Découverte d'une logique au passé simple

M. Leray, *Groupe fort ; comptabilité*, 2012

Un mathème obscur

Lire $\wedge$ sentir l'espace $\vdash$ texte $\vee$ cadre

Un mathème obscur

Lire $\wedge$ sentir l'espace $\vdash$ texte $\vee$ cadre

S'il sait lire et sentir l'espace
alors il lit d'abord le texte ou il sent d'abord le cadre

Transfert d'hypothèses vers les conséquences

Si *Lois et Gloire* ***alors*** *sans Amour*

Transfert d'hypothèses vers les conséquences

Si *Lois et Gloire* ***alors*** *sans Amour*

Transfert d'hypothèses vers les conséquences

Si *Lois et Gloire* ***alors*** *sans Amour*

Si *Lois* ***alors*** *sans Gloire ou sans Amour*

Transfert d'hypothèses vers les conséquences

Si *Lois et Gloire* ***alors*** *sans Amour*

Si *Lois* ***alors*** *sans Gloire ou sans Amour*

Transfert d'hypothèses vers les conséquences

Si *Lois et Gloire* ***alors*** *sans Amour*

Si *Lois* ***alors*** *sans Gloire ou sans Amour*

---

alors sans Loi ou sans Gloire ou sans Amour

Première formalisation

- $A, B, \ldots$ des énoncés quelconques

Première formalisation

- $A, B, \ldots$ des énoncés quelconques

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A, B, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textit{et}\ B, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots} \qquad \frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A, B}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A\ \textit{ou}\ B}$$

Première formalisation

- $A, B, \ldots$ des énoncés quelconques

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A, B, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textit{et}\ B, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots} \qquad \frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A, B}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A\ \textit{ou}\ B}$$

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ A, \ldots}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots, \textit{non}\ A\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots} \qquad \frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots, A\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \textit{non}\ A, \ldots}$$

Échange

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ \ldots, A, B, \ldots}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ \ldots, B, A, \ldots}\ (\text{échange})$$

Règles logiques

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2 \qquad \textbf{\textit{Si}}\ B, \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textit{ou}\ B, \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}\ \text{(ou à gauche)}$$

Règles logiques

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2 \qquad \textbf{\textit{Si}}\ B, \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textit{ou}\ B, \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}\ \text{(ou à gauche)}$$

Règles logiques

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2 \qquad \textbf{\textit{Si}}\ B, \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textit{ou}\ B, \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}\ \text{(ou à gauche)}$$

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2, A \qquad \textbf{\textit{Si}}\ \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2, B}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots_1\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2, A\ \textit{et}\ B}\ \text{(et à droite)}$$

Axiomes d'identité et preuves

$$\frac{}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A}\ (\text{axiome})$$

Axiomes d'identité et preuves

$$\dfrac{\dfrac{}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A}\ \text{(axiome)}}{\textbf{\textit{alors}}\ \textit{non}\ A, A}\ \text{(négation à gauche)}$$

Axiomes d'identité et preuves

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A}\ \text{(axiome)}}{\textbf{\textit{alors}}\ \textit{non}\ A, A}\ \text{(négation à gauche)}}{\textbf{\textit{alors}}\ \textit{non}\ A\ \textit{ou}\ A}\ \text{(ou à gauche)}$$

Preuve de $(A \textit{ et } B) \textit{ ou non } A \textit{ ou non } B$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{\textit{Si}}\ B\ \ \textbf{\textit{alors}}\ B}{\textit{non } B, B}}{\textit{non } B, B, \textit{non } A}}{B, \textit{non } A, \textit{non } B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A}{\textit{non } A, A}}{\textit{non } A, A, \textit{non } B}}{A, \textit{non } A, \textit{non } B}}{\dfrac{(A \textit{ et } B), \textit{non } A, \textit{non } B}{(A \textit{ et } B) \textit{ ou non } A \textit{ ou non } B}}
$$

Règles structurelles

Affaiblissements :

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots}{\textbf{\textit{Si}}\ A, B, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots} \qquad \frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A, B}$$

Règles structurelles

Affaiblissements :

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots}{\textbf{\textit{Si}}\ A, B, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots} \qquad \frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A, B}$$

Contractions :

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A, A, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots} \qquad \frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A, A}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots\ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots, A}$$

règle de coupure

Si A implique B, et si on a A, alors on en déduit B :

$$\frac{\textbf{\textit{J'ai}}\ A \qquad \textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ B}{\textit{conclusion} : \textbf{\textit{J'ai}}\ B}\ \text{(modus ponens)}$$

règle de coupure

Si A implique B, et si on a A, alors on en déduit B :

$$\frac{\textbf{\textit{J'ai}}\ A \qquad \textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ B}{\textit{conclusion} : \textbf{\textit{J'ai}}\ B}\ \text{(modus ponens)}$$

On a coupé A.

règle de coupure

Si A implique B, et si on a A, alors on en déduit B :

$$\frac{\textbf{\textit{J'ai}}\ A \qquad \textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ B}{\textit{conclusion} : \textbf{\textit{J'ai}}\ B}\ \text{(modus ponens)}$$

On a coupé A.
Généralisation à tout contexte :

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2, A \qquad \textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_3\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_4}{\textbf{\textit{Si}}\ \ldots_1, \ldots_3\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2, \ldots_4}\ \text{(coupure)}$$

Correspondance preuve/programme : exemple

A et A correspond la formation d'un couple (a, a) ;

Correspondance preuve/programme : exemple

A et A correspond la formation d'un couple (a, a) ;

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\textbf{\textit{J'ai}}\ A} \qquad \dfrac{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textbf{\textit{alors}}\ A \qquad \textbf{\textit{Si}}\ A\ \textbf{\textit{alors}}\ A}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textbf{\textit{alors}}\ A\ \textit{et}\ A}}{\textbf{\textit{J'ai}}\ A\ \textit{et}\ A}\ (\text{coupure})$$

Si la preuve π correspond au programme P,
la preuve précédente duplique son résultat : (P, P).

Correspondance preuve/programme : coupure

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textbf{\textit{alors}}\ B \qquad \textbf{\textit{Si}}\ B\ \textbf{\textit{alors}}\ C}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textbf{\textit{alors}}\ C}\ (\text{coupure})$$

Correspondance preuve/programme : coupure

$$\frac{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textbf{\textit{alors}}\ B \qquad \textbf{\textit{Si}}\ B\ \textbf{\textit{alors}}\ C}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \textbf{\textit{alors}}\ C}\ \text{(coupure)}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\text{f prend un A et donne un B} \qquad \text{g prend un B et donne un C}}{g \circ f \text{ prend un A et donne un C}}\ \text{(compose)}$$

Logique intuitioniste

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A}\ \text{(axiome)}}{\cancel{\text{non}\ A,\ A}}\ \text{(seconde conséquence interdite)}}{\cancel{\text{non}\ A\ \text{ou}\ A}}\ \text{(on ne peut donc pas déduire le tiers-exclu)}$$

Élimination des coupures : axiome

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A} \qquad \dfrac{[\ldots]}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}\ (\text{coupure})}{[\ldots]}$$

Élimination des coupures : axiome

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A} \qquad \dfrac{[\ldots]}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}\ (\text{coupure})}{[\ldots]}$$

On constate que la coupure n'aucun effet :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A} \qquad \dfrac{[\ldots]}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}\ (\text{coupure})}{[\ldots]}$$

Élimination des coupures : axiome

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A} \qquad \dfrac{[\ldots]}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}\ (\text{coupure})}{[\ldots]}$$

On constate que la coupure n'aucun effet :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\textbf{\textit{Si}}\ A\ \ \textbf{\textit{alors}}\ A} \qquad \dfrac{[\ldots]}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}\ (\text{coupure})}{[\ldots]}$$

On réduit donc ainsi :

$$\dfrac{\dfrac{[\ldots]}{\textbf{\textit{Si}}\ A, \ldots_1\ \ \textbf{\textit{alors}}\ \ldots_2}}{[\ldots]}$$

Cas clés : et-introductions avant l'énoncé de coupure

$$\dfrac{\dfrac{\ldots_1 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, A \qquad \ldots_1 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, B}{\ldots_1 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, A \ \textit{et} \ B} \qquad \dfrac{B, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_4}{A \ \textit{et} \ B, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_4}}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, \ldots_4} \ (\text{coupure})$$

Cas clés : et-introductions avant l'énoncé de coupure

$$\dfrac{\dfrac{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A \qquad \ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, B}{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A \text{ et } B} \qquad \dfrac{B, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}{A \text{ et } B, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, \ldots_4} \ (\text{coupure})$$

On constate que le coupure peut s'opérer sur B :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A \qquad \ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, B}{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A \text{ et } B} \qquad \dfrac{B, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}{A \text{ et } B, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, \ldots_4} \ (\text{coupure})$$

Cas clés : et-introductions avant l'énoncé de coupure

$$\dfrac{\dfrac{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A \qquad \ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, B}{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A \ et \ B} \qquad \dfrac{B, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}{A \ et \ B, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, \ldots_4}\ (\text{coupure})$$

On constate que le coupure peut s'opérer sur B :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A \qquad \ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, B}{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A \ et \ B} \qquad \dfrac{B, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}{A \ et \ B, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, \ldots_4}\ (\text{coupure})$$

On fait donc une coupure sur un énoncé plus simple :

$$\dfrac{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, B \qquad B, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, \ldots_4}\ (\text{coupure})$$

règles structurelles : contractions

$$\dfrac{\dfrac{[\ldots]}{\ldots_1 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, A} \qquad \dfrac{A, A, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_4}{A, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_4}\,(\text{contraction})}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, \ldots_4}\,(\text{coupure})$$

$$\dfrac{\dfrac{[\ldots]}{\ldots_1 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, A} \qquad \dfrac{A, A, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_4}{A, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_4}\,(\text{contraction})}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, \ldots_4}\,(\text{coupure})$$

On duplique la coupure pour la faire passer au dessus de la contraction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\ldots]}{\ldots_1 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, A} \qquad \dfrac{\dfrac{[\ldots]}{\ldots_1 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, A} \qquad A, A, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_4}{A, \ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, \ldots_4}\,(\text{coupure})}{\ldots_1, \ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, \ldots_2, \ldots_4}\,(\text{coupure})}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{\textit{alors}} \ \ldots_2, \ldots_4}\,(\text{contractions})$$

$$\dfrac{\dfrac{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A, A}{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A} \qquad \dfrac{A, A, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}{A, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}\,(\text{contraction})}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, \ldots_4}\,(\text{coupure})$$

On duplique la coupure pour la faire passer au dessus de la contraction :

$$\dfrac{\dfrac{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A, A}{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A} \qquad \dfrac{\dfrac{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A, A}{\ldots_1 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, A} \qquad A, A, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_4}{A, \ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, \ldots_4}\,(\text{cou}}{\dfrac{\ldots_1, \ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, \ldots_2, \ldots_4}{\ldots_1, \ldots_3 \ \textbf{alors} \ \ldots_2, \ldots_4}\,(\text{contractions})}\,(\text{coupure})$$

Mais ça explose s'il y a des contractions des deux côtés !

Logique linéaire

- L'implication linéaire consomme un A

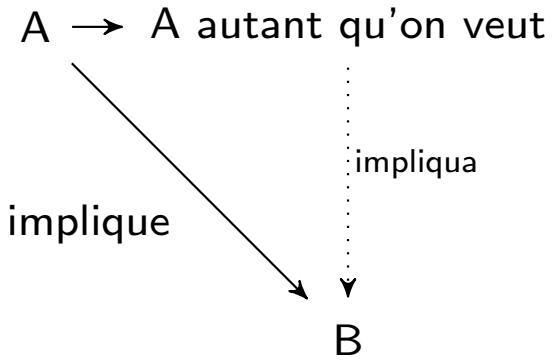
$$\frac{\text{J'ai trois A, (A impliqua B)}}{\text{J'ai deux A, un B}}$$

Logique linéaire

- L'implication linéaire consomme un A

$$\frac{\text{J'ai trois A, (A impliqua B)}}{\text{J'ai deux A, un B}}$$

- Tombé pile de l'opérateur *autant qu'on veut*



A implique B = (A autant qu'on veut) impliqua B

M. Leray, *Groupe fort ; comptabilité*, 2012