Hétérostylisme et extension par *double* adjonction à la lumière de la géométrie contemporaine

par Martín González

Institut de Mathématiques de Jussieu,
Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris 6,
France.

Exposé dans le cadre du Séminaire MaMuPhi, Samedi 12 Novembre 2016, 10h- IRCAM, Paris.

L'objectif de la partie mathématique de cet exposé est de developper les idées (assez vagues) suivantes:

1. Un objet géométrique est un objet topologique muni d'une structure géométrique;
2. La notion de schéma est une extension de celle de variété algébrique par adjonction de nilpotents;
3. La notion de schéma dérivé est une extension de celle de schéma par adjonction de dg-structure à homotopie près au niveau des *modèles locaux*, géométriquement traduite par adjonction d'intersections gérérales (dont auto-intersections);
4. La notion de champs (algébrique) est une extension de celle de schéma par adjonction de structure de groupoide du côté des espaces classifiants géométriqument traduite par adjonction de quotients;
5. La notion de champs dérivé est une extension de celle de schéma par adjonction double:
    a. adjonction de dg-structure au niveau du modèle local
    b. adjonction d'automorphismes (supérieurs) au niveau de l'espace classifiant

    toutes deux unifiées en ce qu'on adjoint à l'espace tangent en un point une structure de complexe.

Le but du jeu sera d'avoir une certaine intuition géométrique du diagramme suivant:

Dérivation des affines — Dérivation des classifiants

$$\begin{tikzcd}
 \arrow[ddd, dashed, "\text{adjonction}"'] & & A \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(\mathrm{Spec}(A), X) & \arrow[ddd, dashed, "\text{adjonction}"] \\
 & \mathrm{cAnneaux} \arrow[rr, "\text{schémas}"'] \arrow[rrd, "\text{champs}"] \arrow[rrdd, "\infty\text{-champs}"'] \arrow[dd, shift right, "j_0"'] & & \mathrm{Ens} \arrow[d, shift right, "i_0"'] & \\
 & & & Grpds \arrow[u, shift right, "\pi_0"'] \arrow[d, shift right, "N"'] & \\
 & \mathrm{cdg}-\mathrm{Anneaux} \arrow[uu, shift right, "t_0"'] \arrow[rr, "\text{champs dérivés intrinsèques}"] \arrow[d, squiggly, "\text{Homotopie}"'] & & \mathrm{sEns} \arrow[u, shift right, "\Pi_1"'] \arrow[d, squiggly, "\text{Homotopie}"] & \\
 & \mathrm{Ho}(\mathrm{cdg}-\mathrm{Anneaux}) \arrow[rr, "\text{champs dérivés manipulables}"] & & \mathrm{Ho}(Top) &
\end{tikzcd}$$

Plan:

1. Des variétés topologiques aux variétés géométriques
2. *Modèles locaux* de la géométrie algébrique ou la question des *structures* géométriques
3. *Lieux* de la géométrie algébrique ou la question du *même* et de l'*autre*
4. Diagramme et remarques synthétiques

Contexte historique *in a nutshell*:

- Les variétés algébriques *abstraites* ont été définies par le mathématicien André Weil et sont définies dans le livre Foundations of Algebraic Geometry en 1946. Weil développe la géométrie algébrique sur des corps de caractéristique quelconque. En particulier, il étudie la théorie de l'intersection en définissant la *multiplicité* d'une intersection locale de deux sous-variétés.

- La notion de schéma (et aussi, d'une certaine manière, celle de champs) est due à Alexandre Grothendieck. Cette notion étends celle des variétés algébriques et fut inventée dans le but de démontrer les conjectures de Weil vers l'année 1958.

- La Géométrie Algébrique Dérivée (dont sont issues les notions de schéma et champs dérivés) fut développée à partir des années 2000 grâce aux travaux de Jacob Lurie, Bertrand Toën et Gabriele Vezzosi (en suivant les directions de mathématiciens comme Carlos Simpson, Maxim Kontsevich, Vladimir Drinfel'd et bien autres) qu'on peux trouver dans

    - Homotopical Algebraic Geometry I & II (Toën-Vezzosi, 2005 & 2008)

    - Higher Topos Theory, Higher Algebra et articles DAG (Lurie, 2009)

  (M. Anel a une *Introduction of the ideas of DAG* très utile pour le mathématicien pensif)

Il y a aujourd'hui une très vaste communauté mathématique de recherches autour de ce sujet!

1 Des variétés topologiques aux variétés géométriques

1.1 Quelques définitions classiques.

Soit Top la catégorie des espaces topologiques (on les supposera toujours séparés et à base dénombrable d'ouverts) et applications continues (notées C^0).

Une *variété topologique* est un espace topologique X localement Euclidien: tout $x \in X$ admet un voisinage ouvert U dans X et un homéomorphisme $\varphi\colon U \to \varphi(U) \in \mathbb{R}^n$. Un tel couple (U, φ) s'appelle carte locale (on peux y penser comme des systèmes de coordonnées) dans X, un recouvrement ouvert de telles cartes s'appelle un C^0-atlas.

On note VarTop la sous-catégorie pleine de Top dont les objets sont les variétés topologiques. Ces objets ont des propriétés topologiques très agréables (paracompacité, compacité locale ,...) et sont les espaces que l'on va munir d'une structure géométrique.

(On peux aussi alternativement demander que X possède un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ tel que pour chaque i $\in I$, il existe un homéomorphisme φ de U_i sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n_i}$, pour un certain entier $n_i \geq 0$ dépendant de i. Cette deuxième définition est légèrement plus générale : elle permet par exemple à l'espace $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}^2$ d'être une variété).

1.2 Variétés géométriques

:

La structure différentielle est définie en exigeant certaines propriétés de régularité des applications de transition entre les cartes. Cette structure permet par exemple de donner une définition globale de la notion d'application différentiable.

Une variété différentielle est une variété topologique munie d'un C^∞-atlas maximal(qui est un C^0-atlas telle que les applications de changement de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ soient des difféomorphismes lisses).

La donnée de tels difféomorphismes lisses consiste en un ajout de structure.

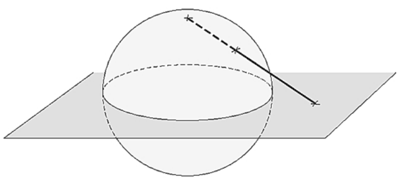
Une variété complexe est définie de façon analogue sur le corps des complexes, avec des applications de changement de cartes qui sont biholomorphes.

Une variété algébrique peut être vue comme un espace topologique muni de cartes locales qui sont des variétés affines, et dont les applications de transition sont des applications polynomiales (on y reviendra).

Exemple: la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une variété topologique de dimension 2.

En effet, on peut la recouvrir des cartes

$$\begin{array}{rcl} \sigma_N\colon \mathbb{S}^2 - \{(0,0,+1)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \dfrac{(x_1, x_2)}{x_3 - 1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \sigma_S\colon \mathbb{S}^2 - \{(0,0,-1)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & -\sigma_N(-x) \end{array}$$



On peut constater que les cartes présentées pour $\mathbb{S}^2$ sont lisses dans leur domaine de définition, $\mathbb{S}^2$, étant une variété topologique, est munie naturellement d'une structure de variété différentiable. On peut aussi décrire une structure de variété complexe, de dimension complexe égale à un (ce qu'on appelle surface de Riemann) sur $\mathbb{S}^2$. Ainsi, $\mathbb{S}^2$ muni de sa structure de surface de Riemann sera notée $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Ainsi, les variétés sont des espaces munis d'un atlas, mais elles ont au moins deux autres descriptions que l'on présentera à l'aide de la notion de faisceau.

1.3 Rappels sur les faisceaux sur un site

Soit $\mathcal{C}$ une ($\mathbb{U}$-petite) catégorie, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $h_{\mathcal{C}}^X := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ l'image de X par le plongement de Yoneda associé à $\mathcal{C}$, $h_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Pr}(\mathcal{C})$, où $\mathrm{Pr}(\mathcal{C})$ est la catégories de préfaisceaux de $\mathcal{C}$.

Définition 1. *Une* topologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$ *est la donnée, pour tout* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *d'une famille, notée* $\mathrm{Cov}(X)$ *et dite couvrante, de sous-foncteurs de* h^X *(c'est à dire; pour tout objet* U *de* X *d'une famille de morphismes* $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$ *qui jouent le rôle des recouvrements), satisfaisant un certain nombre de propriétés traduisant en particulier leur fonctorialité.*

Un site de Grothendieck *est un couple* $(\mathcal{C}, \tau)$ *où* $\mathcal{C}$ *est une catégorie et* τ *est une topologie de Grothendieck. En particulier sous certaines conditions (légèrement plus restrictives) on peux définir une pré-topologie de Grothendieck directement au niveau des morphismes* $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$ *à laquelle on associe ensuite une topologie.*

Les propriétés sont très précisément

1. $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, on a $h^X \in \mathrm{Cov}(X)$;
2. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $\forall u \in \mathrm{Cov}(X)$, on a $f^*(u) = u \times_{h^X} h^Y \in \mathrm{Cov}(Y)$
3. $\forall X \in \mathcal{C}$, $u \in \mathrm{Cov}(X)$, si v est un sous-foncteur de h^X est tel que $f^*(v) \in \mathrm{Cov}(Y)$ pour $Y \in \mathcal{C}$ et $f \in u(Y) \subset \mathrm{Hom}(Y, X)$, alors $v \in \mathrm{Cov}(X)$.

Exemple 2.

1. La catégorie $\mathrm{Top}(X)$ des ouverts d'un espace topologique X.

2. La catégorie des ouverts standard des $\mathbb{R}^n$, pour n variable:

   Soit $\mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})$ la sous-catégorie pleine de VarTop dont les objets sont les (sommes disjointes d') ouverts de $\mathbb{R}^n$, pour n variable. On peut munir $\mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})$ d'une topologie notée τ_{ImOuv}. Le site $(\mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R}), \tau_{\mathrm{ImOuv}})$ sera noté $C^0 - \mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})$.

   En effet, on peut déclarer qu'une famille de morphismes $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ dans $\mathcal{C}$ est une (pré-)famille couvrante si

   - application totale $\coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow U$ est surjective
   - chaque morphisme $U_i \longrightarrow U$ est une immersion ouverte continue (je reviendrai sur ce terme)

   Ceci définit une pré-topologie sur $\mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})$ dont la topologie associée est notée τ_{ImOuv}. Le site $(\mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R}), \tau_{\mathrm{ImOuv}})$ sera noté $C^0 - \mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})$.

Un faisceau sur un espace topologique X est un préfaisceau $F\colon \mathrm{Top}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ avec une propriété de recollement que l'on ne va pas écrire (car on la généralise dans quelques minutes).

Exemple : si X est un espace topologique, alors $C^0(-,\mathbb{R})\colon U \mapsto C^0(U,\mathbb{R})$ est un faisceau d'anneaux sur X, où $C^0(U,\mathbb{R})$ est l'anneau des fonctions C^0

De la même manière si X est une variété différentiable (resp. complexe), alors $C^\infty(-,\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{Hol}(-,\mathbb{C})$) est un faisceau.

On peux définir les variétés de différents types à l'aide de cette notion:

- Une variété différentiable est un espace topologique X muni d'un faisceau $\mathcal{O}_X$ tel que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x dans X tel qu'on ait un isomorphisme $(U,\mathcal{O}_U) \simeq (U_0 \subset \mathbb{R}^n, C^\infty(U_0,\mathbb{R}))$.
- Une variété complexe est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ tel que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x dans X tel qu'on ait un isomorphisme $(U,\mathcal{O}_U) \simeq (U_0 \subset \mathbb{C}^n, \mathrm{Hol}(U_0,\mathbb{C}))$

Dans le cas d'un site $(\mathcal{C},\tau)$, un préfaisceau $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ devient un τ-faisceau si sa valeur en tout objet du site est donnée par les valeurs compatibles sur toute famille couvrante de cet objet. Ceci est équivalent à demander que l'image de tout objet par F soit une certaine limite.

Ainsi, un faisceau sur un site est un foncteur contravariant muni d'une propriété de passage du local au global relativement à une topologie de Grothendieck.

Définition 3. *Soit $(\mathcal{C},\tau)$ un site. Un τ-faisceau $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un préfaisceau tel que*

1. *pour toute (pré-)famille couvrante $\{p_i\colon U_i \longrightarrow U\}$ de τ*
2. *pour toute famille compatible d'elements donnés par $(s_i \in F(U_i))_{i\in I}$ tel que pour tous les morphismes $U_i \xleftarrow{f} K \xrightarrow{g} U_j$ de $\mathcal{C}$ on ait $F(f)(s_i) = F(g)(s_j)$, pour tout $i,j \in I$*

il existe un unique élément $s \in A(U)$ tel que $F(p_i)(s) = s_i$, pour tout $i,j \in I$.

De manière équivalente (si $(\mathcal{C},\tau)$ est donnée par une prétopologie τ) F est un τ-faisceau si pour objet $U \in \mathcal{C}$ et toute famille couvrante $\{p_i\colon U_i \longrightarrow U\}$ de τ on a un isomorphisme

$$F(U) \longrightarrow \lim\left(\prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I^2} F(U_i \times_U U_j)\right).$$

1.4 Trois définitions des variétés topologiques

On pose $\mathcal{C} = C^0 - \mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})$ comme avant. On rappelle que $h_{\mathcal{C}}^X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$.

Ainsi, on peux montrer que pour toute variété topologique X, $h_{\mathcal{C}}^X$ est un faisceau pour la topologie τ_{ImOuv}. Inversement, on peut se demander : quels sont les faisceaux F de $\mathrm{Fais}(\mathcal{C})$ qui sont représentables par une variété topologique X (i.e. F isomorphe à $h_{\mathcal{C}}^X$)?

Réponse: un faisceau $F \in \mathrm{Fais}(\mathcal{C})$ est représentable par une variété topologique X si les bouts d'atlas (pour la topologie de $\mathcal{C}$) de X se recollent *bien* en X tout entier. *Bien* veut ici dire que le recollement a un ensemble de bonnes propriétés $\mathcal{P}_{\mathrm{rep}}$. Un tel recollement sera appelé $\mathcal{P}$-atlas.

Remarquons que $\mathcal{P}$ est un ensemble de propriétés et pas de données supplémentaires.

s'il existe une famille $\{U_i\}_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et un morphisme de faisceaux p: $\coprod_{i \in I} h_{U_i} \longrightarrow F$ tels que:

1. p est un épimorphisme de faisceaux;
2. $\forall i \in I$, le morphisme de faisceaux $h_{U_i} \longrightarrow F$, est une C^0-*immersion ouverte*, c'est à dire:
   a. c'est un monomorphisme,
   b. c'est un homéomorphisme local (comme faisceau).

(Un morphisme $f\colon F \longrightarrow G$ dans $\mathrm{Fais}(\mathcal{C}, \tau)$ est un homéomorphisme local si pour tout $X \in C$, et tout morphisme $h_X \longrightarrow G$, le faisceau $F \times_G h_X$ est représentable par $Y \in \mathrm{VarTop}$, et le morphisme induit $Y \longrightarrow X$ par la projection $F \times_G h_X \simeq h_Y \longrightarrow h_X$ est un homéomorphisme local d'espace topologiques.)

Au total, une **triple** caractérisation des variétés topologiques:

Définition 4. *Une variété topologique est, de manière équivalente:*

1. *un espace topologique* X *(agréable) muni d'un* C^0*-atlas maximal;*
2. *un espace topologique* X *muni d'un faisceau d'anneaux* $\mathcal{O}_X$ *tel que pour tout* $x \in X$ *il existe un voisinage* U *de* x *dans* X *tel qu'on ait un isomorphisme* $(U, \mathcal{O}_U) \simeq (U_0 \subset \mathbb{R}^n, C^0(U_0, \mathbb{R}))$
3. *un* τ_{ImOuv}*-faisceau*

$$\begin{aligned} X(-) \colon (C^0 - \mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{Ens} \\ U &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{VarTop}}(U, X) \end{aligned}$$

avec un certaine nombre de propriétés.

On peux donc remarquer que la catégorie $C^0 - \mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})$ est donc la catégorie des *modèles locaux* (ou affines), sur laquelle sont modelées les variétés topologiques.

Autre remarque : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{VarTop}}(U, X)$ peut être ici regardé comme l'ensemble des U-points de X relativement à VarTop.

Remarques et explications

- il n'y a pas de structure supplémentaire par rapport à la définition d'un espace topologique!
- le foncteur $h\colon \mathrm{VarTop} \longrightarrow \mathrm{Fais}(C^0 - \mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R}))$ est pleinement fidèle dont VarTop s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fais}(C^0 - \mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R}))$ des faisceaux ayant une certaine propriété.
- Ce troisième point de vue est utile par la raison suivante: soit G un groupe (discret) agissant sur une variété topologique $X \in \mathrm{VarTop}$. Par fonctorialité le groupe G agit sur le faisceau h_X et on a donc un « faisceau quotient » h_X / G.

  Quand est-ce que ce faisceau est représentable par une variété topologique?

  Réponse: quand l'action de G sur X est totalement discontinue. Or ceci est trop restrictif et on voudrait pouvoir travailler avec des actions plus générales.

  Par exemple, l'action de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \ni (x,t) \mapsto x + t \in \mathbb{R}$ est libre mais pas totalement discontinue. Si bien le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas un objet raisonnable du point de vue géométrique (topologie grossière et $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas un homéo local), le faisceau quotient $h_{\mathbb{R}} / \mathbb{Q}$ est plus intéréssant car d'une certaine façon localement isomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}$.

Conclusion:

On peut élargir la catégorie des variétés topologiques en ne demandant, lorsqu'on les voit comme des faisceaux F de $C^0 - \mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})$, qu'ils aient des propriétés $\mathcal{P}'_{\mathrm{rep}} \subset \mathcal{P}_{\mathrm{rep}}$ plus souples qu'auparavant.

En l'occurence:

1. p est un épimorphisme de faisceaux;
2. $\forall i \in I$, le morphisme de faisceaux $h_{U_i} \longrightarrow F$ appartient est un homéomorphisme local (on ne demande plus à ces morphismes d'être des monomorphismes)

La donnée de ce bon recollement sera appelée $\mathcal{P}'$-atlas de F .

Ici $\boldsymbol{P}$ est la collection des homéomorphismes locaux dans $C^0 - \mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})$.

Les objets représentés par ce type de faisceaux seront désormais appelés *espaces géométriques*. En particulier, les espaces quotients voulus (obtenus par l'action libre et pas forcément totalement discontinue d'un groupe G discret sur une variété topologique X) sont des espaces géométriques.

Ce phénomène a des significations analogues dans le cas des variétés géométriques!

1.5 Contextes géométriques, variétés géométriques

Nous avons vu qu'une variété géométrique s'obtient à partir d'une variété topologique en la munissant d'une classe de morphismes supplémentaires (fonctions lisses, holomorphes, polynomiales...). Nous allons caractériser ces variétés du point de vue faisceautique.

Jusqu'à présent on avait pris $\boldsymbol{P}$ comme étant un classe de morphismes particuliers de $\mathcal{C}$ (en l'occurence les homéomorphismes locaux). On peux étendre la fonction de cette classe $\boldsymbol{P}$ et en donner une définition apte à nous permettre de travailler avec les exemples géométriques que nous avons sous la main (variétés géométriques et espaces géométriques usuels).

Définition 5. *Un contexte géométrique est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}$, d'une (pré)topologie τ sur $\mathcal{C}$, et d'une classe de morphismes $\boldsymbol{P}$ dans $\mathcal{C}$ qui vérifient[1] un certain nombre de conditions qui sont toutes naturelles et traduisent des comportements usuels en géométrie.*

(entre ces conditions on demande que τ soit sous-canonique, que $\boldsymbol{P}$ soit stable par composition et changement de base, en particulier, si $(\mathcal{C}, \tau, \boldsymbol{P})$ est un contexte géométrique, alors le plongement de Yoneda associé commute aux sommes finies.)

1. Voir le cours de Master *Champs Algébriques* de B. Toën.

Ainsi, de manière générale, pour $(\mathcal{C}, \tau, \boldsymbol{P})$ un contexte géométrique, on a:

Définition 6. *Une $(\mathcal{C}, \tau, \boldsymbol{P})$-variété est un faisceau $F \in \mathrm{Fais}(\mathcal{C}, \tau)$ qui est $(\tau, \boldsymbol{P})$-localement représentable.*

Ceci veut dire: il existe une famille $\{U_i\}_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et un morphisme de faisceaux p: $\coprod_{i\in I} h_{U_i} \longrightarrow F$ tels que:

1. *p est un épimorphisme de faisceaux;*
2. *$\forall i \in I$, le morphisme de faisceaux φ_i: $h_{U_i} \longrightarrow F$, est une* immersion ouverte *dans $\boldsymbol{P}$.*

Exemples:

- Les $(\mathrm{Top}, \tau_{\mathrm{ImOuvC}^0}, \text{homéo locaux})$-variétés sont les espaces topologiques;
- Les $\left(C^0_{\mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})}, \tau_{\mathrm{ImOuvC}^0}, \text{homéo locaux}\right)$-variétés sont les variétés topologiques;
- Les $(C^\infty_{\mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{R})}, \tau_{\mathrm{ImOuvC}^\infty}, \text{difféo locaux})$-variétés sont les variétés différentielles;
- Les $\left(C^{\mathrm{hol}}_{\mathrm{Ouv}_{\mathrm{std}}(\mathbb{C})}, \tau_{\mathrm{ImOuvC}^\infty}, \text{hol lisses}\right)$-variétés sont les variétés holomorphes.

Si l'on ne demande plus aux φ_i que d'être des éléments généraux de $\boldsymbol{P}$, on trouve la notion générale d'espace géométrique, qui étendent de manière très intéressante les variétés ci-dessus.

2 Les *modèles locaux* de la géométrie ou la question des *structures* géométriques

Problème: la théorie que je présenterai n'a pas encore été aussi dévelopée pour les contextes autres que celui de la géométrie algébrique. On va donc présenter son contexte *algébrique*.

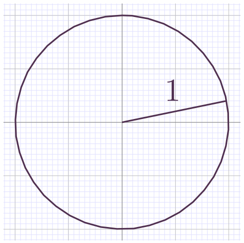
2.1 Les variétés algébriques affines et les schémas

Une variété algébrique (affine) X est, de manière informelle, l'ensemble des racines communes d'un nombre fini de polynômes en plusieurs indéterminées $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

X est l'ensemble des solutions du système $\{P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ c'est à dire

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n : P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \forall i\}$$

Exemple: la courbe $x^2 + y^2 = 1$ peut être représentée par



Attention: on ne travaille pas forcément sur $\mathbb{R}$ donc cette représentation est ambigue.

Pour munir X d'une structure géométrique on se demande alors quelles sont les « fonctions algébriques sur X ». Ceci revient à determiner son « faisceau de fonctions », en particulier sa structure.

Dans le cas de $\mathbb{C}^n$, les fonctions algébriques sont les polynômes en $x_1, \ldots, x_n$ et l'anneau des fonctions algébriques sur X est alors $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] / (P_1, \ldots, P_r)$ qui est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative de type fini.

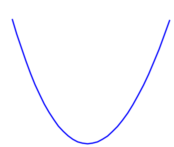
Inversement, si A est une telle $\mathbb{C}$-algèbre, on peux écrire $A \simeq \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m] / (Q_1, \ldots, Q_s)$ et reconstruire une variété algébrique dans $\mathbb{C}^m$ d'équation $\{Q_i(y_1, \ldots, y_m) = 0\}_{1 \leqslant i \leqslant s}$.

On a donc une correspondance:

$$\text{variétés algébriques affines sur } \mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{C}\text{-alg. commutatives de type fini.}$$

Pour avoir une idée:

$$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}[x, y]$$



$$\longleftrightarrow \mathbb{R}[x, y] / (y - x^2)$$

La théorie des schémas affines vient étendre ceci en considérant que tout anneau commutatif A correspond à un objet géométrique X, qu'on appellera schéma affine, de sorte que A soit l'anneau des fonctions algébriques sur X.

Cette opération sera possible de la manière suivante.

Pour A anneau commutatif, l'ensemble $\mathrm{Spec}(A)$ des idéaux premiers de A est muni d'une topologie (dite de Zariski) telle que si I est un idéal de A, les fermés $V(I)$ de $\mathrm{Spec}(A)$ sont les ensembles d'idéaux premiers de A contenant I.

- $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ s'identifie à la réunion de 0 avec l'ensemble des nombres premiers $p > 1$. Les nombres premiers p correspondent aux idéaux premiers $p\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$, et 0 à l'idéal nul.
- Si K est un corps commutatif, $\mathrm{Spec}\,K[X]$ s'identifie à la réunion de 0 et des polynômes premiers unitaires sur K. Dans le cas où K est algébriquement clos, $\mathrm{Spec}\,K[X]$ s'identifie à la réunion disjointe d'un point ω (pour l'idéal nul) et du corps K.

En particulier, il y a une correspondance entre $\mathbb{Z}[x, y]$ et le plan affine $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x, y])$.

Intuitivement:

- Un schéma affine $\simeq$ variété algébrique affine + idéaux premiers non maximaux dans son spectre (dont l'idéal nul).
- Ces idéaux correspondent aux points génériques non fermés.

Au total:

L'espace topologique $\mathrm{Spec}(A)$ possède un faisceau (d'anneaux commutatifs) structural $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ qui lui est naturel (et qu'on va pas décrire).

Le couple $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ est alors appelé schéma affine.

Ainsi donc, un schéma est un couple (c'est un espace localement annelé) $(X, \mathcal{O}_X)$ localement isomorphe à un schéma affine $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$.

Slogan. Les schémas sont obtenus par recollement d'anneaux commutatifs.

En particulier, $\mathrm{Spec}(-)$ est une équivalence entre la catégorie opposée Aff des schémas affines et la catégorie $\mathrm{cAnneaux}$ des anneaux commutatifs.

Question: Qu'est ce qu'on a gagné du point de vue géométrique?

2.2 Des variétés algébriques aux schémas

...parce qu'elles ont des intersections non transverses.

Soit $X\!:=\!\mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine. Il y a une correspondance parfaite

$$\text{idéaux } I \text{ de } A \ (I\cdot A = A\cdot I \subset I) \ \longleftrightarrow \ \text{sous-schémas fermés } Y = V(I) \subset X$$

La structure de schéma de l'ensemble $V(I)$ est obtenue en identifiant $V(I)$ à $\mathrm{Spec}(A/I)$.

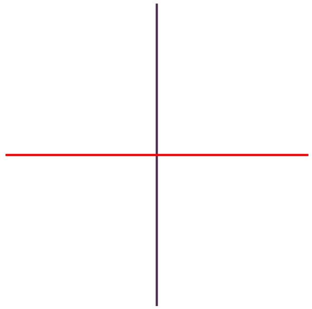
En particulier, comme tout corps commutatif a un seul idéal maximal (et donc un seul idéal premier), le spectre d'un corps et réduit à un seul point (vu comme espace topologique). Ainsi donc, les points d'un schéma sont (les spectres de) corps.

Soit $Z = V(J)$ sous-schéma fermé correspondant à un autre idéal $J \subset A$, alors $Y \cap Z$ est par définition le sous-schéma $Y \cap Z = V(I+J) \subset X$, correspondant à l'idéal $I+J$ de A.

Vu comme ensemble, (l'image de) $Y \cap Z$ consiste en l'idéal premier contenant I et J mais vu comme schéma, $Y \cap Z$ contient beaucoup plus d'information.

Exemple: les courbes dans $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x, y]) = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, qui est le plan affine sur $\mathbb{R}$.

On commence par l'intersection de deux lignes dans le plan

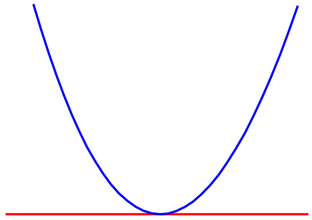


L'intersection de $V(x) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0\}$ et $V(y) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0\}$ dans le plan consiste en l'origine. Algébriquement via la correspondance entre sous-schémas et anneaux quotients, ceci se calcule comme un produit tensoriel:

$$C \colon = \mathbb{R}[x, y]/(x) \underset{\mathbb{R}[x, y]}{\otimes} \mathbb{R}[x, y]/(y) = \mathbb{R}[x, y]/(x, y) = \mathbb{R}.$$

Ainsi donc $C = \mathbb{R}$ est de dimension (réelle) égale à 1 et $\mathrm{Spec}(C) = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}) = \mathrm{pt}$ est de dimension nulle. L'intersection de A et B est de dimension 0, qui est bien la dimension d'un point.

...et pour l'intersection suivante, qui ressemble intuitivement à un point « gros »:



Algébriquement, on intersecte donc $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ et $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ par le produit tensoriel:

$$C := \mathbb{R}[x, y]/(y - x^2) \underset{\mathbb{R}[x,y]}{\otimes} \mathbb{R}[x, y]/(y) = \mathbb{R}[x, y]/(y - x^2, y) = \mathbb{R}[x]/(x^2) = \mathbb{R} \oplus x\mathbb{R}$$

Ainsi $C = \mathbb{R} \oplus x\mathbb{R}$ est de $\mathbb{R}$-dimension égale à 2 et $\mathrm{Spec}(\mathbb{R} \oplus x\mathbb{R})$, comme espace topologique, est toujours de dimension nulle.

Conclusion: le faisceau structural d'un schéma contient des informations géométriques supplémentaires.

De la même manière si $Z_n := V(y - x^n) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^n\}$, on voit bien que pour toute valeur $n \geqslant 1$, l'intersection $B \cap Z_n$ consiste juste en l'origine, qui lui même correspond à l'idéal maximal (x, y). Cependant pour chaque valeur de n, l'intersection de $B \cap Z_n$ comme schéma sera différente: l'anneau de fonctions du sous-schéma $B \cap Z_n$ est

$$\mathbb{R}[x] / (x^n)$$

qui est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension n, avec radical nilpotent[2] $(x) / (x^n) \subset \mathbb{R}[x] / (x^n)$ de dimension $n - 1$. La croissance du radical nilpotent avec n reflète le fait géométrique que la courbe $y = x^n$ est *d'autant plus tangente* à l'axe $y = 0$ que n est grand.

La géométrie des schémas est ainsi plus riche, on a alimenté nos structures géométriques de sorte qu'elles puissent détecter les points « gros ».

Slogan. La théorie des schémas est une extension (géométrique) de la théorie des variétés algébriques par adjonction de nilpotents au niveau de son faisceau structural.

2. Qui par définition est l'ensemble des éléments nilpotents de A: $\mathrm{Nil}(A) := \{x \in A \mid \exists n \geqslant 0, x^n = 0\}$. En particulier, $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A, inclus dans tout idéal premier de A. Il est donc « vu » par la géométrie de $\mathrm{Spec}(A)$.

2.2.1 Des schémas affines aux schémas affines dérivés

...parce qu'ils ont des auto-intersections.

Etudions les *auto-intersections:*

Algébriquement, l'intersection se traduit par le produit tensoriel:

$$\mathbb{R}[x,y]/(y) \underset{\mathbb{R}[x,y]}{\otimes} \mathbb{R}[x,y]/(y) = \mathbb{R}[x,y]/(y) = \mathbb{R}[x].$$

Problème: $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x])$ n'a pas la dimension attendue! Sa dimension est 1 mais on voudrait trouver 0[3].

Solution: Prendre un produit fibré *dérivé*. On a vu que les produits fibrés de schémas affines ne sont autre chose que des produits tensoriels d'algèbres commutatives. Dériver cette construction veut ici dire considérer des produits tensoriels d'algèbres commutatives différentielles graduées (*cdgas*) et trouver une manière d'associer à une cdga, un espace topologique, son spectre, comme on avait fait avec les algèbres commutatives.

3. La raison derrière ce fait nous ferait entrer dans une discussion techniques, très utile pour le mathématicien pensif mais guère pour le musicien pensif...

2.3 Aparté 1: les cdga

Soit k un corps de caractéristique 0. Une k-algèbre commutative différentielle graduée (cdga) est essentiellement une algèbre munie d'une graduation $A = \bigoplus_i A_i$ commutative et ayant une différentielle $A \to A$ de degré -1.

Pour des cdga, déclarer qu'elles peuvent être comptées pour une si elles sont isomorphes est une condition trop restrictive, on va l'affaiblir en la notion de quasi-isomorphisme.

Formellement, c'est algèbre graduée et commutative (par rapport à la graduation): la multiplication satisfait la convention de Koszul $yx = (-1)^{\deg(x)\deg(y)} xy$. Ainsi, la multiplication est anticommutative pour les degrés impaires et commutative sinon. On notera $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$ pour la cagétorie des cdga graduées négativement.

Exemple : si K est commutatif, l'anneau de polynômes en plusieurs indéterminées $K[X_1, \dots, X_n]$, où les éléments homogènes de degré n sont les polynômes homogènes de degré n a une structure de cdga.

Deux cdgas sont quasi-isomorphes s'il existe un morphisme entre les deux induisant un isomorphisme en cohomologie. Cette notion est moins restrictive que de demander à deux cdga d'être isomorphes!

Toute algèbre commutative peut être vue comme une cdga concentrée en degré 0.

Soit $B \longrightarrow A_1$ et $B \longrightarrow A_2$ deux morphismes de cgdas. On peux essayer de considérer leur produit tensoriel $A_1 \underset{B}{\otimes} A_2$ mais si on prends $A_1 \sim B_1$ et $A_2 \sim B_2$, en général il n'est pas vrai que $A_1 \underset{B}{\otimes} A_2 \sim B_1 \underset{B}{\otimes} B_2$. Pour contrer ce problème, on définit leur *produit tensoriel dérivé* qui est

$$A_1 \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} A_2 := \grave{A}_1 \underset{B}{\otimes} A_2$$

où $\grave{A}_1$ est une cdga appelée « résolution » de A_1 c'est-à-dire une cdga quasi-isomorphe à A_1 mais avec de bonnes propriétés en plus. Heureusement, dans la catégorie $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$ des algèbres différentielles graduées commutatives avec degrés négatifs, de telles résolutions existent toujours. En effet, tout morphisme $B \longrightarrow A$ se factorize par une telle résolution i.e. donne un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & A \\ \tilde{A}_1 \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

Ainsi donc, pour que notre théorie géométrique soit compatible avec la notion d'auto-intersection, nous aurons besoin de considérer maintenant des spectres de cdgas! Mais quels sont les objets géométriques sous-jacents à une telle considération? Avant d'y répondre revenons à notre exemple de départ.

Petit aparté pour le mathématicien. Ici le bon choix de résolution de A_1 consiste à prendre $\tilde{A}_1$ tel que

1. le quasi-isomorphisme $\tilde{A}_1 \longrightarrow A_1$ est surjectif degré par degré;
2. le morphisme $B \longrightarrow \tilde{A}_1$ est *semi-libre*.

La propriété de factorisation qu'on vient de décrire est l'ombre de ce qu'on appellera la structure de modèles projective de la catégorie $\mathbf{cdga}_{\leqslant 0}$.

Ainsi donc, le produit fibré dérivé des sous-schémas affines dérivés $X_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ et $X_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$ de $Y = \mathrm{Spec}(B)$ est alors

$$X_1 \overset{\mathbb{R}}{\underset{Y}{\otimes}} X_2 := \mathrm{Spec}\left(A_1 \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} A_2 \right).$$

En particulier,

- $H^0\left(A_1 \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} A_2 \right)$ doit être vu comme l'intersection classique;
- Les groupes $H^*\left(A_1 \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} A_2 \right)$ controllent le *défaut de transversalité*.

Avec cette définition, revenons donc à l'exemple de l'auto-intersection d'une ligne dans le plan, maintenant vue du point de vue dérivé. On veut calculer

$$A_1 \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} A_2 := \mathbb{R}[x] \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathbb{R}[x,y]}{\otimes}} \mathbb{R}[x]$$

où l'on voit $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}[x,\, y]$ comme des cdga. On pose $\widetilde{\mathbb{R}[x]} := \mathbb{R}[x,\, y,\, \xi]$, où ξ est une variable de degré (cohomologique) -1 et avec une différentielle déterminée par $d(x) = d(y) = 0$ et $d(\xi) = y$.

Ainsi donc,

$$\mathbb{R}[x] \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathbb{R}[x,y]}{\otimes}} \mathbb{R}[x] = \widetilde{\mathbb{R}[x]} \underset{\mathbb{R}[x,y]}{\otimes} \mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x,y,\xi] \underset{\mathbb{R}[x,y]}{\otimes} \mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x,\xi]$$

avec différentielle déterminée par $d(x) = d(\xi) = 0$.

La notion de produit tensoriel dérivé nous permet de démontrer que la dimension « virtuelle » du schéma affine *dérivé* auto-intersecté est bien 0 comme voulu. On l'obtient comme la différence entre le nombre de générateurs paires et impaires.

En particulier, on peut aussi vérifier que l'intersection usuelle de deux schémas affines différents donne le même résultat que dans le cas des schémas classiques (i.e. non dérivés).

On considère à nouveau l'intersection des lignes $\{y=0\}$ et $\{x=0\}$. Leur intersection dérivée est:

$$\mathbb{R}[x] \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathbb{R}[x,y]}{\otimes}} \mathbb{R}[y] = \widetilde{\mathbb{R}[x]} \underset{\mathbb{R}[x,y]}{\otimes} \mathbb{R}[y] = (\mathbb{R}[y,\xi], d(y)=\xi) \cong \mathbb{R}.$$

Ainsi, on a tranformé la difficulté d'éviter les auto-intersections dans la théorie en la difficulté de trouver une bonne résolution pour notre cdga.

Il existe une catégorie de schémas dérivés, contenant la catégorie des schémas et ayant des produits fibrés.

En conclusion,

1. Il est intéréssant de penser à des cdg-anneaux comme les « anneaux de fonctions » d'un objet géométrique dont le modèle locale - les affines de l'objet - sont les schémas affines dérivés, qui se comportent bien vis à vis des auto-intersections.
2. On a gagné le fait de pouvoir intégrer dans notre théorie les singularités des auto-intersections (et donc de pouvoir définir nos notions géométriques dans ces lieux singuliers!).

Autres remarques:

1. On a pour une cdga A un morphisme $A \to H^0(A)$ qui tue les éléments de degré supérieur et permet de voir un schéma comme troncation d'un schéma dérivé.
2. Les points d'un schéma dérivé sont toujours en correspondance avec les corps (concentrés en degré 0) : un schéma dérivé n'a pas plus de points qu'un schéma classique!

Question (importante): Ou se situe donc l'information géométrique supplémentaire?

Réponse: Dans son espace tangent! Il n'est plus juste un espace vectoriel mais un complexe de chaines

$$T_0 \to T_{-1} \to T_{-2} \to \cdots .$$

Conclusion: les points d'un schéma dérivé sont des grossissements *infinitésimaux* des points de son schéma classique sous-jacent.

2.4 Aparté 2: les catégories de modèles

On peut se demander si $\operatorname{Spec}\left(A_1 \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} A_2\right)$ est bien défini. En effet, si on prends une autre résolution de A_1 qui lui est quasi-isomorphe, de quelle manière on peux considérer que $\operatorname{Spec}\left(A_1 \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} A_2\right)$ est le même? La définition de $\operatorname{Spec}\left(A_1 \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} A_2\right)$ dépend du choix d'un représentant dans la classe de quasi-isomorphismes de A_1?

Ce sera précisément le rôle de l'algèbre homotopique de résoudre ce problème! En effet, $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$ admet ce qu'on appelle une structure de *catégorie de modèles*.

Une catégorie de modèles est une catégorie munie (entre autres) de 3 classes distinguées de morphismes (appelés fibrations, cofibrations et équivalences faibles) satisfaisant un certain nombre de propriétés. Ces propriétés permettent entre autres de construire ce qu'on appelle la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles.

La catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(M)$ d'une catégorie de modèles M est la localisation de M en les équivalences faibles : on l'obtient à partir de M en inversant formellement les équivalences faibles. En particulier, $\mathrm{Ho}(M)$ et M ont les mêmes objets et le fait d'inverser les e.f. revient à travailler « à homotopie près ».

Les catégories homotopiques des catégories de modèles « tuent » les homotopies supérieures. Ce que la catégorie de modèles permet en plus, c'est de travailler sur ces homotopies de manière explicite grâce aux résolutions.

Exemple 7. La catégorie Top admet naturellement une structure de catégorie de modèles, dont la catégorie homotopique s'identifie à la théorie usuelle d'homotopie pour un espace topologique.

Dans le cas de $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$, les équivalences faibles seront les quasi-isomorphismes.

Ainsi donc, pour répondre à la question: demander que l'objet $\mathrm{Spec}\left(A_1 \overset{\mathbb{L}}{\underset{B}{\otimes}} A_2\right)$ ne dépende pas du choix de la résolution de A_1 revient précisément à travailler dans $\mathrm{Ho}(\mathrm{cdga}_{\leqslant 0})$.

Donner un cadre conceptuel d'une telle construction (qui n'est donc définie qu'à homotopie près) va entrainer une refonte de la notion de site et de topos: on a besoin que $\mathrm{Ho}(\mathrm{cdga}_{\leqslant 0})$ ait une structure de site ou encore que $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$ ait une structure de *site de modèles*.

Ainsi donc, pour pouvoir intégrer ces auto-intersections dans notre géométrie on doit aller refonder même la notion (à mon avis pré-géométrique) de topos dans toute sa généralité! Ainsi donc, comme pour le cas des schémas, ceci sera à l'origine d'un gigantesque travail pour refonder la géométrie via l'utilisation des ∞-catégories qui prendra des allures (en ordre de grandeur) assez similaires à celles des SGA!

Un schéma dérivé est donc un espace topologique muni d'un faisceau en cdgas dont la « troncation » au degré 0 est un schéma classique.

Définition 8. *Un schéma dérivé est une paire* $X = (X_0, \mathcal{O}_X)$ *où* $(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ *est un schéma et* $\mathcal{O}_X$ *est un faisceau de* $\mathrm{cdg}_{\leqslant}$*-algèbres sur* X_0 *tel que* $H^0(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X_0}$ *et* $H^i(\mathcal{O}_X)$ *est un* $\mathcal{O}_{X_0}$*-module quasi-cohérent pour tout* $i < 0$*.*

(Rappel: si X est un schéma, un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M}$ est quasi-cohérent si sa restriction $\mathcal{M}_U$ à un sous-schéma affine ouvert $\mathrm{Spec}(A) = U \subset X$ est le $\mathcal{O}_U$-module associé au A-module M_U.)

Pour le mathématicien non familier de la géométrie algébrique, on peut penser à un schéma dérivé comme une $\mathbb{Q}$-variété différentielle négativement graduée[4].

En particulier tout schéma affine dérivé est un schéma dérivé et il y a une catégorie des schémas dérivés qui satisfait une propriété de factorisation similaire à celle des résolutions de cdgas. En particulier les produits fibrés dérivés (c'est à dire les intersection de schémas non nécessairement affines) ont toujours un sens dans cette catégorie.

Attention: pour qu'une telle construction ait vraiment un sens, on devrait dire ce que sont les morphismes de schémas dérivés. On ne le fera pas car ce serait entrer dans le monde des catégories supérieures et l'algèbre homotopique, dont on dira quelques mots dans un moment.

---

4. En faisant attention au fait que la catégorie des $\mathbb{Q}$-variétés ne possède pas les morphismes appropriés. On doit *localiser* cette catégorie selon des équivalences faibles appropriées.

3 Les lieux de la géométrie ou la question du *même* et de l'*autre*

3.1 Foncteurs de points et problèmes de modules

«To do geometry you do not need a space,

you only need an algebra of functions on this *would-be* space »

- A. Grothendieck

La question de la classification en géométrie vient d'une recherche de savoir à quelle condition on peut considérer que deux objets géométriques peuvent être considérés comme *le même*.

Pour expliquer ceci, revenons à la théorie des schémas. Comme pour les variétés topologiques et géométriques, tout schéma X (et donc toute variété algébrique) définit un foncteur appelé foncteur des points de X:

$$\begin{array}{rcl} X(-) \colon (\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ S = \mathrm{Spec}(A) & \longmapsto & X(S) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Schémas}}(S, X) = \{''S\text{-points dans } X''\} \end{array}$$

Ce foncteur formalise l'idée initiale que, essentiellement, un schéma est l'ensemble de solutions d'une equation, ensemble qui peut varier selon l'espace dans lequel on cherche des solutions comme l'illustre l'exemple suivant.

Soit $A = \boldsymbol{k}[x]/(x^2+1)$ et considérons $X = \mathrm{Spec}(A) = \{x^2+1=0\} \subset \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}[x])$. Alors comme X est un schéma affine on a :

$$\begin{aligned} X(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Schémas}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), X) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aff}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), \mathrm{Spec}(A)) \\ &\backsimeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Anneaux}}(A, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Ainsi donc, $X(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) = \{\mathbb{C}\text{-points dans } X\} = \{\text{solutions de } x^2+1=0 \text{ dans } \mathbb{C}\} = \{x \in \mathbb{C} : x^2 = -1\}$. On trouve, $X(\mathrm{Spec}(\mathbb{C})) = * \coprod *$ c'est à dire $X(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$ est la réunion disjointe de deux points, en l'occurence la paire $\{\pm i\}$. De même on a $X(\mathrm{Spec}(\mathbb{R})) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset$.

Remarquons que, comme espace topologique, $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ est un point! En un certain sens, un schéma X est le résultat que l'on obtient quand un objet géométrique - ici les $\mathbb{C}$-points - viennent *habiter*, *occuper* un objet déterminé et cette occupation a une structure particulière - ici ils viennent occuper l'espace des solutions de l'équation $x^2 = -1$. Ainsi donc, les $\mathbb{C}$-points d'un schéma ont une structure d'*ensemble*.

Une question se pose : peut-on décrire les schémas comme les « variétés » d'un contexte géométrique particulier? quand est-ce qu'un foncteur

$$F\colon (\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

est-il le foncteur de points d'un schéma?

Comme déjà vu, le schéma $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ est solution du « problème de modules »

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Anneaux} & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ A & \longmapsto & A \end{array}$$

qui envoie un schéma affine $X = \mathrm{Spec}(A)$ vers l'ensemble sous-jacent à l'anneau A.

Le contexte géométrico-algébrique qu'on utilisera est le triplet $\mathcal{C}_{\mathrm{GA}} := (\mathrm{Aff}, \tau_{\text{ét}}, \mathrm{lisse})$ où

- Aff est la catégorie opposée à celle des anneaux commutatifs;
- $\tau_{\text{ét}}$ est la topologie dite étale, donnée par des recouvrements dits étales.
- lisse est la classe de morphismes lisses.

Intuitivement, les morphismes lisses sont des analogues algébriques des submersions (e.g. C^∞), et les morphismes étales des analogues des difféomorphismes locaux.

(accesoirement, la topologie étale est une sous topologie de la topologie fpqc qui définit aussi une topologie de Grothendieck qui est sous-canonique)

Théorème 9. *Les $\mathcal{C}_{\mathrm{GA}}$-variétés sont les schémas.*

Il y en a d'autres contextes géométrico-algébriques très intéréssants selon que l'on prenne par exemple une topologie plus ou moins fine que la topologie étale.

Ainsi, on a deux descriptions des schémas.

Un schéma est, de manière équivalente:

1. Un couple $(X, \mathcal{O}_X)$ (espace localement annelé) localement isomorphe à un schéma affine.
2. Un faisceau $F \in \mathrm{Fais}(\mathrm{Aff})$ qui est $(\mathrm{Aff}, \text{ét}, \mathrm{lisse})$-localement représentable.

   C'est à dire, tel qu'il existe une famille $\{U_i\}_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et un morphisme de faisceaux $p\colon \coprod_{i\in I} h_{U_i} \longrightarrow F$ tels que:

   a. p est un épimorphisme de faisceaux;
   b. $\forall i \in I$, le morphisme de faisceaux $h_{U_i} \longrightarrow F$, est une *immersion ouverte* de Zariski, c'est à dire:

      i. c'est un monomorphisme,
      ii. c'est un morphisme étale (comme morphisme de faisceaux).

Quelques remarques sur la notion de colimite:

- pour un site $(\mathcal{C}, \tau)$, la catégorie $\mathrm{Pr}(\mathcal{C}, \tau)$ peut être vue comme la catégorie construite à partir des colimites formelles d'objets de $\mathcal{C}$ et le fait de considérer des faisceaux c'est imposer que des bouts d'atlas se recollent correctement (ceci tient au fait que le plongement de Yoneda ne préserve pas les limites de Aff). Ainsi, pour construire un schéma, on part d'un affine, on construit des limites (sous schémas correspondant aux produits tensoriels) puis des colimites (pour recoller les bouts d'affines).

- Les atlas distingués définissent une topologie de Grothendieck et la complétion est la catégorie des faisceaux d'ensembles pour cette topologie. Cette complétion est très similaire à la complétion de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$: un faisceau est très proche d'une coupure de Dedekind et les faisceaux sont définis comme colimites formelles de manière analogue à la définition des réels comme limites formelles de suites.

Conclusions: d'une part les schémas affines sont définis individuellement par les anneaux, d'autre part les schémas généraux (n'ayant pas suffisamment de fonctions) sont définis seulement de manière relative aux schémas affines et les outils de la théorie des catégories (dont les limites et les colimites) nous permettent de travailler avec eux comme des collections d'objets plutôt que des objets individuels. Très exactement, ce sont des collections d'*ensembles*.

Question: comment ces collections sont représentées par *un* schéma? quel est ce type d'*un*?

Vus comme représentants de certains faisceaux, les schémas consistent en une réponse unifiée au problème de classification géométrique qui consiste à étudier:

1. Au niveau des objets: quels sont les objets géométriques que l'on voudrait décrire ou paramétrer? Ici les schémas affines.
2. Au niveau des équivalences: quand peut-on identifier deux de nos objets et selon quel type d'identification? Ici l'égalité ensembliste et correspondante aux isomorphismes d'anneaux.
3. Au niveau des familles: comment va-t'on permettre à nos objets de varier? Cette question est plus subtile.

Comme structure catégorielle, on est face à un foncteur

$$\mathcal{F}: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

où $\mathcal{C}$ est une catégorie d'affines. Pour un objet $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, on dit que $\mathcal{F}(M)$ est une famille d'objets géométriques paramétrisés par M.

Problème : beaucoup de problèmes géométriques se traduisent par la classification de familles dont le foncteur ci-dessus correspondant n'est pas représentable par un schéma! La théorie des champs viendra donc répondre (partiellement) à ce problème.

3.2 Des schémas aux champs

...parce qu'ils ont des automorphismes

On a vu que le passage des schémas affines aux schémas affines dérivés consiste à changer la manière dont on calcule des limites, traduites par leurs quotients en termes d'anneaux. Ensuite, pour avoir un objet non-nécéssairement affine, on construit des colimites. Le passage des schémas vus comme faisceaux vers les champs (algébriques) viendra du fait de changer la manière dont on prends ces colimites. Pour cela, il nous faudra le langage des catégories supérieures.

Revenons sur le cas de l'action d'un groupe (discret) sur un espace topologique. Nous avons vu que si l'action n'est pas totalement discontinue, notre « foncteur de points » n'est pas représentable par une variété. Une première réponse pour faire de la géométrie avait été donnée par l'introduction des dits espaces géométriques.

Question: Qu'est ce qui se passe pour des quotients plus généraux, où l'action aurait des stabilisateurs?

Déjà il s'agira pas d'assouplir les conditions de représentabilité. En effet, vu que notre foncteur de points classifie de manière ensembliste des classes d'isomorphismes d'objets et que ces objets viennent avec une action, la présence éventuelle d'automorphismes d'objets est une information nouvelle que les ensembles ne seront pas capables de retenir! Ainsi donc, les espaces représentés par ces foncteurs sont « grossiers » et peu signifiants géométriquement.

La réponse à cette question consiste en classifier les familles non pas en des ensembles et à isomorphisme près, mais *avec* leurs isomorphismes. Formellement, ceci nous amène à considérer des « foncteurs »

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Groupoides} \\ M & \longmapsto & \begin{cases} \text{Objets: objets à classifier} \\ \text{Morphismes: isomorphismes des objets à classifier} \end{cases} \end{array}$$

Or ceci est ce qu'on appelle un *pseudo-foncteur*: Groupoides est en fait une 2-catégorie.

En particulier, la composition n'est définie qu'à unique isomorphisme près!

Pour cela donc il faut recourir au langage des 2-catégories, théorie au passage mise au point (entre autres) par un habitué du séminaire, le mathématicien Jean Bénabou.

Un champs joue le rôle de faisceau dans ce contexte : c'est un foncteur $(\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Groupoides}$ avec une propriété local-au-global faible (on recolle des objets à isomorphisme près) par rapport à la topologie étale.

Les champs algébriques seront donc les champs localement représentables relativement à des contextes géométrico-algébriques: ce sont les champs quotients de groupoides de type particulier (lisses, étales).

Question: Comment classifier des objets géométriques pour lesquels la notion d'équivalence n'est pas celle de l'égalité ni même celle des isomorphismes?

Nous pouvons en fait aller plus loin et remplacer des groupoides pour une bonne notion de *groupoide supérieur* qui garde l'information des automorphismes supérieurs (grosso-modo des automorphismes d'automorphismes et automorphimes d'automorphismes entre automorphismes et ainsi de suite).

Intuitivement, un ∞-groupoide est une ∞-catégorie dont tous les n-morphismes sont des équivalences ($n \geqslant 1$). Dans une 0-catégorie (un ensemble) les équivalences sont les égalités. Dans une 1-catégorie, les équivalences sont les isomorphismes, dans la 2-catégorie Cat des (petites) catégories, les 2-équivalences sont les équivalences de catégories.

Ici les *bons* modèles de ∞-groupoides qu'on prends sont les complexes de Kan, qui sont les objets fibrants de la catégorie des ensembles simpliciaux préalablement munie d'une structure de modèles telle que sa catégorie homotopique est équivalente à la catégorie homotopique des espaces topologiques (non pathologiques).

Les ∞-groupoides seront susceptibles d'accueillir les « auto-équivalences supérieures » des objets que l'on classifie. Pour simplifier, on va noter sEns pour la catégorie qui admet des bons modèles des ∞-groupoides.

De nouveau, la manière de travailler avec eux à equivalence près consistera à travailler directement dans leur catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathrm{sEns})$ qui est équivalente (on l'a choisie pour) à $\mathrm{Ho}(\mathrm{Top})$.

3.3 ∞-champs

Les ∞-champs sont aux faisceaux ce que les ∞-groupoides sont aux ensembles. Ce sont des foncteurs $\mathfrak{X}\colon (\mathrm{Aff})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{sEns}$ qui satisfont

1. $\mathfrak{X}$ prends ses valeurs en les bons ∞-groupoides (les objets fibrants de sEns)
2. $\mathfrak{X}$ est un faisceau à homotopie près (ou un ∞-faisceau) : pour tout famille couvrante $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ pour la topologie étale, on a une équivalence

$$\mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathrm{holim}\left(\prod_i \mathfrak{X}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathfrak{X}(U_i \times_U U_j) \cdots\right).$$

Ainsi donc, on remplace les colimites par des colimites homotopiques pour la construction des champs. En quelque sorte, la catégorie des champs est la complétion libre homotopique de la catégorie des schémas affines, où l'on impose que les colimites homotopiques des atlas d'un schéma affine U recomposent U tout entier. La première condition assure qu'on peux travailler à homotopie près i.e. holim est dans $\mathrm{Ho}(\mathrm{sEns})$ qui est elle-même isomorphe à $\mathrm{Ho}(\mathrm{Top})$. Cette nouvelle complétion assure donc aussi que les versions géométriques de ces ∞-champs sont des extensions des schémas....mais par adjonction de quoi? On y reviendra plus tard.

3.4 ∞-champs géométriques

Si l'on se donne un contexte géométrique $(\mathcal{C}, \tau, \boldsymbol{P})$, alors un ∞-champs sera géométrique pour $(\mathcal{C}, \tau, \boldsymbol{P})$ s'il est (localement) représentable dans un sens qu'on va pas écrire : il suffit de savoir que l'on peux maintenant travailler avec des quotients généraux.

Par exemple, les champs géométriques pour les suivantes choix de sites que l'on a énuméré avant, sont appelés:

- pour $\mathcal{C} = \mathrm{Top}$ - champs topologique;
- pour $\mathcal{C} = \mathrm{Diff}$ - champs différentiable;
- pour $\mathcal{C} = \mathrm{Aff}$ - champs algébrique;
- pour $\mathcal{C} = \mathrm{Var}_{\mathbb{C}}$ - champs complexe analytique;

Par exemple, les espaces quotients seront ici non singuliers vus comme champs différentiables. Ainsi, on peux faire de la géométrie différentielle avec eux et la topologie algébrique des champs se comporte très similairement à celle des variétés différentielles.

Slogan. Les champs interviennent dès qu'on veux étudier des espaces où les points ont été identifiés (par quelque relation d'équivalence) d'une manière non-unique.

On a donc construit la première moitié du diagramme du début:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & & \textsc{Dérivation des classifiants} \arrow[ddd, dashed, thick, "\text{adjonction}"] \\
 & A \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(\mathrm{Spec}(A), X) & \\
\text{cAnneaux} \arrow[rr, "\text{schémas}"'] \arrow[drr, "\text{champs}"] \arrow[ddrr, "\infty\text{-champs}"'] & & \mathrm{Ens} \arrow[d, shift right, "i_0"'] & \\
 & & Grpds \arrow[u, shift right, "\pi_0"'] \arrow[d, shift right, "N"'] & {} \\
 & & \mathrm{sEns} \arrow[u, shift right, "\Pi_1"'] \arrow[d, rightsquigarrow, "\text{Homotopie}"] & \\
 & & \mathrm{Ho}(Top) &
\end{tikzcd}
$$

3.5 Foncteurs de points des schémas dérivés

De la même manière, tout schéma dérivé X définit un foncteur des points, qui est maintenant de la forme

$$\begin{array}{rcl} X(-)\colon (\mathrm{dAff})^{\mathrm{op}} = \mathrm{cdga}_{\leqslant 0} & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ \mathrm{Spec}(A) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathrm{dSch}}(\mathrm{Spec}(A), X) \end{array}$$

et ces foncteurs vérifient la propriété capitale suivante:

1. le foncteur $X(-)$ envoie les quasi-isomorphismes d'éléments de $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$ vers les bijections.

Cette propriété est capitale par la raison suivante:

Un foncteur satisfaisant cette propriété descends en un foncteur $\mathrm{Ho}(\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}) \longrightarrow \mathrm{Ens}$, où $\mathrm{Ho}(\mathrm{cdga}_{\leqslant 0})$ est la localisation de la catégorie $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$ par rapport aux quasi-isomorphismes. On rappelle que $\mathrm{Ho}(\mathrm{cdga}_{\leqslant 0})$ est obtenue[5] à partir de $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$ par l'opération formelle qui consiste à inverser les quasi-isomorphismes et que c'est où l'on peux travailler à quasi-iso. près.

5. En particulier ces deux catégories ont les mêmes objets.

En conclusion, nous avons construit l'autre moitié du diagramme:

Dérivation des affines

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, mapsto, "\text{Foncteur des points}"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(\mathrm{Spec}(A), X) & \\
 \arrow[d, dashed, leftrightarrow, "\text{adjonction}"'] & \mathrm{cAnneaux} \arrow[rr, "\text{schémas}"'] \arrow[d, shift right, "j_0"'] & & \mathrm{Ens} \\
 & \mathrm{cdg} - \mathrm{Anneaux} \arrow[u, shift right, "t_0"'] \arrow[urr, "\text{schémas dérivés}"] \arrow[d, squiggly, "\text{Homotopie}"'] & & \\
 & \mathrm{Ho}(\mathrm{cdg} - \mathrm{Anneaux}) \arrow[uurr, "\text{schémas dérivés manipulables}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Ici j_0 associé à un anneau commutatif sa cdga associé (concentrée en degré 0) et t_0 est la prends en compte que la partie en degré 0 d'une cdga. La troncation d'une cdga est son H_0.

La représentabilité locale pour les schémas afines dérivés sera relative à un contexte d'algèbre (et géométrie algébrique) **homotopique**.

3.6 ∞-champs dérivés

Un ∞-champs dérivé est en quelque sorte une combinaison des notions de schéma dérivé et de ∞-champs : c'est un ∞-foncteur

$$\mathfrak{X}\colon \mathrm{cdga}_{\leqslant 0} \longrightarrow \mathrm{sEns}$$

satisfaisant une propriété de faisceau à homotopie près et

I. $\mathfrak{X}$ envoie des quasi-isomorphismes d'éléments de $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$ vers des equivalences faibles d'ensembles simpliciaux.

Comme avant ces objets ne permettent pas encore de faire de la géométrie. La propriété I. va nous permettre de les voir comme des foncteurs entre catégories homotopiques $\mathrm{Ho}(\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathrm{Top})$. Ceci signifie essentiellement qu'on est en train de considérer des faisceaux à homotopie près sur un site à homotopie près (ou les familles couvrantes ne sont définies qu'à homotopie près). Ainsi donc, la catégorie des ∞-champs dérivés manipulables dSt est celle des foncteurs $\mathrm{Ho}(\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathrm{Top})$.

3.7 Champs supérieurs géométriques dérivés

De nouveau, il y a une caractérisation de géométricité (représentabilité locale) pour les champs supérieurs dérivés que l'on ne va pas écrire. Quelques remarques sont intéressantes tout de même:

1. Pour décrire un champs supérieur géométrique dérivé il faut commencer par fixer un contexte de géométrie homotopique. Dans le cas algébrique on peux bien démontrer que $\mathrm{cdga}_{\leqslant 0}$ produit un tel contexte (que l'on va pas expliciter) qui étends le contexte géométrique des anneaux commutatifs $(\mathrm{Aff}, \tau_{\text{ét}}, \mathrm{lisse})$. Ansi donc, un champs géométrique dérivé dans un tel contexte sera appelé champs algébrique (d'Artin) dérivé.
2. La construction de la géométricité d'un ∞-champs se construit par récurrence : on commence par les ∞-champs 0-géométriques (dans le cas algébrique ce sont les schémas dérivés) puis on construit les champs n-géométriques à partir des champs $(n-1)$-géométriques (et d'autres données que je vais pas écrire). En particulier, un champs qui est n-géométrique n'a pas des homotopies de degré strictement supérieur à n non triviales.

L'équivalent de penser à un tel objet géométrique comme l'*ensemble de solutions d'une équation « $F=0$ »* est ici de l'interpréter comme l'∞-*groupoide des solutions d'une équation « F homotope à 0 »*.

3.8 *Une* extension de type *géométrique*, par adjonction *double*

Conclusion: champs dérivé = schéma + singularités de quotients d'une part et d'intersections de l'autre.

Question: Comment cette extension fait-elle *une*?

Géométriquement, l'information des mauvais quotients est traduite par la présence d'une graduation positive au niveau de l'espace tangent en un point x qui est, dans ce cadre étendu, remplacé donc par *un seul* complexe $T = \{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, qui nous donne trois cas de figures:

1. Si le seul $H_i(T)$ non trivial est $H_0(T)$, le point x est régulier.
2. Si l'un des $H_i(T)$ est non trivial pour $i < 0$, alors un mauvais quotient est présent dans la structure singulière, qui est alors appelée *structure champêtre*.
3. Si l'un des $H_i(T)$ est non trivial pour $i > 0$, alors une mauvaise intersection est présente dans la structure singulière, qui est alors appelée *structure dérivée*.

Un *énoncé* de DAG : un point x est singulier $\Longleftrightarrow$ l'homologie de T_x n'est pas réduite au H_0.

Une singularité peut très bien faire intervenir à la fois des quotients et des intersections (c'est le cas des réductions symplectiques).

4 Diagramme et remarques synthétiques

Au total, pour revenir à l'extension des schémas en champs algébriques dérivés par double adjonction, une fois qu'on a fixé un contexte de géométrie algébrique homotopique, étendant le contexte géométrique des affines Aff, on se retrouve avec le diagramme-bilan suivant qui très spécifique de la géométrie *algébrique* dérivée:

Dérivation des affines | Dérivation des classifiants

$$\begin{tikzcd}
 \arrow[dddd, dashed, "\text{adjonction}"'] & A \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(\mathrm{Spec}(A), X) & \arrow[dddd, dashed, "\text{adjonction}"] \\
& \mathrm{cAnneaux} \arrow[r, "\text{schémas}"'] \arrow[dr, "\text{champs}"] \arrow[ddr, "\infty\text{-champs}"'] \arrow[dd, shift right, "j_0"'] & \mathrm{Ens} \arrow[d, shift right, "i_0"'] & \\
& & Grpds \arrow[u, shift right, "\pi_0"'] \arrow[d, shift right, "N"'] & \\
& \mathrm{cdg}-\mathrm{Anneaux} \arrow[uu, shift right, "t_0"'] \arrow[r, "\text{champs dérivés intrinsèques}"] \arrow[d, squiggly, "\text{Homotopie}"'] & \mathrm{sEns} \arrow[u, shift right, "\Pi_1"'] \arrow[d, squiggly, "\text{Homotopie}"] & \\
 & \mathrm{Ho}(\mathrm{cdg}-\mathrm{Anneaux}) \arrow[r, "\text{champs dérivés manipulables}"] & \mathrm{Ho}(Top) &
\end{tikzcd}$$

- Ainsi, les foncteurs allant de la gauche vers la droite sont les foncteurs des points d'un objet géométrique.
- L'extension par adjonction à l'oeuvre est bien double.
- les deux adjonctions font *une* en ce qu'elles opèrent par la considération d'une structure dg au niveau du complexe tangent (dont les graduations positives et négatives correspondent chacune à leur tour à une des deux adjonctions).
- Les deux adjonctions proposées sont bien de type géométrique (selon des $\neq$ contextes).
- La Géométrie Dérivée prône la simplicité des relations sur la simplicité des objets. Le cadre axiomatique *le plus général* de cette nouvelle géométrie est une recherche en cours.
- L'utilisation des ∞-catégories est incontournable : la manière dont les affines font un et dont les espaces classifiants identifient les affines doivent toutes deux être affaiblies.
- La théorie de l'homotopie de Quillen est celle qui nous permet de travailler avec de tels objets géométriques. Le prix pour pouvoir travailler à homotopie près est métaphoriquement de devoir créer une sorte d'échafaudage compliqué (de type $(\infty, 1)$-catégoriel, mis au point entre autres par Joyal et Lurie) et une fois notre objet compliqué construit, on viendrait retirer un tel échafaudage en passant à la catégorie homotopique.
- Derrière la notion de ∞-groupoide il y a l'idée de *type homotopique* qui reflète une certaine géométrie où l'identification ne s'opère plus de manière ensembliste.

Pour plus de détails:

1. M. Anel, *Introduction to the Ideas of Derived Geometry* (sur sa page web);
2. D. Calaque : *Three lectures on derived symplectic geometry and topological field theories* (sur sa page web);
3. B. Toën:
    a. *Introduction to DAG* (sur sa page web);
    b. Cours de Master : *Champs algébriques* (sur sa page web).