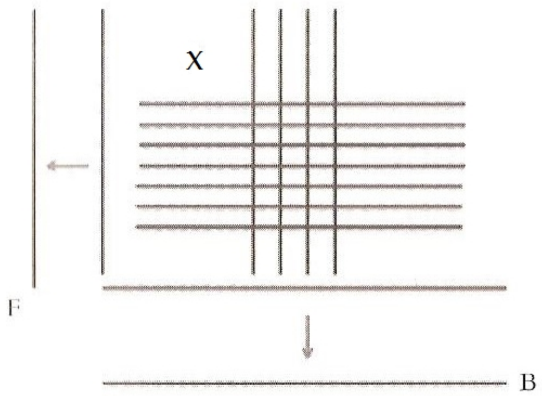


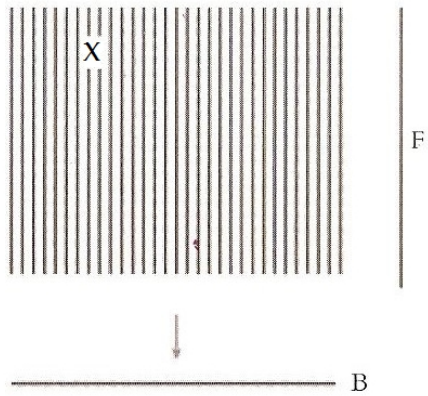
fibré en cercles

cylindre $= \; S^1 \times \mathbb{R}$

tore $= \; S^1 \times S^1$

Produits cartésiens





LE CAS BANAL

groupe G, espace de base B, fibre-type $\boxed{F = G}$, espace total $\boxed{X = G \times B}$

Les éléments de X sont les couples (g, b), où $g \in G$ et $b \in B$.

Action de G sur X : $\quad h \cdot (g, b) = (hg, b)$
Projection de X sur B : $\quad p(g, b) = b$

On a alors, pour $h \in G$ et $x = (g, b) \in X$:

$$p(h \cdot x) = p\left(h \cdot (g, b)\right) = p(hg, b) = b = p(g, b) = p(x)$$

Moralité : X est un espace fibré, mais TRIVIAL !

à la recherche du fibré non-trivial perdu...

CONDITIONS MINIMA

(pour espérer construire un fibré non-trivial)

GROUPE ^ <u>au moins 2 éléments</u>

Le <u>groupe à 2 éléments</u> : $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{ 0, 1 \}$

Opération interne notée +

$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0$

Action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ = introduction d'un *miroir*

CONDITIONS MINIMA

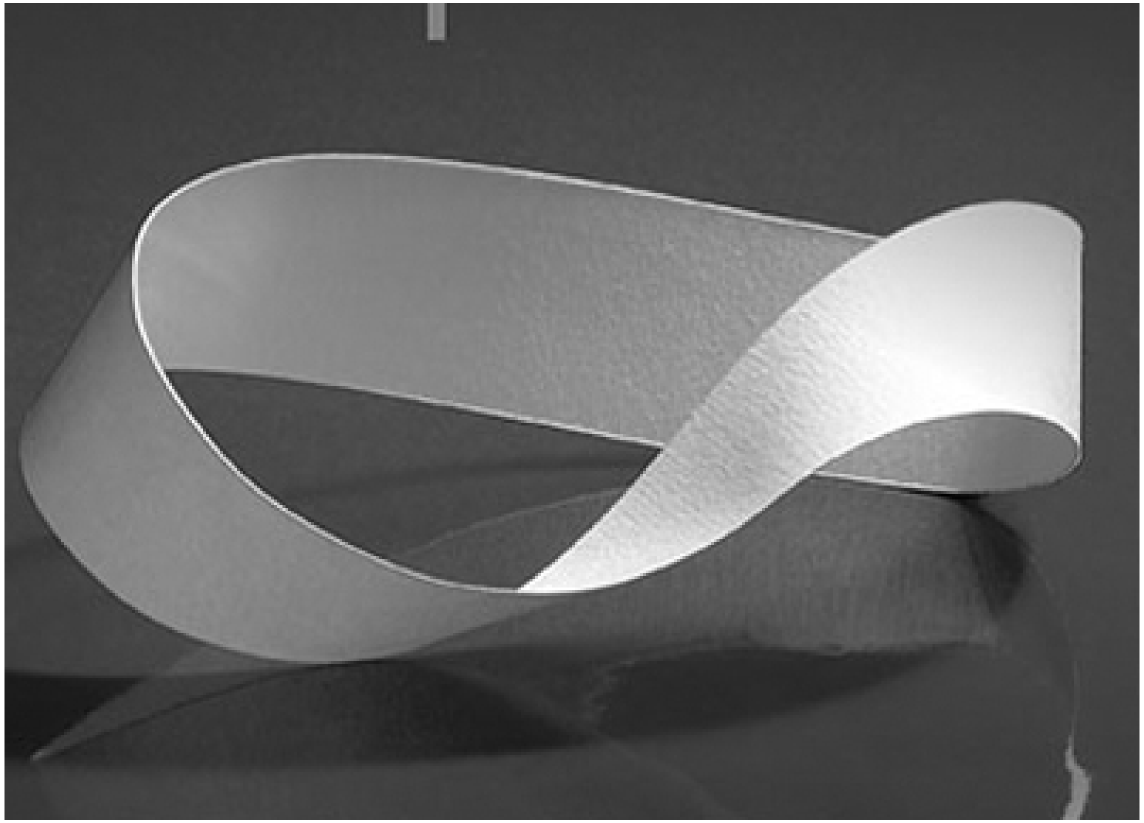
(pour espérer construire un fibré non-trivial)

ESPACE ^ <u>troué</u> (= non contractile)

Exemples d'espaces <u>contractiles</u> :
une courbe, une 'croix', une boule, un plan, ...

Exemples d'espaces <u>non contractiles</u> :
un cercle, une sphère, un tore, un bretzel, ...

MÖBIUS



Trace dans l'espace d'un segment pivotant dont le milieu décrit un cercle et qui revient à sa position initiale en ayant effectué un demi-tour

MÖBIUS

1) Paramétrage dans $\mathbf{R}^3$

$$\begin{cases} x &= \left(1+\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{v}{2}\right)\cos v \\ y &= \left(1+\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{v}{2}\right)\sin v \\ x &= \dfrac{t}{2}\sin\dfrac{v}{2} \end{cases} , \qquad -1 \le t \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

2) Équation

$$x^2y + yz^2 + y^3 - y - 2xz - 2x^2z - 2y^2z \;=\; 0$$

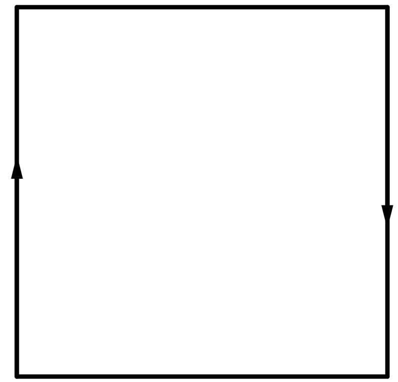
3) Représentation complexe

$$\mathbf{Möbius} \;=\; \{(u,z) \in \mathbf{U} \times \mathbb{C} \;/\; u\overline{z} = z\}, \qquad \mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| = 1\}$$

MÖBIUS

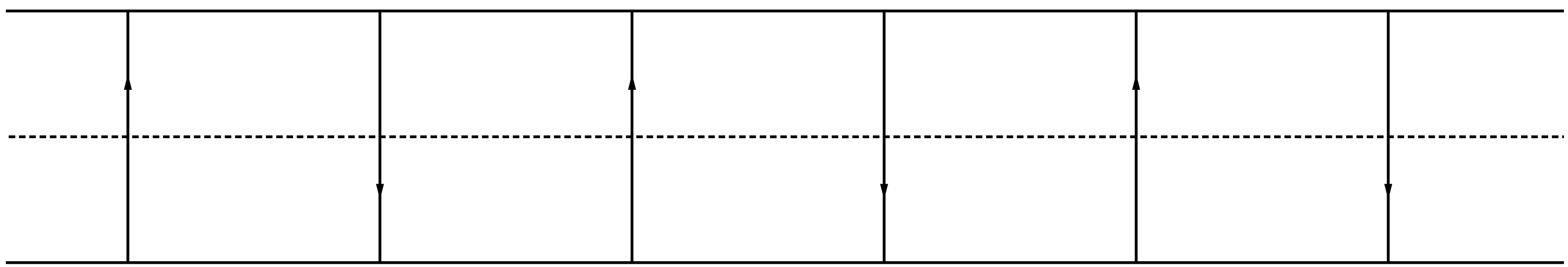
4) Quotient d'un carré :

$$\textbf{Möbius} \; = \; \mathbf{K}/\sim, \qquad \begin{cases} \mathbf{K} = [0,1] \times [0,1]^2 \text{ (carré)} \\ (0,t) \sim (1, 1-t) \end{cases}$$

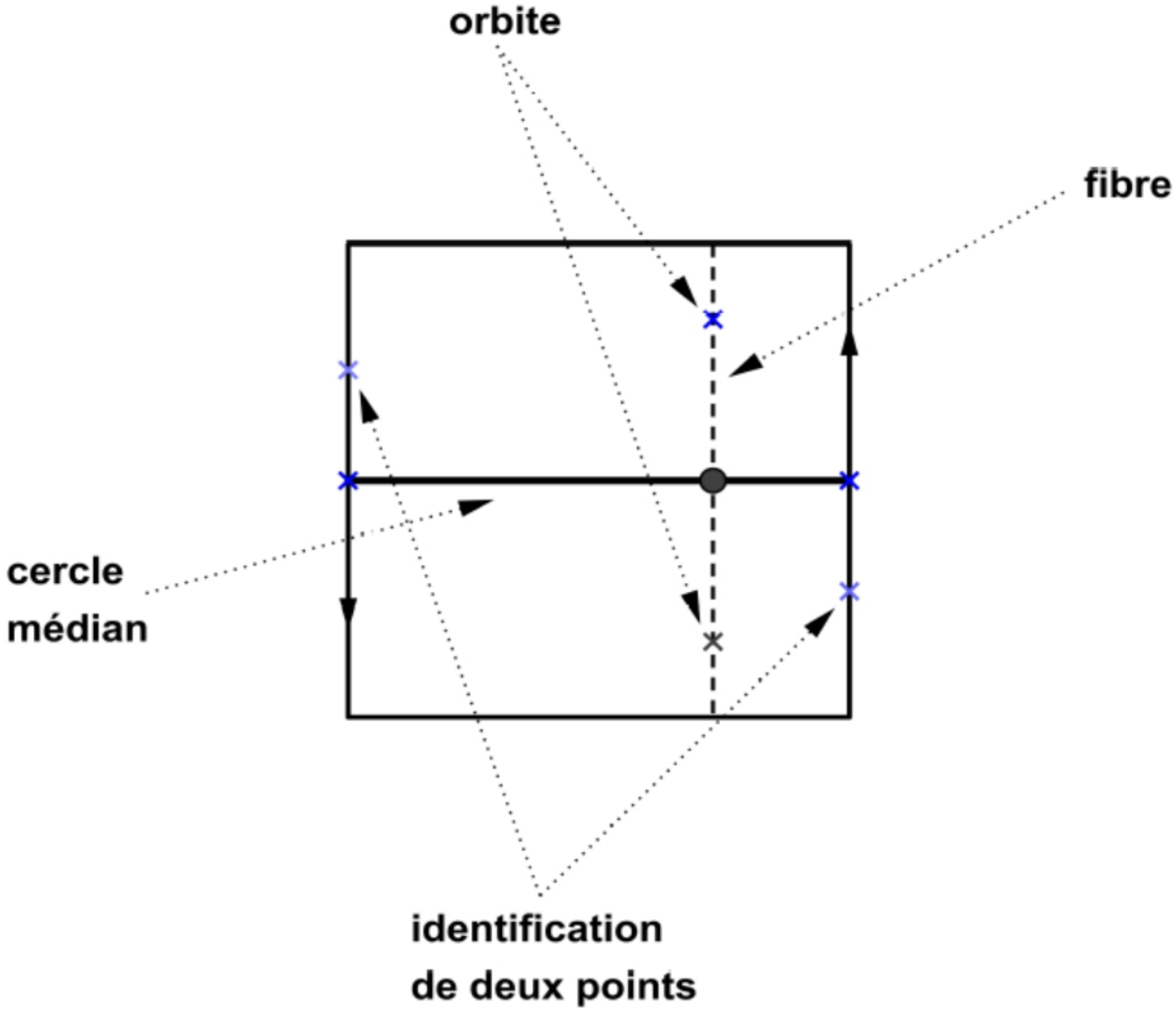


5) Quotient d'une bande infinie :

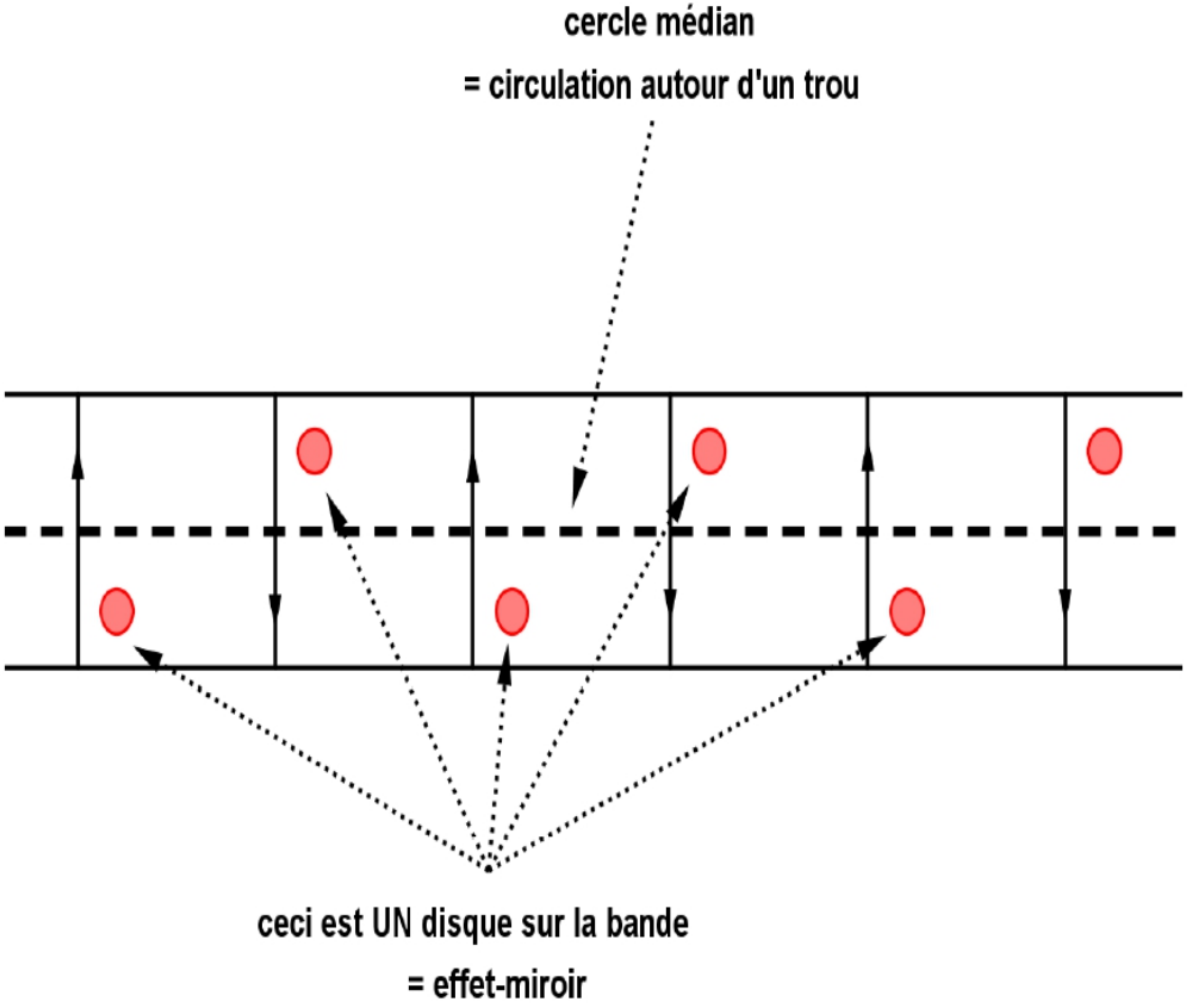
$$\textbf{Möbius} \; = \; \mathbb{R} \times [-1,1]/\sim, \qquad (x,y) \sim (x',y') \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x' = x + k \\ y' = (-1)^k y \end{cases}$$



MÖBIUS : structure fibrée de la bande

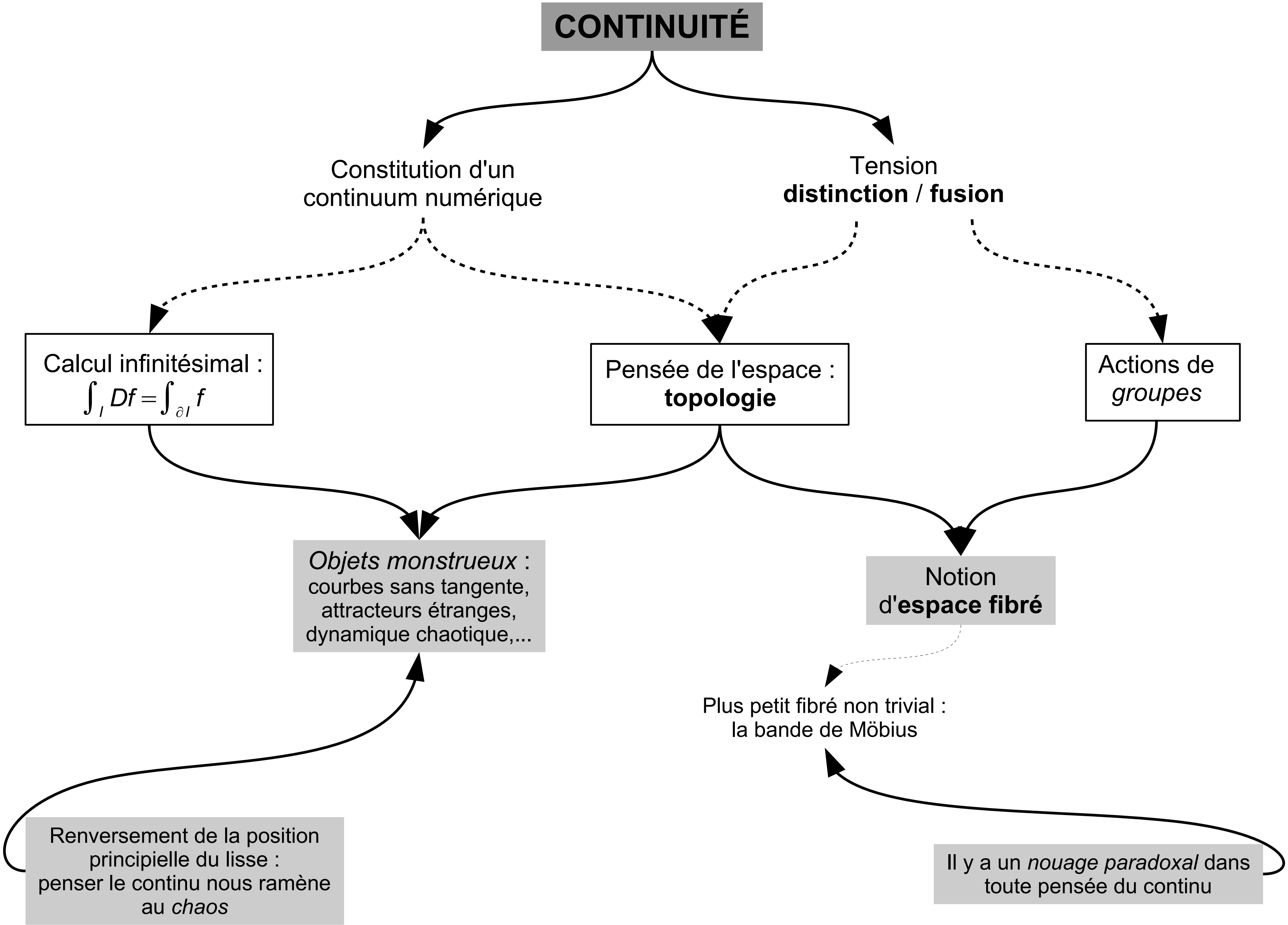


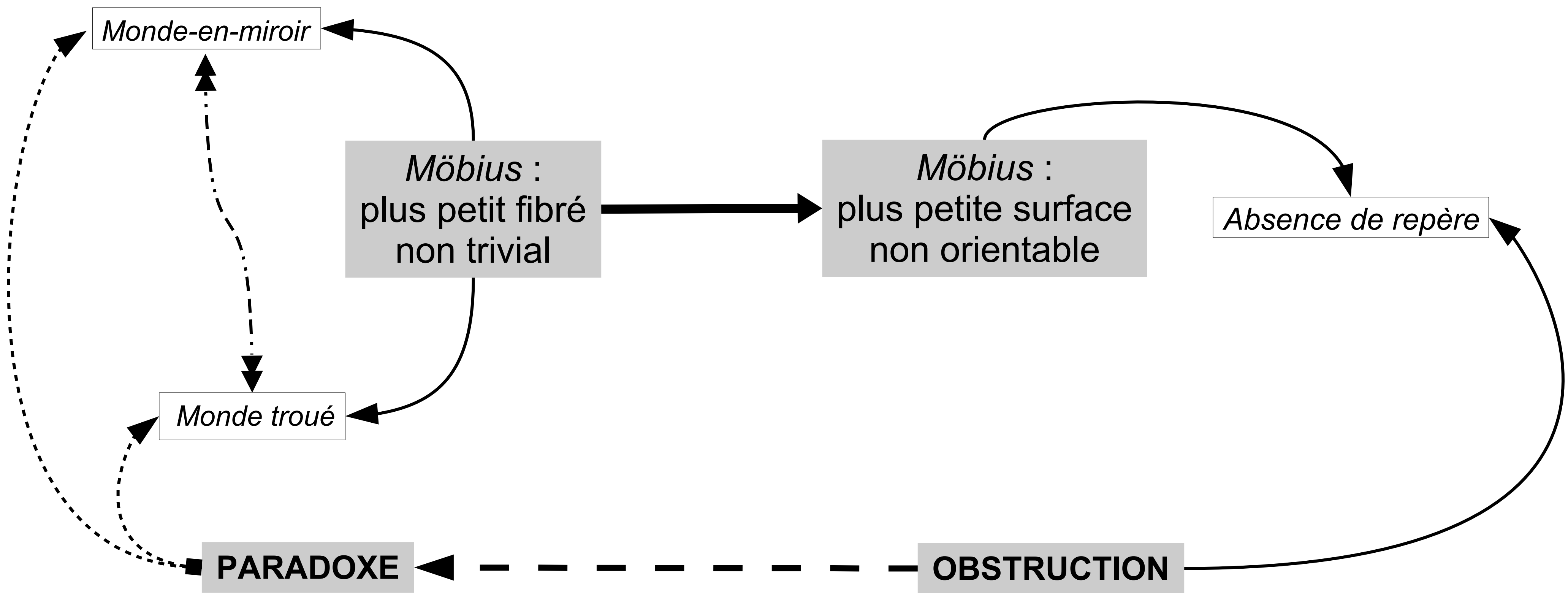
MÖBIUS



topologie de la bande :

effet-miroir + circulation autour d'un trou   désorientation


CONTINUITÉ
Constitution d'un continuum numérique
Tension **distinction** / **fusion**
Calcul infinitésimal : $\int_I Df = \int_{\partial I} f$
Pensée de l'espace : **topologie**
Actions de *groupes*
Objets monstrueux : courbes sans tangente, attracteurs étranges, dynamique chaotique,...
Notion d'**espace fibré**
Plus petit fibré non trivial : la bande de Möbius
Renversement de la position principielle du lisse : penser le continu nous ramène au *chaos*
Il y a un *nouage paradoxal* dans toute pensée du continu


Monde-en-miroir
Möbius :
plus petit fibré
non trivial
Möbius :
plus petite surface
non orientable
Absence de repère
Monde troué
PARADOXE
OBSTRUCTION