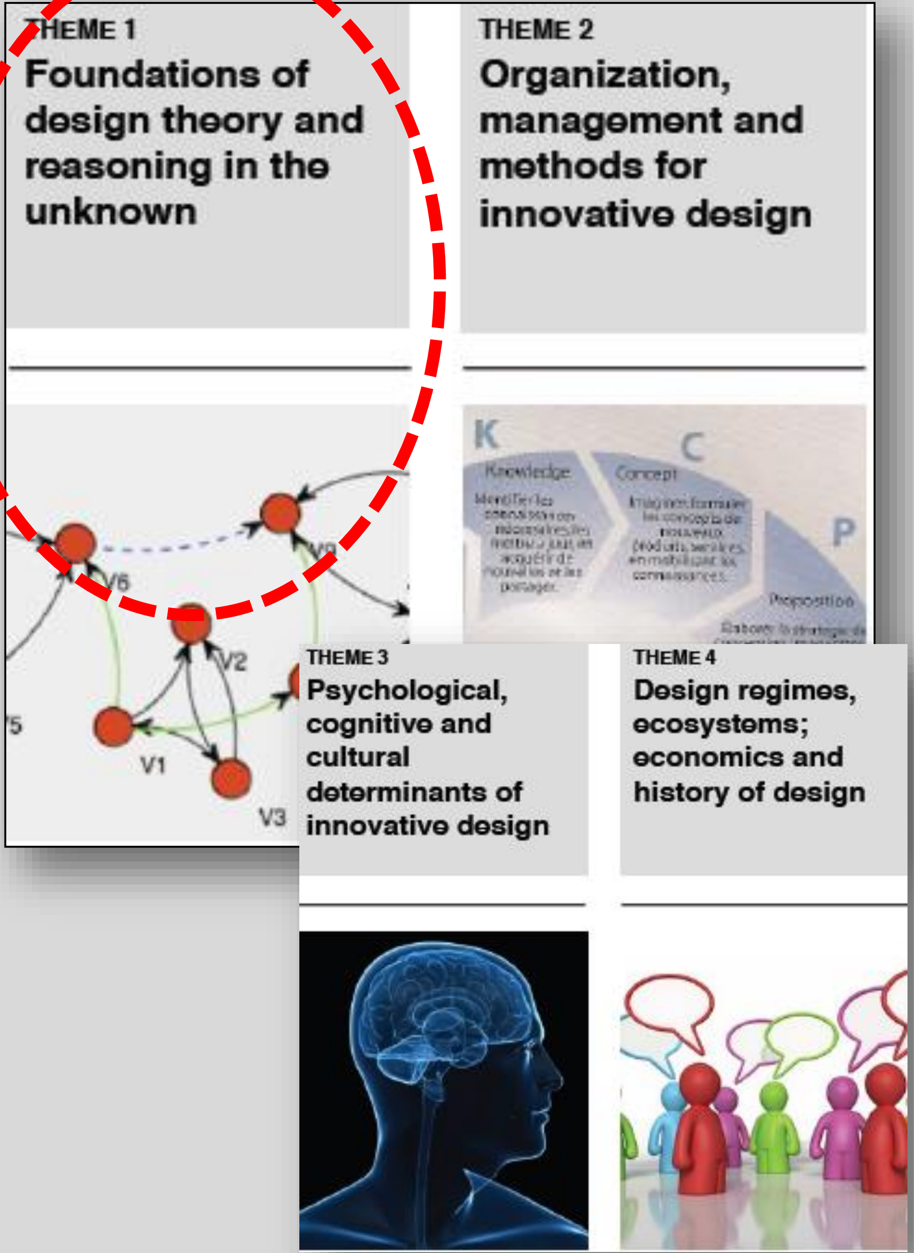
Théorie de la conception et Forcing : un modèle du raisonnement créatif

Armand Hatchuel
Chaire TMCI   MinesParistech-PSL
UMR I3

Séminaire mamuphi decembre 2016

La Chaire d'Enseignement et de Recherche (depuis 2009)

théorie et
méthodes
de la conception
innovante

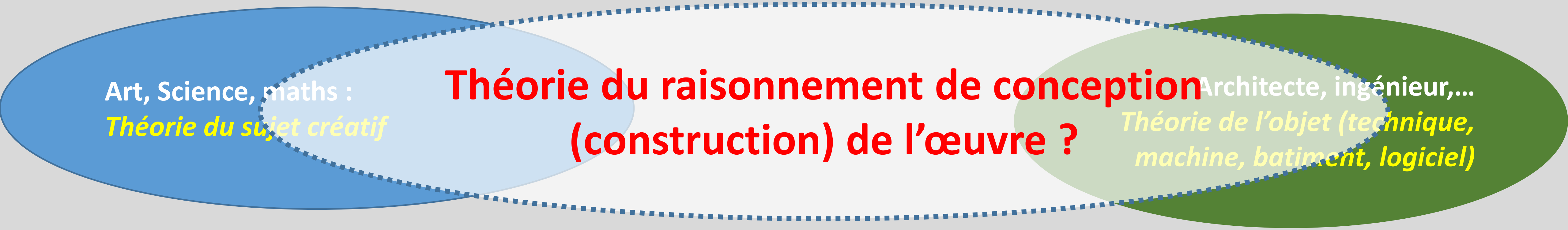


« Imagine then a man wishing to open a door locked with a combination lock and bolted on the inside. Assume that he does not know a single number of the combination and has not a chance to open the door until he finds the whole combination, and not a chance to do so even then unless the bolt on the inside is open. Also bear in mind that he cannot tell whether a single number of the combination is right until he knows the combination complete. ***When we started to make ductile tungsten, our situation was like that »***

William Coolidge

- **Motivation empirique : comment fait-on naître des «objets nouveaux et désirables » ? Conception, création, invention,…**
  - processus d'innovation organisé et accéléré (1760…) : modernité inséparable des régimes de création : peut-on renforcer, orienter, les régimes de création ? (par exemple : en matière de RSE)

- **Defi théorique : multiples traditions et courants philosophiques, mais absence de cadre formel distinctif et unificateur…**



Programme :

- ➢ **Théorie générale du raisonnement de conception, indépendante de l'objet**
- ➢ **Conditions de possibilité du raisonnement de conception**
- ➢ **Extensions à la « création » scientifique ? À la création artistique ?**

1. Anomalie désirée et double expansion
2. Elements de théorie C-K (concepts-connaissances)
3. Le forcing de Cohen comme théorie de la conception dans ZF ;
4. Correspondance Forcing-théorie C-K : Implications et discussion

Concevoir ? de l'anomalie constatée à l'« anomalie désirée » (Fallen 2012, Hatchuel et al. 2013)

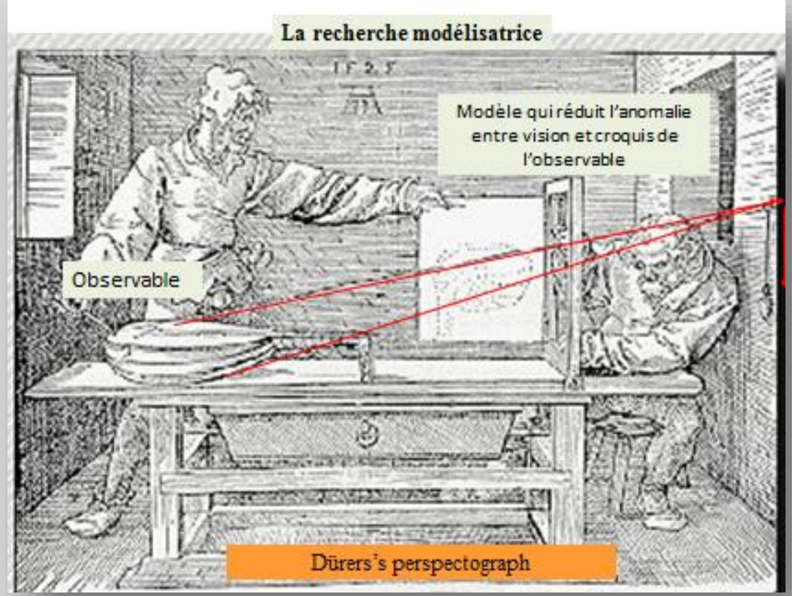
Science (raisonnement) modélisatrice : **anomalies constatées = (Y-P(X, Xi))** écart entre un état des connaissances (théorie des modèles) **P(X, Xi)** et des **observations Y**

Comprendre le climat ou les sociétés préhistoriques

Science (raisonnement) de conception (ou création) :
anomalies désirées = un X:P(X) partiellement inconnu que l'on s'efforce de **concevoir** et de faire exister en artefacts observables et conformes.

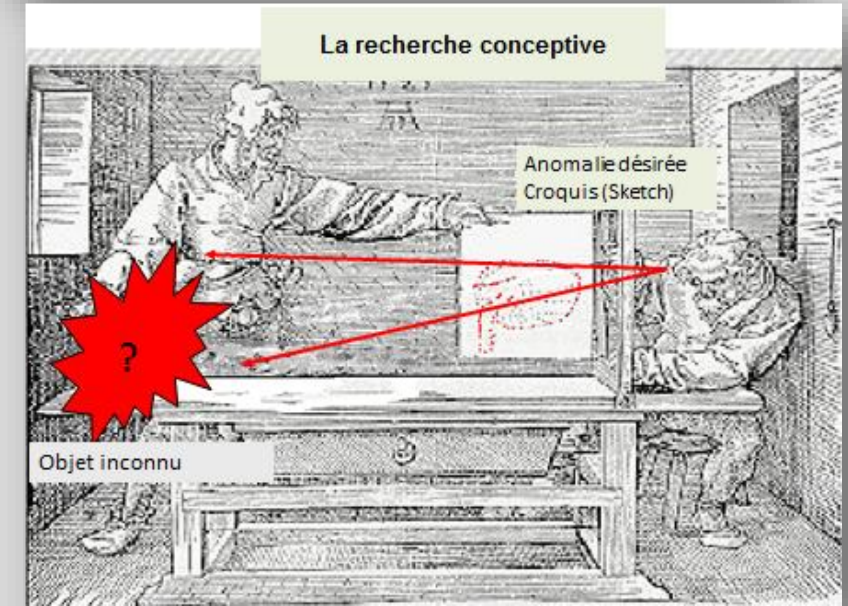
Concevoir un avion électrique ou un système d'aide aux personnes agées

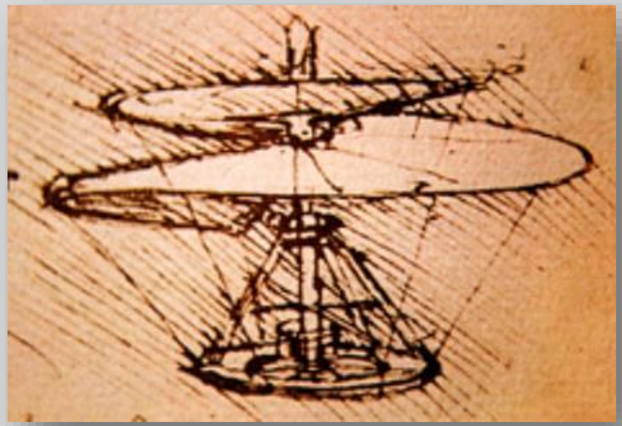
L'anomalie désirée = inversion du perspectographe de Durer : non pas « voir » un objet mais « conce-voir » à partir d'une « présentation » de cette anomalie



Projection de Y/X

Y= X: P(X, Xi)





Expansion de X.P(X, Xi)

Première modélisation de l'anomalie désirée : objet K-inconnu et K-indécidabilité dans **un référentiel K-expandable** (Le Masson et al. TC 2014)

- **un nombre pair entre 1 et 3 : ensemble des objets possibles connu, choix connu**
- **les solutions d'une équation : on connaît l'ensemble, éléments inconnus, choix inconnu**
- **l'estimation statistique d'un caractère dans un ensemble connu par échantillonnage…**
- **le trajet le plus court dans un pays mal connu : ensemble des routes inconnu à explorer.**

Sélection d'un objet connu au sein d'un corpus connu K

K-décidabilité=
Pas d'anomalie désirée

Deux entités doivent être générées en même temps : X et K(Xi...),

- **ur**
: e

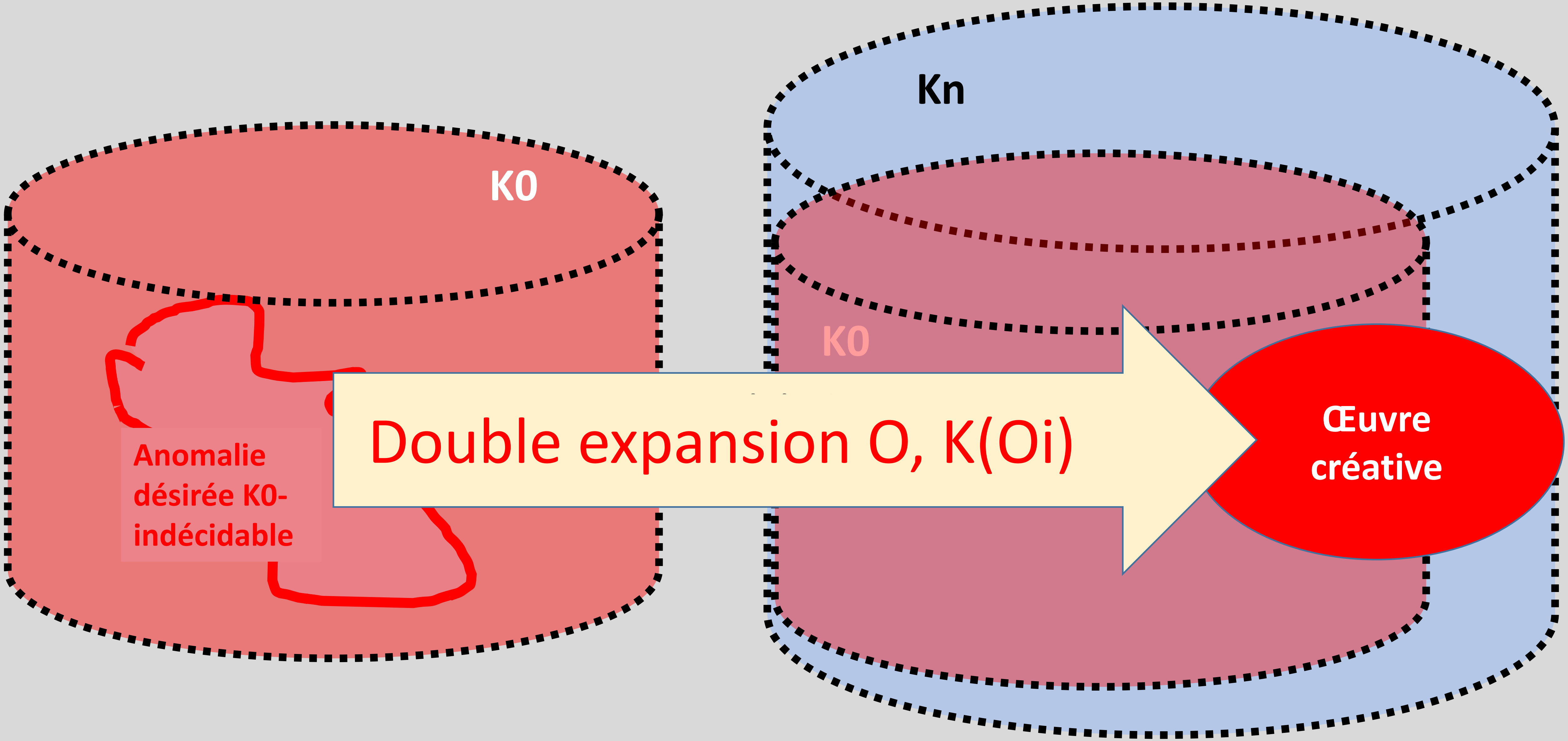
lie

- **un ... ...ady made »**

- **une théorie qui explique au mieux un ensemble de faits**

Conception d'un objet partiellement inconnu dans un corpus partiellement inconnu K

K-indécidabilité =
anomalie désirée


Kn
K0
K0
Anomalie désirée K0-indécidable
Double expansion O, K(Oi)
Œuvre créative

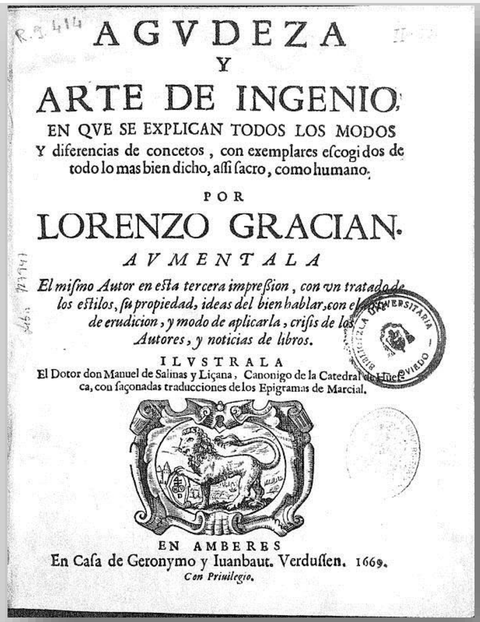
La théorie C-K comme modèle général du raisonnement de conception

De l’anomalie désirée au Concept et un ensemble problématique….

- **Anomalie désirée** = objet (collection) inconnu par les propriétés désirées /référentiel initial de connaissances K ; Formalisme : X: P(X) avec <X.P(X)> indécidable dans K0

- On appelle **« concept »** : <X:P(X)> selon la définition de (Gracian 1650, Hatchuel 2006)

- **Mais qu’est-ce la collection des X : P(X)** : est-ce un ensemble normal au sens de ZF ? Ni vide-ni non vide ! Que peut-on garder de ZF ?

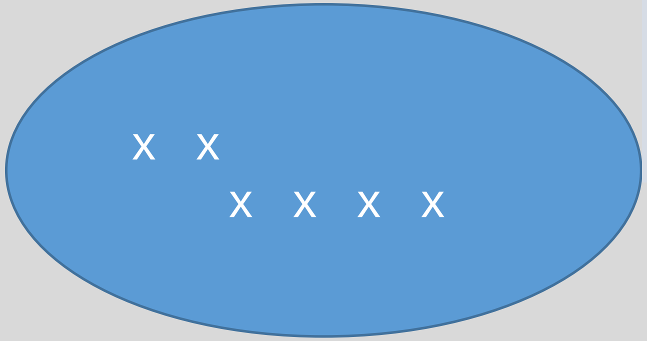

AGVDEZA
Y
ARTE DE INGENIO,
EN QVE SE EXPLICAN TODOS LOS MODOS
Y diferencias de concetos, con exemplares escogidos de
todo lo mas bien dicho, assi sacro, como humano.
POR
LORENZO GRACIAN.
AVMENTALA
El mismo Autor en esta tercera impression, con vn tratado de
los estilos, su propiedad, ideas del bien hablar, con el
de erudicion, y modo de aplicarla, crisis de los
Autores, y noticias de libros.
ILVSTRALA
El Dotor don Manuel de Salinas y Liçana, Canonigo de la Catedral de Huesca,
con façonadas traducciones de los Epigramas de Marcial.
EN AMBERES
En Casa de Geronymo y Iuanbaut. Verdussen. 1669.
Con Privilegio.

Sebastian Neumeister (ed.)

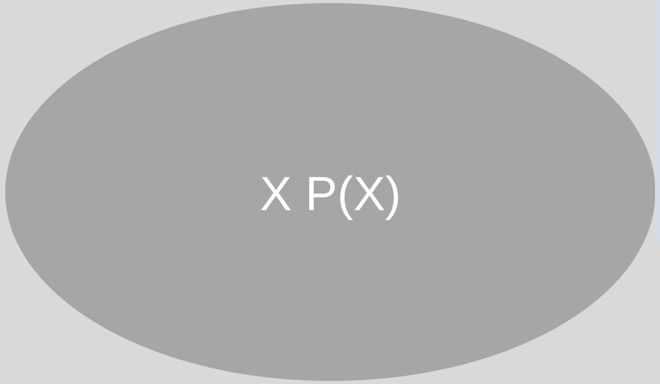
Los conceptos de Gracián

Tercer Coloquio Internacional sobre Baltasar Gracián
en ocasión de los 350 años de su muerte

(Berlín, 27-29 de noviembre de 2008)



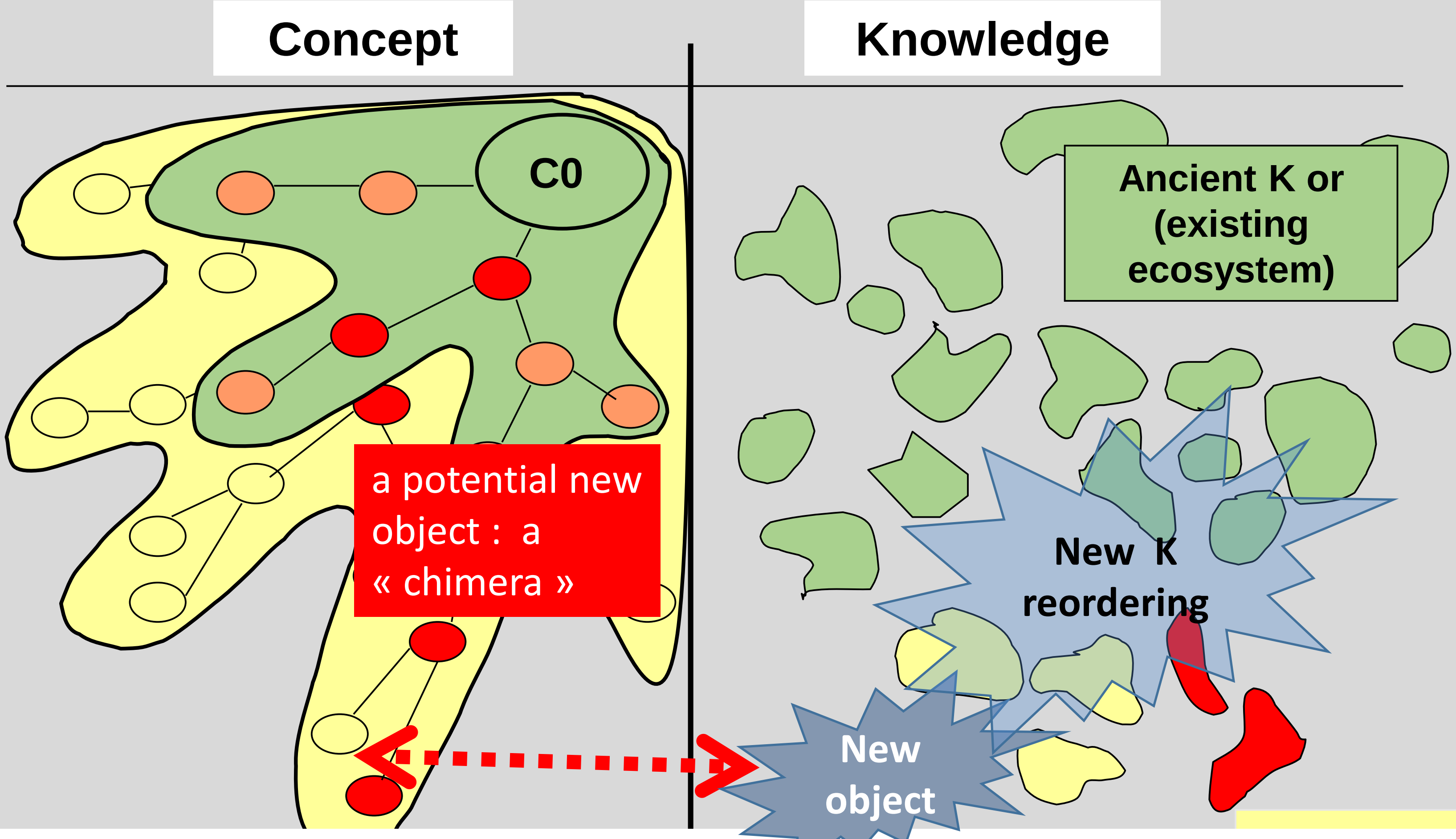
Sets are collections of known and distinguishable elements :
Extensional definition of a set : the set of eggs existing in a bird nest



The set is a collection of X tels que P(X), unknowns, non designed, :
Intensional definition of a set : the set of eggs that will be conceived in the set by the desire of their parents

Introducing C-K theory : the dual expansions

The departure point : **a** **desirable unknown or anomaly** **called a « concept » C0=X:P(X)**
« A system for distant diagnosis », « a post-modernist chair », « a solar plane »
Example**: chimera**

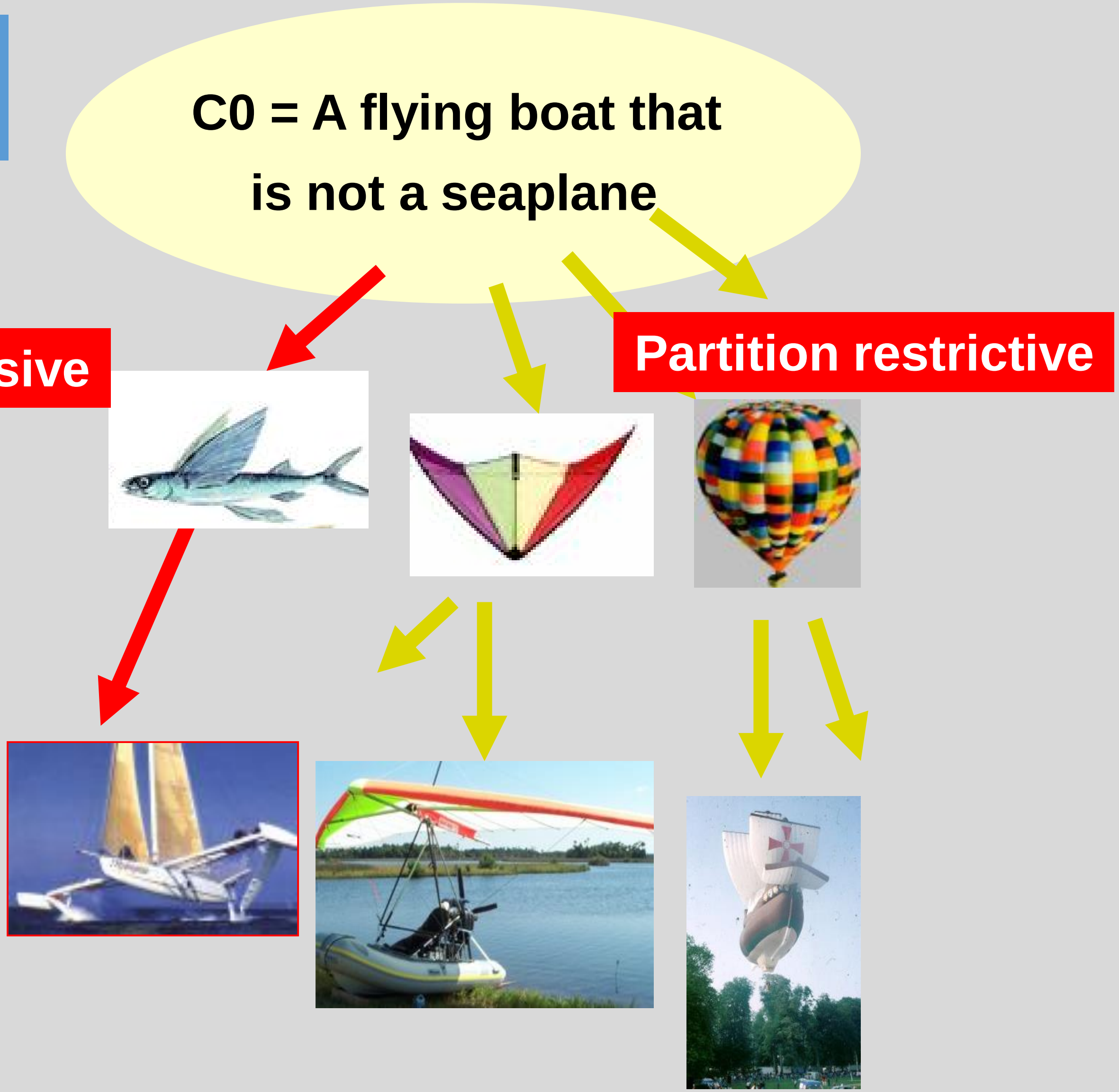


Central finding : C0 will be true only if there are expansions in both C and K : in C a new definition (chimera), in K a proposition that cannot be deduced from K0

C-K expansion Hatchuel (1996), Hatchuel and weil (2001,2003)

Concepts (C)

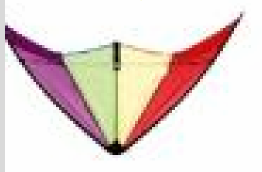
Partition expansive



- Design means expanding concepts with attributes until « satisfactory » definitions emerge.
- Expanding partitions increase the unknown and revise the definition of objects in K
- In C the process is diverging and/or « deepening » : needs a constructive and hierarchical definition of a family of new objects

The double expansion

A flying boat that is not a seaplane



Knowledge (K)

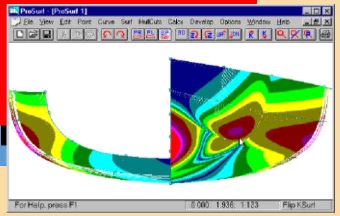
- « true » propositions about things (or people)

Propositions are used to:

- to formulate and expand concepts :
- to test concepts
- K-dependancy or K-illusions

Testing concepts generates new knowledge

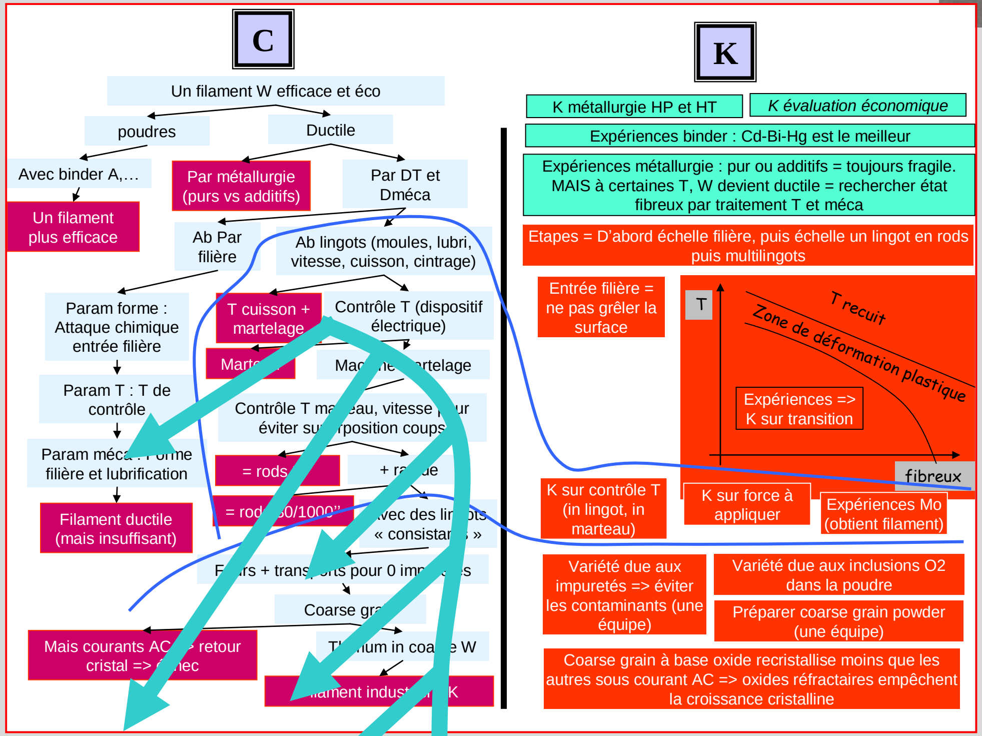
sai

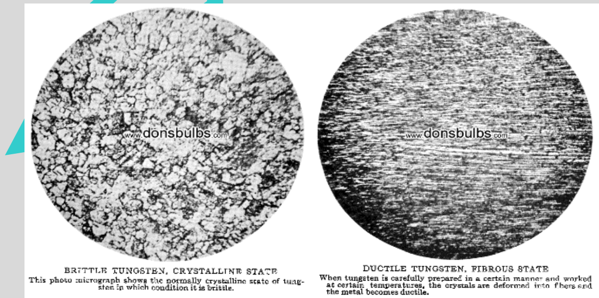


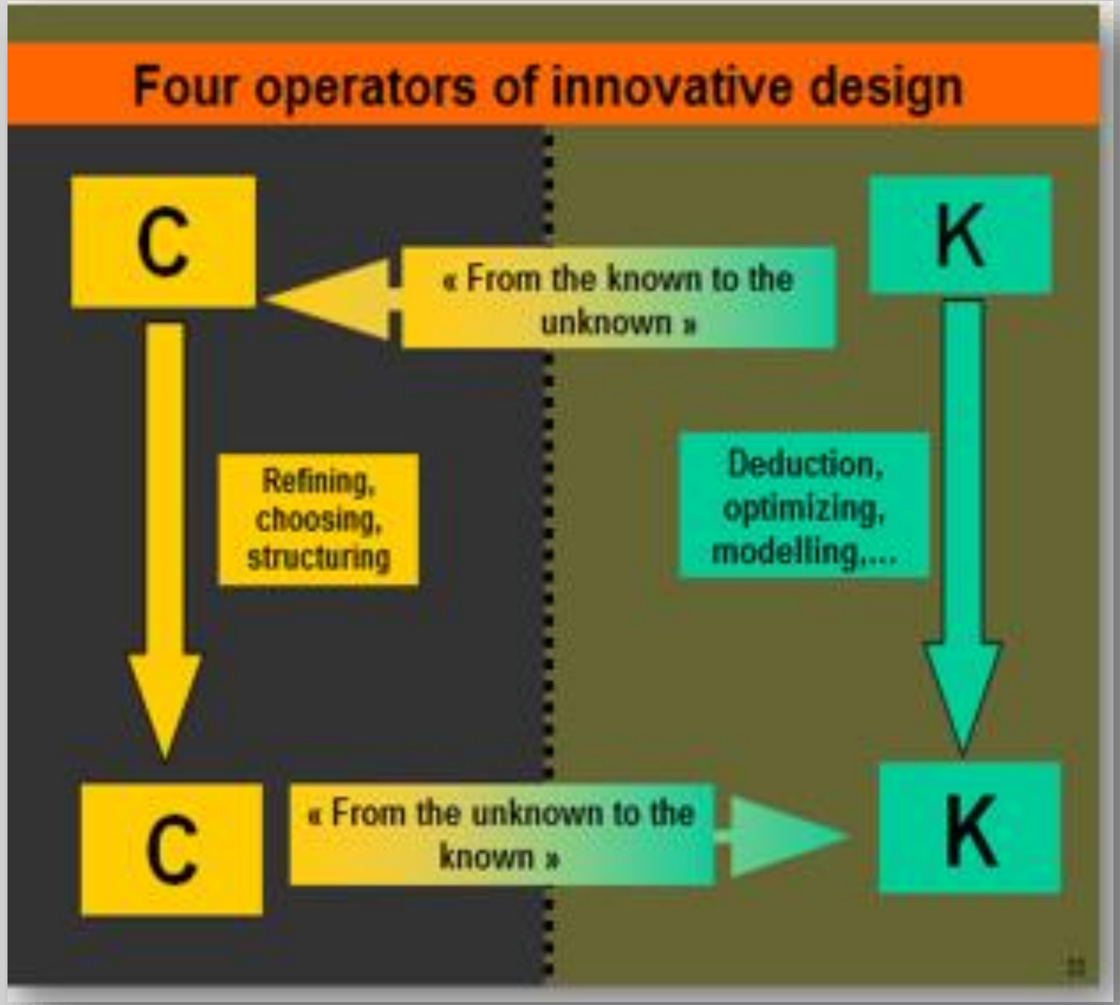
The invention/design/discovery of ductile tungsten for filament
lamp by William Coolidge at GE (1912)

« Imagine then a man wishing to open a door locked with a combination lock and bolted on the inside. Assume that he does not know a single number of the combination and has not a chance to open the door until he finds the whole combination, and not a chance to do so even then unless the bolt on the inside is open. Also bear in mind that he cannot tell whether a single number of the combination is right until he knows the combination complete. When we started to make ductile tungsten, our situation was like that »

William Coolidge







C-K theory describes a dual expansion process through four operators interacting :

1. **K->C : (disjunctions) expansions that create** concepts by the revision of attributes in the definition of known objects

2. **C->K-expansions that create new (discovered)** objects and new attributes; or (**Conjunctions) creates new objects :** new names, new definitions

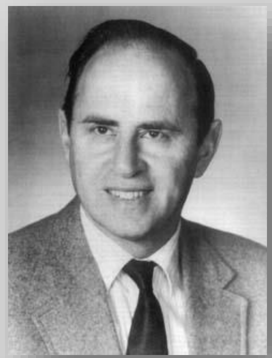
3. **C->C : expansion in the unknown, generating new objects**

4. **K->K = K-reordering reorganizing knowledge through new created objects (no unique way)**

3. Le Forcing de Paul Cohen : théorie de la conception dans ZF

Une théorie de la conception au cœur des mathématiques modernes :

- **Les « ensembles » sont des objets** dont la connaissance «établie» **K** ={ ZF + la totalité des propositions vraies déduites de ZF}
- **Il y a une autre connaissance possible des ensembles par conception,** construire des ensembles ZF qui présentent des propriétés **nouvelles P** donc « **indépendantes** » de ZF :
- **Le théorème-raisonnement du « forcing» :** généricité, indécidabilité, indépendance,



Paul Cohen médaille Fields 1964

Théorie des ensembles : axiomes de Zermelo-Frankael :« ZF »

1. **Axiom of extensionality**: Two sets are the same if and only if they have the same elements.
2. **Axiom of empty set**: There is a set with no elements. We will use {} to denote this empty set.
3. **Axiom of pairing**: If *x*, *y* are sets, then so is {*x*,*y*}, a set containing *x* and *y* as its only elements.
4. **Axiom of union**: For any set *x*, there is a set *y* such that the elements of *y* are precisely the f the elements of *x*.
5. **Axiom of infinity**: There exists a set *x* such that {} is in *x* and whenever *y* is in *x*, so is the union *y* U {*y*}.
6. **Axiom of separation** (or subset axiom): Given any set and any proposition P(*x*), there is a subset of the original set containing precisely those elements *x* for which P(*x*) holds.
7. **Axiom of replacement**: Given any set and any mapping, formally defined as a proposition P(*x*,*y*) where P(*x*,*y*) and P(*x*,*z*) implies *y* = *z*, there is a set containing precisely the images of the original set's elements.
8. **Axiom of power set**: Every set has a power set. That is, for any set *x* there exists a set *y*, such that the elements of *y* are precisely the subsets of *x*.

En 1960, **deux grandes *conjectures* P1 et P2 de la théorie des ensembles**

• P1 : « **L'hypothèse du continu »** : **il n' y a pas d'infini dont le cardinal est entre nombre entiers N et celui des points de la ligne R (ligne continue), ou intermédiaire à la suite des Aleph…**

• P2 : « **axiome du choix »** : **Soit un ensemble X composé de sous ensembles non vides et mutuellement disjoints, il existe un ensemble Y (une fonction de choix pour x) contenant exactement un élèment et un seul de X**

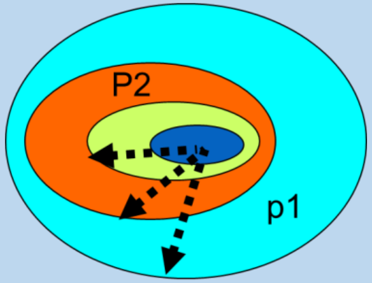
- **Conjecture ? Voie 1 :**
  ZF →P1 Vrai ou faux ?
- **Voie 2 : concevoir une nouvelle collection d'ensembles, un « modèle » de ZF où P1 seraient vraies ou fausses selon volonté**
- **Si la voie 2 réussit alors la voie 1 était une impasse P1 est indécidable dans ZF.**

Le forcing de COHEN

Espace de conception

K

- **Construction** : suites de contraintes emboitées sur **M** (ordre partiel) = **filtres sur M : p1, p2, p3 ; pi** < pj = pi domine pj = un sous ensemble de **M**



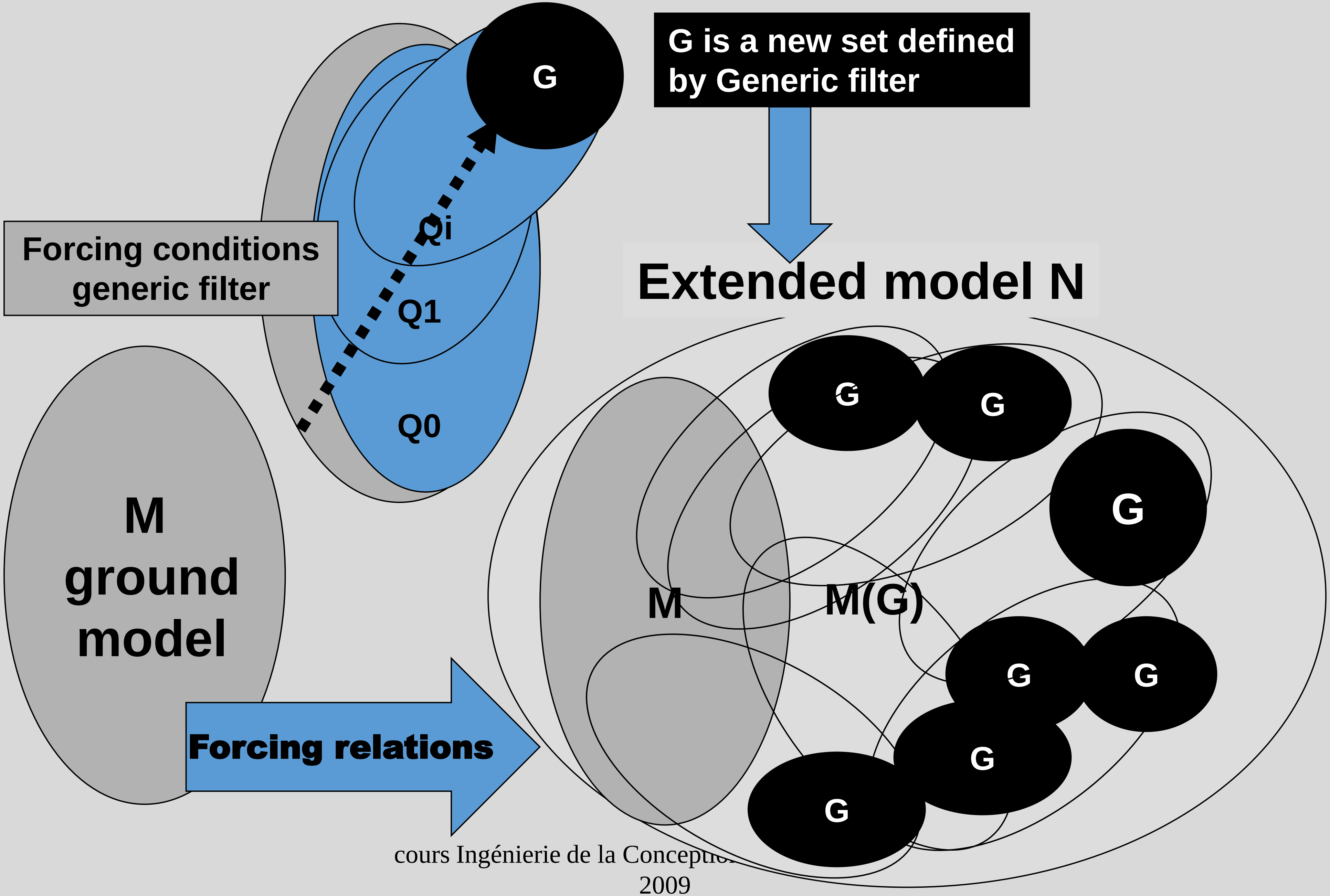
- on peut construire un **filtre générique G** = ensemble de contraintes qui forment un filtre et qui **intersecte tous les sous-ensembles denses de P** = différent de tous les ensembles de P.

- **Le modèle de départ M (les entiers)**
- **Axiomes de ZF**

M = collection d'ensembles x qui respecte ZF

- **théorème : G n'est pas dans M !**
- **Extension générique :**
  - **M(G)= nouveaux ensembles construits avec G :**
  - **nouveau modèle : N = M + M(G)**
- **Si G est bien choisi P1 est vrai sur N**

Figure 2. The forcing method



Intuitive proof of the generic filter definition : G intersects all dense parties → G IS NOT IN M. (Jech 2000, Dehornoy www,..)

Forcing constraints produce (M, P, >) an infinite series of finite suites on (N→(0,1))

- For all n , we have a dense subset with all contrainsts of lenght > n
- G is different of any of these finite suites
- If he is in M then he belongs to one dense subset and he is dominated :
    - *He is not of finite or he is in M*
    - *He is different of any other infinite suites*
    - *He cannot be dominated or there is a D to which he has no intersection*
    - *Hence, for any dense subset D, he contains a constraint in D, and others in the other dense subsets*
    - **By induction for all D, G intersects all D**

- **Cohen has generalized Cantor's diagonal** but his technique is extremely powerful : cantor generated one number different from a finite number of specified others , cohen can generate as many reals as he wants : all G

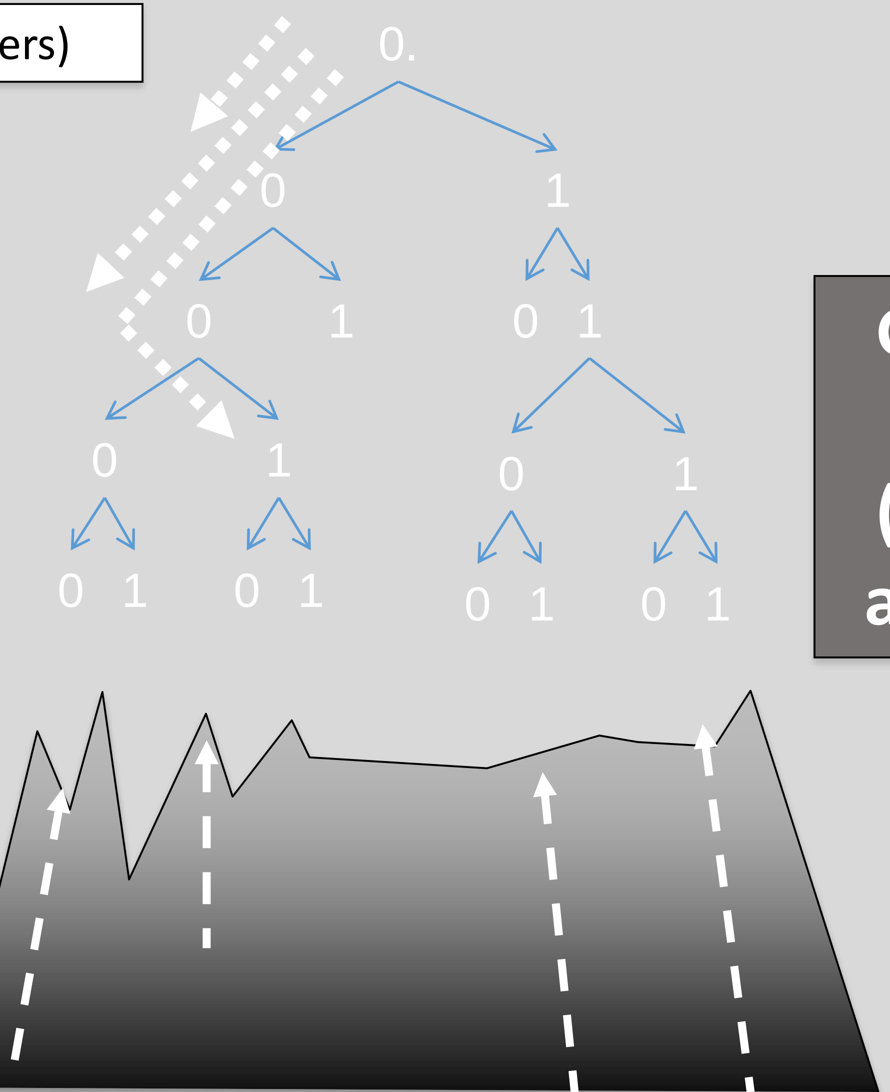
- **In the real world : forcing means it is always possible to find a combination that is different from all other combinations : some extra knowledge is needed.**

Example: the generation of « Cohen » reals by Forcing (see also Hatchuel, Weil 2007, 2013)

M, model of sets, based on ω (integers)

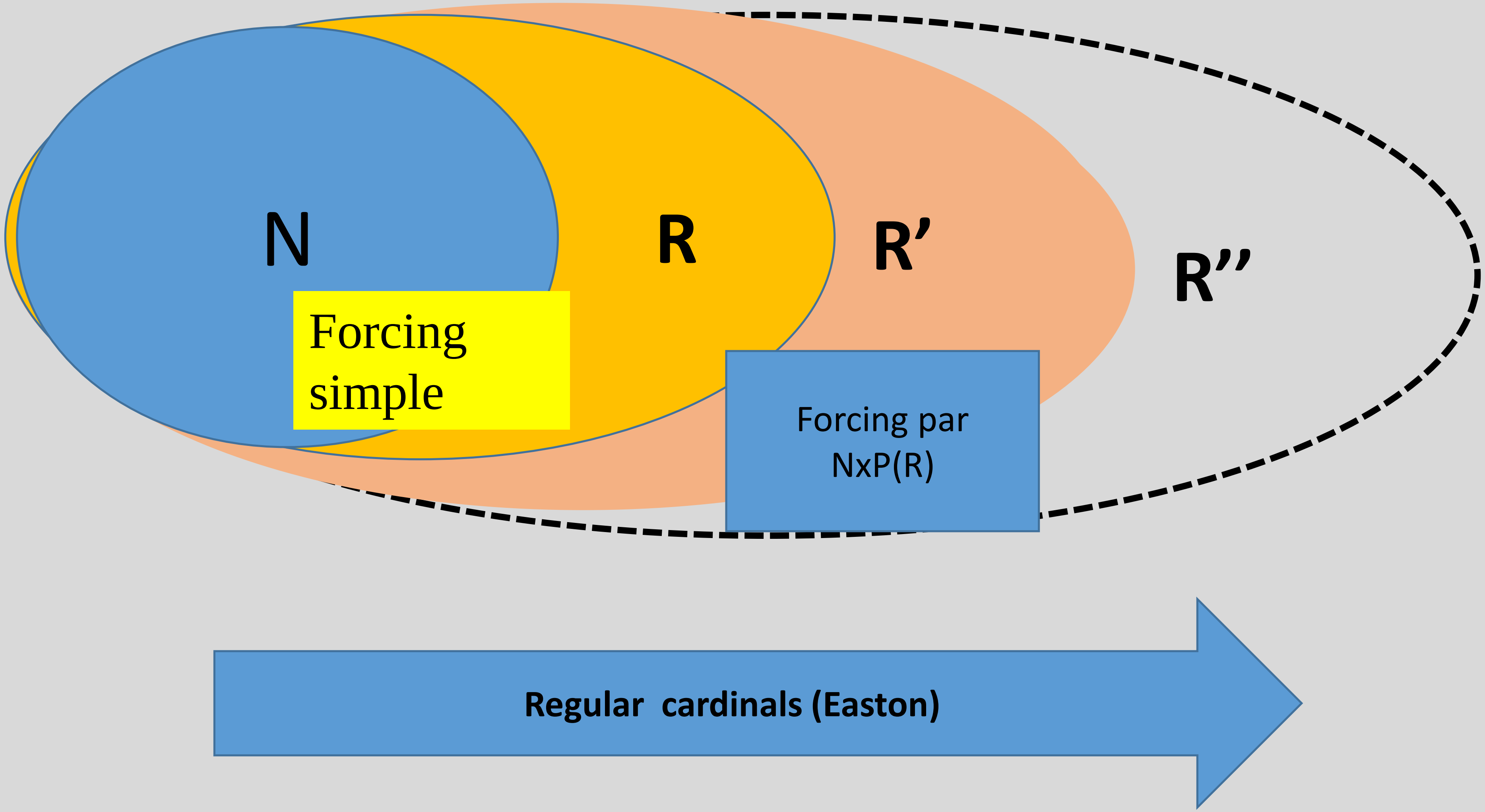
Forcing conditions
(Filter = step by step refinements of sets of integers)

1
2
.
.
k



Generic filter = Cohen real (different from all base-2 reals)

Dense subset = a set of conditions which contain a refinement for every condition
(eg: the set of all conditions longer than k)


N
R
R'
R''
Forcing simple
Forcing par NxP(R)
Regular cardinals (Easton)

La correspondance théorie C-K-Forcing et ses implications

1. Correspondance
2. Splitting condition
3. Independance et indecidabilité
4. Extension à la connaissance

Implication 1: lessons from the correspondence

Forcing mirrors C-K theory

the ground model M = defines a well formed and known collection of objects = the knowledge background

- Design « forces » by a sequence of refinements (filters)
- Generic filters break the definition of objects and controls the properties of the extension
- Generic filters transform an undecidable property into a « forced » one
- Preservation of meaning : likewise forcing warrants the well formation of N, Design has to carefully build the new objects generated

Ontology of design	Forcing	C–K theory
Invariant ontologies	Axioms of Set theory	Basic logic and language; invariant objects (frontier)
Designed ontologies	New models of Sets	New families of objects
Knowledge expansions	Inductive rules (axiom of infinity)	Discovery or guided exploration
"Voids", undecidability and independence	Independent axioms Set theory	Concepts and independent structures in K
Generic expansions (generating new thing)	Generic filter	Design path with expanding partitions and K expansions
K-reordering, naming and preservation of meaning	Building rules for the extension model	New names and reorganizing the definition of designed ontologies

Implication 2 : independance, indecidability, creative reasoning

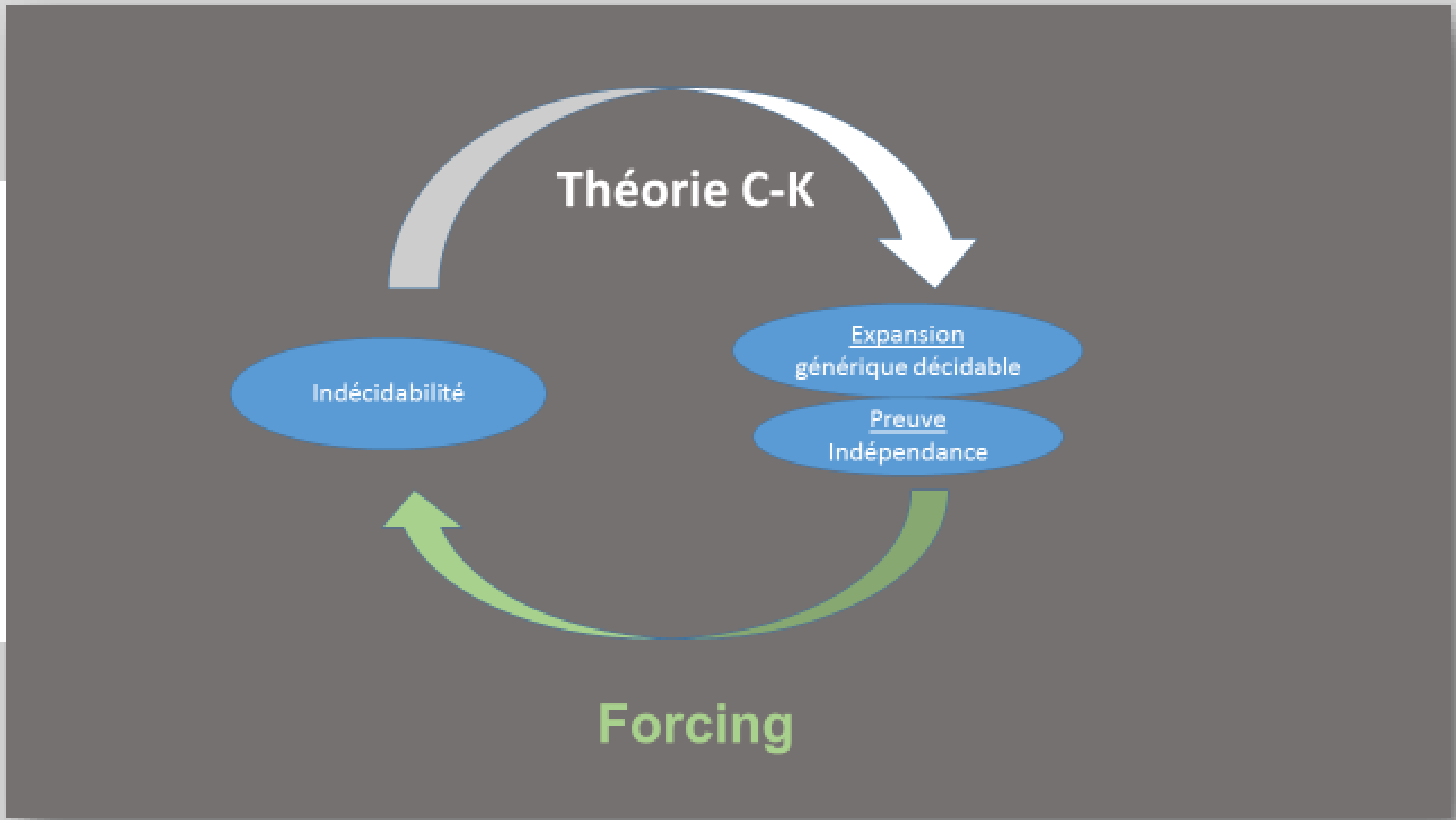
Any creative reasoning is structured as a proof of independance

- a proof of **independance confirms that the initial proposition was u**ndecidable

- but proving **undecidability is not a proof of independance : the latter needs designing things with two alternatives**

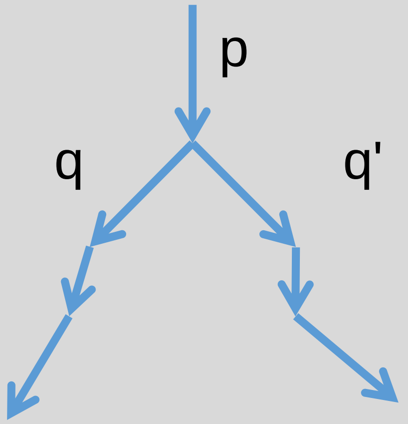
- **K-Independance is both initial (disjunction) and also discovered (new independant knowledge)**

C-K theory and Forcing take reverse paths from undecidability to independance

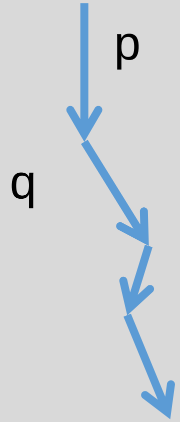


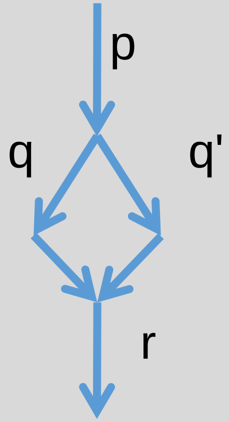
Implication 3 : conditions du raisonnement créatif : splitting condition et “splitting knowledge”

- **Jech 2002** “Under the splitting condition, G is NOT in M, ie G provokes an extension of the model into M(G)”
- **splitting condition:**
  - **for every p, there are q, q’ such that q<p and q’<p and q, q’ incompatible**
  - **There is no constraint r<p that is “unsensitive” to q vs q’ choice**



- **Not SC: there is one p such that:**
  - **Either: there is always one unique q**
    - **if p, then q1, then q2,… = a deterministic chain of conditions**
  - **Or: if there is q, q’, then they are compatible (ie: there is r such that r<q and r<q’)**
    - **= modularization before r**
- **If not SC in p, then there is one unique G with p, and G includes all conditions refining p.**





Deterministic rules

Modularity

Implication 4 : extensions à la construction de la connaissance et à l'apprentissage

- Interprétation de la connaissance comme la conception d'un objet particulier : l'anomalie constatée est réduite mais sous la contrainte d'anomalie désirées (complétude, unification, héritage théorique préservé, etc…

- Et apprendre ? Etre capable de retrouver les anomalies désirées qui ont guidé la conception ! Et identifier les indépendances qui ont été activées et réorganisées ?

Conclusion : Raisonnement-paradigme de la conception

- **Théorie C-K décrit un Forcing au sein d'un monde sans ordre axiomatique et sans axiome de l'infini**
-
- **Théorie C-K offre un modèle général du raisonnement créatif ou encore:**
  - **description des phénomènes génératifs**
  - **rationalité dans l'inconnu (et pas incertain) :** unifie invention et découverte…

- **Epistémologie conceptive (ou générique) : Le développement des connaissances est interprétable comme la conception d'un corpus sous contraintes :** contraintes en hérédité en C ; contraintes en K (mesures, preuves..) : donc **Forcings toujours possibles**. En mathématiques, Forcing a montré que plusieurs fondements étaient possibles